









VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR.

MIT 114 FIGUREN IM TEXT UND 1 LITHOGR. TAFEL.

DRITTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Vorwort.

Als ich im Dezember 1893 der zweiten Auflage dieses 1. Bandes meiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ein Vorwort zur Begleitung gab, äußerte ich mich in einer Weise, die heute Wiederholung finden könnte. Abermals liegt ein Zwischenraum von 13 Jahren zwischen dem Erscheinen der vorigen und der neuen Auflage. Abermals habe ich gesucht, die Ergebnisse zu verwerten, welche neue Bearbeiter des geschichtlichen Bodens, die sich von Jahr zu Jahr mehren, gewonnen haben oder gewonnen zu haben wähnen. Abermals spreche ich die Überzeugung aus, daß jener Boden noch lange nicht erschöpft ist, daß es immer noch offene Fragen gibt, über deren Beantwortung man uneinig sein kann, und daß es die Pflicht des gewissenhaften Geschichtschreibers ist, seine Leser auf die Streitpunkte aufmerksam zu machen. Ich hoffe dieser Pflicht genügt zu haben.

Heidelberg, Dezember 1906.

Moritz Cantor.



Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung . . . . 1—16

I. Babylonier . . . . 17—52
1. Kapitel. Die Babylonier 19

II. Ägypter . . . . 53—114
2. Kapitel. Die Ägypter. Arithmetisches 55
3. Kapitel. Die Ägypter. Geometrisches 90

III. Griechen . . . . 115—518
4. Kapitel. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett 117
5. Kapitel. Thales und die älteste griechische Geometrie . . . 134
6. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik . . . 147
7. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie . . . 170
8. Kapitel. Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule 188
9. Kapitel. Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule. (Fortsetzung) Hippokrates von Chios 201
10. Kapitel. Platon 213
11. Kapitel. Die Akademie. Aristoteles 234
12. Kapitel. Die Elemente des Euklid 258
13. Kapitel. Die übrigen Schriften des Euklid 278
14. Kapitel. Archimedes und seine geometrischen Leistungen . 295
15. Kapitel. Die übrigen Leistungen des Archimedes 310
16. Kapitel. Eratosthenes. Apollonius von Pergä 327
17. Kapitel. Die Epigonen der großen Mathematiker 349
18. Kapitel. Heron von Alexandria 363
19. Kapitel. Heron von Alexandria (Fortsetzung) 386
20. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus . . 406
21. Kapitel. Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon 426
22. Kapitel. Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria . 438
23. Kapitel. Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria . . 456
24. Kapitel. Die griechische Mathematik in ihrer Entartung . . 488

IV. Römer . . . . 519—592
25. Kapitel. Älteste Rechenkunst und Feldmessung 521
26. Kapitel. Die Blütezeit der römischen Geometrie. Die Agrimensoren 538
27. Kapitel. Die spätere mathematische Literatur der Römer . . 561

V. Inder . . . . 593—660
28. Kapitel. Einleitendes. Elementare Rechenkunst 595
29. Kapitel. Höhere Rechenkunst. Algebra 613
30. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie 635

Seite

VI. Chinesen . . . . 661—690

31. Kapitel. Die Mathematik der Chinesen 663

VII. Araber . . . . 691—817

32. Kapitel. Einleitendes. Arabische Übersetzer 693

33. Kapitel. Arabische Zahlzeichen. Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî 707

34. Kapitel. Die Mathematiker unter den Abbasiden. Die Geometer unter den Bujiden 733

35. Kapitel. Zahlentheoretiker, Rechner, geometrische Algebraiker von 950 etwa bis 1100 751

36. Kapitel. Der Niedergang der ostarabischen Mathematik. Ägyptische Mathematiker 777

37. Kapitel. Die Mathematik der Westaraber 792

VIII. Klostergelehrsamkeit des Mittelalters . . . . 819—911

38. Kapitel. Klostergelehrsamkeit bis zum Ausgange des X. Jahrhunderts 821

39. Kapitel. Gerbert 847

40. Kapitel. Abacisten und Algorithmiker 879

Ergänzungen und Verbesserungen . . . . 912—913

Register . . . . 914—941

Einleitung.



Längst war der Erdball so weit erkaltet, daß auf der festgewordenen Oberfläche Organismen sich entwickeln konnten. In Zeiträumen, deren jeder weitaus die Spanne übertrifft, welche wir mit dem stolzen Namen der Geschichte belegen — als ob nur durch den Menschen etwas geschehen könnte! — hatten neue und neue Arten lebender Wesen sich abgelöst. Jetzt erschien der Mensch, ausgezeichnet durch Entwicklungsfähigkeit vor allen anderen Geschöpfen, hilflos wie keines in das Leben tretend, mächtig wie keines auf dem Gipfel seiner Ausbildung.

Der einzelne Mensch liefert nur das verkleinerte Bild des Menschengeschlechtes. Die Entwicklung des Menschengeistes hat in den, Völker genannten, Gesamtheiten stattgefunden, und ihre aufeinanderfolgenden Stufen zu vergleichen ist von spannender Anziehung.

Eines dürfen wir freilich bei Anerkennung der Ähnlichkeit der Entwicklung des Einzelmenschen mit der des Menschengeschlechtes nicht außer Augen lassen. Das Kind lernt vom Tage seiner Geburt an durch Menschen. Das Menschengeschlecht begann damit, von niedrigeren Geschöpfen lernen zu müssen. Werden doch wohl Tiere sein Vorbild gewesen sein, aus deren Beispiel er entnahm, wie man den Durst, den Hunger stille, wie man in Höhlen Schutz suche vor der Unbill der Witterung, wie man zur Wehr sich setze gegen feindlichen Angriff. Aber der Mensch war schwächeren Körpers als seine Lehrmeister. Ihm war nicht eine dichtere Behaarung während der kälteren Jahreszeiten gegeben. Er konnte nicht mit Händen und Zähnen des Bären oder der Hyäne Herr werden, denen er, die ihm den Aufenthalt streitig machten. Und seine Schwäche wurde seine Stärke. Er mußte denken! Er mußte erfinden, wenn er leben wollte. Er mußte von der ihm äußerlich gebotenen Erfahrung weiter schreiten. Das Tier führte ihn zum Baume der Erkenntnis, die Frucht desselben pflückte er selbst.

Mit dem Gedanken war das Bedürfnis der Mitteilung desselben erwacht, die Sprache entstand. Der Mensch lernte den Menschen verstehen, nicht nur in dem Sinne wie das Tier das Tier versteht, nicht nur, wo es den Ausdruck besonders starker Empfindungen durch Tonbildung galt, sondern wo bestimmte Ereignisse oder gar Begriffe

zur Kenntnis des anderen gebracht werden sollten. Freilich begann die Sprachbildung nicht erst, als die Begriffsbildung abgeschlossen war. Ist doch erstere wie letztere bis auf den heutigen Tag noch im Flusse. Die beiden Tätigkeiten gingen offenbar nebeneinander einher, und selbst Begriffe, welche einer und derselben Gedankenreihe entstammen, sind mit ihrer lautlichen Versinnlichung als zu verschiedenen Zeiten entstanden zu denken. Für das Sprachliche an dieser Behauptung ist es nicht schwer den Beweis zu führen, auch nur unter Zuziehung solcher Wörter, die dem Mathematiker von ältester und hervorragendster Wichtigkeit sind; wir meinen die Zahlwörter.

Zählen, insofern damit nur das bewußte Zusammenfassen bestimmter Einzelwesen gemeint ist, bildet, wie scharfsinnig hervorgehoben worden ist[1]), keine menschliche Eigentümlichkeit; auch die Ente zählt ihre Jungen. Diesem niedersten Standpunkte ziemlich nahe bleibt das, was von einem südafrikanischen Stamme berichtet wird[2]), daß während wenige weiter zählen können als zehn, dessenungeachtet ihre Vorstellung von der Größe einer Herde Vieh so bestimmt ist, daß nicht ein Stück daran fehlen darf, ohne daß sie es sogleich merkten. „Wenn Herden von 400 bis 500 Rindern zu Hause getrieben werden, sieht der Besitzer sie hereinkommen und weiß bestimmt ob einige fehlen, wieviel und sogar welche. Wahrscheinlich haben sie eine Art zu zählen, bei welcher sie keine Worte brauchen und wovon sie nicht Rechenschaft zu geben wissen, oder ihr Gedächtnis erlangt für diesen einzelnen Gegenstand durch die Übung eine so ungemeine Stärke.“ Ohne nach so fernen Gegenden unseren Blick zu richten, können wir ähnliche Erfahrungen täglich an ganz kleinen Kindern machen, welche sofort wissen, wenn von Dominosteinen etwa, mit denen sie zu spielen gewohnt sind, ein einzelner fehlt, während sie sich und anderen über die Anzahl ihrer Steine noch nicht Rechenschaft zu geben wissen. Sie kennen eben die Einzel-Individuen als einzelne, nicht als Teile einer Gesamtheit, und ihr Gedächtnis ist

---

[1]) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. S. 7. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als Hankel. Einen ganz ähnlichen Gedanken hat (nach Kaestner, Geschichte der Mathematik I, 242) auch schon Pietro Bongo (oder Bungus) in seinem Werke *Numerorum mysteria* (1599, II. Auflage 1618) ausgesprochen. [2]) Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile, Halle 1847. S. 17. Dieses Buch zitieren wir in der ganzen Einleitung als Pott I, während Pott II die Schrift desselben Verfassers: Pott, Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen, sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode. Halle 1868, bedeuten soll.

für die Erinnerung an Angeschautes um so treuer, je weniger andere Eindrücke es zu bewahren hat. In der Sprache drückt sich diese Individualisierung nicht selten dadurch aus, daß dieselbe Anzahl je nach den gezählten Dingen einen anderen Namen führt, wie es bei manchen ozeanischen Völkerstämmen, aber auch für Sammelwörter im Deutschen vorkommt, wenn man von einem Koppel Hunde oder, wenn deren mehrere sind, von einer Meute Hunde, von einer Herde Schafe, von einem Rudel Hirsche, von einer Flucht Tauben, von einer Kette Feldhühner, von einem Zug Schnepfen, von einem Schwarm Bienen zu reden pflegt[1]).

Das eigentliche Zählen, das menschliche Zählen, wenn man so sagen darf, setzt voraus, daß die Gegenstände als solche gleichgültig geworden sind, daß nur das getrennte Vorhandensein unterschiedener Dinge begrifflich erfaßt, dann sprachlich bezeichnet werden soll. Es liegt darin bereits eine keineswegs unbedeutende Äußerung der Fähigkeit zu verallgemeinern, zugleich auch eine ihrer frühesten Äußerungen, denn die Zahlwörter gehören zu den ältesten Teilen des menschlichen Sprachschatzes. In ihnen lassen sich oft noch Ähnlichkeiten, mithin Beweise alter Stammesgemeinschaft später getrennter Völker auffinden, während kaum andere Wörter auf die gleiche Zeit eines gemeinsamen Ursprunges zurückdeuten. Und was war nun der ursprüngliche Sinn dieser ältesten, der Entstehungszeit wie dem Inhalte nach ersten Zahlwörter? Die Annahme hat gewiß viel für sich, daß sie anfänglich nicht Zahlen, sondern ganz bestimmte Gegenstände bedeuteten, sei es nun, daß man von der eigenen, von der angeredeten, von der besprochenen Persönlichkeit, also von den Wörtern: ich, du, er ausging, um aus ihnen den Urklang für: eins, zwei, drei zu gewinnen[2]), sei es, daß man von Gliedmaßen seines Körpers deren Anzahl entnahm[3]): „Es war dem Menschen ohne Zweifel ein eben so interessantes Bewußtsein fünf Finger als zwei Hände oder zwei Augen zu haben; und das Interesse an dieser Kenntnis, welche einmal einer Entdeckung bedurfte, war ihm die Schöpfung eines zu deren Zählung eigens verwendbaren Ausdruckes wohl wert; von hier aus mag der Gebrauch auf andere zu zählende Dinge übertragen worden sein, zunächst auf solche, bei denen es auffallen mochte, daß sie in ebenso großer Zahl vorhanden waren, als die Hand Finger hat.“ Wir wiederholen es, solche Annahmen haben viel für sich, sie tragen ihre beste Empfehlung in sich selbst, aber leider auch ihre einzige. Die Sprachforschung hat nicht vermocht deren Bestätigung zu liefern,

---

[1]) Pott I, S. 126. [2]) Pott I, S. 119. [3]) L. Geiger, Ursprung und Entwickelung der menschlichen Sprache und Vernunft. 1868. Bd. I, S. 319.

oder vielmehr jeder, der mit der Deutung der Zahlwörter sich befaßte, hat aus ihnen diejenigen Zusammenhänge zu erkennen gewußt, welche seiner Annahme entsprachen, lauter vollgelungene Beweise, wenn man den einen hört, sich gegenseitig vernichtend, wenn man bei mehreren sich Rat holt, und dieser mehreren sind obendrein recht viele. Sind demnach die eigentlichen Fachmänner über Ursprung der ältesten einfachen Zahlwörter im Hader, so müssen wir um so mehr darauf verzichten, auf die noch keineswegs erledigten Fragen hier einzugehen. Einige Sicherheit tritt erst bei Besprechung der abgeleiteten, also jüngeren Zahlwörter hervor.

Es ist leicht begreiflich, daß auch die regste Einbildungskraft, das stärkste Gedächtnis es nicht vermochten, für alle aufeinander folgenden Zahlen immer neue Wörter zu bilden, zu behalten. Man mußte mit Notwendigkeit sehr bald zu gewissen Zusammensetzungen schreiten, welchen die Entstehungsweise einer Zahl aus anderen zugrunde liegt, welche uns aber damit auch schon einen unumstößlichen Beweis für die hochwichtige Tatsache liefern: daß zur Zeit, als die meisten Zahlwörter erfunden wurden, der Mensch von dem einfachsten Zählen bereits zum Rechnen vorgeschritten war.

Das älteste Rechnen dürfte durch ein gewisses Anordnen vermittelt worden sein, sei es der Gegenstände selbst, denen zuliebe man die Rechnung anstellte, sei es anderer leichter zu handhabender Dinge. Kleine Steinchen, kleine Muscheln können die Vertretung übernommen haben, wie sie es noch heute bei manchen Völkerschaften tun, und diese Marken, diese Rechenpfennige würde man heute sagen, werden in kleinere oder größere Häufchen gebracht, in Reihen gelegt das Zusammenzählen ebenso wie das Teilen einer gegebenen Menge wesentlich erleichtert haben. So lange man es nur mit kleinen Zahlen zu tun hatte, trug man sogar das leichteste Versinnlichungsmittel stets bei sich: die Finger der Hände, die Zehen der Füße. Man reichte freilich unmittelbar damit nicht weit, und Völkerschaften des südlichen Afrika zeigen uns gegenwärtig noch, wie genossenschaftliches Zusammenwirken die Schwierigkeit besiegt, mit nur zehn Fingern größere Anzahlen sich zu versinnlichen[1]): „Beim Aufzählen, wenn es über Hundert geht, müssen in der Regel immer drei Mann zusammen diese schwere Arbeit verrichten. Einer zählt dann an den Fingern, welche er einen nach dem andern aufhebt und damit den zu zählenden Gegenstand andeutet oder womöglich berührt, die Einheiten. Der zweite hebt seine Finger auf (immer mit dem kleinen

---

[1]) Schrumpf in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft XVI, 463.

Finger der linken Hand beginnend und fortlaufend bis zum kleinen Finger der Rechten) für die Zehner, so wie sie voll werden. Der dritte figuriert für die Hunderte."

Die hierbei festgehaltene Ordnung der Finger mag man nun erklären wollen, wie es auch sei[1]), sie findet statt und wird uns im Verlaufe der Untersuchungen als Grundlage des sogen. Fingerrechnens noch mehr als einmal begegnen. Sie wird sogar abwechselnd mit der entgegengesetzten Ordnung benutzt, um einem einzelnen zu ermöglichen beliebig viele Gegenstände abzuzählen. Ist nämlich mit dem kleinen Finger der rechten Hand die Zehn erfüllt worden, so beginnt mit eben demselben allein aufgehoben die nächste Zehnzahl, um dieses Mal nach links sich fortzusetzen, d. h. der kleine Finger der linken Hand vollendet die Zwanzig und wird zugleich auch wieder Anfang der nächsten Zehnzahl usf. Natürlich muß bei dieser Zahlenangabe, wenn es nicht um ein allmähliches Entstehen, sondern um ein einmaliges Ausdrücken einer Zahl sich handelt, besonders angedeutet werden, daß und wie oft Zehn vollendet wurde, was etwa so geschehen kann wie bei den Zulukaffern[2]), die in solchem Falle beide Hände mit ausgestreckten Fingern wiederholt zusammenschlagen.

Es ist wohl zu beachten, daß diese letztere Methode der Versinnlichung einer Zahl, einfacher insoweit als sie nur die Hände eines einzigen beschäftigt, begrifflich weit unter jener anderen Methode steht, die unmittelbar vorher gekennzeichnet wurde und drei oder gar noch mehrere Darsteller einer Zahl erfordert. Der einzelne kommt durch die Zehnzahl der menschlichen Finger allerdings dazu, die Gruppe Zehn als eine besonders hervortretende zu erkennen, aber wie oft diese Gruppe selbst auch erzeugt werde, jede Neuerzeugung ist für ihn der anderen ebenbürtig. Ganz anders bei der Methode stufenmäßiger Darstellung durch mehrere Personen. Wie der Erste so hat der Zweite, der Dritte nur je zehn Finger, und so erscheint die Gruppierung von zehn Einern zwar zunächst, aber in gleicher Weise auch die von zehn Zehnern, von zehn Hundertern. Das scheinbar umständlichere Verfahren führt zu dem einfacheren Gedanken, zum Zahlensystem. Wenn von einem Schriftsteller[3]) darauf hingewiesen worden ist, daß die Wiederholung der Zehnzahl bis zu 10 mal 10 sich bei Erfüllung der nächsten 10 ebensowohl zu 11 mal 10 als zu 10 mal 10 und 10, in Worten ebensowohl zu elfzig als zu hundertzehn fortsetzen konnte, und daß es ein besonders glücklicher Griff war, der fast allen Völkern der Erde gelang, soweit

---

[1]) Pott II, S. 46, aber auch S. 31 und 42. [2]) Pott II, S. 47. [3]) Hankel, S. 10—11.

ihre Fassungskraft überhaupt bis zum Bewußtwerden bestimmter höherer Zahlen ausreicht, gerade die Wahl zu treffen, welche dem Zahlensystem seine Grundlage gab, so ist diese feine Bemerkung vielleicht dahin zu ergänzen, daß auf eine der hier erörterten nahestehende Weise jene glückliche Wahl eingeleitet worden sein mag.

Über die Grundzahlen solcher Zahlensysteme werden wir sogleich noch reden. Fürs erste halten wir daran fest, daß Zahlensysteme eine allgemein menschliche Erfindung darstellen, in allen bekannt gewordenen Sprachen zu einer Grundlage der Bildung von bald mehr bald weniger Zahlwörtern benutzt, indem höhere Zahlen durch Vervielfältigung von niedrigeren zusammengesetzt werden und bei Benennung der Zwischenzahlen auch Hinzufügungen noch notwendig erscheinen. Multiplikation und Addition sind also zwei Rechnungsverfahren so alt wie die Bildung der Zahlwörter.

Das Zahlensystem, welches wir in seinem Entstehen uns zu vergegenwärtigen suchten, wurde, sofern es auf der Grundzahl Zehn fußte, zum Dezimalsystem, heute wie unserem Zifferrechnen so auch in unseren Maßen, Gewichten, Münzen fast der ganzen gebildeten Erdbevölkerung unentbehrlich. Wir haben als wahrscheinlich erkannt, daß es nach der Zahl der Finger sich bildete, aber eben vermöge dieses Ursprunges war es nicht das allein mögliche. Wie man sämtliche Finger durchzählen konnte, um eine Einheit höheren Ranges zu gewinnen, so konnte man Halt machen nach den Fingern nur einer Hand, man konnte neben den Fingern der Hände die Zehen der Füße benutzen. In dem einen Falle blieb man beim Quinarsysteme, in dem anderen ging man zum Vigesimalsystem über.

Ein strenges Quinarsystem würde, wie leicht ersichtlich, 5 mal 5 oder 25, 5 mal 5 mal 5 oder 125 usw. als Einheiten höheren Ranges nächst der 5 selbst besitzen müssen, welche durch einfache oder auch zusammengesetzte Namen bezeichnet mit den Namen der Zahlen 1, 2, 3, 4 sich vereinigen, um so alle zwischenliegende Zahlen zu benennen. Ein solches strenges Quinarsystem gibt es nicht[1]). Dagegen gibt es Quinarsysteme in beschränkterem Sinne des Wortes, wenn zur Benutzung dieses Wortes schon der Umstand als genügend erachtet wird, daß die Fünf bei allmählicher Zahlenbildung einen Ruhepunkt gewähre, von dem aus eine weitere Zählung wieder anhebt.

Was dementsprechend von einem strengen Vigesimalsysteme zu verlangen ist, leuchtet gleichfalls ein: ein solches muß die Grundzahl 20 durchhören lassen, muß die Einheit höheren Ranges 20 mal

---

[1]) Pott II, S. 35 und 46 in den Anmerkungen.

20 oder 400, vielleicht auch noch höhere Einheiten unter besonderen Namen besitzen. Sprachen, in welchen dieses System maßgebend ist, hat man mehrfach gefunden. Die Mayas in Yukatan[1]) haben eigene Wörter für 20, 400, 8000, 160000. Die Azteken in Mexiko[2]) hatten wenigstens besondere Wörter für 20, 400, 8000 mit der Urbedeutung: das Gezählte, das Haar, der Beutel, wobei auffallend erscheinen mag, daß das Haar eine verhältnismäßig niedrige Zahlenbedeutung hat, während es in karaibischen Sprachen[3]) weit übereinstimmender mit der Wirklichkeit eine sehr große Zahl auszudrücken bestimmt ist. Noch andere Beispiele eines bemerkbaren mehr oder minder durchgeführten Vigesimalsystems hat vornehmlich Pott, dem wir hier fast durchweg folgen, in Fülle gesammelt. Wir erwähnen davon nur als den meisten unserer Leser zweifellos bekannt die Überreste eines keltischen Vigesimalsystems in der französischen Sprache in Wörtern wie *quatrevingts*, *sixvingts*, *quinzevingts*[4]). Von dänischen Überresten eines Systems, in welchem Vielfache von 20 eine Rolle spielen, ist weiter unten in etwas anderem Zusammenhange die Rede.

Den Ursprung der drei Systeme, deren Grundzahlen 5, 10, 20 heißen, haben wir oben in die Finger und Zehen des Menschen verlegt. Auch dafür sind sprachliche Anklänge vorhanden. Zwischen den Wörtern für 5 und für Hand ist in manchen Sprachen völlige Gleichheit, in anderen nahe Verwandtschaft[5]). Alsdann darf man aber wohl annehmen, daß es früher wünschenswert war die Glieder des eigenen Körpers zu benennen, als Zahlwörter zu bilden, daß also 5 von Hand abgeleitet wurde, nicht umgekehrt. Das Wort für 10 heißt in der Korasprache[6]) (einem amerikanischen Idiome) so viel wie Darreichung der Hände, und daß ein und dasselbe Wort 20 und Mensch bedeutet kommt mehrfach vor[7]). Ob freilich, wie manche wollen, auch das deutsche zehn mit den Zehen, das lateinische *decem* mit *digiti* in Verbindung gebracht werden darf, darüber gehen die Meinungen weit auseinander, und Pott, unser Gewährsmann, steht auf der Seite der Verneinenden. Jedenfalls ist aber schon durch die erwähnten Beispiele ein innerer Zusammenhang der drei genannten Systeme untereinander und mit den menschlichen Extremitäten hinlänglich unterstützt. Gibt es nun Sprachen, in welchen auch andere Grundzahlen als 5, 10 oder 20 sich nachweisen lassen?

---

[1]) Pott I, S. 93. [2]) Pott I, S. 97—98. [3]) Pott II, S. 68. [4]) Pott I, S. 88. [5]) Pott I, S. 27 flgg. und S. 128 flgg. führt Beispiele aus ozeanischen Sprachen, aus dem Sanskrit und dem Hebräischen an, wenn er auch den letzteren gegenüber, die von Benary und Ewald herrühren, sich ziemlich skeptisch verhält. [6]) Pott I, S. 90. [7]) Pott I, S. 92.

Wenn man gesagt hat[1]), daß kein Volk auf der ganzen Erde je von einer anderen Grundzahl, als einer der genannten aus, sein Zahlensystem mit einiger Konsequenz ausgebildet habe, so ist dieser Ausspruch entschieden allzu verneinend, selbst wenn man einen besonderen Nachdruck auf das Wort Konsequenz legt, dem gegenüber die Frage erhoben werden möchte, wo denn folgerichtige Anwendung des Quinarsystems sich finde?

Allerdings hat man einige Gattungen von Zahlensystemen nur mit Unrecht nachweisen zu können geglaubt. Falsch war es, wenn Leibniz bei den Chinesen ein Binarsystem annahm[2]). Falsch scheint Kohl den Osseten im Kaukasus ein Oktodezimalsystem zugeschrieben zu haben[3]). Dagegen sind andere Angaben doch zu wohl beglaubigt, um sie ohne weiteres leugnen oder totschweigen zu dürfen. Die Neuseeländer mit ihrem merkwürdigen Undezimalsysteme[4]), welches besondere Wörter für 11, für 11 mal 11 oder 121, für 11 mal 11 mal 11 oder 1331 besitzt, welches 12 durch 11 mit 1, 13 durch 11 mit 2, 22 durch 2 mal 11, 33 durch 3 mal 11 usw. ausdrückt, lassen sich nicht vornehm beiseite schieben. Ob der Zeitraum von 110 Jahren, nach welchen, wie Horaz im 21. und 22. Verse seines *Carmen saeculare* berichtet, die römische Erinnerungsfeier wiederkehrte, der man den Namen der saecularen beilegte, mit einer Vermengung dezimaler und undezimaler Zählweise zusammenhängt, bleibe dahingestellt. Das Wort *triouech* oder 3 mal 6 für 18 in der Sprache der Niederbretagner ist neben dem *deunaw* oder 2 mal 9 der Welschen[5]) für eben dieselbe Zahl nun einmal vorhanden. Die Bolaner oder Buramaner an der Westküste Afrikas[6]) lassen, wenn sie 6 und 1 für 7, wenn sie 2 mal 6 für 12, wenn sie 4 mal 6 für 24 sagen, die Grundzahl 6 gleichfalls durchhören. Einige assyrische Zahlwörter (7 und 8), auf welche wir im 1. Kapitel zurückkommen werden, zeigen dieselbe Abhängigkeit von 6. Und wenn der Altfriese 120 mit dem Worte *tolftich* benannte[7]), so ist das sogar ein Hinweis darauf, daß auch das vorhin als menschlichem Geiste im allgemeinen fremdverpönte elfzig seine Analogien besitzt, ist es zugleich ein Beispiel für ein eigentümlich gemischtes System mit Dezimal- und Duodezimalstufen wie Skandinaven und Angelsachsen es teilweise besaßen[8]), wie eine verhältnismäßig spätere Wissenschaft es in Babylon einbürgerte, von wo es als Sexagesimalsystem das astronomische Rechnen aller

[1]) Hankel, S. 19. [2]) M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863. S. 48 flgg., auch S. 44. Wir zitieren dieses Buch künftig immer als: Math. Beitr. Kulturl. [3]) Kohl, Reisen in Südrußland. Bd. II, S. 216 und Pott I, S. 81. [4]) Pott I, S. 75 flgg. [5]) Pott II, S. 33. [6]) Pott II, S. 30. [7]) Pott II, S. 38. [8]) Math. Beitr. Kulturl. S. 147.

Völker durch Jahrhunderte beherrscht. Die Vermengung dezimalen und duodezimalen Zählens könnte auch als Stütze der Möglichkeit dienen, welche oben für dezimale und undezimale Zahlen beansprucht wurde.

Das Vorhandensein von Zahlensystemen, deren Grundzahl nicht 5 oder Vielfaches von 5 ist, dürfte damit nachgewiesen sein. Aber allerdings bilden dieselben nur Ausnahmen von seltenem vereinzeltem Vorkommen. Auch eine andere Gattung von Ausnahmen gegen früher Erwähntes müssen wir kurz berühren. Wir haben hervorgehoben, daß die Zwischenzahlen zwischen den Einheiten aufeinanderfolgenden Ranges multiplikativ und additiv gebildet werden: wir haben daraus auf das hohe Alter dieser Rechnungsverfahren geschlossen. Es gibt nun Sprachen, welche die Bildung der Zahlwörter auf Subtraktionen und Divisionen stützen, wodurch das hohe Alter auch dieser Rechnungsverfahren wenigstens bei den Völkern, denen jene Sprachen angehören, gleichfalls zur Möglichkeit gelangt.

Die Subtraktion wird am häufigsten bezüglich der Zahlwörter eins und zwei geübt[1]). Dieses entspricht z. B. in der lateinischen Sprache durchweg dem Gebrauch bei den Zehnern. Man sagt *duodeviginti*, d. h. 2 von 20 für 18, ebenso *undecentum* 1 von 100 für 99 usw. Auch im Griechischen werden 1 und 2 bei den Zehnern zuweilen abgezogen, wozu das Zeitwort δεῖν in seiner transitiven wie in seiner intransitiven Bedeutung als bedürfen und als fehlen angewandt wird. So drückt man 58 aus durch δυοῖν δέοντες ἑξήκοντα = 60 welche 2 bedürfen, 49 durch ἑνὸς δέοντος πεντήκοντα = 50 woran 1 fehlt, und ein vereinzeltes Vorkommen von 9700 = 10000, welche 300 bedürfen τριακοσίων ἀποδέοντα μύρια wird aus den Schriften des Thukydides angeführt[2]). Auch im Gotischen findet subtraktive Bildung von Zahlwörtern statt. In der gemeinsamen Stammsprache, im Sanskrit, ist gleichfalls eine Subtraktion mittels des Wortes *una* (vermindert, weniger) im Gebrauch. Sei es nun, daß das *una* selbst allein einem Zahlwort vorgesetzt wird, und man im Gedanken *eka* eins hinzuhören muß, z. B. *unavingsati*, vermindertes 20 statt 19, oder daß das *eka* wirklich ausgesprochen wird und sich dabei mit *una* zu *ekona* zusammensetzt, z. B. *ekonaschaschta*, um 1 vermindertes 60 statt 59, oder daß andere Zahlen als 1 abgezogen werden, z. B. *pantschonangsatam*, um 5 vermindertes 100 statt 95. Ob die babylonische Benutzung von *lal* = weniger hierher gehört[3]) oder als eigentliche Subtraktion aufzufassen ist, sei dahingestellt.

---

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 157. [2]) Pott I, S. 181, Anmerkung. [3]) Reisner in Berl. Akad. Ber. 1896, S. 425—426 mit Berufung auf Tontafeln von Ur.

Am seltensten dient die Division zur sprachlichen Bildung der Zahlwörter. Hier kommen neben den sofort verständlichen Teilungen: ein viertel Hundert, ein halbes Tausend usw., namentlich solche Wörter in Betracht, welche eine nicht voll vorhandene Einheit zur Teilung bringen. Anderthalb, dritthalb, sechsthalb besagen, daß das Andere, d. h. Zweite, daß das Dritte, daß das Sechste halb zu nehmen sei, die Existenz des Ersten, der 2, der 5 Vorhergehenden als selbstverstanden vorausgesetzt. Verwandte Bildungen sind in lateinischer und in griechischer Sprache *sesquialter* = ἐπιδεύτερος = $1\frac{1}{2}$, *sesquitertius* = ἐπίτριτος = $1\frac{1}{3}$, *sesquioctavus* = ἐπόγδοος = $1\frac{1}{8}$ usw. Besonderer Hervorhebung scheint es wert, daß die dänische Sprache in Europa und im fernen Süden und Osten die Sprache der Dajacken und Malaien auf den nächsten Zwanziger beziehungsweise Zehner übergreift, um ihn hälftig vorweg zu nehmen [1]). Ein altes Vigesimalsystem in deutlichen Spuren verratend (S. 9) sagt die dänische Sprache nicht bloß *tresindstyve* oder 3 mal 20 für 60, *firesindstyve* oder 4 mal 20 für 80, sondern auch *halvtredsindstyve, halvfirdsindstyve* für 50 und 70, d. h. der dritte, der vierte Zwanziger, welcher bei 60, bei 80 voll vorhanden ist, kommt hier nur zur Hälfte in Rechnung. Ja man hat sogar *halvfemsindstyve* oder fünfthalb Zwanziger für 90, während 100 nur durch *hundrede* und nie durch *femsindstyve* ausgedrückt wird. Bei den Malaien heißt halb dreißig, halb sechzig es solle von dem letzten, also hier von dem dritten, sechsten Zehner nur die Hälfte genommen werden, man meine also 25, 55. Im Alttürkischen wird das Vorgreifen auf den nächsten Zehner noch weiter ausgedehnt [2]). „Vier dreißig“ bedeutet „vier von dem dritten Zehner“ also 24. Endlich im Äthiopischen findet sich ein merkwürdiger Ausnahmefall [3]). Die Äthiopen besitzen besondere Zeichen für die Einer, die Zehner, die Hunderter, mittels deren sie die Zwischenzahlen zusammensetzen. Sie schreiben also z. B. 59 durch die Zeichen „fünfzig neun“. Einzig und allein 99 wird anders geschrieben, nämlich nicht „neunzig neun“, sondern „neunzig hundert“, d. h. also etwa „ein Neunziger nahe bei Hundert“. Der Grund dieser Ausnahme ist unermittelt.

Alle diese Teilungen in sich schließende Ausdrücke sind gewiß merkwürdig, eine genaue Einsicht in das Alter der Division verglichen mit dem Alter der Sprachbildung geben sie uns deshalb doch nicht. Es sind eben Wörter mit Zahlenbedeutung, aber es sind nicht die Zahlwörter! Neben ihnen und statt ihrer sind auch andere mög-

[1]) Pott I, S. 103 und II, S. 88. [2]) J. Marquart, Die Chronologie der alttürkischen Inschriften. Leipzig 1898. [3]) C. Bezold, Kebra Nagast. München 1905. S. XV, Note 3.

licherweise viel ältere Ausdrücke in Gebrauch und lassen die Entstehungszeit der jüngeren Benennung im dichtesten Dunkel. Nicht anders verhält es sich mit den vorerwähnten subtraktiven Bildungen, zu welchen als weiteres Beispiel bestimmter Grenzpunkte, auf welche Vorhergehendes ebenso wie Folgendes bezogen wird, die Kalenderbezeichnung der Römer mit ihren Calenden, Nonen und Iden treten mag. Entscheidend dagegen sind die subtraktiven Zahlwörter einiger Sprachen, z. B. der Krähenindianer in Nordamerika [1]). Bei ihnen heißen 8 und 9 nie anders als *nópape, amátape,* d. h. wörtlich 2 davon, 1 davon, und das Wort Zehn, d. h. die Anzahl, von welcher 2, beziehungsweise 1 weggenommen werden sollen, ist als selbstverständlich weggelassen. Hier kann ein Zweifel kaum walten: die Namen der 8 und 9 sind erst entstanden, nachdem der Begriff der 10 sich gebildet hatte, nachdem das Rechnungsverfahren der Subtraktion erfunden war. Mit dieser Bemerkung kehren wir zu unserer früheren Behauptung zurück (S. 4), zu deren Begründung wir die ganze Erörterung über Zahlwörter und über die ersten Anfänge des Rechnens gleich hier anknüpfen durften. Die Sprache hielt in ihrer Entstehung nicht immer gleichen Schritt mit der Entstehung der Begriffe. Das aufeinanderfolgende Zählen wurde unterbrochen durch das Bewußtsein notwendiger Zahlenverknüpfungen, Sprünge in der Erfindung der Zahlwörter sind nahezu sicher.

Und wieder machte der menschliche Erfindungsgeist einen Schritt vorwärts, einen Schritt, zu welchem er auch nicht die geringste Anregung von außen erhielt, der ganz aus eigenem Antriebe erfolgend mindestens ebenso sehr wie die künstliche Entfachung des Feuers als wesentlich menschlich, als keinem anderen Geschöpfe möglich anerkannt werden muß: er erfand die S c h r i f t. Bilderschrift, so nimmt man gegenwärtig wohl ziemlich allgemein an, war die erste, welche dem Spiegel der Rede (wie bei einem Negervolke das Geschriebene heißt) [2]) den Ursprung gab. Aber mit Bildern allein kam man nicht aus. Neben wirklichen Gegenständen mußten Tätigkeiten, Eigenschaften, Empfindungen dem künftigen Wissen aufbewahrt werden. Die Notwendigkeit symbolischer oder willkürlich eingeführter Zeichen für diese nicht gegenständlichen Begriffe zwang zur Abhilfe. So müssen Begriffszeichen entstanden sein, gemeinsam mit den früheren Bildern eine Wortschrift herstellend. Jetzt erst — aber wer weiß in wie langer Zeit? — konnte man dahin gelangen in dem Gesprochenen nicht nur den ganzen Klang, sondern die einzelnen Laute, aus welchen er sich zusammensetzt, zu verstehen, und diese Einzel-

---

[1]) Pott II, S. 65. [2]) Pott I, S. 18.

laute dem Auge zu versinnlichen. Die Silben- und Buchstabenschrift entstand. Für die Zahlen behielt man allgemein das Verfahren bei, welches in anderer Beziehung sich überlebt hatte. Inmitten der Silben-, der Buchstabenschrift treten Zahlzeichen, d. h. Wortzeichen auf, und wer ein Freund philosophischen Grübelns ist, mag darüber sinnen, warum gerade hier eine Ausnahme sich aufdrängte. Warum hat gerade das mathematische Denken von jeher durch Wortzeichen, sei es durch Zahlzeichen, sei es durch andere sogenannte mathematische Zeichen, Unterstützung, Erleichterung und Förderung gefunden? Wir stellen die Frage, wir wagen nicht sie zu beantworten. Aber die Tatsache, an welche wir die Frage knüpften, steht fest, ebenso wie es feststeht, daß ein Zahlenschreiben in älteste Kulturzeiten hinaufreicht, wo dessen Zeichen inmitten geschichtlicher Inschriften vorkommen.

Die Verschiedenheit der Zahlzeichen ist eine gewaltige. Wir werden in mannigfachen Kapiteln dieses Bandes von solchen zu reden haben und wünschen nicht vorzugreifen. Aber ein Prinzip der Zahlenschreibung hat sich fast überall Bahn gebrochen, dessen Entdeckung dem Scharfsinne Hankels[1]) um so größere Ehre macht, als es trotz seiner großen Einfachheit stets übersehen worden war. Es ist das Gesetz der Größenfolge, wie wir, um eine kürzere Redeweise zu besitzen, es künftig nennen wollen, und besteht darin, daß bei allen additiv vereinigten Zahlen das Mehr stets dem Weniger vorausgeht[2]). Natürlich ist die Richtung der Schrift bei Prüfung dieses Gesetzes wohl zu beachten, und wenn bei der von links nach rechts gehenden Schrift des Abendlandes der Hauptteil der Zahl links auftreten muß, so ist die Stellung bei Zahlendarstellungen semitischen Ursprunges entgegengesetzt, und wieder eine andere, wenn, wie bei den Chinesen, die Schrift in von oben nach unten gerichteten Reihen verläuft.

Die mathematischen Begriffe, bei denen wir in unserer flüchtigen Betrachtung der Anfänge menschlicher Kulturentwicklung, Anfänge, welche selbst Jahrtausende in Anspruch genommen haben mögen, zu verweilen Gelegenheit nahmen, gehören sämtlich dem einen Zweige der Größenlehre an, welcher über das Wieviel? der nebeneinander auftretenden Dinge das Was? derselben vernachlässigt. Es ist aber wohl keinem Zweifel unterworfen, daß neben Kenntnis und einfachster Verbindung der Zahlen einfache astronomische wie geometrische Begriffe wach geworden sein müssen.

---

[1]) Hankel, S. 32. [2]) Über Abweichungen von diesem Gesetze vergl. Kapitel 4.

Wir werden der Geschichte der Astronomie grundsätzlich fern bleiben, um nicht den schon so für uns fast unbezwingbar sich gestaltenden Gegenstand unserer Darstellung ohne Not zu vergrößern, aber zwei Bemerkungen können wir hier nicht unterdrücken. Aufgang und Untergang der Sonne waren gewiß schon in den Zeiten nomadischen Wanderns die beiden Marksteine, die Zeit und Raum in Grenzen schlossen. Morgen und Abend, Ost und West waren Begriffepaare, deren Entstehung wohl nicht früh genug angenommen werden können. Und als beim Ansässigwerden der Völker die Sonne zwar immer noch ihre Uhr, aber nicht ihren täglichen Wegweiser bildete, nach deren Stande sie sich zu richten pflegten, war das Orientierungsgefühl doch noch geblieben, hatte womöglich an Genauigkeit noch zugenommen. Am Südende des Pfäffiker-Sees in der Schweiz sind Pfahlbauten beobachtet worden, welche genau nach den Himmelsgegenden gerichtet sind [1]), und jene Bauten reichen jenseits der sogenannten Bronzezeit in eine Periode hinauf, welche nach geologischer Schätzung etwa 4000 Jahre vor Christi Geburt lag. Wir stellen in keiner Weise in Abrede, daß man bei der Orientierung der Wohnhäuser an praktische Rücksichten, an Besonnung, Wind und Wetter dachte, aber man dachte doch, man übte nicht Zufälliges und Unbeabsichtigtes. Von ähnlichen Orientierungen werden wir verschiedentlich zu reden haben. Die Richtung nach den Himmelsgegenden selbst wird uns niemals als Beweis der Übertragung von Begriffen von einem Volke zum andern gelten dürfen. Nur die Ermittlungsweise dieser Richtung wird zum genannten Zweck tauglich erscheinen.

Auch geometrische Begriffe, sagten wir, müssen frühzeitig entstanden sein. Körper und Figuren mit geradliniger, mit krummliniger Begrenzung müssen dem Auge des Menschen aufgefallen sein, sobald er anfing nicht bloß zu sehen, sondern um sich zu schauen. Die Zahl der Ecken, in welchen jene Flächen, jene Linien aneinanderstoßen, wird ihm der Bemerkung wert gewesen sein, wird ihn herausgefordert haben jenen Gebilden Namen zu geben. Vielleicht ist auch in ältesten Zeiten und in gegenseitiger Unabhängigkeit an vielen Orten zugleich beachtet worden, daß der Arm beim Biegen am Ellenbogen, das Bein beim Biegen am Knie, daß die beiden Beine beim Ausschreiten einen Winkel bilden, und der Name jeder von zwei einen Winkel bildenden Linien als σκέλος bei den Griechen, *crus* bei den Römern, Schenkel bei den Deutschen, *leg* bei den Engländern, *jambe* bei den Franzosen, *bâhu*, d. h. Arm bei den Indern, *kou*, d. h.

[1]) Diese Beobachtung rührt von Professor Quincke her, der uns freundlichst gestattete, von dieser seiner mündlichen Mitteilung Gebrauch zu machen.

Hüfte bei den Chinesen, der Zusammenhang *γῶνος* Winkel mit *γόνυ* Knie, dieses und ähnliches braucht nicht in allen Fällen Übertragung zu sein. Die genannten modernen Namen werden allerdings kaum anders als durch Übersetzung aus dem Lateinischen, wenn nicht aus dem Griechischen entstanden sein, aber die antiken Wörter können sehr wohl uraltes Ergebnis mehrfacher Selbstbeobachtung sein, uraltes Wissen.

Ist nun uraltes Wissen auch uralte Wissenschaft? Muß eine Geschichte der Mathematik so weit zurückgreifen, als sie noch hoffen darf mathematischen Begriffen zu begegnen?

Wir haben unsere Auffassung, unsere Beantwortung dieser Fragen darzulegen geglaubt, indem wir diese Einleitung vorausschickten. Kein Erzähler hat das Recht das Brechen, das Zusammentragen der ersten Bausteine, aus welchen Jahrhunderte dann ein stolzes Gebäude aufgerichtet haben, ganz unbeachtet zu lassen; aber die Bausteine sind noch nicht das Gebäude. Die Wissenschaft beginnt erzählbar erst dann zu werden, wenn sie Wissenschaftslehre geworden ist. Erst von diesem Zeitpunkte an kann man hoffen wirkliche Überreste von Regeln und Vorschriften zu finden, welche es erlauben mit einiger Sicherheit und nicht in allem und jedem dem eigenen Gedankenfluge vertrauend Bericht zu erstatten. Mögen Schriftsteller früherer Jahrhunderte ihre eigentlichen historisch-mathematischen Untersuchungen mit der Schöpfung begonnen haben den Worten der Schrift folgend: Aber du hast alles geordnet mit Maß, Zahl und Gewicht[1]). Uns beginnt eine wirkliche Geschichte der Mathematik mit dem ersten Schriftdenkmal, welches auf Rechnung und Figurenvergleichung Bezug hat.

---

[1]) Weisheit Salomos XI, 22.

I. Babylonier.



1. Kapitel.

Die Babylonier.

Es wird die älteste menschliche Erfahrung sein, welche sich zurzeit an das vorderasiatische Zweistromland knüpft, in welchem bestimmte Königsnamen bis auf eine Zeit zurückweisen, die fünfthalbtausend Jahre vor dem Beginne der christlichen Zeitrechnung liegt[1]). Wenn wir auch von der politischen Geschichte der, wie wir gleich sehen werden, sich dort ablösenden Reiche nicht genauer berichten dürfen, so ist uns die Geschichte ihrer Kulturentwicklung um so wichtiger, insoweit sie Mathematisches betrifft, und diese wieder nötigt uns weniges von den mindestens zwei Volksstämmen vorauszuschicken, die dort in engste Verbindung traten und zu einem Mischvolke sich vereinigten, dessen Bildung nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse dafür gestattet, welchem der Urstämme wir diesen oder jenen Bestandteil des später gemeinsamen Wissens gutschreiben sollen.

Neuere Völkerkunde hat die Gegend der Hochebene Pamir[2]), etwa unter dem 38. Grade nördlicher Breite und dem 90. Grade östlicher Länge gelegen, als das in Wirklichkeit freilich nichts weniger als paradiesische Paradies der orientalischen Sagen erkannt. Vier Gewässer fließen von ihr nach den vier Himmelsrichtungen ab, der Indus, der Helmund, der Oxus, der Yaxartes. Von dort zunächst, mutmaßlich noch weiter von Nordosten, von den Abhängen des erzreichen Altaigebirges, drangen Skythenvölker turanischen Stammes, ihrem Hauptbestandteile nach Sumerier[3]), herab, eine bereits ziemlich entwickelte mathematische Bildung mit sich bringend, wie wir nachher sehen wollen. Sie setzten sich fest auf dem Hochlande von Iran, besonders in dem nördlichsten Teile, der später Medien genannt

---

[1]) G. Maspero, Geschichte der morgenländischen Völker im Alterthum nach der 2. Auflage des Originals und unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von Dr. Rich. Pietschmann. Leipzig 1877. C. Bezold, Niniveh und Babylon. Bielefeld und Leipzig 1903. [2]) Maspero-Pietschmann S. 128. [3]) Diesen Namen erkannt zu haben gehört zu den zahlreichen Verdiensten von J. Oppert. Über die Wanderung der Sumerier vergl. Maspero-Pietschmann S. 131.

wurde. Die Sumerier drangen dann weiter südlich bis nach Chaldäa vor. Und ein zweites Volk kam ebendahin [1]). Es war, wie man früher annahm, aus dem Lande Kusch aufgebrochen, welches man gleichfalls im Osten aber weiter südlich, etwa in Baktrien, suchte. Von seiner Heimat führte es den Namen der Kuschiten und hatte, wie man glaubte, den eigenen Namen bei seiner Wanderung auf das Gebirge des Hindukusch übertragen, welches das Hochland von Iran, wo wir die Turanier Niederlassungen gründend fanden, von den Ebenen der Bucharei trennt. Heute ist man bezüglich der Wanderrichtung der Kuschiten der entgegengesetzten Meinung. Man nimmt an, sie seien von Westen gekommen und hätten ihre Heimat in Afrika, genauer gesprochen in Ägypten, gehabt. Die Sumerier sprachen eine jener sogenannten agglutinativen Sprachen, in welchen alle möglichen Beziehungen vermittels neuer Bestandteile bezeichnet werden, die sich mit den Wurzeln nie verschmelzen, also nie das hervorbringen, was man Beugung zu nennen pflegt. Die Sprache der Kuschiten dagegen war dem Hebräischen und Arabischen sehr nahe verwandt, sie war eine semitische Sprache, und die meisten nehmen auch geradezu an, Semiten und Kuschiten seien nur zwei zu verschiedenen Zeiträumen zur Gesittung gelangte Teile ein und derselben Rasse.

Die erste Begegnung von Sumeriern und Kuschiten auf chaldäischem Boden gehört in die vorgeschichtliche Zeit, ein Wort, dessen Geltungsgebiet gegen früher weit zurückverlegt ist, seitdem die Entzifferungskunde alter Denkmäler gestattet hat, selbst als mythisch geltende Zustände und Ereignisse näher zu beleuchten. Aber so weit man auch die Ziele der Geschichtswissenschaften stecken mag, sie reichen nicht weiter als schriftliche Aufzeichnung, und solche sind uns in Chaldäa nur aus der Zeit der erfolgten Vereinigung jener Volkselemente erhalten, geben über die Vereinigung selbst keinen Aufschluß. Dagegen wissen wir aus einheimischen und fremden schriftlichen Denkmälern mancherlei über die Schicksale des Mischvolkes. Sein staatlicher Verband blieb keineswegs unverändert, Hauptstädte und Fürstengeschlechter wechselten. Auf Ninive folgte Babylon, auf dieses wieder Ninive als Herrschersitz. Das altassyrische, das babylonische, das zweite assyrische Reich lösten einander in geschichtlicher Bedeutung ab, in bald siegreichen, bald ungünstig verlaufenden Kämpfen untereinander und mit den Nachbarvölkern, den Hebräern, den Phönikern, den Ägyptern, bis endlich das Perserreich alles verschlang.

Wir haben einheimische Schriftdenkmäler erwähnt. Deren Schrift

---

[1]) **Maspero-Pietschmann** S. 141 flgg. **Bezold** S. 22—23.

war, wie man annimmt, ursprünglich eine Bilderschrift, welche aber vermöge der gewählten Unterlage eine eigentümliche Umbildung erfuhr. Man ritzte die Schriftzüge mittels eines Griffels in eine gleichviel wie zur nachträglichen Erhärtung gebrachte Tonmasse ein, und dadurch entstanden in Winkeln aneinander stoßende Eindrücke, welche man bei der Wiederauffindung nicht unglücklich als keilförmig bezeichnet hat; es entstand die Keilschrift. Die meisten Fachgelehrten glauben, die Keilschrift sei bereits den Sumeriern eigentümlich gewesen, doch mag sie entstanden sein, wo sie wolle, darüber ist kein Zweifel, daß sie in Chaldäa einer semitischen Sprache dienstbar wurde, die somit wundersam genug von links nach rechts, statt wie in allen anderen Fällen von rechts nach links zu lesen ist, eine Erscheinung, auf welche wir gleich jetzt bei Erörterung der Zahlzeichen der Keilschrift hinweisen müssen[1]). Das Prinzip der Größenfolge wird nämlich ihr entsprechend, wo es zur Geltung kommt, veranlassen, daß wir die Zahlzeichen, welche den höheren Wert besitzen, stets links von denen zu suchen haben, welche mit niedrigerem Werte behaftet durch Addition mit jenen verbunden sind.

Unter den vielfältigen Vereinigungen, welche aus keilförmigen Eindrücken sich bilden lassen, sind es vornehmlich drei, welche beim Anschreiben ganzer Zahlen benutzt wurden, der Vertikalkeil 𒁹, der Horizontalkeil 𒀸, der aus zwei mit dem breiten Ende verschmolzenen, die Spitzen nach rechts oben und unten neigenden Keilen zusammengesetzte Winkelhaken 𒌋. Der Vertikalkeil stellt die Einheit, der Winkelhaken die Zehnzahl dar, und diese Elemente addierten sich durch Nebeneinanderstellung. Teils aus Gründen der Raumersparung, teils aus solchen der besseren Übersehbarkeit wurden oft mehrere Keile oder Winkelhaken übereinander in zwei bis drei Reihen abgebildet, stets höchstens drei Zeichen in einer Reihe. Blieb bei dieser Art der Zerlegung ein einzelnes Element übrig, so wurde dasselbe meistens in breiterer Form unter den übrigen beigefügt. Vielleicht kam auch die Beifügung eines solchen einzelnen Zeichens rechts von den übrigen vor, wie es durch das Gesetz der Größenfolge gestattet war, während ein additives Einzelelement links neben anderen in Reihen verbundenen gleichartigen Elementen jenem Gesetze wider-

[1]) Wir haben diesen Gegenstand ausführlich und mit Verweisung auf Quellenschriften schon früher behandelt: Math. Beitr. Kulturl. S. 28 flgg. Unsere gegenwärtige teilweise wörtlich übereinstimmende Darstellung dürfte dem heutigen etwas veränderten Standpunkte des Wissens über diese Dinge entsprechen. Mit den assyrischen Zahlwörtern beschäftigt sich George Bertin, The Assyrian Numerals, abgedruckt in den Transactions of the Society of Biblical Archaeology Vol. VII, pag. 370—389.

sprochen haben würde. Mit diesen Bemerkungen erledigt sich die schriftliche Wiedergabe sämtlicher ganzer Zahlen unter 100, aber von dieser Zahl an, deren Zeichen ein Vertikalkeil mit rechts folgendem Horizontalkeile 𒁹𒀸 ist, tritt eine wesentliche Veränderung ein. Zwar die Richtung der Zeichen im großen und ganzen, also der Hunderter, Zehner, Einer, bleibt wie vorher von links nach rechts abnehmend, aber neben der Juxtaposition der Zahlteile verschiedener Ordnung erscheint plötzlich ein vervielfachendes Verfahren, indem links vor das Zeichen von 100 die kleinere Zahl gesetzt wird, welche andeutet, wie viele Hundert gemeint sind. Die Vermutung wird dadurch sehr nahe gelegt, es sei infolge dieses multiplikativen Gedankens, daß 1000 durch Vereinigung des Winkelhakens, des Vertikal- und Horizontalkeils 𒌋𒁹𒀸 als 10 mal 100 dargestellt werde. Aber dieses 1000 wird dann selbst wieder als neue Einheit benutzt, welche kleinere multiplizierende Koeffizienten links vor sich nimmt. Gemäß der Deutung unserer Assyriologen kam sogar „ein mal tausend“ vor, d. h. multiplikatives Vorsetzen eines einzelnen Vertikalkeils links von dem Zeichen für 1000, und jedenfalls erscheint 10 mal 1000 als die gesicherte Bedeutung von 𒌋𒌋𒁹𒀸, welches man nicht etwa 20 mal 100, d. i. 2000 lesen darf. Vielfache von 10000 werden als Tausender bezeichnet, mithin 30000 als 30 mal 1000, 100000 als 100 mal 1000, indem 30, beziehungsweise 100 links von 1000 geschrieben sind. Eine höchst bedeutsame Tatsache tritt dabei zutage, diejenige nämlich, daß die Babylonier das Bewußtsein der Einheiten verschiedener dekadischer Ordnungen in viel höherem Maße hatten, als ihre Bezeichnungsweise der Zehntausender vermuten läßt. Wer besondere Zeichen für 10000, für 100000 zur Verfügung hat, wird natürlich 127000 in $100000 + 2 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000$ zerlegen, von den Babyloniern dagegen, denen solche besondere Zeichen fehlten, wäre mit höherer Wahrscheinlichkeit ein Anschreiben in der Form $127 \cdot 1000$ zu erwarten. Nichtsdestoweniger bedienten sie sich jener für sie viel umständlicheren, aber mathematisch durchsichtigeren Schreibweise. Wenigstens ist 36000 in der Form $30 \cdot 1000 + 6 \cdot 1000$ wahrscheinlich gemacht und 120000 in der Form $100 \cdot 1000 + 20 \cdot 1000$ sichergestellt. Bis zur Million scheint die Zahlenschreibung der Keilschrift sich nicht erstreckt zu haben; zum mindesten sind keine Beispiele davon bekannt [1]).

Von Brüchen ist eine Bezeichnung der verschiedenen Sechstel,

---

[1]) Ménant, *Exposé des éléments de la grammaire assyrienne.* Paris 1868, pag. 81: *Les inscriptions ne nous ont pas donné, jusqu'ici du moins, de nombre supérieur aux centaines de mille; le signe qui représente un million nous est encore inconnu.*

also $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ nachgewiesen worden, deren Entstehung nicht ersichtlich ist[1]). Von den wichtigen Sexagesimalbrüchen müssen wir nachher in anderem Zusammenhange reden.

Wir haben soeben gesagt, die Million sei bisher noch nicht aufgefunden worden. Müssen wir bei diesem Ausspruche das Wort „bisher" besonders betonen oder dürfen wir in der Tat eine solche Beschränkung des Zahlbegriffes annehmen? Für die große Menge der Bevölkerung scheint uns die letztere Annahme nicht bloß keine Schwierigkeit zu haben, sondern allgemein verbreitete Notwendigkeit zu sein. Bis auf den heutigen Tag, wo doch mit den Wörtern Million und sogar Milliarde nicht gerade haushälterisch umgegangen wird, ist der Begriff, wie viele Einheiten zu einer Million gehören, keineswegs vielen Menschen geläufig. Mancherlei Verdeutlichungen müssen diesen Begriff erst klarstellen. So hat z. B. am 13. Juni 1864 die Direktion des Londoner Kristallpalastes den 10jährigen Bestand jenes Gebäudes feierlich begangen. Damals wurde bekannt gemacht, daß in jenem ersten Jahrzehnt der Palast von 15266882 Menschen besucht worden war, und um eine Veranschaulichung der Massenhaftigkeit der Zahl zu gewähren, ließ man auf weißes Baumwollzeug eine Million schwarzer Punkte drucken. Jeder Punkt war $\frac{3}{16}$ Zoll breit und nur $\frac{1}{8}$ Zoll von dem nächsten Punkte entfernt und doch bedeckten jene Punkte einen Flächenraum von 225 Fuß Länge auf 3 Fuß Breite, den Fuß zu 12 Zoll gerechnet. Daß in den jedenfalls weit geringfügigeren Verkehrsverhältnissen einer um Jahrtausende zurückliegenden Zeit die Höhe der Zahlen noch viel früher zu einer Vergleichungslosigkeit verschwimmen mußte, welche wir eine dunkle Ahnung des mathematischen Unendlichgroßen nennen würden, wenn wir nicht befürchteten dadurch die Meinung zu erwecken, als solle dadurch diesem Unendlichgroßen selbst ein solches Uralter verschafft werden, ist nur selbstverständlich.

Vielfache Stellen biblischer Schriften, die nach dem Exile unter der Einwirkung babylonischer Kultur entstanden zu sein scheinen, geben der Vermutung Raum, daß nur die beiden großen Zahlen 1000 und 10000, sowie deren Vervielfältigung zur Schätzung allergrößter Vielheiten benutzt wurden. Saul hat Tausend geschlagen, David aber Zehntausend[2]), heißt es in bewußter Steigerung. Tausend mal tausend dieneten ihm, und Zehntausend mal zehntausend standen vor ihm[3]), heißt es an anderer Stelle, und noch auffallender bei dem

[1]) Oppert, *Étalon des mesures assyriennes.* Paris 1875, p. 35. [2]) I. Samuel 18, 7. [3]) Daniel 7, 10.

Psalmisten: Der Wagen Gottes ist Zehntausend mal tausend [1]). Auch steht nicht im Widerspruche, wenn der sterbende König David seine Schätze aufzählend erklärt: Siehe ich habe in meiner Armut verschafft zum Hause des Herrn hunderttausend Zentner Goldes und tausend mal tausend Zentner Silbers [2]), denn die Unmöglichkeit diese konkreten Zahlen buchstäblich zu nehmen, zwingt zur Auffassung, nur das unfaßbar Große seines Reichtums sei gemeint. Sollte eine noch größere Zahl bezeichnet werden, so mußten Vergleichungswörter dienen. Ich will Deinen Samen machen wie den Staub auf Erden; kann ein Mensch den Staub auf Erden zählen, der wird auch Deinen Samen zählen [3]). Oder: Wer kann zählen den Staub Jakobs? [4]) Und unter Anwendung eines anderen Bildes: Siehe gen Himmel und zähle die Sterne, kannst Du sie zählen? Also soll Dein Same werden [5]). Ja es wird unter Anwendung desselben Gedankens die Vollführung der unmöglichen Aufgabe nur dem Höchsten vorbehalten: Er zählet die Sterne und nennet sie alle mit Namen [6]).

Auch anderswo finden wir, wenn wir Umfrage halten, außergewöhnliche Vielheiten durch die dritte und vierte Einheit des dekadischen Zahlensystems angedeutet. In China wünscht das Volk, wenn es einen Großen des Reiches leben läßt, ihm 1000 Jahre, während der dem Kaiser allein zukommende Heilruf sich auf 10000 Jahre erstreckt [7]). Das altslavische Wort *tma* bedeutete sowohl 10000 als dunkel, während es im Russischen nur die letztere Bedeutung noch beibehalten hat [8]).

Jedenfalls gehören Zahlzeichen, mag ihre Anwendung sich erstrecken so weit oder so wenig weit als sie will, zu Zeichen, welche niemals ganz entbehrt werden konnten, welche sicherlich dem Volke bekannt gewesen sein müssen, das die betreffende Schrift, hier die Keilschrift, überhaupt erfand. War dieses, wie man annimmt, das Volk der Sumerier, so mußte demnach ihm diejenige Bezeichnung der Zahlen, von der wir gesprochen haben, und die, wie wir nochmals hervorheben, einen durchaus dezimalen Charakter trägt, bekannt gewesen sein. Um so auffallender ist es, daß in sumerischen Schriftdenkmälern, die von eigentlichen Mathematikern und Astronomen herzurühren scheinen, mit der dezimalen Schreibweise eine andere wechselt, beruhend auf dem Sexagesimalsysteme.

Es wurde von einem englischen Assyriologen Hincks entdeckt [9]).

---

[1]) Psalm 68, 18. [2]) I. Chronik 23, 14. [3]) I. Mose 13, 16. [4]) IV. Mose 23, 10. [5]) I. Mose 15, 5. [6]) Psalm 147, 4. [7]) De Paravey, *Essai sur l'origine unique et hiéroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples.* Paris 1826, pag. 111. [8]) Mündliche Mitteilung von H. Schapira. [9]) E. Hincks in den *Transactions of the R. Irish Academy. Polite Litterature* XXII 6. pag. 406 flgg.

In dem von ihm entzifferten Denkmale handelt es sich darum anzugeben, wieviele Mondteile an jedem der 15 Monatstage, die vom beginnenden Mondscheine bis zum Vollmonde verlaufen, beleuchtet seien. Es seien, heißt es, an diesen 15 Tagen der Reihe nach sichtbar:

5	10	20	40	1.20
1.36	1.52	2. 8	2.24	2.40
2.56	3.12	3.28	3.44	4

Hincks erläuterte die rätselhaften Zahlen mit Hilfe der Annahme, die Mondscheibe sei als aus 240 Teilen bestehend gedacht worden, es bedeuten die weiter nach links gerückten Zeichen für 1, 2, 3, 4 je 60 der Einheiten, denen die rechts davon stehenden Zahlen angehören, und die Beleuchtungszunahme folge nach Angabe der Tabelle an den fünf ersten Tagen einer geometrischen, an den folgenden Tagen einer arithmetischen Reihe.

Daß diese Erklärung Licht über die betreffende Tabelle verbreitet, ist unzweifelhaft. Unzweifelhaft ist es auch, daß sie dem Gesetze der Größenfolge Rechnung trägt, denn eine 60 bedeutende 1 kann links von 20, von 36, von 52 auftreten, während eine Eins gleichen Ranges mit jenen Zahlen zu ihrer Linken nicht geschrieben werden durfte. Gleichwohl bedurfte es zur vollen Bestätigung der Auffindung neuer Denkmäler, und solche sind die Tafeln von Senkereh. Ein Geologe W. K. Loftus fand 1854 bei Senkereh am Euphrat, dem alten Larsam, zwei kleine auf beiden Seiten mit Keilschriftzeichen bedeckte leider nicht ganz vollständige Täfelchen [1]). Solche Täfelchen sind, allerdings nicht entfernt vergleichbaren Inhaltes, vielfach gesammelt worden. Die eine konkave Seite ist immer als Vorderseite, die andere konvexe als Rückseite zu betrachten. Läuft der Text auf beiden Seiten fort, so muß zum Weiterlesen ein Umwenden über Kopf stattfinden. Die Täfelchen, aus Ton gebildet, wie fast überflüssigerweise bemerkt sein soll, sind in der Mitte am stärksten und verdünnen sich alsdann gleichmäßig gegen die Ecken. Diese Eigenschaft, vereinigt mit dem Umstande, daß der Rand bei der Zerbrechbarkeit des Stoffes nicht unter einen gewissen Grad von Dünne abnehmen durfte, gestattet bei Bruchstücken von einiger Beträchtlichkeit, wie z. B. die erste der beiden Täfelchen von Senkereh uns darstellt, Schlüsse auf die Größe des abgebrochenen und ver-

---

[1]) Eine photographische Abbildung des einen Täfelchens ist der Abhandlung von R. Lepsius, Die babylonisch-assyrischen Längenmaße nach der Tafel von Senkereh (Abhandlungen der Berliner Akademie für 1877) beigegeben. In eben dieser Abhandlung finden sich genaue Zitate der verschiedenen Gelehrten, welche bei der Entzifferung beteiligt waren. Ebendort S. 111—112 Bemerkungen von Fr. Delitzsch über Gestalt und Anordnung solcher Täfelchen.

mutlich nicht wieder aufzufindenden Teiles zu ziehen, welche zur Ergänzung des Inhaltes von erheblichem Nutzen sein können. Das eine Täfelchen, und zwar das zweite nach der Bezeichnung, welche den Täfelchen bei der Veröffentlichung beigelegt wurde, enthielt auf Vorder- und Rückseite zusammen 60 Zeilen, die ein fortlaufendes Ganzes bilden. Jede einzelne Zeile enthält links und rechts Zahlen, zwischen denselben sumerische Wörter, unter welchen eines *ibdi* zu lesen ist. Rawlinson erkannte zuerst, daß hier die Tabelle der ersten 60 Quadratzahlen vorliegt, und daß *ibdi* Quadrat bedeutet. Die Anordnung ist eine solche, daß es zu Anfang heißt:

1 ist das Quadrat von 1
4 ist das Quadrat von 2
9 ist das Quadrat von 3
16 ist das Quadrat von 4
25 ist das Quadrat von 5
36 ist das Quadrat von 6
49 ist das Quadrat von 7.

Diese sieben Zeilen waren vermöge der schon früher erworbenen Kenntnis der Zahlzeichen der Keilschrift verhältnismäßig leicht zu lesen und aus ihnen der Inhalt der Tabelle zu entnehmen. Nun war selbstverständlich als folgende Zeile zu erwarten:

64 ist das Quadrat von 8.

Aber so fand es sich nicht, sondern statt dessen

1 · 4 ist das Quadrat von 8

und dann setzten sich die weiteren Zeilen fort

1 · 21 ist das Quadrat von 9
1 · 40 ist das Quadrat von 10
. . . .
58 · 1 ist das Quadrat von 59
1 ist das Quadrat von 1.

Diese ganze Fortsetzung konnte nur verstanden werden, wenn man den vereinzelt links auftretenden Zahlen eine sexagesimale Wertsteigerung beilegte, mithin $1 \cdot 4$ als $60 + 4$, $1 \cdot 21$ als $60 + 21$, $58 \cdot 1$ als $58 \times 60 + 1$ las und die letzte Zeile als 1×60^2 ist das Quadrat von 1×60. So war die Vermutung von Hincks bestätigt. Zur vollen Gewißheit wurde sie bei Entzifferung des ersten Täfelchens von Senkereh erhoben. Dessen Vorderseite ist für die Geschichte der Metrologie von unschätzbarer Wichtigkeit, indem sie eine freilich lückenhafte Vergleichung zweier Maßsysteme enthält, deren eines jedenfalls vollständig nach dem Sexagesimalsysteme eingeteilt ist. Die Rückseite gibt uns in ihrem erhaltenen Teile die Kubikzahlen der aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 32, und

es ist mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß auf dem seitlich fehlenden Stücke der Tafel auch die Kuben der Zahlen 33 bis 60 gestanden haben werden. Die Anordnung ist durchaus der der Quadratzahlentabelle nachgebildet. Auch hier treten regelmäßig wiederkehrende Wörter in jeder Zeile auf, deren eines *badie* gelesen und Kubus übersetzt worden ist. Auch hier stehen am linken Anfang jeder Zeile höhere Werte als nach rechts zu, und zwar in den drei ersten Zeilen 1, 8, 27 links neben 1, 2, 3 rechts, von vornherein die Vermutung erweckend, daß man es mit einer Kubikzahlentabelle zu tun habe. Auch hier ist die Schreibweise eine sexagesimale, indem gleich die vierte Zeile 64 oder den Kubus von 4 durch 1 · 4 darstellt. Von der 16. Zeile an geht diese Tabelle noch über die Sechziger hinaus. Ist doch $16^3 = 4096 = 1 \times 60^2 + 8 \times 60 + 16$, und so steht zu erwarten, daß in dieser Zeile 1 · 8 · 16 als Kubus von 16 angegeben sein werde, eine Erwartung, die sich vollständig erfüllt. Die weiteren Zeilen liefern die Kubikzahlen der folgenden Zahlen bis dahin, wo es heißt: 7 · 30 ist der Kubus von 30, womit gemeint ist: $7 \times 60^2 + 30 \times 60 = 30^3$. Dann stehen noch in zwei aufeinanderfolgenden Zeilen rechts erhalten 31 und 32, während deren links zu suchende Kuben und alles weitere fehlt. Ganz ähnliche Tafeln wurden in Kujundschik aufgefunden [1]). Die Schreiber der Tafeln von Senkereh und Kujundschik waren demnach im Besitz der an sich bedeutsamen Kenntnis von Quadrat- und Kubikzahlen, waren zugleich im Besitz eines folgerichtig ausgebildeten Sexagesimalsystems mit wahrem Stellungswerte der einzelnen Rangordnungen, da die Punkte, welche wir zur größeren Deutlichkeit zwischen Einern und Sechzigern anbrachten, in der Urschrift nicht vorhanden sind. Welcher Stufe des Sexagesimalsystems die geschriebenen Zahlen angehörten, wurde in den uns bekannt gewordenen Beispielen dem Sinne entnommen. Dem Sinne nach verstand man offenbar, daß

1 ist das Quadrat von 1

gelesen werden wollte: 1×60^2 ist das Quadrat von 1×60: dem Sinne nach, daß

7 · 30 ist der Kubus von 30

heißen sollte: $7 \times 60^2 + 30 \times 60$ ist der Kubus von 30 Einheiten.

Wir müssen hier einen Augenblick verweilen. Die Wörter *ibdi* und *badie* bedeuten, sagten wir mit Rawlinson, Quadrat und Kubus. Damit ist die Beziehung gemeint, welche zwischen den rechts und links von diesen Wörtern stehenden Zahlen obwaltet. An und für sich könnte also

81 *ibdi* 9

---

[1]) Bezold S. 96.

ebenso wie

81 ist das Quadrat von 9

auch bedeuten

81 die Quadratwurzel davon ist 9,

und vielleicht wäre diese Übersetzung vorzuziehen. Die wörtliche Bedeutung des Stammes *di*, welcher sowohl dem *ibdi* als dem *badie* zugrunde liegt, ist unbekannt. Man weiß bis jetzt nur, daß *di* auf anderen Tafeln in Verbindung mit der bei Tieropfern wichtigen Untersuchung der Leber des geschlachteten Tieres vorkommt, dort also einer mathematischen Bedeutung entbehrt[1]). Dort kann nur von dem die Rede sein, was in dem Tiere steckt, und erwägen wir, daß die Quadratwurzel in der Zahl steckt, so wäre damit ein Vergleichungspunkt der beiden Arten des Vorkommens gefunden.

Eine fernere Frage ist die nach dem Zwecke, welchen die bereits in zwei Exemplaren bekannten Zahlentafeln erfüllen sollten. Man hat sie Hilfstafeln bei der Vermessung von Feldern und Grundstücken genannt. Das mag ja zutreffen, aber in welchem Sinne? Quadratzahlen und Kubikzahlen eine unmittelbare Brauchbarkeit bei Vermessungen zuzuweisen, fällt schwer. Felder in Gestalt von Quadraten gab es nur in den seltensten Fällen. Nicht der menschliche Wille allein gibt den Grundstücken ihre Umgrenzung, die Bodenbeschaffenheit tut dazu das meiste. Wir können diese an sich schon einleuchtende Behauptung noch näher belegen. Pater Scheil hat einen Felderplan veröffentlicht, welcher aus der Zeit des Königs Ine Sin aus der zweiten Dynastie von Ur etwa 2400 v. Chr. stammt. Kein einziges von den dort gezeichneten Feldern ist quadratisch, und wenn auch über die genaue Erklärung der auf dem Plane vorkommenden Zahlenangaben eine ziemlich weitgehende Meinungsverschiedenheit obwaltet[2]), soviel ist doch gesichert, daß die Felder bald dreieckig, bald unregelmäßig viereckig aussehen, daß man deren Flächeninhalt durch Vervielfachung von untereinander verschiedenen Zahlen zu ermitteln suchte.

Solche Vervielfachungen wurden ebenfalls um 2400 v. Chr. durch damals vorhandene Tabellen unterstützt. Professor H. V. Hilprecht[3]) hat bei den unter seiner Leitung vorgenommenen Ausgrabungen in

---

[1]) Mündliche Mitteilung von Herrn Bezold. [2]) Aug. Eisenlohr, Ein altbabylonischer Felderplan nach Mitteilungen von F. V. Scheil. Leipzig 1896. Jul. Oppert, *L'administration des domaines, les comptes exacts et les faux au cinquième millenium avant l'ère chrétienne.* Paris 1899. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des inscriptions et des belles-lettres.* [3]) Die Ausgrabungen der Universität von Pennsylvania im Bêltempel zu Nippur. Ein Vortrag von H. V. Hilprecht. Leipzig 1903. Vergl. besonders S. 59—60.

Nippur außer dem Stufentempel des Bêl (dem babylonischen Turm) auch das damit verbundene Schulgebäude und die Bibliothek der Priesterschule bloßgelegt, welche letztere viele Tausende von Tafeln enthielt. In Beziehung auf diese heißt es: „Besondere Aufmerksamkeit wandte man dem Gebiete der Arithmetik, Mathematik und Astronomie zu. Zunächst wurde der Schüler im Gebrauche des Sexagesimalsystems eingedrillt. Da heißt es $60 + 7 \times 10 = 2 \times 60 + 10$, $60 + 8 \times 10 = 2 \times 60 + 20$ usw. In geradezu phänomenaler Weise wurde das Einmaleins geübt. Wir haben eine ganze Menge dieser nach Serien eingeteilten Multiplikationstafeln, darunter mehrere Duplikate. Eine Tafel enthält das Einmalsechs (bis 60), eine zweite das Einmalneun. Ich habe derartige Tafeln bis 1 mal 1350 in den Händen gehabt.“ Wenn solche umfassende Rechenknechte, wie wir unter Benutzung eines unserer Gegenwart angehörenden Wortes uns ausdrücken wollen, vorhanden waren, dann muß eine nur Quadratzahlen, nur Kubikzahlen enthaltende gleichfalls in Duplikaten vorhandene Tafel ganz besonderer Zwecke wegen hergestellt worden sein, und als einen solchen Zweck glauben wir die Erkennung einer Zahl als Quadratzahl, als Kubikzahl uns denken zu dürfen.

Man hatte beispielsweise durch Vervielfachung $9 \times 361 = 3249$ gewonnen und fand nun in der Tafel von Senkereh, das Quadrat von 57 sei gleichfalls 3249. Damit wäre die vorhin von uns vorgeschlagene Übersetzung

3249 die Quadratwurzel davon ist 57

in zweckentsprechender Übereinstimmung.

Jene gewünschte Verwandlung einer anders beschaffenen Figur in ein Quadrat, denn das ist doch am letzten Ende das hier vorausgesetzte Verfahren, konnte möglicherweise darin begründet sein, daß irgend eine Besteuerung von Feldern nicht nach Maßstab ihrer Fläche, sondern nach Maßstab der Seite des flächengleichen Quadrates vorgenommen worden wäre, eine Vermutung, welche wir allerdings vorläufig nicht zu stützen imstande sind.

Hatten die Zahlentafeln von Senkereh den hier als denkbar geschilderten arithmetischen Zweck, dann konnten sie auch zu einer Interpolation dienen. Man sah, daß 3249 der Wurzelzahl 57, daß 3364 der Wurzelzahl 58 entsprach, also mußte z. B. der Feldinhalt 3300 einer Wurzelzahl entsprechen, welche zwischen 57 und 58 lag. Im Verlaufe von Jahrhunderten konnte sich dieses Wissen zu immer genauerer Abschätzung irrationaler Quadratwurzeln entwickeln.

Die andere Tafel von Senkereh stand aber, wir sind wohl oder übel zu dieser unausweichlichen Folgerung gezwungen, in ähn-

licher Beziehung zu der Lehre von den Kubikwurzeln wie die erste zu der von den Quadratwurzeln.

Wir kommen noch zu einer dritten Frage. Wir sagten oben, man habe

$$7 \cdot 30 \quad \textit{badie} \quad 30$$

so gedeutet, daß $7 \times 60^2 + 30 \times 60^1$ als Kubus von 30 erscheine, daß man dem Sinne nach verstand, daß so und nicht etwa $7 \times 60^1 + 30 = 30^3$ zu lesen war. Genügte der Sinn auch zum Verständnis, wenn Einheiten irgend einer Stufe zwischen den anzuschreibenden fehlten? Wurde z. B. $7248 = 2 \times 60^2 + 48$ nur $2 \cdot 48$ geschrieben und überließ man es dem Leser aus dem Sinne zu entnehmen, daß in der Tat 7248 und nicht $168 = 2 \times 60 + 48$ gemeint war? Die Tafeln beantworten uns diese Frage nicht, würden sie auch nicht beantworten, wenn die ganze erste Tafel unzerbrochen auf uns gekommen wäre, da unter sämtlichen Kubikzahlen bis zu $59^3 = 57 \times 60^2 + 2 \times 60 + 59$ keine einzige vorkommt, welche sich nur aus Einheiten der ersten und der dritten Stufe zusammensetzte. Und doch leuchtet die hohe geschichtliche Wichtigkeit dieser Frage, ob man das Fehlen von Einheiten einer mittleren Stufe besonders andeutete, sofort ein, wenn man ihr die nur der Form nach verschiedene Fassung gibt, ob, als die Tafeln von Senkereh entstanden, die Babylonier eine Null besaßen? Eine Null, das ist ja ein Symbol fehlender Einheiten! Ohne ein solches besaßen die Babylonier eine immerhin interessante, aber vereinzelte systemlose Benutzung des Stellenwertes. Mit einem solchen war von ihnen schon eine ausgebildete Stellungsarithmetik erfunden. Von dem einen zu dem andern führt ein dem Anscheine nach kleiner, in Wahrheit unermeßlicher Schritt. Schon der Wunsch auf diese eine Frage eine Antwort zu erhalten, läßt die Veranstaltung weiterer Ausgrabungen in Senkereh zu einem wissenschaftlichen Bedürfnisse heranwachsen. Dort war allem Anscheine nach eine größere Bibliothek. Dort vermuten Assyriologen wie A. H. Sayce eine erhebliche Menge von Tontafeln mathematischen Inhaltes [1]. Dort würde die Geschichte der Mathematik möglicherweise wertvolle Ausbeute gewinnen. Fast mit Sicherheit läßt sich mindestens das Eine erwarten, daß Ausgrabungen zu Senkereh Datierungen liefern würden, welche es möglich machten, den Zeitpunkt, dem die Anfertigung jener Täfelchen entspricht, annähernd zu bestimmen. Gegenwärtig ist nur aus den Wörtern für Quadrat und für Kubus der Schluß zu ziehen, daß diese Werte, daß auch das Sexagesimalsystem den Sumeriern bekannt gewesen sein

---

[1]) Briefliche Mitteilung des genannten Gelehrten.

muß[1]). Es ist dann weiter vielleicht die Folgerung erlaubt, daß jene Täfelchen vor der Regierung des Königs Sargon I. entstanden, weil damals das Sumerische bereits außer Übung geraten war. Sargon selbst ist „Saryukin, der mächtige König von Agana“ nach inschriftlich erhaltenem Titel[2]). Auf ihn folgte sein Sohn Naramsin, auf diesen die Königin Ellatbau und diese wurde durch Chammuragas, König der Kassi im Lande Elam, entthront, von welchem die Kassiterdynastie gestiftet wurde. Hier gewinnt die Forschung soweit festeren Boden, als es unter den Assyriologen sicher scheint, daß die Kassiterdynastie bis etwa zu dem Jahre 1700 v. Chr. zurückgeht. Sayce folgert auf diese Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützt, daß die Täfelchen von Senkereh etwa zwischea 2300 und 1600 v. Chr. entstanden sein dürften[3]).

Für eine wesentlich spätere Zeit können wir die Frage, ob die Babylonier eine Null in dem angegebenen Sinne, d. h. ein Mittel zur Kenntlichmachung einer Lücke in einer sexagesimal geschriebenen Zahl besaßen, allerdings bejahen. In astronomischen Schriften, welche den drei letzten vorchristlichen Jahrhunderten entstammen, und in welchen fast Zeile für Zeile sexagesimal mit Stellungswert versehene Zahlenangaben vorkommen, findet man häufig Beispiele wie

$$10 \quad \frac{4}{60} \qquad \frac{11}{60^3} \quad \frac{32}{60^4}.$$

Mitunter wird die Tatsache, daß der Bruch, welcher 60^2 im Nenner hätte, fehlt, dadurch angedeutet, daß, wie wir es in unserer Nachbildung nachahmten, die Brüche $\frac{4}{60}$ und $\frac{11}{60^3}$ etwas weiter voneinander entfernt abgebildet sind, als es der Fall wäre, wenn keine Lücke in den Sexagesimalbrüchen anzudeuten gewesen wäre. Mitunter ist aber ein die Lücke ausfüllendes aus zwei kleinen Winkelhaken bestehendes Zeichen ⩽ vorhanden[4]), ein Zeichen, welches auch in nicht mathematischen Texten vorkommt und dort mancherlei Zwecken dient, z. B. andeutet, ein Wort, welches auf einer Zeile nicht vollständig angeschrieben werden kann, setze sich auf der nachfolgenden Zeile fort.

Die soeben erwähnten Beispiele bestätigen, daß, wie Oppert schon früher gezeigt hat, das Sexagesimalsystem auch nach abwärts führte, daß es Sexagesimalbrüche erzeugte, deren Nenner durch die nach rechts vorrückende Stellung der allein geschriebenen Zähler erkenn-

---

[1]) Delitzsch, Soss, Ner und Sar. Zeitschr. Ägypt. 1878. [2]) Maspero-Pietschmann S. 194. [3]) Briefliche Mitteilung. [4]) Fr. Xav. Kugler, Die Babylonische Mondrechnung. Keilinschriftliche Beilagen Tafel IV und öfter (Freiburg i. Br. 1900).

bar sind. Dahin gehören die Unterabteilungen des sexagesimalen Maßsystems auf der Vorderseite des ersten Täfelchens von Senkereh, von welchem oben im Vorbeigehen die Rede war.

Solchen Tatsachen gegenüber gehörte ein gewisser Mut dazu, die auf keinerlei urkundlicher Grundlage beruhende Meinung auszusprechen[1]), die Sumerier hätten ursprünglich ein Siebenersystem besessen und nachträglich das Sechzigersystem hinzuerfunden, weil 60 vielfach teilbar, 7 dagegen teilerlos war. Weit anmutender ist die Annahme[2]), es habe von den beiden großen Volksbestandteilen, welche in dem Zweistromlande ihre schon weit entwickelte Geistesbildung vermischten, der eine ursprünglich ein Zehnersystem, der andere ein Sechsersystem besessen, und bei dem Zusammenwachsen beider Stämme habe sich das Sechzigersystem bilden können, welches enge Beziehungen zu beiden Grundzahlen, zu 10 und zu 6, an den Tag lege. Manches bleibt allerdings auch bei dieser Annahme recht rätselhaft, z. B. welchem Volke man die Erfindung des Sechsersystems zuschreiben und wie man diese Erfindung sich denken soll. Die von dem Urheber der Vermischungstheorie ($60 = 10 \times 6$) vorgeschlagene Erklärung, man habe an den Fingern gezählt und nach Erschöpfung der Finger einer Hand diese Hand zum Zeichen eines Ruhepunktes im Zählen geschlossen, führt unseres Ermessens zum Fünfersysteme (S. 8) und nicht zum Sechsersysteme.

Weitere Bestätigung durch die Überlieferung ist zwar nicht erforderlich, wo bestimmte Inschriften so deutlich reden. Gleichwohl lohnt es bei ihr Umfrage zu halten, was sie bezüglich babylonischen Rechnens überhaupt, was sie über das babylonische Sexagesimalsystem insbesondere uns zu sagen weiß.

Strabo läßt in Phönikien die Rechenkunst entstehen[3]); Josephus hat deren Erfindusg den Chaldäern zugewiesen[4]), von welchen sie durch Abraham den Weg nach Ägypten gefunden habe, und Cedrenus, ein byzantinischer Geschichtsschreiber der Mitte des XI. S., nennt sogar Phönix, den Sohn des Agenor, der selbst Sohn des Neptun war, als Verfasser des ersten Buches über Philosophie der Zahlen (*περὶ τὴν ἀριθμητικὴν φιλοσοφίαν*) in phönikischer Sprache[5]). Theon von Smyrna im II. S. n. Chr. lebend sagt: bei Untersuchung der Planetenbewegung hätten sich die Ägypter konstruktiver Methoden bedient,

---

[1]) H. von Jacobs, Das Volk der Siebener-Zähler. Berlin 1896.
[2]) G. Kewitsch, Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems. Zeitschrift für Assyriologie XVIII, 73—95. Straßburg 1904.
[3]) Strabon XVI, 24 und XVII, 3 (ed. Meineke pag. 1056 und 1099).
[4]) Josephus, Antiquit. I cap. 8 § 2. [5]) Cedrenus, Compendium Historiarum (ed. Xylander). Paris 1647, pag. 19.

hätten gezeichnet, während die Chaldäer zu rechnen vorzogen, und von diesen beiden Völkern hätten die griechischen Astronomen die Anfänge ihrer Kenntnisse geschöpft[1]). Porphyrius, selbst in Syrien geboren und am Ende des III. S. schreibend, erzählt: von alters her hätten die Ägypter mit Geometrie sich beschäftigt, die Phönikier mit Zahlen und Rechnungen, die Chaldäer mit den Lehrsätzen, die sich auf den Himmel beziehen[2]).

Diese Überlieferungen bezeugen, daß man von einem hohen Alter der Rechenkunst in Vorderasien die Erinnerung bewahrt hatte. Ein Widerspruch gegen eine andere Sage, die neben der Geometrie auch die Rechenkunst in Ägypten entstehen ließ, kann uns in der Bedeutung, die wir solchen Überlieferungen beilegen, nicht irre machen. War doch in der Tat auch dort eine Rechenkunst vielleicht gleich hohen Alters zu Hause, und steht doch der Sage, Abraham habe Rechenkunst und Astronomie aus Chaldäa nach Ägypten gebracht, die andere gegenüber, Belos, der Ahne eines lydischen Königsgeschlechtes, sei Führer ägyptischer Einwanderer gewesen[3]). Beide Bildungen, die des Nillandes, die des Euphratlandes, waren uralt; beide standen in uralter Berührung; beide beeinflußten das spätere Griechentum sei es unmittelbar, sei es mittelbar, und das Erfinderrecht, welches griechische Schriftsteller, je weiter wir aufwärts gehen, um so ausschließlicher den Ägyptern zuweisen, hängt wohl damit zusammen, daß Griechen in größerer Zahl weit früher nach den Hauptstädten von Ägypten, als nach denen von Vorderasien gelangten. Diese letztere Gegend kann kaum vor dem Alexanderzuge als genügend bekannt betrachtet werden.

Spuren des babylonischen Sexagesimalsystems in den Überlieferungen aufzufinden, wird uns gleichfalls gelingen, wenn wir nur richtig suchen. Wir werden nämlich hier nicht auf Äußerungen ganz bestimmter Natur fahnden dürfen, die Babylonier oder die Phönikier oder dieses oder jenes dritte Nachbarvolk seien Erfinder eines Zahlensystems gewesen, welches nach der Grundzahl 60 fortschritt: wir werden uns begnügen müssen, der Zahl 60 und ihren Vielfachen als Zahlen unbestimmter Vielheit zu begegnen. Von Sammelwörtern zur Bezeichnung unbestimmter Vielheiten war in der Einleitung (S. 5), von gewissen Zahlen als Vertretern einer unübersehbar großen Vielheit in diesem Kapitel (S. 23—24) schon die Rede. Allein neben den Ausdrücken unbestimmter Zusammenfassung, neben den Zahlen

---

[1]) Theo Smyrnaeus (ed. Ed. Hiller). Leipzig 1878, pag. 177. [2]) Porphyrius, *De vita Pythagorica* s. 6 (ed. Kiessling, pag. 12). [3]) Diodor I, 28, 29.

außergewöhnlicher Vielheit bilden kleinere ganz bestimmte Zahlen in dem Sinne einer nicht genau abgezählten oder abzuzählenden Menge ein ganz regelmäßiges Vorkommen[1]).

Die Zahlen 5, 10, 20 als in den menschlichen Gliedmaßen begründet vertreten oftmals solche unbestimmte Vielheiten. Die Zahl 3 ist unbestimmte Vielheit in *τρισάθλιος* sowie in *ter felix* (dreifach unglücklich, dreifach glücklich). Eben dahin gehört es, wenn der Chinese „die vier Meere“ statt alle Meere sagt, wenn wir von „unseren sieben Sachen“ statt von allen unseren Sachen reden, indem dort die vier Weltgegenden den Vergleichungspunkt zeigten, hier die weit und breit besonders geachtete Zahl 7 mutmaßlich den 7 Tagen der Schöpfungswoche, die selbst mit den 7 Wandelsternen der alten Babylonier zusammenhängen dürften, ihre Heiligkeit und ihre häufige Anwendung verdankt. An diesen wenigen Beispielen erkennen wir bereits, daß nicht jede beliebige Zahl als unbestimmte Vielheit gewählt wird, sondern, daß Gründe, die freilich nicht immer am Tage liegen, den Anlaß gaben, bald dieser bald jener Zahl die genannte Rolle zuzuweisen. So bildet 40 die unbestimmte Vielheit sämtlicher Völker ural-altaischer Abkunft[2]) bis auf den heutigen Tag. So waren es 40 Amazonen, von denen die skythische Sage berichtet. So ist im Märchen Ali Baba mit 40 Räubern zusammengetroffen. So brachten die Hebräer 40 Jahre in der Wüste, Mose 40 Tage und 40 Nächte auf dem Berge Sinai zu. So dauerte der Regen, der die Sintflut einleitete, 40 Tage und 40 Nächte, und so sind noch viele andere biblische Stellen des alten wie des neuen Bundes, letztere wohl meistens bewußte Nachahmungen der ersteren, durch die Annahme zu erklären, die in ihnen vorkommende Zahl 40 sei eine unbestimmte Vielheit. Wie aber 40 zu dieser Rolle kam, und zwar in ältester Zeit kam, denn es sind gerade die ältesten Bibelstellen, welche ein unbestimmtes 40 benutzen, das ist heute nicht bekannt.

Ähnlicherweise kommt nun 60 mit seinen Vielfachen und einigen in ihm enthaltenen kleineren Zahlen als unbestimmte Vielheit vor, aber immer und ausschließlich in solchen Verhältnissen, wo eine Beeinflussung von Babylon aus nachweisbar oder wenigstens möglich ist. Wir haben vor wenigen Zeilen von ältesten Bibelstellen gesprochen. Theologische Kritik hat nämlich aus Eigentümlichkeiten

---

[1]) Über solche unbestimmte Vielheiten vergl. Math. Beitr. Kulturl. 146—148 und 361—362, wo auf verschiedene Quellen hingewiesen ist. Zu diesen kommt noch: Pott I, 119; dann Himly, Einige rätselhafte Zahlwörter (Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XVIII, 292 und 381); Kaempf, Die runden Zahlen im Hohenliede (ebenda XXIX, 629—632) und der Artikel: Zahlen von Kneucker in Schenkels Bibellexikon. [2]) Briefliche Mitteilung von Herrn Berth. Laufer.

der Sprache, der Glaubenssätze, der Vorschriften usw. ein verschiedenes Alter der in den 5 Büchern Mose vereinigten Erzählungen nachzuweisen gewußt. Sie hat beispielsweise festgestellt, daß der Sintflutsbericht der Bibel ein doppelter ist. Der älteren Erzählung gehört der vorerwähnte 40tägige Regen an. In dem jüngeren Berichte, der erst nach 535, d. h. nach der Rückkehr aus der babylonischen Gefangenschaft niedergeschrieben sein soll, sind die Maße der Arche angegeben, 300 Ellen sei die Länge, 50 Ellen die Weite und 30 Ellen die Höhe[1]). Die Länge und Weite der Arche in Berichten der Keilschrift scheinen auf 600 und auf 60 zu lauten[2]). Das goldene Götterbild, welches König Nebukadnezar errichten ließ, war 60 Ellen hoch und 6 Ellen breit[3]). Um das Bett Salomos her stehen 60 Starke aus den Starken in Israel, und 60 ist die Zahl der Königinnen[4]). Anderweitige Parallelstellen gewährt die außerbiblische hebräische und chaldäische Literatur, von welchen wir nur der Reimzeile: „In des einen Hause 60 Hochzeitbälle, in des andern Kreise 60 Sterbefälle"[5]) gedenken. Auch die griechische Literatur läßt uns keineswegs im Stiche. Den ionischen Truppen wird von dem Perserkönige der Befehl erteilt, an der Brücke über den Ister 60 Tage zu warten; Xerxes läßt dem Hellesponte 300 Rutenstreiche geben; Kyrus läßt den Fluß Gyndes, in welchem eines seiner heiligen Rosse ertrunken war, zur Strafe in 360 Rinsel abgraben. So nach Herodot[6]). Entsprechend berichtet Strabo: Man sagt, es gebe ein persisches Lied, in welchem die 360 Nutzanwendungen der Palme besungen würden[7]). Stobäus läßt durch Oinopides und Pythagoras ein großes Jahr von 60 Jahren einrichten[8]), und wir werden später sehen, daß diese Philosophen als Schüler morgenländischer Weisheit betrachtet wurden. Vielleicht ist damit die freilich von unserem Berichterstatter, Pausanias, anders begründete Sitte in Zusammenhang zu bringen, daß das Fest der großen Dädala mit den Platäern auch von den übrigen Böotern alle 60 Jahre gefeiert wurde: denn so lange war nach der Sage das Fest zur Zeit der Vertreibung der Platäer eingestellt[9]).

---

[1]) I. Mose 6, 5. [2]) Le poème Chaldéen du déluge traduit de l'assyrien par Jules Oppert (Paris 1885) pag. 8: Le navire que tu bâtiras, mesurera un *ner* d'empans en longueur, un *soss* d'empans sera le compte de sa hauteur et de sa largeur. Es ist nicht ohne Interesse, daß diese Angaben mit denen der Bibel zusammentreffen, sobald man annimmt, die babylonische Einheit sei die Hälfte der biblischen Elle gewesen. [3]) Daniel 3, 1. [4]) Hohes Lied 3, 7 und 6, 8. [5]) Dieses Beispiel und mehrere andere namentlich bei Kaempf in dem obenerwähnten Aufsatze Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XXIX. [6]) Herodot IV, 98; VII, 35; I, 189 und 202. [7]) Strabo XVII, 1, 14. [8]) Stobaeus, Eclog. Phys. I, 9, 2. [9]) Pausanias, IX, 3.

Endlich gehört sicherlich eine Stelle des Hesychios hierher, Saros sei eine Zahl bei den Babyloniern[1]). Mit dieser Stelle haben wir den Rückweg zu den Schriftdenkmälern der Babylonier gewonnen, aus welchen unser Gewährsmann unmittelbar oder mittelbar geschöpft haben muß. Die Sprache der Babylonier enthielt nämlich nicht bloß das Wort Sar mit einer Zahlenbedeutung, welche allseitig als 3600 verstanden wird, sondern auch noch Ner mit der Bedeutung 600 und Soss mit der Bedeutung 60.

Wir sagen ausdrücklich Soss, Ner, Sar haben diese Zahlenbedeutung, weil wir vermeiden wollen sie Zahlwörter zu nennen. Sie gehören eben zu den Wortformen, deren es in anderen Sprachen auch gibt, welche mit Zahlenwert versehene Nennwörter sind, wie unser Dutzend = eine Anzahl von 12, Mandel = eine Anzahl von 15, Schock = eine Anzahl von 60, aber beim eigentlichen Zählen, insbesondere beim Bilden größerer Zahlen, nicht anderen Zahlwörtern gleich benutzt werden. Ganz in derselben Weise wie das wohl nur zufällig lautverwandte Schock bezeichnet Soss eine Anzahl von 60 irgendwelcher als Einheit gewählter Gegenstände. Das Ner ist so viel wie 10 Soss, der Sar so viel wie 60 Soss, aber immer unter Voraussetzung konkreter Einheiten. So stellt uns der Soss, der Sar die nächsthöheren Stufen des aufsteigenden Sexagesimalsystems vor, welche auf die Einheiten folgen, und die Frage bleibt eine offene, ob es noch Namen über diese hinausgab, ob es etwa ein Wort gab für 60 Sar, d. h. für eine Anzahl von 216 000. Was über die den Babyloniern in ihrer Allgemeinheit wohl anhaftende Beschränkung des Zahlenbegriffes S. 23 gesagt wurde, genügt keineswegs diese Frage beiseite zu schieben, denn wir stellen sie nicht mit Bezug auf bürgerliche, sondern auf wissenschaftliche Rechenkunst. Der Soss freilich, und wohl auch der Ner, sind zum gemeinsamen Volkseigentume geworden. Ersterer in mathematischen Schriften, wie z. B. in den Tafeln von Senkereh, durch einen Einheitskeil bezeichnet, welchem die Stellung den Rang erteilte, scheint auch sonstigen Inschriften in der Weise sich eingefügt zu haben, daß der Vertikalkeil links von Winkelhaken stehend, zu welchen er dem Gesetze der Größenfolge halber nicht einfach addiert werden konnte, und welche er als Einheit vervielfachen zu sollen keine Veranlassung besaß, die Bedeutung von

[1]) Auf diese Stelle hat J. Brandis in seinem vortrefflichen Werke: Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander d. Großen, Berlin 1866, aufmerksam gemacht. Für den Mathematiker von besonderem Interesse sind S. 9, 15, 595. Parallelstellen zu Hesychios bei Suidas und Synkellos vergl. in dem Aufsatze von Fr. Delitzsch, Soss, Ner, Sar. Zeitschr. Ägypt. 1878, S. 56—70.

Soss, d. i. also von 60 gewann, wie in mathematischen Schriften und so sich addierte[1]). Freilich ist auch diese Behauptung, wie so manche andere, die sich auf Entzifferung von Keilschrift bezieht, noch bestritten, und der einzelne links von Winkelhaken befindliche Vertikalkeil wurde von Oppert und Lenormant als 50 gelesen, eine Auffassung, an welcher aber Oppert jedenfalls nicht mehr hartnäckig festgehalten hat.

Wir haben oben (S. 32) uns der Ansicht angeschlossen, das Sexagesimalsystem sei aus der Vermischung eines Sechsersystems mit einem Zehnersystem entstanden, welche beide dem Sechzigersysteme sich ein- und unterordnen konnten. Damit fällt die Annahme, der wir selbst früher huldigten, die Grundzahl 60 sei durch Sechsteilung der 360 Grade des Kreises entstanden, und diese hätten den 360 Tagen eines alten Sonnenjahres entsprochen. Man hat den sehr richtigen Einwand erhoben[2]), man habe doch das Zählen und Anschreiben der kleineren Zahlen gekannt und benutzt, bevor man zu 360 gelangte, man bilde kein Zahlensystem durch Verkleinerung, sondern allenfalls durch Vergrößerung einer vorhandenen Grundzahl, man könne also nicht den Gedankengang eingeschlagen haben, daß man zuerst 360 und dann 60 als rechnerischen Ruhepunkt benutzte. Man hat den ferneren Einwand erhoben, die Mangelhaftigkeit einer Sonnenbahn von nur 360 Tagen müsse sehr frühzeitig erkannt worden sein und müsse die Notwendigkeit von mindestens 5 Zusatztagen erzeugt haben; das Jahr von 360 Tagen sei nur ein Rechnungsjahr gewesen, und zwar deshalb gewesen, weil man $6 \times 10 = 60$ als Grundzahl besaß, wodurch ebensowohl $6^2 \times 10 = 360$ als $6 \times 10^2 = 600$ in den Vordergrund arithmetischen Denkens treten mußten.

Damit fallen auch die anderen Versuche, welche gemacht worden sind[3]) das Sexagesimalsystem astronomisch herzuleiten. Aber nicht als hinfällig können wir betrachten, was wir ein Eindringen des Sexagesimalsystems in die Astronomie und Geometrie der Babylonier nennen möchten.

Das Sexagesimalsystem der Babylonier hängt, glauben wir, mit astronomisch-geometrischen Dingen zusammen. So ungern wir von unserer Absicht der Geschichte der Astronomie in diesem Werke fern zu bleiben abweichen, hier müssen wir eine kleine Ausnahme insoweit eintreten lassen, als wir von dem Altertum babylonischer Stern-

---

[1]) Lepsius, Babylonisch-assyrische Längenmaße (Abhandl. Berlin. Akademie 1877) S. 142—143. [2]) Kewitsch in der Zeitschrift für Assyriologie Bd. XVIII. Straßburg 1904. [3]) F. Ginzel, C. Lehmann, H. Zimmern haben solche Versuche angestellt.

kunde wenigstens einiges berichten[1]). Mag man die Hunderttausende von Jahren, durch welche hindurch Plinius anderen Berichterstattern folgend babylonische Beobachtungen angestellt sein läßt, belächeln; mag man zunächst auch den 31000 Jahren vor Alexander dem Großen mit ungläubigster Abwehr gegenüberstehen, aus welchen nach Porphyrius eine Beobachtungsreihe durch Kallisthenes an Aristoteles gelangte; folgende Dinge stehen fest: Klaudius Ptolemäus, der Verfasser des Almagest, wußte von einer babylonischen Liste von Mondfinsternissen seit 747. Die Sonnenfinsternis vom 15. Juni 763 ist in den assyrischen Reichsarchiven angegeben. Für König Sargon, der etwa 3700 v. Chr. gelebt haben mag, ist ein astrologisches Werk verfaßt, welches der englische Assyriologe Sayce entziffert und übersetzt hat. Für eine sehr bedeutende Anzahl von Jahrestagen ist in diesem Werke, welches wir am deutlichsten als Vorbedeutungskalender bezeichnen, erörtert, welche Folge eine gerade an diesem Tage eintretende Verfinsterung haben werde. Man überlege nun, welches statistische Material an Verfinsterungen und ihnen folgenden Ereignissen nötig war, um ein solches Wahrscheinlichkeitsgesetz, welches man selbstverständlich für unfehlbare Wahrheit hielt, herzustellen; selbst wenn manche Ereignisse nicht der Erfahrung sondern der Einbildungskraft des Verfassers des Kalenders entstammten, so wird man so viel zuzugeben geneigt sein, daß wahrscheinlich mehrere tausend Jahre vor Alexander eine babylonische Astronomie bestand, daß es unter allen Umständen zur Zeit von König Sargon eine beobachtende Sternkunde der Babylonier gab, die damals das Kalenderjahr längst besaßen. Babylonisch und zwar aus ähnlich alter Zeit dürfte auch die 7tägige Woche sein, welche, wie wir schon gelegentlich bemerkt haben, in der biblischen Schöpfungswoche sich widerspiegelt, während sie der Anzahl der bekannten Wandelsterne ihren eigentlichen Ursprung verdankt. Auf die babylonische Heimat weisen die 7 Stufen verschiedenen Materials hin, welche den Tempel des Nebukadnezar bildeten, dessen Trümmer in Birs Nimrud begraben wurden, und der, wie manche glauben, der Sprachenturm der Bibel war. Ebendahin weisen uns die 7 Wälle von Ekbatana[2]), und die Macht der Planetengötter über das menschliche Geschlecht und dessen Schicksale bildete einen Teil der babylonischen Vorbedeutungswissenschaft[3]). Babylonisch ist dann weiter die Einteilung des Tages in Stunden. Hier freilich ist eine ganz

---

[1]) Eine sehr übersichtliche Zusammenstellung aller Quellen bei A. H. Sayce, *The astronomy and astrology of the Babylonians with translations of the tablets relating to these subjects* in den *Transactions of the society of biblical Archaeology.* Vol. III, Part. 1. London 1874. Vergl. auch das Programm von A. Häbler, Astrologie im Alterthum, 1879. [2]) Herodot I, 98. [3]) Diodor II, 30.

bestimmte Kenntnis des Sachverhaltes nicht vorhanden, denn wenn Herodot uns ausdrücklich sagt, die Babylonier hätten den Tag in zwölf Teile geteilt[1]), so sprechen andere Gründe für eine Teilung des Tages in 60 Stunden, und man hat versucht sich damit zu helfen, daß man die 12 bürgerlichen Stunden, welche den Tag ohne die Nacht ausfüllten, von einer wissenschaftlichen Einteilung zu astronomischen Zwecken unterschied[2]). Die Vermutung, man habe in Babylon den Tag in 60 Stunden geteilt, beruht vornehmlich auf zwei Gründen. Erstlich wendet Ptolemäus bei der auf Hipparch und auf die Chaldäer Bezug nehmenden Berechnung der Mondumläufe die Sechzigteilung des Tages an[3]), und zweitens teilten die Vedakalender der alten Inder gleichfalls den Tag in 30 *muhúrta*, deren jeder aus 2 *nâdikâ* bestand, so daß 60 Teile gebildet wurden[4]). Indische Astronomie weist aber vielfach mit zwingender Notwendigkeit auf babylonische Beeinflussung zurück. Die Dauer des längsten Tages z. B. wurde in dem Vedakalender auf 18 *muhúrta*, d. h. also auf $\frac{18}{30}$ Tageslängen oder $14^h 24^m$ angegeben. Ptolemäus in seiner Geographie bezeichnet sie zu $14^h 25^m$ für Babylon. In chinesischen Quellen erscheint dieselbe Dauer in Gestalt von 60 *Khe*, deren jeder $14^m 24^s$ beträgt[5]). Die Dauer des längsten Tages ist aber selbstverständlich als von der Polhöhe abhängig nicht aller Orten gleich; ferner waren in so weit zurückliegenden Zeiten die Beobachtungen wie die daran sich knüpfenden Rechnungen nicht so feiner Natur, daß fast identische Ergebnisse an verschiedenen Orten zu erwarten wären. Die Wahrscheinlichkeit ist daher nicht zu unterschätzen, daß die Zahlenangabe für den längsten Tag sich von einem der drei Punkte nach den beiden anderen verbreitet haben werde und zwar so, daß Babylon als Verbreitungsmittelpunkt zu gelten hätte[6]). In Indien haben übrigens Zeitmesser, welche auf der Einteilung des Tages in 60 Teile beruhen, bis auf die heutige Zeit sich erhalten, und der deutsche Reisende Herm. Schlagintweit war in der Lage der Münchner Akademie eine solche Uhr vorzuzeigen. Sie besteht aus einem Abschnitte einer Hohlkugel aus dünnem Kupferblech, welcher unten fein wie mit einem

[1]) Herodot II, 109. [2]) Lepsius, Chronologie der Ägypter S. 129, Note 1. [3]) Ptolemäus, Almagestum IV, 2. [4]) Lassen, Indische Altertumskunde pag. 823. A. Weber, Über den Veda-Kalender genannt Jyotischam (Abhandl. Berlin. Akad. 1862), S. 105. [5]) Biot, *Précis de l'astronomie Chinoise*. Paris 1861, pag. 29. [6]) A. Weber in den Monatsber. Berlin. Akad. 1862, S. 222 und in der vorzitierten Abhandlung S. 14—15 und 29—30. Vergl. auch desselben Verfassers: Vedische Nachrichten von den Naxatra II. Teil (Abhandl. Berlin. Akad. 1862), S. 362. Entgegengesetzter Meinung sind Whitney und G. Thibaut. Vergl. des letzteren: *Contributions to the explanation of the Jyotisha-Vedánga*, pag. 13.

Nadelstich durchlöchert ist. Setzt man diese Vorrichtung auf Wasser, so füllt sich die Kugelschale allmählich an und sinkt nach bestimmter Zeit, etwa nach anderthalb *muhûrta*, unter hörbarem Zusammenklappen des Wassers über ihr, unter[1]).

Aus dieser ganzen Erörterung geht soviel hervor, daß die Astronomen Babylons die Zahl 60 mehrfach benutzten, und daß, wenn ihnen eine Einteilung des Kreises in 360 Grade geläufig war, diese Einteilung von Laien so gedeutet werden konnte, daß jeder Grad den Weg zu versinnlichen bestimmt war, welchen die Sonne bei ihrem vermeintlichen Umlaufe um die Erde jeden Tag zurücklegte[2]). Wollte man nun von dieser Kreisteilung, von diesen Graden, wieder größere Mengen zusammenfassen, so lag es nahe, den Halbmesser auf dem Kreisumfang herumzutragen. Man erkannte, wie wir fürs erste uns zu glauben bitten, die Begründung uns bis zum Schlusse des Kapitels versparend, wo wir uns mit baylonischer Geometrie beschäftigen müssen, daß ein sechsmaliges Herumtragen des Halbmessers als Sehne den Kreis vollständig bespannte und zum Ausgangspunkte zurückführend dem regelmäßigen Sechsecke den Ursprung gab. Dann aber enthielt jeder dieser größeren von einem Halbmesser bespannten Bögen genau 60 Teile und faßte man sie besonders ins Auge, so war damit wieder die Sechzigteilung, war zugleich die Sechsteilung gewonnen. Letztere klingt in den Wörtern *śiba* großes sechs = 7 und *śam-na* = 6 + 2 = 8 wieder[3]) und könnte auch in den so häufig wiederkehrenden Sechsteln (S. 23) sich erhalten haben. Der Ursprung der Sechzigteilung kann dabei sehr leicht in Vergessenheit geraten sein, so daß man beispielsweise in jener Mondbeleuchtungstheorie (S. 25) den vierten Teil der Mondscheibe in 60 Teile zerlegte, während man den Graden entsprechend 90 solcher Teile im Quadranten angenommen hätte, wenn nicht, wie wir sagten, der Ursprung der Sechzigteilung bereits vergessen gewesen wäre.

Wir haben (S. 37) angedeutet, das Ner von $600 = 6 \times 10^2$ habe leicht in das Sexagesimalsystem der Babylonier Eingang finden können. Wie mag man sich seiner bedient haben? Wollen wir unsere Vermutung über diesen Gegenstand erörtern, so müssen wir über das Rechnen der Babylonier einiges vorausschicken. Daß sie rechneten, viel und gut rechneten, wissen wir bereits. Daß die Ergebnisse ihres

---

[1]) Sitzungsbericht der math. phys. Klasse d. bair. Akad. d. Wissenschaft. in München für 1871, S. 128 flgg. [2]) Diese Hypothese über den Ursprung der Kreiseinteilung in 360 Grade ist zuerst von Formaleoni, Saggio sulla nautica antica dei Veneziani (Venedig 1788) ausgesprochen worden, wie S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie (Stuttgart 1890), S. 173, Note 1 berichtet. [3]) Bertin l. c. p. 383.

wissenschaftlichen Rechnens im Sexagesimalsysteme niedergeschrieben wurden, wissen wir gleichfalls. Aber wie gelangte man zu diesen Ergebnissen? Nach dem, was wir in der Einleitung (S. 6) auseinandergesetzt haben, werden unsere Leser sich nicht erstaunen, wenn wir für die vorderasiatischen Völker der alten Zeiten ein Fingerrechnen und ein instrumentales Rechnen in Anspruch nehmen, allerdings mehr auf allgemeine Notwendigkeit als auf besondere Zeugnisse uns stützend. Für das Fingerrechnen steht eine vereinzelte Notiz zu Gebote, der Perser Orontes behaupte, der kleine Finger bedeute sowohl eine Myriade als Eins[1]), sowie die Erwähnung dieses Verfahrens bei Schriftstellern, welche mit der Geschichte jüdischer Wissenschaft sich beschäftigt haben[2]). Noch schlimmer vollends steht es mit der äußeren Begründung des babylonischen Rechenbrettes, für welches nur der einzige Umstand geltend gemacht werden kann, daß bei den Stämmen Mittelasiens bis nach China hinüber ein Rechenbrett mit Schnüren zu allen Zeiten in Übung gewesen zu sein scheint, während gerade in jener Gegend eine Veränderung der Sitten und Gebräuche wenigstens in geschichtlich genauer bekannter Zeit so gut wie nicht vorgekommen ist, während andererseits für babylonisch-chinesische Beziehungen ältester Vergangenheit neben dem, was vorher von der Dauer des längsten Tages gesagt wurde, noch eine andere bedeutungsvolle Ähnlichkeit uns nachher beschäftigen wird. Gibt man uns auf diese ziemlich unsichere Begründung, deren einzige Unterstützung wir im 4. Kapitel in einem griechischen Vasengemälde erlangen werden, zu, daß die Babylonier eines Rechenbrettes sich bedient haben müssen, weil diese Annahme schließlich immer noch naturgemäßer ist, als wenn man voraussetzen wollte, es seien alle Rechnungen von ihnen ohne dergleichen Hilfsmittel vollzogen worden, so schließen wir folgendermaßen weiter[3]). Das Rechenbrett, auf dessen Schilderung wir im 2. Kapitel zurückkommen werden, muß naturgemäß dem herrschenden Zahlensystem sich anschließen, und wo es zwei Zahlensysteme gibt, ein Dezimal- und ein Sexagesimalsystem, da müssen auch zweierlei Bretter existiert haben, oder aber es muß die Möglichkeit geboten worden sein auf demselben Brette bald so, bald so zu rechnen. Die Veränderung bestand im letzteren Falle z. B. darin, daß man bald mehrerer bald weniger Rechenmarken sich bediente. So forderte das Rechenbrett des Dezimalsystems für jede Rangordnung höchstens 9 Marken, während dasjenige des Sexagesimalsystems

---

[1]) Pott II, 36 nach Suidas. [2]) Friedlein in der Zeitschr. Mathem. Phys. IX, 329. [3]) Vergl. unsere Rezension von Opperts *Étalon des mesures assyriennes* in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor. literar. Abtlg. 161.

die Notwendigkeit in sich schloß bis zu 59 Einheiten jeder Rangordnung anlegen zu können. Ebensoviele Marken auf dem Raume, welcher für je eine Rangordnung bestimmt war, unmittelbar zur Anschauung zu bringen ist geradezu unmöglich. Alle Übersichtlichkeit und mit ihr die Brauchbarkeit des Rechenbrettes ging verloren, wenn nicht auf ihm in diesem Falle innerhalb des Sexagesimalsystems das Dezimalsystem zu Hilfe gezogen wurde. Das aber hatte so wenig Schwierigkeit, daß ähnliche Vorrichtungen, wie wir sie jetzt beschreiben wollen, nur in etwas veränderter Anwendung uns wiederholt begegnen werden. Wir denken uns in jeder Stufenabteilung des Rechenbrettes zwei Unterabteilungen, eine obere und eine untere. Jene etwa sei für die Einer, diese für die Zehner der betreffenden Ordnung bestimmt. Jene bedarf zur Bezeichnung aller vorkommenden Zahlen 9, diese 5 Marken. Um nun die obere Abteilung der ersten Stufe von der unteren in der Sprache zu unterscheiden, hatte man die althergebrachten Namen Einer und Zehner. In der folgenden Stufe stand für die Marken der oberen Abteilung der Name Soss, für die der unteren der Name Ner zur Verfügung, beziehungsweise diese Namen wurden zum Zwecke der Benennung der Abteilungen erfunden. In der dritten Stufe ist uns nur Sar als Name der oberen Abteilung bekannt. Für die untere Abteilung, deren Einheit 10 Sar oder 36 000 betrug, müßte, wenn unsere Annahmen richtig sind, gleichfalls ein Wort erfunden worden sein. Freilich ist ein solches noch nicht bekannt geworden, aber auch Rechnungen sind noch nicht bekannt geworden, in welchen innerhalb des Rahmens des Sexagesimalsystems Zahlen über 36 000 sich ergaben und schriftlich aufgezeichnet werden mußten; solche Rechnungen dürften überhaupt zu den Seltenheiten gehört haben. Eine Zeitdauer von 36 000 Jahren scheint Berosus allerdings den Babyloniern als besonders hervorgehobenen Zeitraum zuzuschreiben[1]).

Wir haben die Besprechung einer bedeutungsvollen Ähnlichkeit zugesagt, welche auf babylonisch-chinesische Beziehungen deute. Eigentlich ist es eine Ähnlichkeit zwischen Zahlenträumereien der Griechen und der Chinesen. Bei Plutarch wird den Pythagoräern nacherzählt, die sogenannte Tetraktys oder 36 sei, wie ausgeplaudert worden ist, ihr höchster Schwur gewesen; man habe dieselbe auch das Weltall genannt als Vereinigung der vier ersten Geraden und Ungeraden[2]), d. h. $36 = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7$. Diese heilige Vierzahl läßt Plutarch an einer zweiten Stelle durch Platon

---

[1]) Brandis, Das Münz-, Maß- und Gewichtssystem in Vorderasien S. 11.
[2]) Plutarch, *De Iside et Osiride*. 75.

zu 40 ergänzt werden[1]). Gewiß ist dieses eine unfruchtbare und darum nicht naturgemäß sich wiederholende Spielerei. Um so auffallender muß es erscheinen, wenn in China das erstere System dem Kaiser Fu hi, das zweite vollkommenere dem Où wâng, dem Vater des Kaisers Où wâng, der um 1200 v. Chr. regiert haben soll, als Erfinder zugewiesen wird[2]). Chinesische Rückdatierungen sind zwar, wie wir seinerzeit erörtern müssen, von Zuverlässigkeit weit entfernt. Wir legen den Jahreszahlen als solchen deshalb hier keinen sonderlichen Wert bei, aber um so mehr der Übereinstimmung sinnloser Träumereien in so weit entlegener Gegend. Selbst die nicht zu vernachlässigende Tatsache, daß die vervollkommnete Tetraktys mit jener runden Zahl 40 übereinstimmt (S. 34), die den ältesten hebräischen Sagen vorzugsweise anzugehören schien, kann uns in der Vermutung nicht irre machen, daß wir es hier mit einem Stücke babylonischer Zahlensymbolik zu tun haben, welches nach Westen und nach Osten sich fortgepflanzt hat.

Babylonische Zahlensymbolik selbst ist über allen Zweifel gesichert. Träumereien über den Wert der Zahlen nahmen unter den religions-philosophischen Begriffen der Chaldäer einen bedeutsamen Platz ein. Jeder Gott wurde durch eine der ganzen Zahlen zwischen 1 und 60 bezeichnet, welche seinem Range in der himmlischen Hierarchie entsprach. Eine Tafel aus der Bibliothek von Ninive hat uns die Liste der hauptsächlichsten Götter nebst ihren geheimnisvollen Zahlen aufbewahrt. Es scheint sogar, als sei gegenüber dieser Stufenleiter ganzer Zahlen, die den Göttern beigelegt wurden, eine andere von Brüchen vorhanden gewesen, welche sich auf die Geister bezogen und gleichfalls ihrem jeweiligen Range entsprachen[3]).

Als weitere Stütze mögen die zahlensymbolischen Träumereien im VII. und VIII. Kapitel des Buches Daniel angeführt sein, eines Buches, das unter dem ersichtlichen Einflusse babylonischer Denkart geschrieben ist. Ähnliches erhielt sich auf dem Boden Palästinas Jahrhunderte lang, wobei wir nur auf die Offenbarung Johannes als Beispiel hinweisen wollen. Wir könnten aber auch auf die jüdische Kabbala einen Fingerzeig uns gestatten, die, so spät auch das Buch Jezirah und andere kabbalistische Schriften verfaßt sein mögen, der Überlieferung nach bis in die Zeit des Exils hinaufzureichen scheint. Kabbalistisch ist die sogenannte Gematria, wenn ein Wort durch

---

[1]) Plutarch, *De animae procreatione in Timaeo Platonis* 14. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 124, wo auch auf die Ähnlichkeit mit den Stellen bei Plutarch aufmerksam gemacht ist. [3]) F. Lenormant, *La magie chez les Chaldéens*. Paris 1874, pag. 24.

das andere ersetzt wurde unter der Voraussetzung, daß die Buchstaben des einen Wortes als Zahlzeichen betrachtet dieselbe Summe gaben, wie die des anderen Wortes. Über diese Zahlenbedeutung hebräischer Buchstaben und ihr vermutliches Alter werden wir zwar erst im vierten Kapitel im Zusammenhange mit ähnlichem Gebrauche der Syrer, der Griechen handeln und können um einiger Beispiele willen unseren Gang nicht unterbrechen; es sei trotzdem gestattet hier die Kenntnis jener Bezeichnungsart für einen Augenblick vorauszusetzen. Gematrie ist es, wenn das jüdische Jahr 355 Tage zählte und damit in Verbindung gebracht wurde, daß die Buchstaben des uralten ursprünglich eine Wiederholung bedeutenden Wortes Jahr שנה $= 5 + 50 + 300$ genau 355 ausmachen. Gematrie macht sich in den Bibelkommentaren breit. Als nun Abram hörte, heißt es in der Heiligen Schrift, daß sein Bruder gefangen war, wappnete er seine Knechte, 318 in seinem Hause geboren und jagte ihnen nach bis gen Dan[1]). Die Erklärer wollen, der Überlieferung folgend, 318 sei hier statt des Namens Elieser gesetzt, der in der Tat אליעזר $= 200 + 7 + 70 + 10 + 30 + 1 = 318$ gibt, wenn man von dem Gesetze der Größenfolge Umgang nimmt und nur den Zahlenwert der einzelnen Buchstaben, wie sie auch durcheinander gewürfelt erscheinen mögen, beachtet. Im Propheten Jesaias verkündet der Löwe den Fall Babels[2]). Die Erklärer haben wieder die Buchstaben des Wortes Löwe אריה $= 5 + 10 + 200 + 1 = 216$ addiert. Die gleiche Summe geben die Buchstaben חבקוק $= 100 + 6 + 100 + 2 + 8 = 216$ und somit sei Habakuk mit diesem Löwen gemeint. Ja eine Spur solcher Gematrie will man bereits in einer Stelle des Propheten Sacharja erkannt haben[3]), und wäre die uns einigermaßen gekünstelt vorkommende Erklärung richtig, so wäre damit schon im VII. vorchristlichen Jahrhundert ein arithmetisches Experimentieren, wäre zugleich, was vielleicht noch wichtiger ist, für eben jene Zeit die Benutzung der hebräischen Buchstaben in Zahlenbedeutung nachgewiesen. Wir ziehen zunächst nur den Schluß, um dessenwillen wir alle diese Dinge vereinigt haben, daß die Babylonier in ältester Zeit Zahlenspielereien sich hinzugeben liebten, die bei ihnen einen allerdings ernsten magischen Charakter trugen, und daß von ihnen ähnliches zu anderen Völkern übergegangen ist.

Es ist keineswegs unmöglich, daß aus den magischen Anfängen sich die Beachtung von merkwürdigen Eigenschaften der Zahlen entwickelte, daß eine Vorbedeutungsarithmetik bei ihnen sich zur Kennt-

---

[1]) I. Mose 14, 14. [2]) Jesaias 21, 8. [3]) Vgl. Hitzig, Die zwölf kleinen Propheten S. 378 flgg. zu Sacharja 12, 10.

nis zahlentheoretischer Gesetze erhob. Wissen wir doch, woran wir hier zusammenfassend erinnern wollen, von dem Vorkommen eines ausgebildeten Sexagesimalsystems, von der Benutzung arithmetischer und geometrischer Reihen, von der Bekanntschaft mit Quadrat- und Kubikzahlen in alt-babylonischer Zeit, und auch gewisse Teile der Proportionenlehre sollen, wie wir vorgreifend erwähnen, griechischer Überlieferung gemäß aus Babylon stammen.

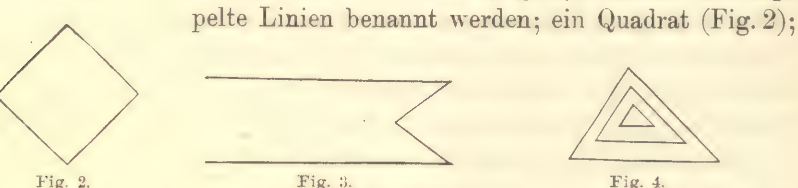
Mit der Lehre von den Vorbedeutungen ist überhaupt die babylonische Wissenschaft aufs engste verknüpft gewesen. Vorbedeutungen zu suchen war, wie wir an jenem zu König Sargons Zeiten verfertigten Kalender gesehen haben, ein wesentlicher Zweck der Beobachtungen von Himmelsvorgängen. Neben dem Aufsuchen von Vorbedeutungen widmete sich die Priesterschaft des Landes dem Hervorbringen von Ereignissen; sie trachtete das Böse abzuwenden und teils durch Reinigungen, teils durch Opfer oder Zauberei zum Guten zu verhelfen[1]). Die Priesterschaft des medischen Nachbarvolkes bestand ebenfalls aus gewerbmäßigen Hexenmeistern, und sie, die Magusch, vererbten ihren Namen auf die Magie[2]), wie in Rom der Name Chaldäer gleichbedeutend war mit Sterndeuter, Wahrsager, gelegentlich auch mit Giftmischer. Schon im Jahre 139 v. Chr. wurden deshalb nach der genauen Angabe des Valerius Maximus die Chaldäer aus Rom verwiesen[3]). Die Wahrsagung beschränkte sich keineswegs auf die Beobachtung der Gestirne, deren Einfluß auf das menschliche Geschick man zu kennen wähnte. Die Punktierkunst[4]) der persischen Zauberer, vielfach erwähnt in den Märchen der Tausend und eine Nacht und darin bestehend, daß auf ein mit Sand überdecktes Brett Punkte und Striche gezeichnet wurden, deren Verschiebungen und Veränderungen infolge eines Anstoßes an den Rand des Brettes beobachtet wurden, diese Kunst, die sich erhalten hat in dem Wahrsagen aus dem Kaffeesatze, die verwandt ist dem Bleigießen in der Neujahrsnacht, welches da und dort noch heute geübt wird, sie dürfte selbst bis in die babylonische Zeit hinaufragen. Wenigstens ist es sicher, daß es eine Vorbedeutungsgeometrie in Babylon gab. Wir besitzen die Übersetzung einer solchen[5]), und wenn

---

[1]) Diodor II, 29, 3. [2]) Maspero-Pietschmann, S. 466. [3]) Fischer, Römische Zeittafeln (Altona 1846) S. 134 mit Beziehung auf Valerius Maximus lib. I, cap. 3, § 2. [4]) Alex. von Humboldt in seinem Aufsatze über Zahlzeichen usw. (Crelles Journal IV, 216 Note) nennt diese Kunst *raml* und verweist dafür auf Richardson und Wilkins, *Diction. Persian and Arabic* 1806, T. I, pag. 482. Vgl. über die Punktierkunst auch Steinschneider, Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XXV, 396 u. XXXI, 762 flgg. [5]) *Babylonian augury by means of geometrical figures by* A. H. Sayce in den *Transactions of the society of biblical archaeology* IV, 302—314.

uns schon die Neigung bemerkenswert erscheint Vorbedeutungen aus allem zu entnehmen, was in irgendwie wechselnden Verbindungen auftritt, so müssen wir andererseits auch die vorkommenden Figuren prüfen, deren Kenntnis die Babylonier somit sicherlich besaßen, eine Kenntnis, die als Anfang der Geometrie gelten darf, so wie wir bei den Ägyptern zu ähnlichem Zwecke alte Wandzeichnungen durchmustern werden. In jener Vorbedeutungsgeometrie sind insbesondere folgende Figuren hervorzuheben. Ein Paar Parallellinien (Fig. 1), welche als doppelte Linien benannt werden; ein Quadrat (Fig. 2);

Fig. 1.



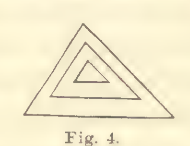


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

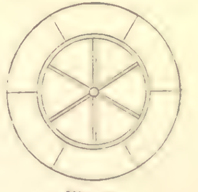
eine Figur mit einspringendem Winkel (Fig. 3); eine nicht ganz vollständig vorhandene Figur, welche der Übersetzer zu drei einander umschließenden Dreiecken (Fig. 4) zu ergänzen vorschlägt[1]). Ob auch ein rechtwinkliges Dreieck vorkommt, ist nicht mit ganzer Sicherheit zu erkennen, aber wahrscheinlich. Von Interesse ist im verbindenden Texte das sumerische Wort *tim*, welches Linie, ursprünglich aber Seil bedeutete, so daß es nicht zu dem Unmöglichkeiten gehört, es habe eine Art von Seilspannung, vielleicht freilich nur ein Messen mittels des Seiles, wofür Vermutungsgründe uns sogleich bekannt werden sollen, in Babylon stattgefunden. Von hoher Wichtigkeit ist ferner ein in jenem Texte benutztes, aus drei sich symmetrisch durchkreuzenden Linien bestehendes Zeichen ⋇, welches der Herausgeber durch „Winkelgrad" übersetzt hat. Diese Übersetzung ist gerechtfertigt durch anderweitiges Vorkommen und gestattet selbst weitgehende Folgerungen.

Im britischen Museum befindet sich ein als K 162 bezeichnetes Bruchstück, welches einem babylonischen Astrolabium oder ähnlichem angehört hat und welches in vier Fächern mit Inschriften in Keilschrift bedeckt ist. Die Bedeutung dieser Inschriften kann nicht anders lauten[2]) als daß in zwei Monaten, deren Name angegeben ist, der Ort von vier Sternen, zwei Sterne in dem einen, zwei in dem anderen Monate, aufgezeichnet ist, und diese Örter heißen 140 Grad, 70 Grad, 120 Grad, 60 Grad nach Sayces Übersetzung. Der Grad ist auch hier in allen vier Fällen durch das Zeichen der drei ein-

[1]) Privatmitteilung von H. Sayce ebenso wie die nachfolgende Bemerkung über das rechtwinklige Dreieck. [2]) Privatmitteilung von H. Sayce.

ander schneidenden Linien ausgedrückt. Nehmen wir aber diese Übersetzung einmal als richtig an, so ist in ihr eine Bestätigung unserer Meinung über geometrische Benutzung des Sexagesimalsystems enthalten. Bei der Zählung der Winkelgrade, deren 360 auf der Kreisperipherie zu unterscheiden sind, faßte man, meinen wir, je 60 in eine neue Bogeneinheit zusammen, welche man erhielt, indem man den Halbmesser sechsmal auf dem Umkreise herumtrug. Für die erste Hälfte unserer Behauptung gibt es keine bessere Stütze als jenes Gradzeichen. Die drei symmetrisch gezeichneten Linien teilen ja den um den gemeinsamen Schnittpunkt befindlichen Raum in sechs gleiche Teile und lassen damit jeden dieser sechs Teile als besonders wichtig hervortreten!

Auch an weiterer Bestätigung dafür, daß den Babyloniern die Sechsteilung des Kreises bekannt war, fehlt es nicht. Wir werden im 3. Kapitel sehen, daß auf ägyptischen Wandgemälden es gerade asiatische Tributpflichtige sind, welche auf ihren überbrachten Gefäßen Zeichnungen haben, bei welchen der Kreis durch sechs Durchmesser in zwölf Teile geteilt ist. Übereinstimmend zeigen ninivitische Denkmäler in ihren Abbildungen des Königswagens dessen Räder mit sechs Speichen versehen[1] (Fig. 5). Endlich ist damit in Einklang die Dreiteilung eines rechten Winkels, welche auf einer assyrischen Tontafel geometrischen Inhaltes durch G. Smith entdeckt worden ist, bevor er seine letzte Reise, von welcher er nicht mehr heimkehren sollte, nach den Euphratländern antrat; eine Entdeckung, aus welcher weitere Folgerungen zu ziehen nicht gestattet ist, bevor der ganze Text der Öffentlichkeit übergeben ist. Darauf aber wird man, wie zu befürchten steht, noch lange warten müssen, da die betreffende Tafel seit der Abreise ihres Entdeckers nicht wieder gesehen worden ist, also vermutlich durch ihn in irgend eine Ecke für künftiges Studium beiseite gestellt, eines Zufalles harret, der gerade auf sie unter den zahllos vorhandenen Tafeln die Aufmerksamkeit lenkt.


Fig. 5.

Ist aber nunmehr die Sechsteilung des Kreises als bewußte geometrische Arbeit der Babylonier außer Zweifel gesetzt, so wird man auch unsere Behauptung, die Sechsteilung sei durch Herumtragen des Halbmessers erfolgt, habe also die Kenntnis des Satzes von der Seite des regelmäßigen Sechsecks mit eingeschlossen, in den Kauf

---

[1] *Niniveh and its remayns by* A. H. Layard. London 1849. I. 337. Weitere Abbildungen von sechsspeichigen Rädern bei Bezold, Ninive und Babylon Fig. 17, 46, 52, 98 auf Seite 22, 58, 66, 128.

nehmen müssen. Es ist nun einmal, außer im Zusammenhang mit diesem Satze, ein Grund zur geometrischen Sechsteilung des Kreises nicht vorhanden. Außerdem sind wir imstande eine Bestätigung aus biblischer Nachahmung anzuführen. Wenn man, ohne mathematische Kenntnisse zu besitzen, sah, daß der Halbmesser 6mal auf dem Kreisumfange als Sehne herumgetragen nach dem Ausgangspunkte zurückführt, so lag es sehr nahe Sehne und Bogen zu verwechseln und zur Annahme zu gelangen, der Kreisumfang selbst sei 6mal der Halbmesser, beziehungsweise 3mal der Durchmesser. Das gab die erste, freilich sehr ungenaue Rektifikation einer krummen Linie, mit $\pi = 3$.

Diese Formel findet sich nun angewandt bei der Schilderung des großen Waschgefäßes, das unter dem Namen des ehernen Meeres bekannt eine Zierde des Tempels bildete, welchen Salomo von 1014 bis 1007 erbauen ließ[1]). Von diesem Gefäße heißt es: Und er machte ein Meer, gegossen, 10 Ellen weit von einem Rande zum andern, rund umher, und 5 Ellen hoch, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Maß ringsum[2]). Dabei ist offenbar $30 = 3 \times 10$. Mögen nun die Bücher der Könige erst um das Jahr 500 v. Chr. abgeschlossen worden sein, so ist doch unbestritten, daß in dieselben ältere Erinnerungen, wohl auch ältere Aufzeichnungen Aufnahme fanden, und so kann insbesondere die Erinnerung an eine Schnur, mit deren Hilfe Längenmessungen vorgenommen wurden, kann die Erinnerung an die Maße des ehernen Meeres, an den Durchmesser 10 bei einem Kreisumfange 30, eine sehr alte sein. Die letztere hat sich auch nach abwärts durch viele Jahrhunderte fortgeerbt, und der Talmud wendet in der Mischna die Regel an: Was im Umfang 3 Handbreiten hat, ist 1 Hand breit[3]). Zugleich aber liefert die angeführte Bibelstelle den Beweis, daß der Umfang von 30 Ellen wirklich aus 3 mal 10 berechnet und nicht etwa infolge ungenauer Messung gefunden worden ist. Eine messende Schnur mußte jedenfalls um den äußeren Rand des ehernen Meeres herumgelegt werden und wäre etwa $31\frac{1}{2}$ Ellen lang gewesen, wenn der Durchmesser von 10 Ellen sich gleichfalls auf die Ausdehnung bis zur äußeren Randgrenze bezog. War aber, was bei tatsächlicher Messung fast wahrscheinlicher ist, der innere Durchmesser 10 Ellen lang, so konnte eine Meßschnur ringsherum leicht eine Länge von 32 Ellen und mehr erfordern.

---

[1]) Die Datierung nach Oppert: *Salomon et ses successeurs* in den *Annales de philosophie chrétienne* T. XI u. XII 1876. [2]) I. Könige 7, 23 und II. Chronik 4, 2. [3]) Zuerst berücksichtigt in unserer Besprechung von Oppert, *Étalon des mesures assyriennes* in der Zeitschr. Math. Phys. XX, histor.-literar. Abtlg. 164.

Es ist daher unmöglich, daß es dann 30 Ellen hieße, wie es der Fall ist.

Nachdem wir für die geometrischen Kenntnisse der Babylonier auf Schriftsteller zweiter Überlieferung einmal eingegangen sind, wollen wir noch einige ähnlich verwertbare Stellen aufsuchen. Eine solche Stelle führen wir nur an, um sie sogleich zu verwerfen. Bei der Beschreibung des Salomonischen Tempelbaues heißt es nach Luthers Übersetzung: Und am Eingange des Chors machte er zwei Türen von Ölbaumholz mit fünfeckigen Pfosten[1]). Danach wäre an eine Kenntnis des Fünfecks, mutmaßlich des regelmäßigen Fünfecks in Vorderasien in sehr alter Zeit zu denken. Da die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks eine verhältnismäßig bedeutende Summe geometrischer Sätze als Vorbedingung enthält, so wäre diese Tatsache um so überraschender, als nirgend auf asiatischen Denkmälern bei eifrigstem Suchen in den betreffenden Kupferwerken ein Fünfeck von uns aufgefunden worden ist. Die Stelle selbst ist aber von Luther falsch übersetzt, und so dunkel ihr Sinn ist, die Bedeutung, daß von einem Fünfecke irgendwie die Rede sei, hat sie sicherlich nicht[2]).

Um so häufiger ist von viereckigen Figuren in der Bibel die Rede und zwar von Quadraten sowie von Rechtecken. Es ist vielleicht zum Vergleiche mit noch zu erwartenden Entzifferungen babylonischer Texte nützlich das Augenmerk auf die Maßzahlen dieser biblischen Rechtecke[3]) zu richten. Das Verhältnis 3 zu 4 für zwei senkrecht zueinander zu denkende Abmessungen, oder auch 10 mal 3 zu 4, 3 zu 5 mal 4 kommt wiederholt vor, und wenn wir nicht verschweigen wollen noch dürfen, daß ein Rechteck von 3 zu 5 ebenfalls an häufigeren Stellen sich bemerklich macht, so ist doch nicht ausgeschlossen, daß jene ersterwähnten Maßzahlen 3 zu 4 dazu dienten, einen rechten Winkel mittels des Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 zu sichern. Wenigstens wird die Kenntnis dieses letzteren Dreiecks in China von uns nachgewiesen werden.

Dafür aber, daß die Babylonier den rechten Winkel kannten, und zwar nicht bloß als in der Baukunst zur Anwendung kommend, sondern als der Geometrie, der Astronomie dienstbar, sind Beweisgründe zur Genüge vorhanden. Wir erinnern an das wahrscheinlich gemachte Vorkommen des rechten Winkels in jener von Sayce über-

---

[1]) I. Könige 6, 31. [2]) Wir berufen uns für diese Behauptung auf mündliche Mitteilungen von Prof. Dr. A. Merx. Allioli hat die Stelle übersetzt „mit Pfosten von fünf Ecken“ und die Erklärung beigefügt, die Türpfosten bildeten dadurch fünf Ecken, daß über der viereckigen Türe noch ein dreieckiger Giebel angebracht war. [3]) II. Mose 36, 15 und 21; 37, 10; 39, 9–10. I. Könige 7, 27 und häufiger.

setzten Vorbedeutungsgeometrie. Wir erinnern an die den rechten Winkel selbst voraussetzende Dreiteilung desselben. Wir haben ferner den ausdrücklichen Bericht Herodots, daß von Babylon her die Hellenen mit dem Polos und dem Gnomon bekannt geworden seien [1]). Mag man auch nicht mit aller Sicherheit wissen, welcherlei Vorrichtungen unter diesen Namen verstanden wurden, soviel ist gewiß, daß es bei ihnen um Zeiteinteilung mittels der Länge des von der Sonne erzeugten Schattens sich handelte, daß also ein Stab senkrecht zu einer Grundfläche aufgerichtet werden mußte. Der Übergang des Gnomon zu den Griechen fand von Babylon aus statt, wann, ist zweifelhaft. Ein Berichterstatter nennt Anaximander als den, der um 550 den Gnomon einführte [2]); ein anderer nennt uns dafür Anaximenes [3]); ein dritter nennt gar erst Berosus als Erfinder der Sonnenuhr [4]), womit nur jener Chaldäer gemeint sein kann, welcher unter Alexander dem Großen geboren um 280 v. Chr. seine Blütezeit hatte und als Historiker am bekanntesten ist, wenn auch das Altertum ihn vorzüglich als Astrologen und um seiner auf der Insel Kos gegenüber von Milet gegründeten und stark besuchten Schule wegen rühmte [5]). Älterer Zeit als diese Angaben gehört der biblische Bericht an, welcher von einer Sonnenuhr zu erzählen weiß. Er geht hinauf bis auf König Ahas von Juda, dessen Regierung von 743—727 währte [6]). Wenn in jenem Berichte der Schatten am Zeiger Ahas 10 Stufen (oder Grade) hinter sich zurückging, die er war niederwärts gegangen, so ist diese Beschreibung von größter Deutlichkeit, mag man über das beschriebene Ereignis selbst denken, wie man will. Wir könnten auf eben diese Stelle zum Überflusse noch hinweisen, um sie als Beleg altasiatischer Kreiseinteilung zu benutzen, wenn ein solcher Beleg noch irgend erwünscht scheinen sollte.

Fassen wir wieder zusammen, was auf geometrischem Gebiete den Babyloniern bekannt gewesen ist, so haben wir Gewißheit für die Teilung des Kreises in 6 Teile, dann in 360 Grade, Gewißheit für die Kenntnis von Parallellinien, von Dreiecken, Vierecken, Gewißheit für die Herstellung rechter Winkel. Wahrscheinlich ist die Kenntnis der Gleichheit zwischen Halbmesser und Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, wahrscheinlich die

---

[1]) Herodot II, 109. [2]) Suidas s. v. Ἀναξίμανδρος. [3]) Plinius *Historia naturalis* II, 76. [4]) Vitruvius IX, 9. [5]) Die von Bailly, *Histoire de l'astronomie ancienne*. Paris 1775, Livre IV, § 35 und 36 ausgehende Meinung, als seien zwei Berosus zu unterscheiden, der von Kos und der Historiker, ist von neueren Fachgelehrten entschieden verworfen. Vgl. Häbler, Astrologie im Alterthum (1879), S. 14—16. [6]) Jesaia 38, 8 und II. Könige 20, 11. Die Datierung nach Oppert, *Salomon et ses successeurs*.

Benutzung des Näherungswertes $\pi = 3$ bei Bemessung des Kreisumfanges. Möglich endlich ist die Prüfung rechter Winkel durch die Seitenlängen des ein für allemal bekannten Dreiecks 3, 4, 5.

Die Hoffnung bleibt für Babylon wie für Ägypten nicht ausgeschlossen, daß Auffindung und Entzifferung neuer Denkmäler es noch gestatten werden, die kaum erst seit wenigen Jahrzehnten fester gestützte Geschichte der Geistesbildung jener Länder umfassender zu gestalten. Für die Geschichte der Mathematik in den Euphratländern bergen, wie wir schon gesagt haben, vielleicht die Schutthügel von Senkereh noch Unschätzbares. Es muß wohl die Mathematik dort eine erzählenswerte Geschichte erlebt haben, wenn wir auch nur daraus schließen, daß sie alten Schriftstellern würdig däuchte sich mit ihr zu beschäftigen. So wird berichtet, ein gewisser Perigenes habe über die Mathematiker von Chaldäa geschrieben [1]), wenn diese Lesart der an sich viel weniger wahrscheinlichen „über die Mathematiker von Chalcidien" vorzuziehen ist, und Mathematisches enthielt jedenfalls auch das umfassende Werk des Jamblichus von Chalcis über Chaldäisches, aus dessen 28. Buche eine Notiz sich erhalten hat [2]). Nur um Mißverständnissen vorzubeugen, welche auch bei sonst zuverlässigen Schriftstellern sich vorfinden, sei hier bemerkt, daß mit diesem wissenschaftlichen Werke des Jamblichus von Chalcis über Chaldäisches, welches gegen Ende des IV. S. n. Chr. geschrieben sein muß, der Roman, welcher unter dem Titel „Babylonisches" in der zweiten Hälfte des II. S. n. Chr. auch von einem Jamblichus [3]) verfaßt worden ist, ja nicht verwechselt werden darf.

---

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen, S. 1—2. [2]) Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung. III. Teil, 2. Abtlg. 2. Aufl. Leipzig 1868, S. 615. [3]) Erw. Rohde, Der griechische Roman und seine Vorläufer. Leipzig 1876, S. 364 flgg.



II. Ägypter.



2. Kapitel.

Die Ägypter. Arithmetisches.

Die älteste einigermaßen ausgiebige mathematische Literatur, über welche man zurzeit verfügt, ist die ägyptische. Mag man die vorhandenen Schriften als Handbücher oder als Schülerhefte betrachten, für den Nutzen, den sie uns gewähren, gilt das gleich. Sie sind einmal vorhandeu, und wir haben uns mit ihnen zu beschäftigen, haben vorher weniges über ägyptische Kultur vorauszuschicken. Ägypten sei ein Geschenk des Nils, sagt Herodot[1]), und derselbe Schriftsteller leitet an einer anderen Stelle[2]), die uns noch beschäftigen wird, die Erfindung der Geometrie aus der Notwendigkeit her, die infolge der Nilüberschwemmungen verloren gegangenen Begrenzungen wieder herzustellen. Wirklich ist die Kultur des Landes, wie das Land selbst ohne jenen Strom, der das Erdreich herabgeschwemmt hat aus den Hochlanden des inneren Afrikas, nicht denkbar. Die alljährlich wiederkehrende Wasserfülle bringt in gleicher Regelmäßigkeit große Schlammmassen mit sich, die sie dort, wo der Absturz des Stromes an Steilheit abnimmt, wo das Bett der Überflutung offener ist, fallen läßt. Die Wasser verlaufen sich, und die Sonne Afrikas härtet den neuen Boden. Auf das mögliche Altertum des bewohnten und angebauten Schwemmlandes wirft es ein gewisses Licht, daß man aus dem gegenwärtig noch wahrnehmbaren und meßbaren Schlammabsatze berechnet hat, daß unter gleichen Bedingungen weit über 70 Jahrtausende notwendig wären, um die Entstehung Ägyptens in seiner jetzigen Ausdehnung zu erklären[3]). Nehme man immerhin an, daß ehemals eine viel schnellere Vergrößerung stattfand, es bleibt unter allen Umständen eine Zahl übrig, welche nur mit der sagenmäßigen Vergangenheit chaldäischer und chinesischer Astronomie in Vergleich zu bringen ist.

Das so alte Land gewann seine Bevölkerung nach der durch Diodor[4]) überlieferten Meinung von Süden her aus Äthiopien, wäh-

---

[1]) Herodot II, 5. [2]) Herodot II, 109. [3]) Maspero-Pietschmann S. 7.
[4]) Diodor III, 3—8.

rend der biblische Berichterstatter Mizraim[1]) den Stammvater der Ägypter, einen Enkel Noahs, aus Chaldäa einwandern läßt. Die neuere Forschung[2]), welche ihre wesentliche Grundlage in ägyptischen Denkmälern besitzt, hat noch immer keine Entscheidung gebracht, ob die eine oder die andere Sage mehr Glauben verdient. Sichergestellt ist nur, daß in ältesten Zeiten in Ägypten ein Südland von einem Nordlande sich unterschied. Vielleicht kam dann von Süden her der erste König, der die beiden Gebiete beherrschend die weiße Krone des Südens mit der roten Krone des Nordens auf seinem Haupte vereinigte. Bildung, Kunst und Wissenschaft dagegen sind jedenfalls in nordsüdlicher Richtung vorgedrungen. Die ägyptische Sprache hält man gegenwärtig für eine ältere Schwester der semitischen Sprachen. Freilich muß die Trennung erfolgt sein, als beide in ihrer Entwicklung noch sehr zurück waren, und der semitische Stamm muß als der für Sprachbildung befähigtere angesehen werden.

Das ägyptische Reich wurde durch XXX aufeinanderfolgende Dynastien beherrscht. Der Gründer der I. Dynastie Mena, Menes der Griechen, wird auf das Jahr 4455 vor Christi Geburt etwa gesetzt, wobei allerdings nicht unbemerkt bleiben darf, daß bei diesen ältesten Datierungen eine Unsicherheit von 100, auch von 200 Jahren als selbstverständlich gilt und als Abweichung in den Angaben der verschiedenen Gelehrten, welche sich daran versucht haben, kenntlich wird. Menas Sohn Teta wird schon als Gelehrter, als Verfasser anatomischer Schriften[3]), genannt, und Nebka, griechisch Tosorthros, der zweite König der III. Dynastie um 3800, trat in Tetas Fußstapfen und verfaßte medizinische Abhandlungen, welche vier Jahrtausende nach seiner Regierung noch bekannt waren und ihn mit dem griechischen Gotte der Heilkunst, mit Asklepios, in eine Persönlichkeit vereinigen ließen[4]). Die Könige der IV. Dynastie, seit 3686 am Ruder, sind die bekannten Pyramidenbauer Chufu, Chafrā, Menkarā. Schon in ihrer Zeit muß es Baumeister gegeben haben, deren Ausbildung nicht zu unterschätzen ist. Wie in den ältesten monumentalen Grabesräumen der Ägypter stets nach Osten zu eine Denksäule steht[5]), so sind insbesondere die Pyramiden so scharf orientiert, daß man unter den mannigfachen Vermutungen, welche frühere und spätere Schriftsteller über diese riesigen Königsgräber auszusprechen sich bemüßigt fanden, auch derjenigen begegnet, die Pyramiden seien in der Absicht erbaut worden mittels ihrer Grundlinien die Himmels-

[1]) I. Moses 10, 6. [2]) Maspero-Pietschmann S. 13 und 16. Steindorff, Die Blütezeit des Pharaonenreichs S. 7. [3]) Maspero-Pietschmann S. 54. [4]) Ebenda S. 59. [5]) Ebenda S. 60.

richtungen festzuhalten. Zufall ist es jedenfalls nicht gewesen, wenn der Orientierungsgedanke damals bereits so genau zur Ausführung gebracht wurde. Zufall möchten wir ebensowenig in dem Umstande erkennen, daß in fast allen alten Pyramiden der Winkel, welchen die Seitenwand der Pyramide mit der Grundfläche bildet, wenig oder gar nicht von 52° abweicht[1]). Das setzt, wie gesagt, ausgebildete Baumeister, das setzt mathematische Hilfswissenschaften der Baukunst voraus, sei es, daß die Regeln von Mund zu Mund sich fortpflanzten, sei es sogar, daß man sie niederschrieb. Steht es doch fest, daß die Aufbewahrung vererbten Wissens, daß das Sammeln von Bücherrollen zu den Sitten der ältesten Dynastien gehört haben muß, wenn bereits am Anfange der VI. Dynastie eigene Beamten ernannt wurden, deren Titel „Verwalter des Bücherhauses" in ihren Grabschriften sich erhalten hat[2]). Ein Jahrtausend etwa überspringend, nennen wir aus der XII. Dynastie Amenemhat III., einen Fürsten von 42jähriger wohlbeglaubigter Regierung, wenn auch ihre Datierung weniger gesichert ist als ihre Dauer[3]). Er war der Erbauer des großartigen Tempelpalastes unweit vom Mörissee, aus dessen Namen Lope-ro-hunt = Tempel am Eingang zum See das Wort Labyrinth entstand. Man hat für Amenemhat III. verschiedene Beinamen in Anspruch genommen[4]), nämlich Petesuchet = Gabe der Suchet, Aasuchet = Sprößling der Suchet und Sasuchet = Sohn der Suchet. Wäre diese Annahme gesichert, so könnte man in ihm die Persönlichkeiten erkennen, welche unter verwandten Namen bei mehreren Schriftstellern auftretend bei anderen Ägyptologen als unserem Gewährsmanne nicht verschmolzen zu werden pflegten. Amenemhat III. wäre alsdann der Gesetzgeber Asychis des Herodot[5]), der König Petesuchis, der das Labyrinth erbaute, des Plinius[6]), endlich der durch Verstand hervorragende König Sasyches, der die Geometrie erfand, des Diodor[7]). Bereits während der XII. Dynastie begannen von Osten über die Landenge von Suez her die Einfälle plünderungssüchtiger Wüstenstämme, welche sich selbst als Shus, Shasu bezeichneten. Aber 200 Jahre und mehr waren nötig bis Asses, ein Hik-Shus, d. h. ein Fürst

[1]) Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum), übersetzt und erklärt von Aug. Eisenlohr. Leipzig 1877, S. 137. Wir zitieren künftig diese Hauptquelle für ägyptische Mathematik als Eisenlohr, Papyrus. [2]) Maspero-Pietschmann S. 74. [3]) Nach Lepsius regierte Amenemhat III. von 2221 bis 2179; nach Lauth dagegen (vgl. dessen Aufsatz „Der geometrische Papyrus" in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 20. September 1877, Nr. 263) von 2425 bis 2383. Nach Steindorff füllte die ganze XII. Dynastie die Zeit von 1996 bis 1783. [4]) Vgl. Lauth l. c. Seine Gründe hängen mit seinen chronologischen Annahmen aufs engste zusammen. [5]) Herodot II, 136. [6]) Plinius, Histor. natur. XXXVI, 13. [7]) Diodor I, 94.

jener Shus genannten Wüstenstämme, die XV. ägyptische Dynastie stürzen und sich an deren Stelle setzen konnte. Die zwei folgenden Dynastien gehören gewissermaßen den Hiksoskönigen an, wie man in Nachbildung jenes eben erläuterten Titels zu sagen sich gewöhnt hat, und erst mit Ahmes, dem Gründer der XVIII. Dynastie um 1600, gelang es einem Sohne uralter ägyptischer Abstammung die Eindringlinge zu vertreiben. Unter den Hiksoskönigen war es, daß das mathematische Handbuch niedergeschrieben wurde, zu dessen genauer Inhaltsangabe wir uns nun wenden müssen.

Die Anfangsworte lauten[1]): „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge .... aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen. Verfaßt wurde dieses Buch im Jahre 33, Mesori Tag .. unter dem König von Ober- und Unterägypten Ra-ā-us Leben gebend, nach dem Vorbild von alten Schriften, die verfertigt wurden in den Zeiten des Königs [Ra-en-m]āt' durch den Schreiber Ahmes verfaßt diese Schrift."

Aus dieser Angabe, daß an einem ursprünglich angegebenen, jetzt durch einen Riß verloren gegangenen Tage des Monats Mesori des 33. Regierungsjahres Königs Ra-ā-us' der Schreiber Ahmes das Buch verfaßt habe, ist eine so bestimmte Datierung möglich, als sie überhaupt für so weit zurückliegende Zeiten tunlich ist. Ra-ā-us ist nämlich, wie aus einem dem ägyptischen Süden, dem sogenannten Fayum, entstammenden Holzfragmente des Berliner ägyptischen Museums erkannt worden ist[2]), niemand anders als der Hiksoskönig Apepa, der Apophis der Griechen. Alle Zweifel, welche an die Zeit und Dauer der Hiksosherrschaft sich knüpfen, in Rechnung gebracht irrt man gewiß nicht, wenn man Ra-ā-us zwischen die Jahre 2000 und 1700 v. Chr. setzt, und da überdies das Äußere des Papyrus, die Schrift usw. dieser Zeit genau entspricht, so ist damit eine Vermutung über dessen Alter gewonnen, in welcher die sonst nicht immer übereinstimmenden Kenner ägyptischer Sprache sich sämtlich begegnen. Wenn auch nicht ganz das Gleiche mit Bezug auf den Namen jenes Königs stattfindet, unter welchem die alten als Vorbild dienenden Schriften verfaßt worden waren, so ergänzt man doch meistens diese Lücke durch Raenmat[3]), und das ist kein anderer

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 27—29. [2]) Die Entdeckung stammt von Herrn Dr. Ludwig Stern, dessen brieflichen Mitteilungen wir diese Tatsache entnehmen. [3]) G. Ebers in einer Rezension von Eisenlohr, Papyrus im Literarischen Zentralblatt vom 12. Oktober 1878 hält diese Ergänzung für zweifelhaft. Dagegen stimmt er durchaus damit überein, der Papyrus könne nach allen äußeren Anzeichen nur in der Zeit zwischen der XVII. und der XVIII. Dynastie geschrieben sein.

als König Amenemhat III. Ist diese Ergänzung richtig, und hat man in Amenemhat wirklich auch Sasyches zu erkennen, so könnte Diodors Angabe über den Erfinder der Geometrie in Beziehung auf unsern Papyrus gedeutet werden. Das Original zu der Bearbeitung des Ahmes würde dann viele Jahrhunderte hindurch in der Überlieferung fortlebend sich mythisch mit der Erfindung der Geometrie vereinigt haben [1]. Und wenn diese genaue Beziehung sich nicht festhalten ließe, so ist doch merkwürdigerweise die Zeit der XII. Dynastie auch durch ein anderes Schriftstück als Blütezeit ägyptischer Rechenkunst bestätigt. In Kahun, südlich von der Pyramide von Illahun, die auf Usertesen II. aus der XII. Dynastie zurückgeht, wurden 1889 und 1890 zwei mathematische Papyri aufgefunden [2], welche, ohne mit dem Papyrus des Ahmes übereinzustimmen, hochbedeutsame Ähnlichkeiten mit demselben aufweisen. So ist dort eine Anzahl von Bruchzerlegungen vorhanden, wie z. B. $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$ und ähnliche, von denen wir gleich zu reden haben werden. Auf andere Bestandteile zurückzugreifen werden wir da und dort in der Lage sein.

Ein weiterer mathematischer Papyrus, von dessen Inhalt leider nicht einmal Andeutungen bekannt sind, gehört Herrn Wladimir Golenischeff an, Konservator der kaiserlichen Sammlung in der Eremitage in Petersburg. Unbedeutende Papyrusteile mit Hau-Rechnungen — wir werden bald sehen, was das ist — sind im Besitze des Ägyptischen Museums in Berlin [3].

Über einen in einem koptischen Grabe aufgefundenen Papyrus in griechischer Sprache berichten wir im 24. Kapitel. Von vollständigen alten Schriften ist bisher nur das Rechenbuch des Ahmes der Öffentlichkeit übergeben, und zu ihm kehren wir zurück.

„Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge“, so lauten die Anfangsworte des Papyrus. Später spricht Ahmes von einer „Vorschrift der Ergänzung“, von einer „Vorschrift zu berechnen ein rundes Fruchthaus“, von einer „Vorschrift zu berechnen Felder“, von einer „Vorschrift zu machen einen Schmuck“ und dergleichen mehr. Wer aber aus diesen Überschriften den Schluß ziehen wollte, es seien hier überall wirkliche Vorschriften gegeben, Regeln gelehrt,

---

[1] Vgl. Lauth l. c. [2] W. M. Flinders Petrie, Illahun, Kahun and Gurob. London 1891, pag. 486. Die Herausgabe der Fragmente erfolgte 1897 in London durch F. Ll. Griffith. Über einzelne Stellen vgl. Cantor, Die mathematischen Papyrusfragmente von Kahun in der Orientalischen Literaturzeitung 1898, Nr. 10. [3] Alle Notizen über mathematische Papyri verdanken wir Herrn Prof. August Eisenlohr.

wie man zu verfahren habe, der würde in einem gewaltigen Irrtume befangen sein. Einzelne Vorschriften in unserem heutigen Sinne des Wortes kommen allerdings vor, aber weitaus in einer überwiegenden Zahl von Fällen begnügt sich Ahmes damit mehrere Aufgaben gleicher Gattung nacheinander zu behandeln. Eine Induktion aus diesen Aufgaben und ihrer Lösung auf allgemeine Regeln ist nicht gerade schwierig, allein Ahmes vollzieht sie nicht. Er überläßt diese Folgerungen dem Leser oder dem mündlichen Unterrichte des Lehrers, ohne welchen die Benutzung des Handbuches kaum gedacht werden kann. Das häufige Auftreten des Wortes „Vorschrift" entspricht nur der ägyptischen Gewohnheit der Gedächtnisübung, wie sie geradezu als Grundlage jeder Unterweisung beigeblieben ist [1]). Lassen sich doch regelmäßig wiederkehrende Ausdrücke am leichtesten einprägen. Gewiß entstammen noch andere gleichfalls unaufhörlich sich wiederholende Redensarten bei Ahmes derselben Rücksicht auf das Gedächtnis des Schülers. So heißt es bei ihm: „gesagt ist dir", oder „wenn dir sagt der Schreiber", oder „wenn dir gegeben ist" und „mache, wie geschieht", oder „mache es also", wo ein Schriftsteller unserer Zeit: Aufgabe und Auflösung sagen würde.

Wir haben den sogleich genauer zu besprechenden Papyrus das Rechenbuch des Ahmes genannt. Andere [2]) sind, wie wir in den ersten Worten dieses Kapitels andeuteten, der Meinung, man dürfe nicht von einem Rechenbuche reden, es sei nur das Heft eines Schülers, und zwar eines sich mitunter recht ungeschickt anstellenden Schülers, welches sich erhalten habe. Für unsere Kenntnis der ägyptischen Mathematik ist es gleichgültig, ob die eine, ob die andere Bezeichnung für richtig gehalten wird, wir möchten jedoch auf die seinerzeit von uns nach reiflicher Überlegung in Gemeinschaft mit dem Übersetzer des Papyrus gewählte Bezeichnung nicht verzichten. Wir geben zu, daß in den Rechnungen Irrtümer vorkommen, daß manchmal Verbesserungen angebracht sind, allein wir sehen nicht ein, daß ein solches Vorkommen den Papyrus zu einem Schülerhefte stemple. Irrtümer kommen vermutlich in jedem Manuskripte vor und gehen nicht selten als Druckfehler in die vollendetsten Werke der berühmtesten Verfasser über. Um so weniger kann man Anstoß daran nehmen, wenn ein Abschreiber sich einen Irrtum zuschulden kommen läßt. Zudem sind keineswegs alle Irrtümer verbessert, der Vorwurf der Minderwertigkeit würde also von dem Schüler auf den Lehrer

[1]) Herodot II, 77. [2]) Max Simon, Über die Mathematik der Ägypter (Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, S. 526—535) im Anschluß an eine früher von Eugène Revillout ausgesprochene Meinung.

übergehen. Ferner sind die Anfangsworte des Papyrus, welche wir S. 59 zum Abdruck gebracht haben, weit ungezwungener auf ein sorgfältig oder nicht niedergeschriebenes oder abgeschriebenes Buch als auf ein Schülerheft zu deuten. Endlich berufen wir uns auf die Fragmente von Kahun, welche mit dem, was wir nicht aufhören das Rechenbuch des Ahmes zu nennen, in vielen Beziehungen so sehr übereinstimmen, daß wir anzunehmen genötigt wären, auch jene seien die Überreste eines um Jahrhunderte älteren Rechenheftes eines Schülers, wozu wir uns nicht entschließen können.

Die Zahlen, mit welchen gerechnet wird, sind teils ganze Zahlen, teils und zwar größtenteils Brüche, woraus sich von selbst ergibt, daß der Leserkreis, für welchen Ahmes schrieb, als ein in der Rechenkunst schon vorgeschrittener gedacht werden muß. Ein Handbuch für Anfänger müßte und mußte zu allen Zeiten sich namentlich am Anfange auf den Gebrauch ganzer Zahlen beschränken. Über die Zeichen, deren Ahmes sich für ganze und für gebrochene Zahlen bedient, werden wir zwar noch in diesem Kapitel aber in einem anderen Zusammenhange reden. Für jetzt muß eine Bemerkung über die Art der vorkommenden Brüche und über deren Bezeichnung unter Voraussetzung gegebener Zeichen für ganze Zahlen genügen. Ahmes benutzt nämlich nicht Brüche in dem allgemeinsten Sinne des Wortes, d. h. angedeutete Teilungen, wobei der Zähler wie der Nenner von beliebiger Größe sein können, sondern nur Stammbrüche, d. h. solche, die bei ganzzahligem Nenner die Einheit als Zähler haben und die er dadurch anzeigte, daß er die Zahl des Nenners hinschrieb und ein Pünktchen darüber setzte. Brüche mit anderem Zähler konnte er wohl denken, wie aus dem ganzen Charakter seiner Aufgaben zur Genüge hervorgeht, er konnte sie aber nur dann schreiben, wenn mehrere derselben mit gemeinsamem Nenner in Zwischenrechnungen auftraten. Er begnügte sich sonst jeden beliebigen Bruch als Summe von Stammbrüchen anzuschreiben, z. B. $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$ statt $\frac{2}{5}$, wenn das bloße Nebeneinandersetzen zweier Stammbrüche deren additive Zusammenfassung bezeichnen soll. Eine einzige Ausnahme bildet von dem hier Ausgesprochenen der Bruch $\frac{2}{3}$. Ahmes weiß ganz genau, daß derselbe eigentlich $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$ ist und versteht diese Zerlegung vortrefflich zu benutzen, aber daneben hat er ein eigenes Zeichen für $\frac{2}{3}$, so daß auch dieser Bruch in seinen Rechnungen mitten unter Stammbrüchen vielfältig vorkommt und uneigentlich zu denselben gezählt werden mag.

Nach dieser Bemerkung läßt sich sofort erkennen, daß es eine Aufgabe gab, welche Ahmes unbedingt an die Spitze stellen mußte, mit deren Lösung der Schüler vertraut sein mußte, bevor er an irgend eine andere Rechnung ging, die Aufgabe: einen beliebigen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen. Das scheint uns denn auch die Bedeutung einer Tabelle zu sein, deren Entwicklung die ersten Blätter des Papyrus füllt. Allerdings ist diese Bedeutung nicht unmittelbar aus dem Wortlaute zu erkennen. Dieser heißt vielmehr zuerst [1]): „Teile 2 durch 3", dann „durch 5", später wieder z. B. „teile 2 durch 17", kurzum es handelt sich um die Darstellung von

$$\frac{2}{2n+1}$$

(wo n der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 bis 49 bedeutet, als Divisoren mithin alle ungeraden Zahlen von 3 bis 99 erscheinen), als Summe von 2, 3 oder gar 4 Stammbrüchen. Tabellarisch geordnet unter Weglassung aller Zwischenrechnungen gewinnt Ahmes folgende Zerlegungen [2]):

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{29} = \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{15} \qquad \frac{2}{31} = \frac{1}{20}\ \frac{1}{124}\ \frac{1}{155}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{28} \qquad \frac{2}{33} = \frac{1}{22}\ \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{18} \qquad \frac{2}{35} = \frac{1}{30}\ \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{66} \qquad \frac{2}{37} = \frac{1}{24}\ \frac{1}{111}\ \frac{1}{296}$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8}\ \frac{1}{52}\ \frac{1}{104} \qquad \frac{2}{39} = \frac{1}{26}\ \frac{1}{78}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10}\ \frac{1}{30} \qquad \frac{2}{41} = \frac{1}{24}\ \frac{1}{246}\ \frac{1}{328}$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12}\ \frac{1}{51}\ \frac{1}{68} \qquad \frac{2}{43} = \frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}$$

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12}\ \frac{1}{76}\ \frac{1}{114} \qquad \frac{2}{45} = \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$$

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{14}\ \frac{1}{42} \qquad \frac{2}{47} = \frac{1}{30}\ \frac{1}{141}\ \frac{1}{470}$$

$$\frac{2}{23} = \frac{1}{12}\ \frac{1}{276} \qquad \frac{2}{49} = \frac{1}{28}\ \frac{1}{196}$$

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{15}\ \frac{1}{75} \qquad \frac{2}{51} = \frac{1}{34}\ \frac{1}{102}$$

$$\frac{2}{27} = \frac{1}{18}\ \frac{1}{54} \qquad \frac{2}{53} = \frac{1}{30}\ \frac{1}{318}\ \frac{1}{795}$$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 36—45. [2]) Ebenda S. 46—48.

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{30}\ \frac{1}{330}$$
$$\frac{2}{57} = \frac{1}{38}\ \frac{1}{114}$$
$$\frac{2}{59} = \frac{1}{36}\ \frac{1}{236}\ \frac{1}{531}$$
$$\frac{2}{61} = \frac{1}{40}\ \frac{1}{244}\ \frac{1}{448}\ \frac{1}{610}$$
$$\frac{2}{63} = \frac{1}{42}\ \frac{1}{126}$$
$$\frac{2}{65} = \frac{1}{39}\ \frac{1}{195}$$
$$\frac{2}{67} = \frac{1}{40}\ \frac{1}{335}\ \frac{1}{536}$$
$$\frac{2}{69} = \frac{1}{46}\ \frac{1}{138}$$
$$\frac{2}{71} = \frac{1}{40}\ \frac{1}{568}\ \frac{1}{710}$$
$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60}\ \frac{1}{219}\ \frac{1}{292}\ \frac{1}{365}$$
$$\frac{2}{75} = \frac{1}{50}\ \frac{1}{150}$$
$$\frac{2}{77} = \frac{1}{44}\ \frac{1}{308}$$
$$\frac{2}{79} = \frac{1}{60}\ \frac{1}{237}\ \frac{1}{316}\ \frac{1}{790}$$
$$\frac{2}{81} = \frac{1}{54}\ \frac{1}{162}$$
$$\frac{2}{83} = \frac{1}{60}\ \frac{1}{332}\ \frac{1}{415}\ \frac{1}{498}$$
$$\frac{2}{85} = \frac{1}{51}\ \frac{1}{255}$$
$$\frac{2}{87} = \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}$$
$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60}\ \frac{1}{356}\ \frac{1}{534}\ \frac{1}{890}$$
$$\frac{2}{91} = \frac{1}{70}\ \frac{1}{130}$$
$$\frac{2}{93} = \frac{1}{62}\ \frac{1}{186}$$
$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60}\ \frac{1}{380}\ \frac{1}{570}$$
$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}$$
$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66}\ \frac{1}{198}$$

Es ist einleuchtend, daß unter wiederholter Anwendung dieser Tabelle ein Bruch, dessen Zähler auch die 2 übersteigt, wenn er nur seinem Nenner nach in der Tabelle sich findet, in Stammbrüche zerlegt werden kann. Zeigen wir versuchsweise an $\frac{7}{29}$, wie wir dieses Verfahren uns denken. Zunächst ist $7 = 1 + 2 + 2 + 2$,

also $\frac{7}{29} = \frac{1}{29} + \left(\frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\right) + \left(\frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\right) + \left(\frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\right)$

$$= \frac{1}{29}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232} + \left(\frac{2}{24}\ \frac{2}{58}\ \frac{2}{174}\ \frac{2}{232}\right)$$
$$= \frac{1}{29}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{29}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}$$
$$= \frac{2}{29}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}$$
$$= \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}$$
$$= \frac{2}{24}\ \frac{2}{58}\ \frac{2}{174}\ \frac{2}{232}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}$$
$$= \frac{1}{12}\ \frac{1}{29}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{116}$$
$$= \frac{2}{12}\ \frac{2}{87}\ \frac{2}{116}\ \frac{1}{29}$$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{29}$$

$$= \frac{2}{58}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{29}$$

$$= \frac{1}{29}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{29}$$

$$= \frac{2}{29}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}$$

$$= \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{174}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{174}$$

$$= \frac{2}{174}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{87}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{6}$$

oder besser geordnet $\frac{7}{29} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{58}\ \frac{1}{87}\ \frac{1}{232}$. Niemand wird behaupten wollen, diese Zerlegungsweise sei besonders elegant, oder sie führe besonders schnell zum Ziele. Aber sie führt doch dazu, sie ist ausreichend, vorausgesetzt wenigstens, daß im Verlaufe der Rechnung kein mit dem Zähler 2 versehener Bruch auftrete, dessen ungerader Nenner die Zahl 100 überschreitet, widrigenfalls von einer größeren Ausdehnung der Tabelle nicht abgesehen werden könnte.

Drei Bemerkungen drängen sich von selbst auf. Die eine geht dahin, daß es nicht bloß e i n e Zerlegung eines Bruches gibt, sondern daß man die Auswahl zwischen man kann fast sagen beliebig vielen Zerlegungen hat. So ist z. B. auch $\frac{7}{29} = \frac{1}{5}\ \frac{1}{29}\ \frac{1}{145}$ neben der oben erhaltenen Zerlegung. So ist $\frac{2}{29} = \frac{1}{15}\ \frac{1}{435} = \frac{1}{16}\ \frac{1}{232}\ \frac{1}{464}$ neben dem in der Tabelle angegebenen Werte usw. Daran knüpft sich die zweite Bemerkung, daß für die komplizierteren Fälle allmählicher Zerlegung, deren wir einen $\left(\frac{7}{29}\right)$ behandelt haben, es sich als zweckdienlich erweist, wenn die Nenner der in der Tabelle als erste Zerlegungsergebnisse vorhandenen Stammbrüche g e r a d e Zahlen sind, weil dadurch ein Aufheben durch 2 vielfach ermöglicht wird. Der ägyptische Rechner war nämlich, und das ist unsere dritte Bemerkung, gewöhnt wenn auch mutmaßlich nicht die Teilbarkeit einer Zahl durch irgend eine andere, doch jedenfalls ihre T e i l b a r k e i t d u r c h 2 sofort zu erkennen. Das geht ohne die Möglichkeit eines Zweifels aus der Tabelle selbst hervor. Nur wenn die Verwandlungen $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ usw. von vornherein klar waren, ist deren folgerichtige Ausschließung aus der Tabelle erklärlich.

Aber auch eine Frage drängt sich auf: wie ist die Tabelle entstanden[1]? Wie wäre ihre Fortsetzung zu beschaffen, welche doch, wie wir sahen, bei Zerlegung von Brüchen, deren Zähler die 2 übersteigen, unter Umständen notwendig wird? Die Vermutung dürfte eine nicht allzugewagte sein, daß die Tabelle, ein altes Erbstück schon zur Zeit des Ahmes, wohl niemals auf einen Schlag gebildet worden ist. Eine allmähliche Entstehung, so daß die Zerlegung bald dieses bald jenes Bruches, bald dieser bald jener Gruppe von Brüchen gelang, daß die gewonnenen Erfahrungen aufbewahrt und gesammelt wurden, dürfte der Wahrheit so nahe kommen, daß man sich berechtigt fühlen möchte, die Mathematik ihrem geschichtlichen Ursprunge nach und ohne in die Streitfragen nach der philosophischen Begründung ihrer einfachsten Begriffe einzutreten eine Erfahrungswissenschaft zu nennen. Wie wir oben (S. 59) sagten, sind die Zerlegungen des Ahmes schon in den Fragmenten von Kahun vorhanden, oder, um uns deutlicher auszudrücken, wo in den Fragmenten von Kahun richtige Zerlegungen vorkommen — einige wenige sind irrig oder lückenhaft — stimmen sie Zahl für Zahl mit Ahmes überein. Jedenfalls kann man auch mit Bezug auf die uns gegenwärtig beschäftigende Tabelle nicht Vorsicht genug gegen die Versuchung üben, allgemeine Methoden aus gegebenen Fällen herauszudeuten, damit man sie nicht vielmehr hineindeute.

Eine allgemeine Methode weist allerdings der Text des Papyrus selbst durch eine der seltenen Stellen, in welchen eine wirkliche Vorschrift gegeben ist, auf. Wir meinen die Aufgabe 61 nach der Numerierung, mit welcher der Herausgeber des Papyrus die auf die Tabelle folgenden Aufgaben versehen hat. Dort heißt es[2]: „$\frac{2}{3}$ zu machen von einem Bruch. Wenn dir gesagt ist: was ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{5}$? so mache du sein Doppeltes und sein Sechsfaches, das ist sein zwei Drittel. Also ist es zu machen in gleicher Weise für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt.“

Um diese Vorschrift zu verstehen, müssen wir uns erinnern, daß zum Anschreiben eines Stammbruches (S. 61) der mit einem Pünktchen versehene Nenner genügte. „Sein Doppeltes“ von einem Bruche gesagt heißt demnach: der doppelte Nenner, selbst mit einem Punkte darüber, und ist dem Werte nach nicht ein Doppeltes sondern ein

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 30—34 hat sich eingehend mit dieser Frage beschäftigt. Unsere Auseinandersetzung trifft in vielen Punkten mit der dort gegebenen überein, weicht aber auch in einigen nicht ganz nebensächlichen Dingen davon ab. [2]) Ebenda S. 150.

Halbes. Die erwähnte Vorschrift zeigt also erstlich, daß, wie wir früher vorgreifend gesagt haben, die Zerlegung $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ bekannt war, wenn sie auch in der Tabelle nicht enthalten ist. Sie zeigt ferner, daß man „für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt", für jedes $\frac{1}{a}$ in gleicher Weise $\frac{2}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{6a}$ rechnete. Aber ein anderes ist immerhin $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{a}$ zu nehmen, ein anderes 2 durch $3a$ zu teilen! Wir sind nicht berechtigt ohne weiteres vorauszusetzen, daß man gewußt habe, es sei $\frac{2}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{2}{3a}$, also auch $\frac{2}{3a} = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{6a}$. Die Tabelle beweist uns das Vorhandensein dieser Kenntnis, denn sie liefert ausnahmslos bei jedem durch 3 teilbaren Nenner gerade diese Zerlegung $\frac{2}{9} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{18}$, $\frac{2}{45} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{90}$, $\frac{2}{93} = \frac{1}{62}\,\frac{1}{186}$ usw.

Bezieht sich etwa das „also ist es zu machen für jeden gebrochenen Teil, welcher vorkommt" wie auf den Bruch $\frac{1}{a}$ so auch auf $\frac{2}{3}$, oder mit anderen Worten ist auch, wenn p eine von 3 verschiedene Primzahl bedeutet, in der Tabelle eine Verwertung der Zerlegung von $\frac{2}{p}$ bei der Zerlegung von $\frac{2}{pa}$ ersichtlich? Gibt es ferner eine Zerlegung von $\frac{2}{p}$ selbst, welche zur Zerlegung $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$ eine geistige Verwandtschaft besitzt?

Die zweite dieser Fragen läßt sich sofort bejahend beantworten. Wenn p eine Primzahl ist (und zwar selbstverständlich eine von 2 verschiedene Primzahl), so muß $\frac{p+1}{2}$ eine ganze Zahl sein. Nun ist $\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2} \times p}$, und dieser Zerlegungsformel, deren geschichtliche Berechtigung freilich erst im 41. Kapitel im folgenden Bande dieses Werkes zur Sprache kommen kann, entspricht $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$. Ihr folgen ebenso die Zerlegungen der Tabelle unter Annahme von $p = 5, 7, 11, 23$ mit $\frac{2}{5} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$, $\frac{2}{11} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{66}$, $\frac{2}{23} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{276}$, aber $p = 13, 17, 19, 29, 13, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$, oder eine Mehrheit von neunzehn Primzahlen gegen fünf beweist, daß es irrig wäre anzunehmen, diese Zerlegungsart sei als Gesetz vorhanden gewesen. Noch weniger fügt sich die Zerlegung der Brüche $\frac{2}{pa}$ einem Gesetze. Wie $\frac{2}{3a} = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{6a}$, hätte man $\frac{2}{5a} = \frac{1}{3a}\,\frac{1}{15a}$ zu erwarten. Diese Erwartung erfüllt sich nur bei $a = 5, 13, 17$.

Die Zerlegung $\frac{2}{7a} = \frac{1}{4a}\,\frac{1}{28a}$ findet nur statt bei $a = 7$, 11. Die Zerlegung $\frac{2}{11a} = \frac{1}{6a}\,\frac{1}{66a}$, sollte man vermuten, könne nur bei $a > 11$ eintreten, also die Ausdehnung der Tabelle überschreiten. Statt dessen gilt sie für $a = 5$, so daß 55 als Vielfaches seines größeren Faktors 11, nicht seines kleineren Faktors 5 behandelt ist. Noch auffallender ist die Ausnahmestellung, welche $\frac{2}{35} = \frac{1}{30}\,\frac{1}{42}$ und $\frac{2}{91} = \frac{1}{70}\,\frac{1}{130}$ einnehmen. Die erstere Zerlegung kümmert sich, nach unserer bisherigen Auffassung betrachtet, weder um den Faktor 5 noch um den Faktor 7 von 35, die letztere um keinen der Faktoren 7 oder 13 von 91. Und doch lassen sich diese Zerlegungen in unter sich gleicher Weise aus jenen Faktoren herleiten. Wenn p und q zwei ungerade Zahlen sind, $\frac{p+q}{2}$ demnach ganzzahlig ausfallen muß, so ist $\frac{2}{p \times q} = \frac{1}{q \times \frac{p+q}{2}}$ $+ \frac{1}{p \times \frac{p+q}{2}}$, und setzt man nun $p = 7$, $q = 5$ beziehungsweise $p = 13$, $q = 7$, so erhält man obige Zerlegungen. Und dieses Zusammentreffen scheint kein Zufall zu sein. Wenigstens läßt sich in byzantinischer Zeit die hier ausgesprochene Entstehung mit aller Bestimmtheit nachweisen, wie im 24. Kapitel sich zeigen wird.

Aber gerade das Vorhandensein der beiden Zerlegungsformeln, welche wir mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zu enthüllen imstande waren, nötigt uns die gleiche Folgerung wiederholt auszusprechen, die vorgreifend an die Spitze gestellt ward. Nur eine allmähliche Entstehung der Tabelle läßt sich denken! Es will nicht in Abrede gestellt werden, daß an einem guten Teile der Zerlegungen mehr oder weniger bewußt gewisse Regeln zur Ausübung gelangten, aber gerade deren ebenmäßiges, gleichberechtigtes Vorhandensein schließt wieder rückwärts jede Möglichkeit eines einheitlichen Grundgedankens aus, und sei es nur auch eines solchen wie der, daß wenn tunlich Stammbrüche mit geradem Nenner erscheinen sollen[1]).

Wir schalten noch eine Bemerkung ein, deren Bedeutung erst im 33. Kapitel uns hervortreten wird. Die Aufgabe „teile 2 durch 3" beziehungsweise durch 5, durch 17 usw. lautet ägyptsich *nas* 2 *χent* 3,

[1]) Wenn Herr Gino Loria in der Bibliotheca mathematica 1892 pag. 97 bis 109 sich in scharfsinnigen Vermutungen ergeht, wie die Zerfällung in 2, 3, 4 Stammbrüche stattgefunden haben möge, so bleibt er doch jede Antwort auf die Frage schuldig, an welcher wir auch gescheitert sind, und die wir für die wichtigste halten: warum im Einzelfalle die Zerlegung gerade in diese Anzahl von Stammbrüchen stattfand?

oder wie der Divisor heißen mag. Von den beiden Kunstwörtern[1]) *nas* und *χent* bedeutet das letztere so viel wie in, unter, zwischen. Das erstere *nas* mit dem Determinativ eines die Hand ausstreckenden Mannes bedeutet anrufen, beten. Ahmes hat aber als Determinativ einen den Finger an den Mund legenden Mann benutzt. Dadurch könnte die Bedeutung „aussprechbar machen" gerechtfertigt werden und es hieße *nas* 2 *χent* 17 soviel wie „mache 2 aussprechbar in 17". Damit wäre mittelbar behauptet, der Ägypter habe leicht aussprechbare Formen nur für Stammbrüche besessen, während ein Bruch wie $\frac{2}{17}$ oder allgemeiner $\frac{m}{n}$ ihm Schwierigkeiten sogar grammatikalischer Natur bereitete; eine Vermutung, welche noch ihrer Bestätigung harret.

Wir haben die Anwendung der Tabelle zur Zerlegung von Brüchen, deren Zähler größer als 2 sind, deutlich zu machen gesucht, haben erkannt, daß diese Anwendung begrifflich leicht in der Ausführung mißlich ist. Um so wünschenswerter mußte es sein, die Zerlegung von Brüchen mit einem besonders oft vorkommenden Nenner ein für allemal vorrätig zu haben. Ein solcher Nenner war die bei den Fruchtmaßen und der Feldereinteilung der Ägypter sehr beliebte Zahl 10, und deshalb wohl ist der großen Tabelle eine zweite kleinere angeschlossen gewesen, aus deren allerdings sehr lückenhaften Überresten[2]) man die Zerlegung der verschiedenen Zehntel in Stammbrüche entziffert hat.

Wir kehren nochmals zur großen Tabelle zurück. Wenngleich eine Anleitung zu ihrer Herstellung von uns vermißt wurde, so ist doch ein Beweis der Richtigkeit der einzelnen angegebenen Zerlegungen unter dem Namen *Smot*, Ausrechnung, geführt. Ist etwa die Zerlegung von $\frac{2}{A}$ in die beiden Stammbrüche $\frac{1}{\alpha_1}\frac{1}{\alpha_2}$ angegeben, so zeigt die Ausrechnung, daß $\frac{1}{\alpha_1} . A + \frac{1}{\alpha_2} . A$ oder mit anderen Worten der $\alpha_1$te und der $\alpha_2$te Teil von A zusammen die 2 geben. Der Grundgedanke von dieser Ausführung besteht darin, daß zuerst allmählich die immer kleineren aliquoten Teile von A ermittelt werden, und daß ein kleiner Strich, im Drucke durch den Herausgeber übersichtlicher durch ein Sternchen ersetzt, diejenigen Zahlen hervorhebt, welche zusammen die 2 liefern sollen.

[1]) Die hier ausgesprochene Vermutung ist Eigentum des Herrn Léon Rodet, der sie uns brieflich unter dem 10. Juli 1879 mitteilte und deren Benutzung in diesem Werke gütigst gestattet hat. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 49—53.

So heißt z. B. bei $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$ die Ausrechnung[1]):

$$\begin{array}{llll} & \frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} & 1 \quad 7 \\ * & \frac{1}{4} & 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} & 2 \quad 14 \\ * & 4 \quad 28 & \frac{1}{4} & 4 \quad 28. \end{array}$$

Der Sinn dieser Ausrechnung besteht darin, daß man mit dem Umwege über die Erkenntnis, daß die Hälfte von sieben $3\frac{1}{2}$ beträgt, zu $\frac{1}{4} \times 7 = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ gelangt. Nicht als ob der Ägypter nicht imstande gewesen wäre sofort den vierten Teil von 7 zu erkennen, aber die Absicht war offenbar in erster Linie zu zeigen, daß die Hälfte von 7 mehr als 2 beträgt, daß also der Stammbruch $\frac{1}{2}$ bei der Zerlegung von $\frac{2}{7}$ nicht vorkommen kann. Dagegen liefert $\frac{1}{4} \times 7$ nicht die ganzen 2, sondern nur $1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$. Im Kopfe wird jetzt die Subtraktion $2 - 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ vollzogen und erwogen, daß dieser Rest durch 7 mal einem zweiten Stammbruche erzeugt werden muß, dessen Nenner folglich 7 mal 4 oder 4 mal 7 sein muß. Das ist die Bedeutung der an zweiter Stelle auftretenden Multiplikation $1 \times 7 = 7$, $2 \times 7 = 14$, $4 \times 7 = 28$.

Man könnte freilich, namentlich mit Beziehung auf die von uns als im Kopfe ausgeführt behauptete Subtraktion $2 - 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ zweifelhaft sein, ob wir hier nicht Dinge hineinlesen, an welche Ahmes nicht dachte, wenn nicht die Zerlegungen von $\frac{2}{17}, \frac{2}{19}, \frac{2}{37}, \frac{2}{41}, \frac{2}{53}$ als Bestätigungen unserer Darstellung erschienen. Dort wo die Zerlegung der Tabelle drei Stammbrüche gibt, enthält die Ausrechnung ganz ähnliche Subtraktionen mit ausdrücklicher Erwähnung derselben. Überzeugen wir uns bei $\frac{2}{17} = \frac{1}{12}\,\frac{1}{51}\,\frac{1}{68}$. Die Ausrechnung hat folgende Gestalt[2]):

$$\begin{array}{lll} & 1 \quad 17 & 1 \quad \frac{1}{17} \\ & \frac{2}{3} \quad 11\frac{1}{3} & 2 \quad \frac{1}{34} \\ & \frac{1}{3} \quad 5\frac{2}{3} & * \; 3 \quad \frac{1}{51} \quad \frac{1}{3} \end{array}$$

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 36. [2]) Ebenda S. 37.

$$\frac{1}{6} \quad 2\frac{1}{2}\frac{1}{3} \qquad\qquad * \; 4 \quad \frac{1}{68}\;\frac{1}{4}$$

$$* \; \frac{1}{12} \quad 1\frac{1}{4}\frac{1}{6} \; \text{Rest} \; \frac{1}{3}\;\frac{1}{4},$$

wo die Worte „Rest $\frac{1}{3}\;\frac{1}{4}$“ bedeuten, daß $\frac{1}{12} \times 17$ von den verlangten 2 abgezogen noch $\frac{1}{3}\;\frac{1}{4}$ zum Reste lassen.

Statt des so beseitigten Einwurfes droht uns ein zweiter, der die Ausrechnung selbst, den auftretenden Rest, die durch denselben erzwungenen ergänzenden Stammbrüche in Widerspruch setzen möchte gegen unsere Behauptung, eine Ableitungsmethode der Tabelle sei nicht ersichtlich. Und dennoch können wir diese Behauptung aufrecht erhalten. Mag immerhin, wenn der erste Teilbruch der Zerlegung gegeben war, auf den oder die anderen Teilbrüche durch eine Restrechnung geschlossen worden sein, die Wahl des ersten Teilbruches selbst war davon unbeeinflußt, und auf sie kam alles an. So gibt z. B. die Tabelle $\frac{2}{43} = \frac{1}{42}\;\frac{1}{86}\;\frac{1}{129}\;\frac{1}{301}$. Wollte man zum ersten Teilbruche nur einen solchen wählen, dessen 43faches unterhalb der 2, aber nahe bei ihr lag, so hinderte nichts folgende Rechnung anzustellen, der wir zum Vergleiche mit den übrigen eine ganz ägyptische Anordnung geben:

1	43	1	43
$\frac{2}{3}$	$28\frac{2}{3}$	2	86
$\frac{1}{3}$	$14\frac{1}{3}$	3	129
$\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{6}$	* 6	258
$\frac{1}{12}$	$3\frac{1}{2}\frac{1}{12}$	12	516
* $\frac{1}{24}$	$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{24}$ Rest $\frac{1}{6}\;\frac{1}{24}$	* 24	1032

und man hätte $\frac{2}{43} = \frac{1}{24}\;\frac{1}{258}\;\frac{1}{1032}$ gefunden. Der Rechner muß doch irgend eine Veranlassung gehabt haben mit $\frac{1}{42}$ statt etwa, wie es hier gezeigt wurde, mit $\frac{1}{24}$ zu beginnen, und welches diese Veranlassung war, wissen wir eben nicht. Das heißt wir kennen nicht die Ableitung der Tabelle.

Man fasse übrigens die Ausrechnung auf, wie immer man wolle, der Umstand bleibt jedenfalls bemerkenswert, daß ein Rest bei ihr

zur Rede kommt, daß also eine gegebene Zahl von einer anderen (hier von der Zahl 2) abgezogen wurde, daß man diesem Rest entsprechend eine Ergänzung durch Vervielfachung wieder einer gegebenen Zahl $\left(\text{des Nenners des zu zerlegenden Bruches } \frac{2}{A}\right)$ mit zu suchenden Stammbrüchen zu beschaffen hatte. So sehen wir die Möglichkeit, wenn nicht die Notwendigkeit einer eigentlichen Ergänzungs- oder Vollendungsrechnung, und eine solche unter dem ägyptischen Namen *Seqem* schließt sich mit 17 Beispielen unmittelbar an die große und die auf letztere folgende kleine Zerlegungstabelle an[1]). Die Seqemrechnung hat es mit multiplikativen und additiven Ergänzungen zu tun, d. h. es wird in den ersten Beispielen gelehrt, womit eine bald aus Brüchen allein, bald aus mit Brüchen verbundenen Ganzen bestehende gegebene Zahl vervielfacht werden muß, es wird in späteren Beispielen gelehrt, wieviel zu einer ähnlichen gegebenen Zahl hinzugefügt werden muß, um einen gegebenen Wert hervorzubringen. Wir könnten kürzer sagen: es wird mit einer gegebenen Zahl in eine andere dividiert, oder aber sie wird von einer anderen subtrahiert, wenn nicht dadurch der Zweck wie die Verfahrungsweise des Ägypters durchaus verwischt würde.

Das Verfahren besteht wesentlich in einer Zurückführung der gegebenen Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, die als Hilfsrechnung durch andersfarbige (rote) Schriftzüge sich hervorhebt, und wobei gewissermaßen über unsere moderne Anwendung von Generalnennern hinausgegangen wird, indem man sich nicht versagt, auch solche gemeinsame Nenner zu wählen, in welchen die Nenner der gegebenen Stammbrüche nicht eine ganzzahlige Anzahl von Malen enthalten sind. Maßgebend ist nur, daß jener Generalnenner zur Aufgabe selbst oder zu der bis dahin geführten Rechnung in Beziehung stehe, und nicht etwa Scheu vor zu großen Generalnennern bestimmt die Wahl desselben. Eine solche Scheu kannte man tatsächlich nicht, wie Aufgabe No. 33 beweist, in welcher 5432 als Generalnenner vorkommt[2]). Zwei von den Seqemrechnungen, No. 23. und No. 13., mögen jene die additive, diese die multiplikative Ergänzung erkennen lassen.

In No. 23. soll $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{45}$ additiv zu 1 ergänzt werden. Generalnenner wird 45, allerdings ohne daß ein Wort davon verlautete. Es werden eben nur die genannten Stammbrüche durch die Zahlen $11\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1 ersetzt, und damit ist für den Sachkundigen

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 53—60. [2]) Ebenda S. 73.

hinlänglich erklärt, daß Fünfundvierzigstel gemeint sind. Deren Summe $23 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ Fünfundvierzigstel bedarf zur Ergänzung auf $\frac{2}{3}$ noch $\frac{6\frac{1}{8}}{45} = \frac{5}{45} \frac{1\frac{1}{8}}{45} = \frac{1}{9} \frac{1}{40}$; dann fehlt noch $\frac{1}{3}$, mithin ist die ganze Ergänzung $\frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{1}{40}$.

In No. 13. soll $\frac{1}{16} \frac{1}{112}$ multiplikativ zu $\frac{1}{8}$ ergänzt werden. Wohl mit Rücksicht darauf, daß $112 = 7 \times 16$, wird ein gerades Vielfaches von 7, nämlich 28, zum Generalnenner gewählt, also $\frac{1}{16} = \frac{1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}}{28}$, $\frac{1}{112} = \frac{\frac{1}{4}}{28}$ und deren Summe $= \frac{2}{28}$ gesetzt. Diese soll zu $\frac{1}{8} = \frac{3\frac{1}{2}}{28}$ gemacht werden, und das geschieht, indem man die $\frac{2}{28}$ selbst, deren Hälfte $\frac{1}{28}$ und die Hälfte dieser Hälfte $\frac{\frac{1}{2}}{28}$ vereinigt. Mit anderen Worten $\frac{1}{16} \frac{1}{112}$ wird durch Vervielfachung mit $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{8}$ vollendet.

Unsere Darstellung des letzten Beispieles gibt uns nicht bloß einen Einblick in eine Seqemaufgabe, sondern in das Dividieren der Ägypter überhaupt, wie es im ganzen Papyrus an den verschiedensten Stellen wiederkehrt, stets den Weg mittelbarer Vervielfältigung wählend, in verwickelteren Fällen zunächst mit einem angenäherten Ergebnisse sich begnügend, welches dann selbst noch nachträglich eine Ergänzung notwendig macht.

Wenn es in No. 58. heißt[1]): „Mache du vervielfältigen die Zahl $93 \frac{1}{3}$ um zu finden 70. Vervielfältige die Zahl $93 \frac{1}{3}$, ihre Hälfte $46 \frac{2}{3}$, ihr Viertel $23 \frac{1}{3}$. Mache du $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$“, so ist die Meinung keine andere, als die, daß jene Hälfte mit $46 \frac{2}{3}$ und jenes Viertel mit $23 \frac{1}{3}$ zusammen die verlangten 70 geben.

Wenn No. 32. verlangt $1 \frac{1}{3} \frac{1}{4}$ zu 2 zu machen[2]), so vervielfältigt Ahmes die gegebene Zahl zunächst mit $\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{12}$ (wobei der Umweg erst $\frac{2}{3}$ und dann noch $\frac{1}{3}$ der Zahl statt dieser selbst zu nehmen nur durch den Wunsch erklärt werden kann, bei der weiteren Arbeit möglich viele Multiplikationsergebnisse von $1 \frac{1}{3} \frac{1}{4}$ zu kennen) und bringt die Summe aller dieser Teilprodukte in die Form $1 \frac{1}{6} \frac{1}{12} \times 1 \frac{1}{3} \frac{1}{4}$.

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 144. [2]) Ebenda S. 70.

$= \frac{285}{144}$. Er will aber $2 = \frac{288}{144}$ erhalten, zu deren Ergänzung noch $\frac{3}{144} = \frac{1}{72}\,\frac{1}{144}$ erforderlich sind. Nun war bei der Gewinnung des angenäherten Produktes $1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ in die Form $\frac{228}{144}$ gebracht worden. Daraus geht hervor, daß $\frac{1}{228} \times 1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{144}$ sein muß und $\frac{1}{114} \times 1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{72}$. Der gesamte gesuchte Quotient ist daher $\frac{2}{1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}} = 1\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{114}\,\frac{1}{228}$.

Wir sind fast unverantwortlich ausführlich in der Darstellung dieser Rechnungsverfahren und ihrer tabellarischen Hilfsmittel gewesen. Möge es uns gelungen sein dem Leser die Denkweise eines ägyptischen Rechners einigermaßen zu vergegenwärtigen. Das wäre freilich unmöglich, wenn unsere Auffassung eine so durchaus irrige wäre, als behauptet worden ist[1]). Zunächst soll in den Seqemrechnungen von einem gemeinschaftlichen Nenner keine Rede sein. Das ist vollständig wahr, wenn man den Nachdruck auf das Wort selbst legt. Ahmes hat dem Nenner, auf welchen die vorkommenden Brüche zurückgeführt werden, keinen Namen gegeben. Die Operation der Zurückführung als solche ist auch nicht geschildert. Aber als Mittel zur Hauptrechnung, welche *Seqem* heißt, wird sie fortwährend geübt, wie wir an der Hand der Beispiele gezeigt haben.

Ferner soll auch der Zweck der Seqemrechnungen nicht der von uns angegebene sein. Ahmes beweise vielmehr unter dem Namen Seqem den Satz, daß wenn man verschiedene Zahlengrößen dem gleichen Rechnungsverfahren unterwerfe, die Ergebnisse im gleichen Verhältnisse sich ändern, wie die Zahlengrößen, von denen man ausging. Indem wir unsere Leser auch mit dieser Auffassung bekannt machen, verschweigen wir allerdings nicht, daß unserer Meinung nach hier Dinge in Ahmes hineingelesen werden, an die er nie dachte. Ein Wort, welches mit Verhältnis übersetzt werden könnte, kommt überhaupt nicht vor. Richtig ist nur das eine, und das war übersehen worden, bis unser Herr Gegner darauf aufmerksam machte, daß in den Seqemrechnungen die zu erreichende Zahl meistens das Siebenviertelfache der Ausgangszahl ist, so daß diese ganz, zur Hälfte und zum Viertel genommen und so vereinigt werden muß.

Wir sind sogar in der Lage ähnliches aus weit älterer Zeit anzugeben. H. Brugsch hat 1891 im Museum von Gizeh zwei mit

---

[1]) Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien (Papyrus Rhind) par M. Léon Rodet im Journal Asiatique für 1882. Die 122 Seiten starke Abhandlung ist auch im Separatabdruck erschienen.

Gips überzogene Tafeln entdeckt[1]), welche zum Rechnen benutzt wurden und noch mit Zahlzeichen bedeckt sind. Schriftcharakter und beigefügte Namen wie Amenemhat, Usertesen weisen auf die XII., wenn nicht auf die XI. Dynastie hin. Die vollzogenen Rechnungen bestehen darin, daß Zahlen angegeben werden, deren erste das 7fache, 10fache, 11fache, 13fache der zweiten sind. Das 7fache ist beispielsweise durch die Zahlenreihe erläutert

7	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$
1	$\frac{40}{320}\ \frac{5}{320}\ \frac{1}{640}$

usw., wo allerdings die letzte Angabe nur näherungsweise richtig ist, da $\frac{1}{7}$ nicht $\frac{91}{640}$ ist, sondern $\frac{91\frac{3}{7}}{640}$, also etwa $\frac{1}{1280}$ mindestens fehlt.

Sei aber bei dem Umstande, daß Ahmes nur das Wort Seqem gebraucht, ohne es irgend zu erklären, ein Zweifel über Sinn und Absicht gestattet, sei darum die eine oder die andere Deutung vorzuziehen, oder gar eine dritte, deren Enthüllung die Zukunft bringen könnte, die eine Wahrheit wird wohl sicherlich genügend zutage getreten sein, daß Ahmes dieses Handbuch nicht für den ersten besten, sondern nur für die ersten und besten der Rechnungsverständigen seiner Zeit schrieb. Sein Werk setzt das gemeine Rechnen mit ganzen Zahlen durchaus voraus. Es schließt nicht aus, daß die Zwischenrechnungen unter Anwendung von Hilfsmitteln ausgeführt wurden, von welchen Ahmes nicht redet. Wenden wir uns nunmehr zu den eigentlichen Aufgaben des Papyrus, welchen wir gleichfalls den Stempel eines verhältnismäßig höheren Wissens aufgeprägt finden.

An der Spitze dieser Aufgaben stehen die *Hau*-Rechnungen[2]), die dem Inhalte nach nichts anderes sind, als was die heutige Algebra Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten nennt. Die unbekannte Größe heißt *Hau*, der Haufen, und mit diesem Worte wird nicht bloß bis zu einem gewissen Grade gerechnet, es kommen sogar mathematische Zeichen vor, welche von den gegenwärtig gebräuchlichen sich nur insoweit unterscheiden, als sie ohne Anwendung von zugleich mit ihnen auftretenden Wörtern nicht ausreichen einen nicht mißzuverstehenden Sinn herzustellen. Als solche

[1]) H. Brugsch-Pascha, Aus dem Morgenlande (Reclams Universal-Bibliothek No. 3151 und 3152) S. 35—40. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 60—88.

mathematische Hieroglyphen dürfen wir ausschreitende Beine für Addition und Subtraktion nennen. Die Addition wird durch dieselben bezeichnet, wenn die Beine der Zeichnung der Füße gemäß eben nach der Richtung gehen, wohin auch die Köpfe der Vögel, der Menschen usw. in den dergleichen darstellenden Hieroglyphen schauen, die Subtraktion im entgegengesetzten Falle. Wir nennen ferner ein aus drei horizontalen parallelen Pfeilen bestehendes Zeichen für Differenz. Wir nennen endlich das Zeichen $\lessless$ in der Bedeutung „das macht zusammen" oder „gleich". Stellen wir einige dieser Aufgaben in ihrem Wortlaute zusammen, welchen wir die Schreibweise als Gleichungen folgen lassen.

No. 24. Haufen, sein Siebentel, sein Ganzes, es macht 19. D. h. $\frac{x}{7} + x = 19$.

No. 28. $\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinweg bleibt 10 übrig. D. h. $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$.

No. 29. $\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinzu, $\frac{2}{3}$ hinweg (?) bleibt 10 übrig. D. h. $\left(x + \frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{2}{3}\left[\left(x + \frac{2}{3}x\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right)\right] = 10$.

No. 31. Haufen, sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt 33. D. h. $\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33$.

Das Wesen einer Gleichung besteht nun allerdings weit weniger in dem Wortlaute als in der Auflösung, und so müssen wir, um die Berechtigung unseres Vergleichs zu prüfen, zusehen, wie Ahmes seine Haurechnungen vollzieht. Er geht dabei ganz methodisch zu Werke, indem er die Glieder, welche, wie man heute sagen würde, links vom Gleichheitszeichen stehen, zunächst in eins vereinigt. Freilich tut er das in doppelter Weise, bald so, daß die Vereinigung im Nebeneinanderschreiben der betreffenden Stammbrüche bestehend nur eine formelle ist, z. B. No. 31.: $1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}\,x = 33$; bald so, daß durch Zurückführung auf einen Generalnenner wirkliche Addition vorgenommen ist, z. B. No. 24.: $\frac{8}{7}x = 19$; No. 28.: $\frac{10}{9}x = 10$; No. 29.: $\frac{20}{27}x = 10$. Im erstgenannten Falle wird sofort durch den Koeffizienten der unbekannten Größe in die gegebene Zahl dividiert, wie eben der Ägypter zu dividieren pflegt, d. h. bei No. 31. man vervielfältigt $1\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{7}$ solange bis 33 herauskommen und findet so den

freilich nichts weniger als übersichtlichem Wert des Haufens $14\frac{1}{4}\,\frac{1}{97}\,\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}\,\frac{1}{194}\,\frac{1}{388}$, bei welchem wir nur zu bemerken geben, daß $\frac{1}{56}\,\frac{1}{679}\,\frac{1}{776}$ der aus der Tabelle herrührende Wert von $\frac{2}{97}$ ist. Der zweite Fall eröffnet wieder zwei Möglichkeiten. Entweder man löst $\frac{a}{b}x = C$ indem die Division $\frac{C}{a}$ vollzogen und deren Quotient mit b vervielfacht wird; so in No. 24, wo zuerst 8 in 19 als $2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ mal enthalten und dann 7 mal $2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ als $16\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$ gefunden wird. Oder aber man dividiert mit $\frac{a}{b}$ in 1 und vervielfacht diesen Quotienten mit C; so wahrscheinlich in den Aufgaben No. 28. und 29. In No. 28. wird nämlich $\frac{1}{10}$ von 10 gesucht und von 10 abgezogen um den Haufen 9 zu finden; wir fassen das so auf, es sei $\frac{1}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}$ gewonnen und dann $1 - \frac{1}{10}$ mal 10 ermittelt worden. Bei No. 29. wird $\frac{1}{\frac{20}{27}}$ oder $\frac{27}{20}$ im Werte von $1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{10}$ berechnet und dieses 10mal genommen, so daß $13\frac{1}{2}$ als der Haufen erscheint.

Auch hier sollen wir[1]) eine durchaus irrige Darstellung gegeben haben. Nicht als Gleichungen seien die Haurechnungen aufzufassen, sondern als Anwendungen der hier erstmalig auftretenden Methode des falschen Ansatzes. Ahmes wähle, wenn eine Aufgabe von der Form $\frac{a}{b}x = C$ vorgelegt sei, für x zunächst den bequemen, wenn auch falschen Wert b. Durch ihn wird freilich $\frac{a}{b}x$ nicht C, sondern a, und der richtige Wert von x wird sodann gefunden, indem man von b zu ihm dasselbe Verhältnis obwalten läßt, wie von a zu C. Der Sache nach stimmt diese Methode des falschen Ansatzes und die der Gleichungsauflösung offenbar überein, und bei fehlendem Zwischentexte ist es beinahe Geschmackssache, ob man das eine, ob man das andere erkennen will.

Daß die Vorstellung eines Hindurchgehens durch einen falschen Ansatz den Ägyptern nicht fremd war, haben wir immer behauptet, wie sich bei der Besprechung der Aufgabe No. 40. zeigen wird.

---

[1]) Rodet, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien.

Daß aber die Ägypter auch mit dem Gleichungsbegriffe vertraut waren, und daß ihnen also Fremdartiges nicht untergeschoben wird, wenn man, wie wir es getan haben, die Haurechnungen Gleichungsauflösungen nennt und als solche behandelt, das zeigen vorzugsweise andere Aufgaben, welche im Papyrus räumlich von den Haurechnungen getrennt von No. 62. an auftreten[1]). Diese Aufgaben würden in modernen Übungsbüchern, in welchen sich regelmäßig verwandte Dinge behandelt finden, unter dem Namen der Gesellschaftsrechnungen erscheinen. Die deutlichste derselben, No. 63., hat nach zweifellos richtig hergestelltem Text folgenden Wortlaut: „Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter vier Personen, $\frac{2}{3}$ für einen, $\frac{1}{2}$ für den zweiten, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten". Als Gleichung geschrieben wäre hier $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 700$ oder $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}x = 700$. Nun wird zwar nicht in ägyptischer Weise mit $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ in 1 dividiert, aber doch das Ergebnis $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$ sofort hingeschrieben, ein Ergebnis, welches der Seqemaufgabe No. 9. entnommen sein kann[2]), woraus zugleich ein weiterer Nutzen dieser Ergänzungsrechnungen und damit eine weitere Begründung der Notwendigkeit ihrer besonderen frühzeitigen Einübung hervorgeht. Der Wortlaut ist nämlich anknüpfend an den der Aufgabe: „Addiere du $\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$, das gibt nun $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Teile du 1 durch $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, das gibt nun $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$. Mache du $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$ von 700, das ist 400." Wie könnte man bei dieser Rechnung von einem falschen Ansatze reden? Nein, es ist vollständige Gleichungsauflösung. Von $\frac{a}{b}x = C$ ist weiter geschlossen auf $x = \left(1 : \frac{a}{b}\right)C$, genau so wie wir oben es auch für die Aufgaben No. 28. und 29. wahrscheinlich zu machen versuchten.

Unter den Aufgaben der letzterwähnten Gruppe ist No. 66. nicht ohne sachliches Interesse, wo aus dem Fettertrage eines Jahres der tägliche Durchschnittsertrag mit Hilfe der Teilung durch 365 ermittelt wird. Die Länge des Jahres zu 365 Tagen führt in Ägypten auf eine sagenhafte Urzeit noch vor König Mena zurück[3]). Der Gott Thot soll der Mondgöttin im Brettspiele 5 Tage abgewonnen haben,

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 151—174; insbesondere S. 159 für die Aufgabe No. 63. und S. 165—166 für die Aufgabe No. 66. [2]) Ebenda S. 55. [3]) Maspero-Pietschmann S. 76—77.

die er den bis dahin in der Zahl von 360 üblichen Tagen des Jahres zulegte. Und wie die Ägypter mindestens als Mitbewerber zu anderen ältesten Kulturvölkern um den Vorrang der Kenntnis der Jahreslänge von 365 Tagen auftreten, so gebührt ihnen ganz gewiß das Erstlingsrecht in der Einführung des Schaltjahres von 366 Tagen, welches je nach drei gewöhnlichen Jahren eintretend eine Ausgleichung der Jahresdaten mit den wirklichen Jahreszeiten zum Zwecke hat. Das Edikt von Kanopus vom 7. März 238 v. Chr. führte diese Einrichtung ein, wenn sie auch bald wieder in Vergessenheit geriet[1]).

Dem Inhalte und der Art des Auftretens nach hochbedeutsam sind die Aufgaben No. 40., 64., 79. des Papyrus. Ihr getrenntes Vorkommen scheint darauf hinzuweisen, daß der mathematische Zusammenhang derselben für Ahmes nicht deutlich, oder nicht erheblich genug war um die Anordnung der Aufgaben zu beeinflussen. Ihr Gegenstand ist der Lehre von den arithmetischen und den geometrischen Reihen entnommen.

No. 40. „Brote 100 an Personen 5; $\frac{1}{7}$ von 3 ersten das von Personen 2 letzten. Was ist der Unterschied?“ [2]) Ahmes will eine arithmetische Reihe von 5 Gliedern gebildet haben, deren größtes Anfangsglied a, deren negative Differenz $-d$ sei, und welche der Bedingung entspricht, daß $\frac{a + (a-d) + (a-2d)}{7} = (a - 3d) + (a - 4d)$, oder $11(a - 4d) = 2d$, beziehungsweise $d = 5\frac{1}{2} \times (a - 4d)$ sei. Mit anderen Worten: der Unterschied der Glieder muß das $5\frac{1}{2}$ fache des niedersten Gliedes betragen, damit der einen ausgesprochenen Bedingung genügt werde, und Ahmes kleidet dieses ohne jede Begründung in die Worte: „Mache wie geschieht, der Unterschied $5\frac{1}{2}$“, worauf er die Reihe hinschreibt, welche die 1 als letztes Glied besitzt: $23, 17\frac{1}{2}, 12, 6\frac{1}{2}, 1$. Allein die Summe s dieser Reihe ist nur 60, während sie nach der anderen ausgesprochenen Bedingung 100 sein soll. Nun ist 100 das $1\frac{2}{3}$ fache von 60, man braucht also nur jedes Reihenglied $1\frac{2}{3}$ mal zu nehmen um beiden Bedingungen zugleich gerecht zu werden. Bei Ahmes heißt dieses wieder ohne weitere Begründung „mache du vervielfältigen die Zahl $1\frac{2}{3}$ mal“, wo-

[1]) Über das im April 1866 aufgefundene Edikt von Kanopus vgl. R. Lepsius, Das bilingue Dekret von Kanopus. Berlin 1866. Bd. I. [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 90—92.

durch er zu der richtigen Reihe $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$ gelangt. Hier hat Ahmes in der Tat zuerst einen falschen Ansatz versucht, um ihn nachträglich zu verbessern, und wir werden uns dieses Verfahren für später zu merken haben.

No. 64. „Vorschrift des Abteilens Unterschiede. Wenn gesagt dir Getreide Maß 10 an Personen 10. Der Unterschied von Person jeder zu ihrer zweiten beträgt an Getreide Maß $\frac{1}{8}$, ist er.“ [1]) Hier ist aus der Summe s, der wieder negativ gewählten Differenz $-d$ und der Gliederzahl n das Anfangsglied a der fallenden arithmetischen Reihe zu suchen. Nun ist $a + (a - d) + \cdots + (a - (n-1)d) = s = na - \frac{n(n-1)}{2}d$ und daraus $a = \frac{s}{n} + (n-1)\cdot\frac{d}{2}$ und genau nach dieser Formel läßt Ahmes rechnen. Der Wortlaut mag diese Behauptung begründen. Ahmes schreibt vor: „Ich teile in der Mitte $\left[\text{d. h. ich bilde den mittleren Durchschnitt } \frac{s}{n}\right]$ d. i. 1 Maß. Ziehe ab 1 von 10 Rest 9 [d. h. bilde $n-1$]. Mache die Hälfte des Unterschiedes $\left[\text{d. h. mache } \frac{d}{2}\right]$ d. i. $\frac{1}{16}$. Nimm es mal 9 $\left[\text{d. i. nimm } \frac{d}{2} \times (n-1)\right]$, das gibt bei dir $\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$. Lege es hinzu zur Teilung mittleren $\left[\text{d. h. vollziehe die Addition } \frac{s}{n} + \frac{d}{2} \times (n+1)\right]$. Ziehe ab du Maß $\frac{1}{8}$ für Person jede um zu erreichen das Ende.“

Eine höchst merkwürdige Parallelstelle findet sich in den Fragmenten von Kahun, nämlich:

$$110$$
$$13\frac{3}{4}$$
$$12\frac{11}{12}$$
$$12\frac{1}{12}$$
$$11\frac{1}{4}$$
$$10\frac{5}{12}$$
$$9\frac{7}{12}$$
$$8\frac{3}{4}$$

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 159—162.

$$7\frac{11}{12}$$

$$7\frac{1}{12}$$

$$6\frac{1}{4}.$$

Die 10 letzten Zahlenangaben bilden eine fallende arithmetische Reihe mit der Differenz $\frac{5}{6}$ und der Summe 100. Mit der als Überschrift dienenden Zahl 110 ist nichts anzufangen, es sei denn daß man annähme, zwischen dem Zeichen für 10 und dem für 100 sei beim Schreiben irgend etwas vergessen worden. Man hätte alsdann als Überschrift zu denken: 100 in 10 Glieder zu zerlegen, und nach dieser Überschrift fände sich die Auflösung der Aufgabe.

In den beiden Aufgaben No. 40. und No. 64. bedurfte es von uns der Erläuterungen, um die betreffenden Auflösungsmethoden zu rechtfertigen. Ahmes setzt kein Wort von dieser Art hinzu. Das beweist doch mit aller Bestimmtheit, daß die notwendigen Formeln aus einem anderen Lehrbuche hergenommen sein mußten, oder aber, daß der mündliche Unterricht für die nötige Erklärung bei solchen Schülern sorgte, die zur Frage: warum macht man das so? reif waren. Keinenfalls konnte der ägyptische Mathematiker, wenn die Anwendung dieses Wortes gestattet ist, in seinem Wissen von arithmetischen Reihen auf die unbewiesenen, ungerechtfertigten Formeln beschränkt gewesen sein, von denen in No. 40. und 64. Gebrauch gemacht ist. Dafür spricht noch weiter das Vorhandensein eines besonderen Ausdruckes Tunnu, die Erhebung, für den Unterschied zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe.

Wir haben uns auch noch auf die Aufgabe No. 79. für Kenntnisse in der Lehre von den geometrischen Reihen bezogen. Wie weit sich diese erstreckten, ist freilich viel zweifelhafter als bei den arithmetischen Reihen. In der genannten Aufgabe [1]) ist von einer Leiter, Sutek, die Rede, welche aus den Gliedern 7, 49, 343, 2401, 16807 bestehe. Neben diesen Zahlen, offenbar neben den 5 ersten Potenzen von 7, stehen Wörter, die auf deutsch Bild, Katze, Maus, Gerste, Maß heißen. Der Sinn dieser Aufgabe war durch die mehrerwähnte Eigentümlichkeit des Handbuches, nirgend verbindende oder erklärende Worte zwischen die Zahlenangaben einzuschieben, unverständlich und mußte es bleiben, bis es gelang bei einem Schriftsteller, der fast 3000 Jahre nach Ahmes lebte, eine Aufgabe aufzufinden, von welcher im 41. Kapitel im folgenden Bande die Rede sein wird,

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 202—204.

und welche den Schlüssel lieferte[1]). Der fehlende Wortlaut der Aufgabe No. 79. ist demnach folgendermaßen herzustellen: 7 Personen besitzen je 7 Katzen; jede Katze vertilgt 7 Mäuse; jede Maus frißt 7 Ähren Gerste; aus jeder Ähre können 7 Maß Getreidekörner entstehen; wie heißen die Glieder der nach diesen Angaben zu bildenden Zahlenreihe, und wie groß ist ihre Summe? Ahmes bildet die Glieder wirklich. Er addiert sie zu 19607 und findet in einer Nebenrechnung die gleiche Zahl 19607 als Produkt von 7 mal 2801. Allerdings ist nicht gesagt, wie Ahmes gerade zu dem Faktor 2801 gelangte, aber andererseits ist auch nicht in Abrede zu stellen, daß $2801 = \frac{16807 - 1}{7 - 1}$, daß also möglicherweise, vielleicht wahrscheinlicherweise hier die Kenntnis der Summierungsformel für die geometrische Reihe $a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^n - 1}{a - 1} \times a$ durchschimmert, wenn auch von einer Gewißheit keine Rede sein kann.

Das wäre etwa der Inhalt des Übungsbuches des Ahmes, soweit er für die Rechenkunst von Wichtigkeit ist. Bevor wir den geometrischen Teil der Aufgaben zur Sprache bringen und des Metrologischen im Vorbeigehen gedenken, schalten wir hier Erörterungen ein, die sich auf die schriftliche Bezeichnung der Zahlen bei den Ägyptern und auf das Rechnen derselben beziehen.

Daß die Schrift der Ägypter ihren ursprünglichen Charakter als Bilderschrift in den Zeichen, welche zur monumentalen Anwendung kamen, am reinsten bewahrt hat, braucht gewiß kaum gesagt zu werden. Die Hieroglyphen, eingehauen in die Obelisken und Gedenksteine, aufgemalt auf die Wände der Tempel und der Grabeskammern, lassen auf den ersten Blick sich als Zeichnungen von Menschen, von Tieren, von Gliedmaßen, von Gegenständen des täglichen Gebrauches erkennen, wenn sie auch allmählich mit Silben- oder Buchstabenaussprache versehen wurden, welche mit dem dargestellten Bilde oft nur lautlich zusammenhängen. Bei rascherem Schreiben veränderten sich selbstverständlich die Zeichen. Absichtlich oder zufällig abgerundet verschwammen sie bis zur Unerkennbarkeit ihres Ursprunges in rasch hinzuwerfende Züge der hieratischen Schrift. Endlich ist als letzte Erscheinungsweise dieses Abhandenkommens der ersten Umrisse die demotische Schrift zu erwähnen, heute noch die meisten Schwierigkeiten bereitend, bei denen wir uns glücklicherweise nicht aufzuhalten brauchen, da diejenigen Schriftstücke, von denen allein die Rede sein muß, teils in

[1]) Rodet, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien pag. 111—113 der Sonderausgabe.

Hieroglyphen an verschiedenen noch zu nennenden Tempelwänden, teils in hieratischer Schrift — so besonders das bisher besprochene Werk des Ahmes — erhalten sind.

Die Richtung der Schrift ist bei Hieroglyphen wechselnd. Man pflegte nämlich auf die Richtung, in welcher der Lesende vorüberschreitend gedacht war, Rücksicht zu nehmen, und so mußte bei Inschriften auf zwei Parallelwänden notwendigerweise auf der Wand zur Rechten des Hindurchgehenden die Schrift von rechts nach links fortschreiten, auf der anderen Wand von links nach rechts. Sämtliche Hieroglyphen kommen daher bald in einer Form vor, bald in der durch Spiegelung aus jener entstehenden zweiten Form. Man hat sich gewöhnt bei der Wiedergabe der Hieroglyphen im Drucke stets die Form anzuwenden, welche dem Lesen von links nach rechts entspricht. Die hieratische Schrift dagegen führt immer von rechts nach links [1]).

Sollten in hieroglyphischen Inschriften Zahlen dargestellt werden, so standen dazu verschiedene Mittel zu Gebote [2]). Bald wiederholte man das zu Zählende, wie z. B. in einer Inschrift von Karnak, wo „9 Götter" in der Weise geschrieben ist, daß das Zeichen für Gott neunfach nebeneinander abgebildet ist. Bald schrieb man die Zahlwörter alphabetisch aus, ein höchst wichtiges Vorkommen, da hieraus die Kenntnis des Wortlautes wenigstens in einigen Fällen zu gewinnen war, wozu alsdann Ergänzungen teils aus der Benutzung von Zahlzeichen in Silbenbedeutung, teils aus der koptischen Sprache usw. kamen, so daß man gegenwärtig über eine ziemliche Menge von ägyptischen Zahlwörtern verfügt [3]). Bei weitem am häufigsten gebrauchten aber die Ägypter bestimmte Zahlzeichen, denen der Franzose Jomard schon während der ägyptischen Expedition 1799 auf die Spur kam, und die er 1812 bekannt machte. Sie stammen meistens aus dem sogenannten „Grabe der Zahlen", das Champollion unweit der Pyramiden von Gizeh auffand, und in welchem dem reichen Besitzer seine Herden mit Angabe der einzelnen Tiergattungen vorgezählt werden, als 834 Ochsen, 220 Kühe, 3234 Ziegen, 760 Esel, 974 Schafe.

Die Zeichen sind ihrer Bedeutung nach 1 (I), 10 (∩), 100 (@), 1000 (𓆼), 10000 (𓂭); auch ein Zeichen für 100000 (𓆐), für Million (𓁨), sogar für 10 Million (𓍢) ist bekannt geworden [4]). Was

[1]) Maspero-Pietschmann S. 590. [2]) Mathem. Beitr. Kulturl. S. 15. [3]) Eisenlohr, Papyrus S. 13—21. [4]) Hieroglyphische Grammatik von H. Brugsch. Leipzig 1872, S. 33.

die Zeichen darstellen, ist nicht bis zur vollen Sicherheit klar. Daß 1 durch einen senkrechten Stab, 10000 durch einen deutenden Finger, 100000 durch eine Kaulquappe, Million durch einen sich verwundernden Mann zu erklären sei, darin mögen wohl alle einig sein. Die vier übrigen Zeichen dagegen für 10, 100, 1000, 10 Million sind bald so, bald so gedeutet worden. So hat man beispielsweise in dem Zeichen für 100 bald einen Palmstengel, bald einen Priesterstab, in dem für 1000 bald eine Lotusblume, bald eine Lampe erkennen wollen. Wir sehen von dieser Einzeldeutung als uns nicht berührend ab und schildern nur die Methode, nach welcher mittels dieser Zeichen die Zahlen geschrieben wurden.

Sie ist eine rein additive durch Nebeneinanderstellung oder *Juxtaposition*, indem das Zeichen der Einheit einer jeden Ordnung so oft wiederholt wird als sie vorkommen sollte. Der leichteren Übersicht wird dadurch Vorschub geleistet, daß Zeichen derselben Art, wenn mehr als vier derselben auftreten sollten, in Gruppen zerlegt zu werden pflegten, so daß nicht mehr als höchstens vier Zeichen derselben Art dicht nebeneinander geschrieben wurden. Eine derartige *Gruppierung* scheint übrigens fast allerorten sich frühzeitig eingebürgert zu haben, selbst bei solchen Völkern, die in ihren mit lauter einfachen Strichen versehenen *Kerbhölzern* zu der niedrigsten Form eines schriftlichen Festhaltens einer Zahl allein sich aufzuschwingen vermochten [1]). Die Reihenfolge der Zeichen überhaupt und, bei Zeichen derselben Art, der Gruppen gehorcht dem Gesetze der Größenfolge, welches wir in der Einleitung erläutert haben. Bei den von links nach rechts verlaufenden Hieroglyphentexten steht demnach das Zeichen, beziehungsweise die Gruppe höchster Zahlenbedeutung immer links von den anderen, und umgekehrt verhält es sich bei den Texten entgegengesetzten Verlaufs. Kamen neben den Ganzen auch Brüche vor, so wurden diese selbstverständlich nach den Ganzen geschrieben. Die Bezeichnung der Stammbrüche findet so statt, daß der Nenner in gewöhnlicher Weise geschrieben wird, darüber aber das Zeichen [Zeichen] Platz findet, welches *ro* ausgesprochen wird. Nur statt $\frac{1}{2}$ schreibt man [Zeichen] und statt des uneigentlichen Stammbruches $\frac{2}{3}$ [Zeichen] oder [Zeichen].

Die hieratischen Zahlzeichen wurden fast ebenso frühzeitig wie die hieroglyphischen bekannt, indem Champollion zwischen 1824 und 1826 aus der überaus reichen ägyptischen Sammlung zu Turin und den Papyrusrollen des Vatikan die Grundlage zu ihrer Entzifferung

[1]) *Pott* I, S. 8—9; II, S. 53.

gewann. Daß auch hier das Gesetz der Größenfolge für ganze Zahlen wie für Brüche maßgebend ist, daß der Richtung der hieratischen Schrift entsprechend das Größere ausnahmslos rechts von dem Kleineren steht, braucht kaum gesagt zu werden. Zum Schreiben der ganzen Zahlen benutzt die hieratische Schrift beträchtlich mehr Zeichen als die hieroglyphische, weil sie von der Juxtaposition unter sich gleicher Zeichen Abstand nimmt, vielmehr für die neun möglichen Einer, für die ebensovielen Zehner, Hunderter, Tausender sich lauter besonderer voneinander leicht unterscheidbarer Zeichen bedient. Sie spart an Raum und stellt dafür höhere Anforderungen an das Wissen des Schreibenden oder Lesenden. Nicht als ob jene Zeichen insgesamt voneinander unabhängig wären. Ein Blick auf die Tafel am Schlusse dieses Bandes genügt, um zu erkennen, daß die Einer mit geringen Ausnahmen sich aus der Vereinigung der betreffenden Anzahl von Punkten zu Strichen und aus der Verbindung solcher Striche zusammengesetzt haben[1]), daß die Hunderter und Tausender aus den Zeichen für 100 und 1000 mit den sie vervielfachenden Einern entstanden sind, daß jene Zeichen für 1000, für 100, auch für 10 den Hieroglyphen entstammen, unter Beachtung des Gegensatzes zwischen einer rechtsläufigen und einer linksläufigen Schrift. Die übrigen Zehner fordern jedoch den Scharfsinn des Erklärers so weit heraus, daß wir darauf verzichten auch nur einen Versuch in dieser Beziehung anzustellen.

Die Hieroglyphe für 10 hat sich, wie man bemerken wird, bei der hieratischen Schrift oben zugespitzt, und so bestätigt sich der Bericht eines wahrscheinlich in Ägypten geborenen griechischen Schriftstellers aus dem Anfange des V. Jahrhunderts n. Chr., Horapollon, welcher mitteilt[2]), die 10 werde durch eine gerade Linie dargestellt, an welche eine zweite sich anlehne. Derselbe Schriftsteller sagt auch[3]), die 5 werde durch einen Stern dargestellt, wie gleichfalls von der neueren Forschung bestätigt worden ist, wenn auch dieses Zeichen weniger Zahlzeichen als eigentliche Worthieroglyphe gewesen zu sein scheint.

Bei der hieratischen Schreibweise der Brüche hat das hieroglyphische *ro* sich zu dem Punkte verdichtet, der, wie wir schon wissen, über die ganze Zahl des Nenners gesetzt den Stammbruch erkennen ließ. (S. 61.) Den Hieroglyphen von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ entsprechen gleichfalls aus ihnen abgeleitete Zeichen. Außerdem gibt es noch beson-

[1]) R. Lepsius, Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung (Abhandlungen der Berliner Akademie 1865) S. 42. [2]) Horapollon, Hieroglyphica Lib. II, cap. 30. [3]) Horapollon, Hieroglyphica Lib. I, cap. 13.

dere hieratische Zeichen für $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, deren Ursprung nicht wohl ersichtlich ist, es müßte denn bei dem Zeichen für $\frac{1}{4}$ an die Vierteilung der Ebene durch zwei sich kreuzende Linien gedacht worden sein?

Die hieratische Schreibweise der ganzen Zahlen insbesondere war nicht systemlos. Sie konnte das Rechnen, namentlich das Multiplizieren bedeutend unterstützen, vorausgesetzt, daß man nur eine Kenntnis dessen besaß, was als Ergebnis der Vervielfachung der Einer untereinander und der Einheiten verschiedener Ordnung erscheint. Aber eine solche Einmaleinstabelle haben die Ägypter mutmaßlich nie besessen. Der Beweis dafür liegt in der Tatsache, daß sie Multiplikationen so gut wie nie auf einen Schlag vollzogen und auch bei der Ermittlung der Teilprodukte den Multiplikator keineswegs nach dekadisch unterschiedenen Teilen zu zerlegen pflegten. Wollte man z. B. das 13fache einer Zahl bilden, so suchte man nicht etwa das 3fache und 10fache, sondern das 1fache, 2fache, 4fache, 8fache durch wiederholte Verdopplung und vereinigte dann das 1fache, 4fache, 8fache zum gewünschten Produkte. Der gleiche Kunstgriff reichte aus, wenn Stammbrüche mit Stammbrüchen vervielfacht werden sollten, da vermöge der Schreibart der Brüche hier die Gleichartigkeit mit der Vervielfachung ganzer Zahlen untereinander auf der Hand lag, so daß wir in dieser Bezeichnung der Brüche selbst entweder eine geniale Erfindung oder einen glücklichen Griff, wahrscheinlich das letztere, zu rühmen haben.

Wir haben an den früher besprochenen Beispielen die Methoden allmählicher Vervielfachung ganzer und gebrochener Zahlen sowohl zum Zwecke eigentlicher Multiplikation, als indirekter Division zur Genüge kennen gelernt. Wir haben (S. 74) hervorgehoben, daß das Handbuch des Ahmes nur für Geübtere geschrieben sein kann, und mögen auch seine Schlußworte[1]): „Fange Ungeziefer, Mäuse, Unkraut frisches, Spinnen zahlreiche. Bitte Ra um Wärme, Wind, Wasser hohes“ sich an einen Landmann wenden, mögen die Aufgaben selbst vielfach an die Beschäftigungen eines Landmannes erinnern, niemand wird deshalb glauben wollen, daß ein gewöhnlicher Landmann Hau- und Tunnurechnungen zu bewältigen imstande gewesen sei. Neben dem höheren, dem wissenschaftlichen Rechnen kann daher und muß vielleicht an ein Elementarrechnen gedacht werden, dessen Spuren wir anderwärts als in dem Papyrus des Ahmes aufzusuchen haben. Das meiste, was die Wissenschaft erfand, sickert im Laufe der Jahre,

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 223—225.

wenn nicht der Jahrhunderte durch die verschiedenen Volksklassen hindurch, allgemeine Verbreitung erst dann erlangend, wenn höhere Bildung schon weit darüber hinaus gegangen ist, oder gar es als falsch erkannt hat. So muß es auch mit dem Rechnen gegangen sein in dem Lande, wo es vielleicht zuhause war.

Auf die ägyptische Herkunft der Rechenkunst weisen Volkssagen hin, welche von griechischen Schriftstellern uns aufbewahrt wurden. „Die Ägypter", so sagt uns der eine[1]), „erzählen, sie hätten das Feldmessen, die Sternkunde und die Arithmetik erfunden." Ein anderer hat gehört[2]), der Gott Thot der Ägypter habe zuerst die Zahl und das Rechnen und Geometrie und Astronomie erfunden. Ein dritter[3]) führt die ganze Mathematik auf Ägypten zurück, denn dort, meint er, war es dem Priesterstande vergönnt Muße zu haben. Und wenn Josephus, sei es seinem Nationalstolze eine Genugtuung verschaffend, sei es zum Teil wenigstens der Wahrheit die Ehre gebend, behauptet, die Ägypter hätten die Arithmetik von Abraham erlernt, der sie gleich der Astronomie aus Chaldäa nach Ägypten mitbrachte, so fügt er doch hinzu, die Ägypter seien die Lehrer der Hellenen in dieser Wissenschaft gewesen[4]).

Die Frage ist nun, wie das älteste elementare Rechnen der Ägypter beschaffen war, dasjenige, welches nach unserer Auffassung auch zur Zeit des Ahmes und später noch das allgemein übliche war? Zur Beantwortung dieser Frage stehen uns teils Vermutungen, teils eine bestimmte Aussage eines zuverlässigen Berichterstatters zu Gebote, und bald auf die einen, bald auf die andere uns stützend glauben wir an ein Fingerrechnen, wissen wir von einem instrumentalen Rechnen der Ägypter.

Das Rechnen an den Fingern, nicht nur so wie es unwillkürlich das Kind schon ausführt, welches zu addierende Zahlen durch ebensoviele ausgestreckte Finger sich versinnlicht, um die Summe vor Augen zu haben, sondern unter einigermaßen künstlicher Ausbildung mit bestimmtem Werte der einzelnen Finger ist (S. 6—7) bei Völkern nachgewiesen worden, für die wir kaum mehr als die ersten Anfänge von Bildung in Anspruch nehmen dürfen. Wir wollen keinerlei Gewicht darauf legen, daß die Völker, von denen an jener Stelle die Rede war, dem Inneren und dem Süden Afrikas angehören, daß somit bei der nordsüdlichen Richtung, welche auf jenem Erdteile die Bildung eingehalten zu haben scheint, bei der geringen geistigen Begabung der Negerrassen hier ein solches Durchsickern altägyptischer

---

[1]) Diogenes Laertius prooem. s. 11. [2]) Platon, Phaedros pag. 274 m. [3]) Aristoteles, Metaphys. I, 1 in fine. [4]) Josephos, Antiquit. I, cap. 8, § 2.

Methoden, wie wir es eben als naturgemäß schilderten, so langsam vonstatten gegangen sein könnte, daß sie erst nach Jahrtausenden in sehr viel südlicheren Breiten ankamen. Derartige Vermutungen auszusprechen, ist nicht ohne Reiz, sie können ein vereinzeltes Mal glücken, aber sie haben darum noch keine Berechtigung. Dagegen war in Ägypten selbst in der ersten Hälfte des V. nachchristlichen Jahrhunderts die Überlieferung von einer Zahlenbedeutung des Ringfingers noch vorhanden. Allein umgebogen, während alle anderen Finger gestreckt blieben, habe er den Wert 6 dargestellt, die erste vollkommene Zahl [1]), sei darum auch selbst der Vollkommenheit teilhaftig worden und habe das Vorrecht erhalten, Ringe zu tragen [2]). Zu dieser Sage kommen noch alterhaltene Denkmäler. In einer Pariser Sammlung ägyptischer Altertümer [3]) findet sich eine rechte Hand, an welcher die zwei letzten Finger umgelegt sind. Das kann wenigstens eine Zahlenbedeutung gehabt haben. Über die Möglichkeit hinaus bis beinahe zur Gewißheit führen aber Bezeichnungen altägyptischer Ellen [4]), welche in mehreren Exemplaren vorhanden sind. Die Zahlen von 1 bis 5 sind durch die fünf Finger der linken Hand, welche allmählich vom kleinen Finger anfangend ausgestreckt werden — wenigstens wird der Daumen zuletzt ausgestreckt — dargestellt. Zur Bezeichnung der Zahl 6 dient alsdann die rechte Hand mit ausgestrecktem Daumen bei im übrigen geschlossenen Fingern, allerdings eine fast überraschende Übereinstimmung mit der oben berührten Sitte jener von links nach rechts an den Fingern zählenden Negerstämme. Dagegen dürfen wir nicht verschweigen, daß nach diesen sechs Bildern, die an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen, wieder an verschiedenen Exemplaren sich bestätigend zwei weitere Bilder auftreten, jedes 4 ausgestreckte Finger ohne Daumen darstellend, welche unserer Deutung nicht ferner zu Hilfe kommen, wenn sie derselben auch nicht geradezu widersprechen. Dieser letzten Bilder wegen sahen wir uns zu dem behutsameren „beinahe" veranlaßt, welches die Gewißheit des Fingerrechnens als durch die Fingerzahlen auf den Ellen bezeugt einschränken mußte.

Mit aller Gewißheit ist uns von dem instrumentalen Rechnen der Ägypter Nachricht zugegangen. „Die Ägypter", so erzählt uns

---

[1]) Über den Begriff der vollkommenen Zahl vgl. im 6. Kapitel [2]) Macrobius, Convivia Saturnalia Lib. VII, cap. 13. [3]) Claude du Molinet, *le cabinet de la bibliothèque de St. Geneviève.* Paris 1692. Tab. 9 p. 16. Auf diese sehr interessante Andeutung hat Heinr. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes 1. Teil, S. 40, Note 3 (Jenaer Habilitationsschrift von 1876) zuerst hingewiesen. [4]) Die Abbildungen bei R. Lepsius, Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung (Abhandlungen der Berliner Akademie 1865).

Herodot[1]), der Land und Leute aus eigener Anschauung genau kannte, und der stets unterscheidet, wenn er nur ihm selbst Berichtetes und nicht Erlebtes mitteilt, „schreiben Schriftzüge und rechnen mit Steinen, indem sie die Hand von rechts nach links bringen, während die Hellenen sie von links nach rechts führen.“ Diese Erzählung ist nicht mißzuverstehen. Als richtig von uns erkennbar, wo sie der hieratischen Schriftfolge der Ägypter von rechts nach links gedenkt, gewährleistet sie ein Rechnen mit Steinen mutmaßlich auf einem Rechenbrette etwa für das Jahr 460 v. Chr. Sie gewährleistet es, was wir in einem späteren Kapitel in Erinnerung bringen werden, für die Griechen mit derselben Sicherheit wie für die Ägypter.

Der Begriff des Rechenbrettes, auf welchem mit Steinen gerechnet wird, ist, wenn auch unter bedeutsamen Veränderungen, ein räumlich und zeitlich ungemein verbreiteter. Man kann das Gemeinsame desselben darin finden, daß auf irgend eine Weise unterschiedene Räume hergestellt werden, welche auf irgend eine Weise bezeichnet werden, worauf jedes Zeichen einen Erinnerungswert erhält, abhängig sowohl von dem Zeichen selbst als von dem Orte, wo es sich findet. Es ist, kann man sagen, ein mnemonisches Benutzen zweier Dimensionen.

In dieser weitesten Bedeutung kann man schon die Quipu oder Knotenschnüre der alten Peruaner[2]) dem Begriffe unterordnen. Die Schnüre waren oft von verschiedener Farbe. Die rote Schnur bedeutete alsdann Soldaten, die weiße Silber, die grüne Getreide usw., und die Knoten an den Schnüren bedeuteten, je nachdem sie einfach, doppelt, oder noch mehrfach verschlungen waren, 10, 100, 1000 usw. Mehrere Knoten nebeneinander auf derselben Schnur wurden addiert. Ähnlicher Knotenschnüre bedienten sich die Chinesen, und ihre durch Zeichnung auf Papier übertragene Gestalt bildete die oft mißverstandenen Kua's[3]). Sollen wir alten Einrichtungen, in welchen das genannte Prinzip zur Erscheinung kam, ganz neue an die Seite stellen, so haben wohl manche unserer Leser eigentümlich zurechtgeschnittene Kärtchen oder Holztäfelchen gesehen, deren man besonders in Frankreich sich bedient, um bei gewissen Spielen, die auf einem Zählen beruhen und folglich voraussetzen, daß die bei jeder einzelnen Tour erlangten Zahlen aufgeschrieben (markiert) werden, dieses Geschäft

---

[1]) Herodot II, 36. [2]) Pott II, S. 54. [3]) Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der großen Tartarei; übersetzt von Mosheim. Rostock 1747 Bd. II, S. 338. Ferner vgl. *Le Chouking un des livres sacrés chinois traduit par le P. Gaubil revu et corrigé par M. de Guignes*. Paris 1770, an sehr verschiedenen Stellen, die im Register s. v. Koua zu entnehmen sind; die Abbildung S. 352.

durch Umklappen betreffender Abteilungen zu besorgen[1]. Wirkliche Rechenbretter sind freilich jene Schnüre und Kärtchen noch nicht.

Das Rechenbrett im engeren Sinne des Wortes setzt voraus, daß der Wert, welchen eine einheitliche Bezeichnung, sei es ein Strich oder ein Steinchen oder was auch immer, an unterschiedenen leicht erkennbaren Stellen erhält, sich nach den aufeinanderfolgenden Stufen des zugrunde gelegten Zahlensystems verändert, daß also im Dezimalsysteme bei wagrechter oder senkrechter Anordnung der Reihen, in welchen die Steinchen gelegt werden, jedes solches Steinchen einer Verzehnfachung unterworfen wird, sofern es von einer Horizontalreihe, beziehungsweise von einer Vertikalreihe, in die benachbarte Reihe gleicher Art verschoben wird. Nur bei Horizontalreihen kann ein Hinauf- oder Herunterrücken, nur bei Vertikalreihen eine Verrückung nach rechts oder nach links diese Wirkung üben, und diese auf der Hand liegende Notwendigkeit lehrt uns der erwähnten Äußerung Herodots den Beweis entnehmen, daß die Griechen wie die Ägypter sich Rechenbretter mit senkrechten Reihen bedienten. Wie wir die Wertfolge dieser senkrechten Reihen uns zu denken haben, ob in dem Ausspruche Herodots auch darüber nicht mißzuverstehende Andeutungen enthalten sind oder nicht, das ist eine Frage höchst untergeordneter Bedeutung gegenüber von der gegen den Rechner senkrechten Gestalt der Reihen, die von geschichtlich großer Tragweite sich erweisen wird. Es ist klar, daß bei einem eigentlichen Rechenbrette auf dekadischer Grundlage in jeder Reihe höchstens 9 Steinchen Platz finden können, da deren 10 durch 1 Steinchen in der folgenden Reihe ersetzt werden mußten. Danach ist wohl nicht ganz mit Recht zur festeren Begründung der Tatsache, daß die Ägypter eines Rechenbrettes sich bedienten, auf eine alte Zeichnung Bezug genommen worden. Auf einem bekannten Papyrus hat sich eine Rechnung aus der Zeit des Königs Menephtah I.[2] erhalten, bei welcher die nachfolgende Fig. 6 abgebildet ist[3]. Der erste Anblick scheint ja dafür zu sprechen, daß ein Rechenbrett mit seinen Steinchen dargestellt werden sollte, wenn nicht der Umstand, daß wiederholt 10 Pünktchen in einer Vertikalreihe (ebenso wie auch

---

[1]) Auf die Analogie solcher Zählkärtchen zu Rechenbrettern hat wohl zuerst Vincent in der *Revue archéologique* III, 204 hingewiesen. [2]) Er gehörte der XIX. Dynastie an und regierte Lepsius zufolge 1341 bis 1321. Nach Steindorff umfaßte die ganze XIX. Dynastie die Zeit von 1350 bis 1200. [3]) Die Figur stammt von der Rückseite des Papyrus Sallier IV. Aufsätze über den begleitenden Text von Goodwin (Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, Jahrgang 1867 S. 57 flgg.) und von De Rougé (ebenda Jahrgang 1868 S. 129 flgg.) enthalten kein Wort über die Figur.

in einer Horizontalreihe) auftreten, die bedenklichsten Zweifel wachrufen müßte. Abbildungen von Rechnern finden sich unter den fast unzähligen ägyptischen Wandgemälden unseres Wissens nicht. Man stößt wiederholt auf Leute, die sich mit dem Moraspiele beschäf-

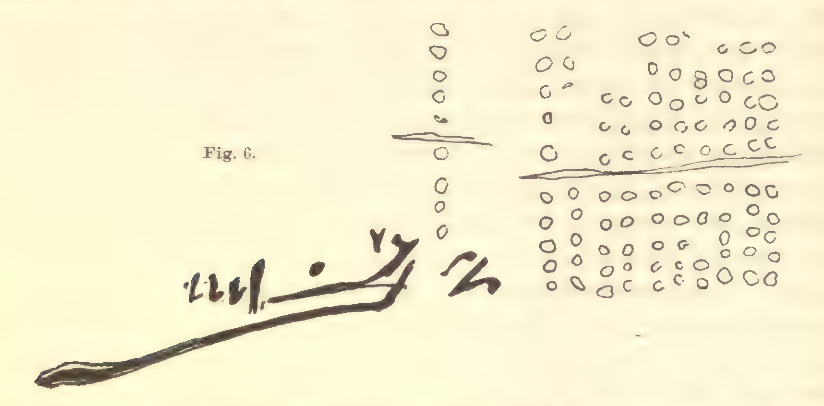


Fig. 6.

tigen[1]) und zu diesem Zwecke Finger beider Hände in die Höhe heben, aber weder das Fingerrechnen, noch das Tafelrechnen scheint veröffentlichende Wiedergabe gefunden zu haben, dürfte also wohl kaum auf bisher entdeckten Gemälden erkannt worden sein.

3. Kapitel.

Die Ägypter. Geometrisches.

Wir kehren zu dem Papyrus des Ahmes zurück. Er hat sich als unschätzbare Fundgrube nicht bloß für die Kenntnis des algebraischen Wissens der Ägypter bewährt, auch vieles andere hat aus ihm geschöpft werden können, worüber hier, wenn auch nicht in gleicher Ausführlichkeit aller Berichte, gesprochen werden muß. Nur mit kurzen Worten können wir das Metrologische berühren. Die vergleichende Untersuchung der Maßsysteme, welche den einzelnen Völkern des Altertums gedient haben, ist gewiß ein Gegenstand von hoher Wichtigkeit und auch dem Mathematiker bis zu einem gewissen Grade sympathisch, allein wie wir Astronomisches von unserer Aufgabe ausgeschlossen haben, so auch verwahren wir uns gegen die Verpflichtung Metrologisches aufzunehmen. Wir müssen uns daran genügen lassen im Vorübergehen zu bemerken, daß nicht bloß die Rechnungsbeispiele vielfache Angaben enthalten, aus welchen das Ver-

[1]) Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians.* London 1837. Vol. I pag. 44 fig. 3 und Vol. II pag. 417 fig. 292.

hältnis der ägyptischen Maße in nicht anzuzweifelnder weil durch allzu zahlreiche Beispiele zu prüfender Gewißheit sich ergeben hat, daß sogar in zwei aufeinanderfolgenden Paragraphen, Nr. 80 und 81, die Umrechnung von einem Maßsysteme in ein anderes geradezu gelehrt wird[1]). Die späteren Nachahmer des Ahmes haben, wie wir sehen werden, ähnliche Maßvergleichungen jederzeit in ihre Schriften aufgenommen.

Unsere eingehendste Beachtung gebührt dagegen den geometrischen Aufgaben des Ahmes, deren Erörterung wir eine vielleicht überflüssige, jedenfalls nicht unwichtige Bemerkung vorausschicken. Übungsbücher der höheren Rechenkunst von der ältesten bis auf die neueste Zeit herab enthalten fast ausnahmslos neben anderen mannigfachen Beispielen auch solche aus der Geometrie und Stereometrie. Diese erheischen zu ihrer Berechnung gewisse Formeln, und diese Formeln sind als gegeben zu betrachten. An eine Ableitung derselben zu denken, oder gar weil die Ableitung nicht mitgeteilt ist zu argwöhnen, es habe eine solche überhaupt nicht gegeben, als das Übungsbuch verfaßt wurde, fällt niemand ein. Wir dürfen dem Handbuche des Ahmes mit keiner Anforderung gegenübertreten, die wir sonst unbillig fänden. Wenn Ahmes sich geometrischer Regeln bedient, so müssen wir auch zu ihm das Zutrauen haben, er werde sie irgend woher genommen haben, wo auch seine Schüler sich Rats erholen konnten, wir werden also an ein anderes geometrisches Buch glauben, das uns unmittelbar nicht bekannt ist, dessen einstmaliges Vorhandensein aber gerade durch jene Formeln mittelbar erwiesen ist, gleichwie die Formeln für Summierung arithmetischer und vielleicht geometrischer Reihen, deren Ahmes sich bedient, uns einen Rückschluß auf in seinem Papyrus übergangene Ableitungsverfahren gestatteten.

Die geometrischen Beispiele des Ahmes lassen zunächst den Flächenraum von Feldstücken finden, deren einschließende Seiten gegeben sind. Solcher Aufgaben konnte man am ersten von einem ägyptischen Schriftsteller sich versehen, da, wie wir weiter unten zu zeigen haben, gerade die eigentliche Feldmessung in Ägypten zuhause gewesen sein soll. Damit ist aber freilich nicht gesagt, daß jede Feldmessung von vornherein eine geometrische gewesen sein muß.

Mag die Notwendigkeit die Gleichwertigkeit oder Ungleichwertigkeit von Feldstücken zu schätzen mit den ersten Streitigkeiten über das Mein und Dein des urbar gemachten Bodens, also mit der Einführung individuellen Grundbesitzes sich ergeben haben, diese Wertvergleichung konnte in mannigfacher Weise erfolgen. Man konnte

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 204—211.

die Zeit messen, welche zur Bebauung eines Feldstückes nötig war, das Getreide wägen, welches auf demselben wuchs oder zur Einsaat in dasselbe zu verwenden war, und unsere deutschen Benennungen Morgen[1]) und Scheffel[2]) als Feldmaße sind Zeugnisse dafür, daß man solche Methoden nicht immer verschmäht hat. Dem Wunsche einer Feldervergleichung mag in anderen Gegenden die Sitte entsprungen sein, den einzelnen Äckern stets die gleiche Form, die gleiche Größe zu geben, und ein weiterer Schritt auf diesem Wege der Geistesentwicklung war es, wenn man der Gestalt der Äcker entsprechend Flächenmaße einführte, die, soviel uns bekannt ist, nirgend eine andere Figur darstellten als die eines Vierecks mit vier rechten Winkeln und in einem einfachen Zahlenverhältnisse zueinander stehenden, wenn auch nicht notwendig gleichen Seiten, wiewohl an sich ein dreieckiges Maß z. B. ebensogut zu denken war. Auch aus Ägypten wird uns allerdings aus der verhältnismäßig späten Zeit von mindestens drei Jahrhunderten nach Ahmes ähnliches gemeldet. Herodot erzählt[3]), der König Sesostris habe die Äcker verteilt und jedem ein gleich großes Viereck überwiesen, auch danach die jährliche Abgabe bestimmt. Sesostris ist niemand anders als König Ramses II. aus der XIX. Dynastie, der etwa 1324 bis 1258 lebte.

Aber eine irgendwie gestaltete Bodenfläche als Raumgebilde zu betrachten, sie unmittelbar aus ihren Grenzlinien messen zu wollen, das setzte schon geradezu mathematische Gedanken voraus, das war selbst eine mathematische Tat. In Ägypten hat man diese Tat vollzogen, wenn nicht zuerst vollzogen, und im Gefolge dieser Tat muß notwendig eine mehr oder weniger entwickelte Kenntnis der Eigenschaften der verschiedenartigen Figuren, gewissermaßen eine theoretische Geometrie, entstanden sein, mag auch für lange Zeit nur die praktische Feldmessung ihr eigentliches Endziel gewesen sein.

Die Feldstücke, welche Ahmes ausmessen läßt, sind geradlinig oder kreisförmig begrenzt, und die ihrer Genauigkeit nach nicht ganz aus freier Hand, sondern mit Benutzung eines Lineals aber ohne Zirkel angefertigten Figuren lassen deutlich erkennen, daß an geradlinigen Figuren nur gleichschenklige Dreiecke, Rechtecke und gleichschenklige Paralleltrapeze in Betracht gezogen werden sollen.

Das Rechteck bietet in seiner Ausrechnung am wenigsten Ausbeute. Es ist mehr als nur wahrscheinlich, daß, wie die Fläche des Quadrates von 10 Einheiten im Beispiele No. 44. zu 100 Flächen-

---

[1]) Pott I, S. 124. [2]) R. Lepsius, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu (Abhandlungen der Berliner Akademie 1855) S. 77. [3]) Herodot II, 109.

einheiten erkannt war[1]), auch bei ungleichen Seiten des Rechtecks eine Vervielfältigung der beiden Ausmessungen stattfinden mußte, aber das Beispiel No. 49., welches auf ein Rechteck von 10 Ruten zu 2 Ruten Bezug hat, läßt solches nicht erkennen, da wie es scheint durch ein Versehen des Ahmes zu dieser Aufgabe die Auflösung einer ganz anderen sich gesellt hat[2]).

Ein gleichschenkliges Dreieck von 10 Ruten an seinem Merit, von 4 Ruten an seinem Tepro bildet den Gegenstand des Beispiels No. 51. Die Hälfte von 4 oder 2 wird mit 10 vervielfältigt. „Sein Flächeninhalt ist es“[3]). Auffallend ist hier die Lage des beigezeichneten gleichschenkligen Dreiecks, auffallend sind die gebrauchten Kunstausdrücke, nicht am wenigsten auffallend ist die Rechnung. Während wir die Gewohnheit haben die Figuren dem sie Anschauenden so symmetrisch als möglich vorzulegen, also bei einem gleichschenkligen Dreiecke die eine ungleiche Seite als Grundlinie unten, die beiden gleichen Schenkel nach aufwärts gerichtet zu zeichnen, hat Ahmes die Strecke 4 vertikal gezeichnet und von deren Endpunkten aus die beiden gleichen Schenkel in der Länge 10 gegen die Richtung der Schriftzeilen, also mit der Spitze nach rechts, zusammentreffen lassen. Die Seite von 4 Ruten heißt ihm, wie schon angeführt, Tepro, die von 10 Ruten Merit. Tepro oder der Mund für die Weite der Entfernung der Endpunkte zweier an der Feder des Schreibenden vereinigten, von da aus sich öffnenden Geraden ist einleuchtend. Ob aber der Name Merit oder der Hafen auf die Gleichheit der beiden anderen Schenkel, ob er auf die durch die Zeichnung gegebene Lage als obere Linie der Figur, als Scheitellinie sich beziehen soll, kann als ausgemacht hier wenigstens nicht gelten, da weder die eine noch die andere Beziehung eine Erklärung der Wahl gerade dieses Wortes liefert. Wir werden indessen später sehen, daß vermutlich die Scheitellage mit Merit bezeichnet werden soll. Rücksichtlich der Figur haben wir noch zu bemerken, daß in No. 51. wie in anderen Aufgaben die Zahlen, welche die Längen der auftretenden Strecken messen, an diese, der Inhalt mitunter in die Figur geschrieben erscheint. Das Rechnungsverfahren besteht darin, daß, wenn wir den Dreiecksinhalt $\triangle$, die Dreiecksseiten a, a, b nennen wollen, hier

$$\triangle = \frac{b}{2} \times a$$

gesetzt ist. Das ist nun allerdings nicht richtig; es müßte vielmehr

$$\triangle = \frac{b}{2} \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 110. [2]) Ebenda S. 122 bis 123. [3]) Ebenda S. 125.

heißen, aber mehrere Dinge fordern unsere Überlegung heraus. Einmal hat man unter der Annahme, die Figuren seien grundfalsch gezeichnet, und die Dreiecke seien nicht als gleichschenklige, sondern als rechtwinklige aufzufassen [1]), die bei Ahmes geführte Rechnung in Schutz genommen; der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks sei in der Tat das halbe Produkt der beiden Katheten. Kann man sich mit uns nicht entschließen, die mit dem Lineal gezeichneten Figuren für so falsch zu halten, so ist erstlich zu erwägen, daß die Ausziehung einer Quadratwurzel bei Ahmes nirgend vorkommt; zweitens dann auch, daß der Fehler, welcher begangen wird, sofern b gegen a nur einigermaßen klein ist, kaum in Anschlag kommt. Im Beispiele No. 51. ist die Dreiecksfläche mit 20 Quadratruten angesetzt. Der richtige Wert ist fast genau 19,6 Quadratruten. Der Fehler beträgt nicht mehr als 2 Prozent. Dieses dürfte, natürlich nicht dem Ahmes und seiner Zeit, aber einer späteren Nachkommenschaft wohl als genügende Entschuldigung erschienen sein an einem Verfahren festzuhalten, welches in der Rechnung so ungemein bequem und leicht, im Ergebnis kaum als falsch zu bezeichnen war. Wenn der ägyptische Feldmesser, wie wir in diesem Kapitel noch sehen werden, selbst anderthalb Jahrtausende nach Ahmes sich der altfränkische Flächenformel fortwährend bediente, so konnte er der nicht ganz unbegründeten Meinung sein sich ihrer bedienen zu dürfen.

Die vorhin ausgesprochene Behauptung, eine Quadratwurzel komme bei Ahmes nicht vor, ist nicht in dem Sinne zu verstehen, als sei der Begriff der Quadratwurzel den Ägyptern überhaupt fremd gewesen. Höchstens kann man Zweifel darein setzen, ob die Ägypter mit irrationalen Quadratwurzeln umzugehen wußten. Die erste ägyptische Quadratwurzel ist in den in London befindlichen Fragmenten von Kahun aufgefunden worden. Ihr Zeichen ist ein rechter Winkel, dessen horizontaler Schenkel beträchtlich länger als der links vertikal nach unten sich erstreckende Schenkel ist. Wie das Zeichen auszusprechen ist, erscheint fraglich. Während einige Ägyptologen die Aussprache *tm* für richtig halten, entscheiden sich andere für *knb*, beidemal unter Verzicht auf die Bestimmung der noch einzuschaltenden Selbstlaute. Für *knb* spricht, daß dieses Wort durch „Winkel" oder „Ecke" zu übersetzen ist, was mit der Gestalt des Zeichens im Einklang steht [2]). Benutzen wir diese Lesung, so ist die von der Zahl 40 ausgehende und ihrem mathematischen Zwecke nach noch unverstandene Rechnung folgende: $3 \times 40 = 120$, $120:10 = 12$,

---

[1]) M. Simon, Über die Mathematik der Ägypter im Anschlusse an E. Revillout. [2]) Briefliche Mitteilung des Grafen H. Schack-Schackenburg.

$1 : \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$, $12 \times 1\frac{1}{3} = 16$; suche davon den *knb*, er ist 4. Man sieht deutlich, daß *knb* oder wie das Wort ausgesprochen worden sein mag, nur Quadratwurzel bedeuten kann.

Eine willkommene Bestätigung lieferte der Papyrus 6619 des Berliner Museums[1]), welcher gleichfalls in Kahun gefunden worden ist und der Zeit nach dem mittleren Reiche entstammt, zu welchem auch die Regierung der Amenemhate gehört. In ihm ist der *knb* von $1\frac{9}{16}$ als $1\frac{1}{4}$, der *knb* von $6\frac{1}{4}$ als $2\frac{1}{2}$ angegeben, während $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ ist. Die Berliner Fragmente haben vor den Londoner Fragmenten den großen Vorzug, daß man in ihnen deutlich erkennt, was der Sinn der angestellten Rechnung war. Eine gegebene Fläche, etwa von der Größe von 100 Flächeneinheiten, soll als Summe zweier Quadrate dargestellt werden, deren Seiten sich wie 1 zu $\frac{3}{4}$ verhalten. In Buchstaben lautet also die Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x : y = 1 : \frac{3}{4} \quad \text{oder} \quad y = \frac{3}{4}x.$$

Die Auflösung erfolgt nach der Methode des falschen Ansatzes und bestätigt mithin was wir (S. 79) zu No. 40. des Handbuches des Ahmes über die Bekanntschaft der Ägypter mit dieser Methode gesagt haben. Versuchsweise wird $x = 1$, $y = \frac{3}{4}$ gesetzt, wodurch $x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$ entsteht, und $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$. Aber $\sqrt{100} = 10$ und $10 : \frac{5}{4} = 8$. Die nicht mehr zu entziffernde Fortsetzung wird vermutlich gelautet haben: also ist richtig $x = 8 \times 1 = 8$, $y = 8 \times \frac{3}{4} = 6$.

Eine andere Aufgabe auf einem kleineren Fragmente des Berliner Papyrus läßt mit Sicherheit die Gleichung $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ erkennen. Aus anderen auf diesem kleinen Fragmente vorkommenden Zahlen hat man geschlossen, hier sei die Aufgabe gestellt gewesen, 400 in zwei Quadrate zu zerlegen, deren Seiten sich wie 2 zu $1\frac{1}{2}$ verhalten. In Buchstaben lautet diese Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = 400$$

$$x : y = 2 : 1\frac{1}{2}.$$

---

[1]) H. Schack-Schackenburg, Der Berliner Papyrus 6619. Zeitschrift für ägyptische Sprache Bd XXXVIII (1900) und XL (1902).

Danach wird $x^2 : y^2 = 4 : 2\frac{1}{4}$, und mittels des versuchsweisen Ansatzes $x^2 = 4$, $y^2 = 2\frac{1}{4}$ entsteht $x^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$. Aber $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ und $\sqrt{400} = 20$ nebst $20 : 2\frac{1}{2} = 8$. Mithin ist $x = 8 \times 2 = 16$, $y = 8 \times 1\frac{1}{2} = 12$ und $16^2 + 12^2 = 20^2$.

Sind alle diese Vermutungen richtig, worauf ihr geistiger Zusammenhang schließen läßt, so enthüllen sich als den Ägyptern des mittleren Reiches bekannt die beiden Gleichungspaare

$$1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2 \quad \text{und} \quad 8^2 + 6^2 = 10^2$$

$$2^2 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad 16^2 + 12^2 = 20^2.$$

Es ist unverkennbar, daß hier

$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

zugrunde liegt, wenn auch diese Gleichung selbst nicht vorkommt. Es ist möglich, daß sie auf einem verlorengegangenen Papyrusfragmente stand, es ist auch möglich, daß sie so allgemein bekannt war, daß man sich damit begnügte, nur solche Fälle zur Rede zu bringen, die aus der als selbstverständlich vorausgesetzten Grundformel sich herleiteten. Wir möchten bitten diese ganze Untersuchung, welche ihrem algebraischen Inhalte nach schon in das vorige Kapital gehören könnte, nicht als hier an unrichtigem Platze stehend bemängeln zu wollen. Sind doch die behandelten quadratischen Gleichungen aus geometrischen Aufgaben entsprungen.

Die Dreiecksformel $\triangle = \frac{b}{2} \times a$ einmal vorausgesetzt ließ mit mathematischer Strenge eine zweite Formel für die Fläche eines gleichschenkligen Paralleltrapezes folgen, welche Figur allerdings von anderen als rechtwinkliges Paralleltrapez gedeutet wird. Waren dessen beide unter sich gleiche nicht parallele Seiten je a, die parallelen Seiten b_1 und b_2, so mußte die Fläche

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \times a$$

sein, und dies ist die Formel, nach welcher in No. 52. die Rechnung geführt ist[1]). Sie setzt nur voraus, daß das Trapez als abgeschnittenes Dreieck beziehungsweise als Unterschied zweier Dreiecke entstanden gedacht ist, und mit dieser Entstehungsweise stimmt die Zeichnung wie die Benennung der einzelnen Strecken überein. Wieder liegt

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 127—128.

das Trapez so, daß ein a Scheitellinie ist und den Namen Merit führt; wieder heißt die größere links befindliche Parallele Tepro; und die kleinere Parallele, welche rechts vertikal die Figur abschließt, führt den unsere Voraussetzung bestätigenden Namen Hak oder Abschnitt.

Wir müssen, um nicht mißverstanden zu werden, hier eine kleine Bemerkung einschalten. Wir sagten, die Formel für die Fläche des gleichschenkligen Paralleltrapezes folge mit mathematischer Strenge aus $\triangle = \frac{b}{2} \times a$. Wir meinen das nicht etwa so, daß wir Ahmes das Bewußtsein dieser Folgerung zutrauten. Die alten Ägypter werden wohl eine vollständige Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren, welche zur Führung des Beweises für den Zusammenhang der beiden Inhaltsformeln unentbehrlich ist, kaum besessen haben. Ihnen war vielleicht ein enger Zusammenhang der beiden Formeln, welche sie selbständig für richtig hielten, nie in Gedanken gekommen. Nur den späten Nachkommen soll mit jener Ableitbarkeit der Trapezformel aus der Dreiecksformel wieder eine Entschuldigung dafür verschafft werden, daß sie im einen Falle so wenig als im anderen von der Gewohnheit der Väter abwichen.

Die im Papyrus sich nun anschließenden Aufgaben[1] No. 53., 54., 55. beziehen sich auf die Teilung von Feldern, stimmen aber mit der einzigen beigegebenen Figur so absolut nicht überein, daß wir ein Erraten der eigentlichen Meinung des Verfassers für ein sehr schwieriges Problem halten, dessen Lösung noch nicht gelungen ist. Von Interesse dürfte, falls die Enträtselung überhaupt möglich ist, die Richtung des in der Figur gezeichneten Dreiecks sein, dessen Spitze nach links hin steht, während sie in den früheren Beispielen rechts war. Außerdem werden sicherlich die zwei vertikal gezogenen Parallelen von Wichtigkeit sein, welche das ursprüngliche Dreieck in ein Dreieck und zwei Paralleltrapeze zerlegen.

Die Ausmessung des Kreises wird schon in No. 50. vorgenommen[2]). Sie ist eine wirkliche Quadratur zu nennen, indem sie lehrt ein Quadrat zu finden, welches dem Kreise flächengleich sei, und zwar wird als Seite des Quadrates der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt. Wie man zu dieser Vorschrift gekommen sein mag ist nicht entfernt zu erraten. Gesichert ist sie durch wiederholtes Auftreten, gesichert ist auch ihre ziemlich gute Anwendbarkeit, denn sie entspricht einem Werte

---

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 130—133. [2]) Ebenda S. 124, vgl. aber auch die Aufgaben No. 41., 42., vielleicht 43., endlich 48. auf S. 100—109 und S. 117.

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604 \ldots$$

für die Verhältniszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser, der weitaus nicht der schlechteste ist, dessen Mathematiker sich bedient haben.

Neben den geometrischen Aufgaben hat Ahmes seinen Lesern auch stereometrische vorgelegt. Es handelt sich dabei um den Rauminhalt von Fruchtspeichern und deren Fassungsvermögen für Getreide[1]). Diese Aufgaben stehen noch vor den eben besprochenen geometrischen und geben dadurch deutlich zu erkennen, was wir einleitend in diesem Kapitel berührt haben: daß das Geometrische im Übungsbuche des Ahmes niemals selbst Zweck der Darstellung, sondern nur Einkleidungsform von Rechenaufgaben ist, denn sonst würde unmöglich die Flächenausmessung des Kreises später erscheinen als die Berechnung des Rauminhaltes eines runden Fruchthauses, bei welcher jene bereits Anwendung findet. In diesen körperlichen Inhaltsaufgaben ist manches noch unklar. Die eigentliche Gestalt der Fruchthäuser, welche der Berechnung unterworfen werden, ist nichts weniger als genau bekannt, und wenn auch bienenkorbartige Zeichnungen von Fruchthäusern in ägyptischen Wandgemälden etwas zur Verdeutlichung beitragen, sie genügen keineswegs, so lange eine geometrische Interpretation jener Zeichnungen fehlt. Soll der Bienenkorb als Halbkugel auf einen Zylinder aufgesetzt, soll er als eine Art von Umdrehungsparaboloid gedacht sein? Ist seine Grundfläche überhaupt kein Kreis sondern eine Ellipse? Das sind Fragen, deren Beantwortung aus den genannten Abbildungen nicht entnommen werden kann und doch auf die Rechnungsweise einen entscheidenden Einfluß ausüben muß. Hier ist also wieder zukünftiger Forschung noch manches Rätsel aufbewahrt, kaum zu lösen, wenn es nicht gelingt, weiteres Material aufzufinden. Bis dahin besteht der Vorteil, den wir aus diesen Beispielen zu ziehen vermögen, nur in den von uns schon angerufenen Bestätigungen der gewonnenen Ansichten über Inhaltsbestimmung des Rechteckes und des Kreises und in der Kenntnisnahme von Wörtern, welche den Ägyptologen auch sonst mannigfach begegnet sind. Eine der Abmessungen, welche bei den Fruchthäusern in Rechnung treten, heißt nämlich Qa, eigentlich die Höhe, wofür auch die Hieroglyphe — ein den Arm hochstreckender Mann — zeugt, dann aber in zweiter abgeleiteter Bedeutung die Richtung größter Ausdehnung[2]); die Breite, beziehungsweise die

[1]) Eisenlohr, Papyrus S. 101—116. [2]) Diese abgeleitete Bedeutung hat Brugsch erkannt: Hieroglyphisch-demotisches Wörterbuch S. 1435 und deutlicher

kleinere Abmessung, heißt Useχ. Nennen wir diese beiden Abmessungen q und u, so erfolgt in No. 43. die Berechnung des Inhaltes nach der Regel, daß erst ein $q_1 = \left(1 - \frac{1}{9}\right) q$ gebildet wird und dann $\left(\frac{4}{3} q_1\right)^2 \cdot \frac{2}{3} u$. Auch hier ist wieder eine interessante Übereinstimmung mit den Fragmenten von Kahun nachzuweisen. Dort ist nämlich ausgehend von bestimmten Zahlen $q_1 (= 12)$ und $u (= 8)$ die Rechnung $\left(\frac{4}{3} q_1\right)^2 \cdot \frac{2}{3} u = \left(\frac{4}{3} \cdot 12\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = 256 \cdot 5\frac{1}{3} = 1365\frac{1}{3}$ vollzogen, und letztere Zahl steht im Inneren einer gezeichneten Rundung, über welcher die Zahlen 8 und 12 angebracht sind. Wenn man versucht hat[1]), in der Rechnung des Kahuner Fragmentes die Inhaltsberechnung einer Halbkugel vom Durchmesser 8 zu erkennen und dabei eine Anwendung des Wertes $\pi = 3{,}2$ fand, so kann schon diese letztere Behauptung als Gegengrund gegen den jeder unmittelbaren Stütze entbehrenden Versuch genügen. Bei der soeben nachgewiesenen wenigstens teilweisen Übereinstimmung mit No. 43. des Ahmes müßte auch von diesem einmal $\pi = 3{,}2$ in Anwendung gebracht worden sein, während alle anderen Beispiele $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ benutzen, und das erscheint durchaus unglaublich.

Endlich bietet der Papyrus noch eine Gruppe von 5 geometrischen Aufgaben[2]), No. 56. bis 60., welche dem heutigen Leser am überraschendsten sein dürften, wenn er in ihnen die Vergleichung von Liniengrößen erkennt, soweit sie zu einem und demselben Winkel gehören, also eine Art von Ähnlichkeitslehre, wenn nicht ein Kapitel aus der Trigonometrie. Es handelt sich um Pyramiden, aber keineswegs um deren körperlichen Inhalt, sondern um den Quotienten der Hälfte einer an der Pyramide vorgenommenen Abmessung geteilt durch eine zweite, und dieser Quotient heißt Seqt, nach aller Wahrscheinlichkeit eine kausative Ableitung von Qet, Ähnlichkeit, also wohl Ähnlichmachung. Was das aber für Abmessungen an den Pyramiden waren, die so in Rechnung gezogen wurden, war von vornherein aus den bloßen Namen Uchatebt, Suchen der Fußsohle, und Piremus, Herausgehen aus der Säge, keineswegs klar. Der Uchatebt mußte zwar offenbar irgendwo am Boden, der Piremus (dessen Name augenscheinlich in dem Munde der Griechen zum Namen des ganzen Körpers wurde)[3]), irgendwo ansteigend gesucht werden, aber

betont in der Zeitschrift für ägypt. Sp. u. Alterth. Jahrgang 1870 Bd. VIII, S. 160. Vgl. auch Eisenlohr, Papyrus S. 280. [1]) L. Borchardt in der Zeitschr. für ägypt. Sprache Bd. XXXV, S. 150 (1897). [2]) Eisenlohr, Papyrus S. 131—149. [3]) Eigentlich sollte man daher die Orthographie „Piramide" der „Pyramide" vor-

dabei gab es noch immer eine gewisse Auswahl. Die richtige Wahl zu treffen gelang dem Herausgeber des Papyrus, nachdem er den glücklichen Gedanken gefaßt hatte, den Umstand zu berücksichtigen, daß die noch erhaltenen großen ägyptischen Pyramiden wesentlich gleiche Winkel besitzen (S. 57), und daß Ahmes wohl auch ihnen ähnliche Körper bei seinen Rechnungen gemeint haben muß. Der von Ahmes errechnete Seqt muß also einem Winkel von etwa 52° zwischen der Seitenwand und der Grundfläche des Körpers entsprechen, und das findet nur dann statt, wenn der Piremus die Kante der Pyramide, der Uchatebt die Diagonale der quadratischen Grundfläche bedeutet, wenn also der Seqt das war, was wir gegenwärtig den Kosinus des Winkels nennen, den jene beiden Linien miteinander bilden. War die Größe dieses Verhältnisses Seqt bekannt, so kannte man damit auch die Winkel, welche an der Pyramide sich zeigen. Man kannte sie freilich nur mittelbar, aber mittelbar ist auch jede andere Ausmessung von Winkeln, ist auch die nach Graden und Minuten, welche zunächst nicht dem Winkel selbst, sondern dem Kreisbogen gilt, der ihn als Mittelpunktswinkel gedacht bespannt. Diese bisherige Auseinandersetzung gilt allerdings nur für die 4 ersten Aufgaben der Gruppe. In der 5. Aufgabe, No. 60., ist nicht von einer Pyramide, sondern von einem Grabmale die Rede, welches viel steiler als die Pyramide, mit der es die quadratische Gestalt der Grundfläche übrigens teilt, sich zuspitzt. Die durcheinander zu teilenden Strecken heißen hier ganz anders. Als Zähler ist Qaienharu, als Nenner die Hälfte des Senti angegeben, und das müssen doch wohl andere Linien sein als diejenigen, welche die Namen Uchatebt und Piremus führten. Insbesondere die Verwandtschaft zwischen Qaienharu und dem (S. 98) erwähnten Qa nötigt dazu, diesen Zähler als die senkrechte Höhe der Pyramide zu deuten. Vielleicht ist folgender Erklärungsversuch gestattet.

Man weiß, daß die ägyptischen Pyramiden zunächst staffelförmig mit parallelepipedischen, aufeinander ruhenden, sich verjüngenden Stockwerken angelegt wurden, und daß dann erst die Ausfüllung der Winkelräume bis zur Herstellung einer glatten Oberfläche erfolgte. Dem Arbeiter machte die Herstellung dieser Ausfüllsteine zuverlässig am meisten Schwierigkeit, und es wäre keineswegs unmöglich, daß der Baumeister, um seinem Arbeiter die Aufgabe zu erleichtern, Mo-

ziehen, und wir bedienen uns in diesem Werke der landläufigen Schreibart nur mit dem Bewußtsein ihrer Mangelhaftigkeit. Beiläufig sei bemerkt, daß Piremus von anderen Ägyptologen, z. B. Brugsch als Heraustreten aus der Breite übersetzt worden ist. Uns steht ein Urteil über die Richtigkeit der einen oder der anderen Übersetzung nicht zu.

delle hätte anfertigen lassen. Deren brauchte man aber zwei, von der in Fig. 7a und 7b gezeichneten Gestalt. Das einfachere Modell (Fig. 7a) diente zur Ausfüllung der Breitseiten, das andere (Fig. 7b), an der Ebene DCF mit einem symmetrisch gleichen zusammentreffend, diente die Ecken zu bilden, beide Modelle paßten mit der Ebene DCE aneinander. Das zweite Modell stellt sich als achter Teil einer der großen Pyramide ähnlichen Modellpyramide dar; dabei ist DF die Kante, DC die senkrecht von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Höhe, CF die halbe Diagonale der Grundfläche, EF und die ihr gleiche CE [$\sphericalangle CEF = 90^0$, $\sphericalangle CFE = 45^0$, also auch $\sphericalangle ECF = 45^0$ und $EF = CE$] die halbe Seite der quadratischen Grundfläche. Bei dem ersten Modell kommt es wesentlich auf $\sphericalangle DEC$ an, bei dem zweiten auf eben diesen und auf $\sphericalangle DFC$; folglich genügte auch das zweite Modell allein, um beide Arten von Ausfüllsteinen nach ihm behauen zu können.

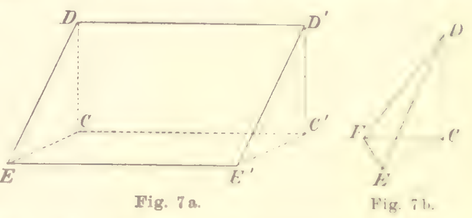


Fig. 7a. Fig. 7b.

Nennen wir nun die vier erwähnten Längen, beziehungsweise ihre Verdoppelung, $DF =$ *pir em us*, $DC =$ *qai en haru*, $2CF =$ *uχa tebt*, $2CE =$ *senti*, so treten alle vier an einem Raumgebilde auf und müssen naturgemäß selbständige Namen führen. Seqt aber „die Verhältniszahl" ist in der einen Ebene $\frac{\frac{1}{2}\,\textit{u}\chi\textit{a tebt}}{\textit{piremus}} = \frac{CF}{DF} = \cos DFC$, in der anderen Ebene $= \frac{\textit{qai en haru}}{\frac{1}{2}\,\textit{senti}} = \frac{CD}{CE}$ $= \operatorname{tng} DEC$. Allerdings würde diese Hypothese die zweite in sich schließen, daß das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck CEF als solches erkannt gewesen wäre.

Auch hier hat man eine andere Erklärung vorgeschlagen[1]) und den *seqt* als Kotangente des Böschungswinkels DEC (Fig. 7c), also als $\frac{EC}{DC}$ aufgefaßt, indem die Höhe DC bald *pir em us* bald *qai en haru* und die Grundlinie $AB = 2CE$ bald *ucha tebt* bald *senti* genannt worden sei.

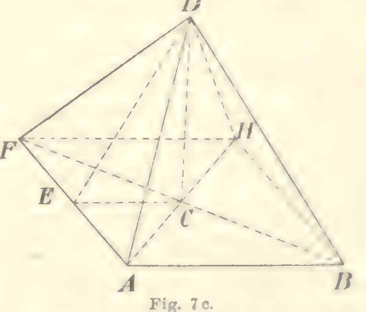


Fig. 7c.

Haben wir nun die Geometrie der Ägypter, soweit sie aus den Rechnungsbeispielen des Ahmes rückwärts erschlossen werden kann,

[1]) Revillout in der Revue égypt. II, 308 flgg. und G. Borchardt, Wie wurden die Böschungen der Pyramiden bestimmt? in der Zeitschr. f. ägypt. Sprache XXXI, 9—17 (1893).

erörtert, so beabsichtigen wir in ähnlicher Weise, wie es für die Rechenkunst geschehen ist, zu sammeln, was die Überlieferung insbesondere griechischer Schriftsteller, was auch sonstige Denkmäler zur Ergänzung uns bieten. Herodot erzählt[1]), wie schon oben teilweise verwertet worden ist, Sesostris (also Ramses II.) habe das Land unter alle Ägypter so verteilt, daß er jedem ein gleich großes Viereck gegeben und von diesem seine Einkünfte bezogen habe, indem er eine jährlich zu entrichtende Steuer auflegte. Wem aber der Fluß von seinem Teile etwas wegriß, der mußte zu ihm kommen, und das Geschehene anzeigen; er schickte dann die Aufseher, die auszumessen hatten, um wieviel das Landstück kleiner geworden war, damit der Inhaber von dem übrigen nach Verhältnis der aufgelegten Abgabe steuere. Hieraus, meint Herodot, scheint mir (δοκέει δέ μοι) die Geometrie entstanden zu sein, die von da nach Hellas kam. Isokrates gibt an[2]), die Ägypter hätten die älteren unter ihren Priestern über die wichtigsten Angelegenheiten gesetzt, die jüngeren dagegen überredeten sie mit Hintansetzung des Vergnügens, sich mit Sternkunde, Rechenkunst und Geometrie zu beschäftigen. Platon hat häufig von der Mathematik der Ägypter gesprochen und einmal[3]) besonders hervorgehoben, daß bei jenem Volke schon die Kinder in den Messungen unterrichtet würden zur Bestimmung von Länge, Breite und Tiefe. Eine andere platonische Stelle[4]), in welcher gleichzeitig der Rechenkunst gedacht ist, und einen allgemein gehaltenen Ausspruch des Aristoteles[5]) haben wir im vorigen Kapitel unter den Belegen für das hohe Alter ägyptischer Rechenkunst angeführt. Heron von Alexandria läßt, was Herodot als ihm eigentümliche Vermutung äußert, vielleicht im Hinblick auf eben diesen damals schon seit etwa vier Jahrhunderten verstorbenen Schriftsteller zur alten Überlieferung werden[6]): Die früheste Geometrie beschäftigt sich, wie uns die alte Überlieferung lehrt, mit der Messung und Verteilung der Ländereien, woher sie Feldmessung genannt ward. Der Gedanke einer Messung nämlich ward den Ägyptern an die Hand gegeben durch die Überschwemmung des Nil. Denn viele Grundstücke, die vor der Flußschwelle offen dalagen, verschwanden beim Steigen des Flusses und kamen erst nach dem Sinken desselben wieder zum Vorschein, und es war nicht mehr möglich über das Eigentum eines jeden zu entscheiden. Dadurch kamen die Ägypter auf den Gedanken der Messung des vom Nil bloßgelegten Landes. Diodor stimmt gleichfalls

---

[1]) Herodot II, 109. [2]) Isokrates, Busiris cap. 9. [3]) Platon, Gesetze pag. 819. [4]) Platon, Phaedros pag. 274. [5]) Aristoteles, Metaphys. I, 1 in fine. [6]) Heron Alexandrinus (ed. Hultsch). Berlin 1864, pag. 138.

überein[1]). Die Ägypter, sagt er, behaupten, von ihnen sei die Erfindung der Buchstabenschrift und die Beobachtung der Gestirne ausgegangen; ebenso seien von ihnen die Theoreme der Geometrie und die meisten Wissenschaften und Künste erfunden worden. An einer etwas späteren ausführlicheren Stelle fährt er fort: Die Priester lehren ihre Söhne zweierlei Schrift, die sogenannte heilige und die, welche man gewöhnlich lernt. Mit Geometrie und Arithmetik beschäftigen sie sich eifrig. Denn indem der Fluß jährlich das Land vielfach verändert, veranlaßt er viele und mannigfache Streitigkeiten über die Grenzen zwischen den Nachbarn; diese können nun nicht leicht ausgeglichen werden, wenn nicht ein Geometer den wahren Sachverhalt durch direkte Messung ermittelt. Die Arithmetik dient ihnen in Haushaltungsangelegenheiten und bei den Lehrsätzen der Geometrie; auch ist sie denen von nicht geringem Vorteile, die sich mit Sternkunde beschäftigen. Denn wenn bei irgend einem Volke die Stellungen und Bewegungen der Gestirne sorgfältig beobachtet worden sind, so ist es bei den Ägyptern geschehen; sie verwahren Aufzeichnungen der einzelnen Beobachtungen seit einer unglaublich langen Reihe von Jahren, da bei ihnen von alten Zeiten her die größte Sorgfalt hierauf verwendet worden ist. Die Bewegungen und Umlaufszeiten und Stillstände der Planeten, auch den Einfluß eines jeden auf die Entstehung lebender Wesen und alle ihre guten und schädlichen Einwirkungen haben sie sehr sorgfältig beachtet. Die gleiche Überlieferung finden wir bei Strabon[2]). Es bedurfte aber einer sorgfältigen und bis auf das genaueste gehenden Einteilung der Ländereien wegen der beständigen Verwischung der Grenzen, die der Nil bei seinen Überschwemmungen veranlaßt, indem er Land wegnimmt und zusetzt und die Gestalt verändert und die anderen Zeichen unkenntlich macht, wodurch das fremde und eigene Besitztum unterschieden wird. Man muß daher immer und immer wieder messen. Hieraus soll die Geometrie entstanden sein.

Wir haben unsere Gewährsmänner, deren Lebenszeit etwa von 460 v. Chr. bis auf Christi Geburt sich erstreckt, chronologisch geordnet, woraus erschlossen werden kann, wieviel etwa die späteren derselben von ihren Vorgängern entnommen haben mögen ohne aus dem lebenden Quell fortdauernder volkstümlicher Sage zu schöpfen. Anderen späteren Schriftstellern werden wir an anderer Stelle das Wort geben, wo es um die Übertragung der Geometrie nach Griechenland sich handeln wird. Nur einen der frühesten griechischen Zeugen für das Alter und für die Bedeutsamkeit ägyptischer Geometrie müssen

[1]) Diodor I, 69 und die Hauptstelle I, 81. [2]) Strabon Lib. XVII, cap. 3.

wir jetzt noch nachträglich hören, den wir oben zwischen Herodot und Isokrates, wohin er seiner Lebenszeit nach gehörte, absichtlich zurückstellten, weil seine Aussage von so hervorragender geschichtlicher Wichtigkeit ist, daß sie einer besonderen Erörterung bedarf.

Demokrit sagt[1]) nämlich um das Jahr 420: „Im Konstruieren von Linien nach Maßgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Ägypter."

Daß Harpedonapten ein griechisches Wort mit der Bedeutung Seilspanner oder wörtlicher übersetzt Seilknüpfer sei, ist merkwürdigerweise von dem Verfasser des besten griechischen Wörterbuches übersehen worden[2]). Allein auch die richtige Übersetzung reicht zum Verstehen jenes Satzes nicht aus, wenn man nicht weiß, wer jene Seilspanner waren, denen Demokrit in seinem ruhmredigen Vergleiche ein hochehrendes Zeugnis geometrischer Gewandtheit ausstellt, und worin ihre Obliegenheiten bestanden. Beides ist bis zu einem gewissen Grade aus ägyptischen Tempelinschriften zu erkennen, welche von geschätzten Ägyptologen veröffentlicht worden sind[3]). Die Tempel mußten in gleicher Weise wie die Pyramiden orientiert werden, und die Richtung nach Norden, deutlicher ausgedrückt nach dem Eintrittspunkte des Siebengestirnes um eine gegebene Zeit wurde beobachtungsweise festgestellt. „Ich habe gefaßt den Holzpflock (*nebi*) und den Stiel des Schlägels (*semes*), ich halte den Strick (*χa*) gemeinschaftlich mit der Göttin *Safech*. Mein Blick folgt dem Gange der Gestirne. Wenn mein Auge an dem Sternbilde des großen Bären angekommen ist und erfüllt ist der mir bestimmte Zeitabschnitt

---

[1]) Clemens Alexandrinus, Stromata ed. Potter I, 357: *γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδείς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἀρπεδονάπται.* [2]) Cantor, Gräkoindische Studien (Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXII. Jahrgang 1877. Histor.-literar. Abteilung S. 18 und Note 68). [3]) Brugsch, Ueber Bau und Maasse des Tempels von Edfu (Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII) und hieroglyphisch-demotisches Wörterbuch S. 327 und 967. An letzterer Stelle ist übrigens nur bemerkt, daß das ägyptische *hunu* = Feldmesser, Geometer sei. Von einem Seilspannen oder gar von einer Erinnerung an das griechische *ἀρπεδονάπται* ist dabei keine Rede. Ferner vgl. Dümichen in der Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII und besonders dessen umfangreiche Schrift: Baugeschichte des Denderatempels und Beschreibung der einzelnen Theile des Bauwerkes nach den an seinen Mauern befindlichen Inschriften. Straßburg 1877. Endlich vgl. Brugsch, Steininschrift und Bibelwort (Berlin 1891), wo ausdrücklich darauf hingewiesen ist, daß in allen bildlichen Darstellungen der Grundsteinlegung eines Tempels die neben dem Könige auftretende Göttin stets den Meßstrick halte und durch eingeschlagene Pflöcke die Endpunkte des Heiligtums festlege. Die Endpunkte Brugschs sind jedenfalls als die Eckpunkte zu verstehen.

der Zahl der Uhr, so stelle ich auf die Eckpunkte Deines Gotteshauses." Das sind die Worte, unter denen der König auf den Inschriften der Tempel die genannte Handlung vollzieht. Er schlägt mit der in seiner rechten Hand befindlichen Keule einen langen Pflock in den Erdboden und ein gleiches tut ihm gegenüber *Safech*, die Bibliotheksgöttin, die Herrin der Grundsteinlegung. Es ist klar, daß die diese beiden Pflöcke verbindende Gerade die Richtung nach Norden, den Meridian des Tempels, bezeichnet, daß durch sie die gewünschte Orientierung des Grundrisses zur Hälfte vollzogen ist. Allerdings nur zur Hälfte! Die Wandungen des Tempels sollen senkrecht zueinander stehen, und demgemäß ist es nicht weniger notwendig in einer zweiten Handlung diese mehr geometrische als astronomische Bestimmung zu treffen.

Man kann nun leicht mit der Antwort bereit sein, die ägyptischen Zimmerleute hätten gleich ihren heutigen Handwerksgenossen massive rechte Winkel besessen. Ein solcher ist z. B. auf einem Wandgemälde eine Schreinerwerkstätte darstellend[1]) deutlich abgebildet. Wohl. Aber die Richtigkeit dieses Werkzeuges mußte doch selbst verbürgt, mußte irgend einmal irgendwie geprüft sein, und das scheint immerhin in letzter Linie eine geometrische Konstruktion vorauszusetzen, die vermutlich bei so feierlichen Gelegenheiten wie die Gründung eines Tempels stets aufs neue vollzogen wurde. Daß es so geschah liegt vielleicht in der Mehrzahl „die Eckpunkte Deines Gotteshauses" angedeutet, welche der König, wie wir gehört haben, aufstellt. Die Art der Bestimmung freilich verschweigt, soviel wir wissen, die Gründungsformel. Gerade dazu diente nun, wenn uns ein Analogieschluß, dessen Ausführung wir auf einige ziemlich späte Kapitel dieses Bandes verschieben müssen, nicht irre leitet, das Seil, das um die Pflöcke gezogen war, das das eigentliche Geschäft der Seilspanner bezeichnend ihnen den Namen verlieh und an welches wir dachten, als wir im 1. Kapitel (S. 46) auf die Möglichkeit einer Seilspannung bei den Babyloniern hinwiesen.

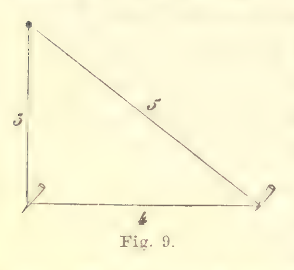
Fig. 8.

Denken wir uns, gegenwärtig allerdings noch ohne jede Begründung, den Ägyptern sei bekannt gewesen, daß die drei Seiten von der Länge 3, 4, 5, deren grundlegende Eigenschaft $4^2 + 3^2 = 5^2$ ihnen (S. 96) nicht entgangen war, zu einem Dreiecke verbunden ein solches mit einem rechten Winkel zwischen den beiden kleineren Seiten bilden, und denken wir uns die Pflöcke auf dem Meridian um

---

[1]) Wilkinson, *Manners and customs of the ancient Egyptians.* Vol. III, pag. 144.

4 Längeneinheiten voneinander entfernt. Denken wir uns ferner das Seil von der Länge 12 und durch Knoten in die entsprechenden Abteilungen 3, 4, 5 geteilt, so leuchtet ein (Fig. 9), daß das Seil an dem einen Knoten gespannt, während die beiden anderen an den Pflöcken anlagen, notwendigerweise einen genauen rechten Winkel zum Meridiane an dem einen Pflocke hervorbringen mußte.


Fig. 9.

War dieses die Hauptaufgabe der Harpedonapten, zu deren Amtsgeheimnis es gehören mochte, die Pflöcke wie die Knoten an den richtigen Stellen anzubringen, wodurch wenigstens eine zweckdienliche Erklärung für das Stillschweigen der Inschriften über ihre Verfahrungsweise gegeben wäre, so konnte in der Tat ihnen der Ruhm „der Konstruktion von Linien“ zugesprochen werden, so waren sie im Besitz der Mysterien der Geometrie, die nicht jedem sich enthüllten, so wird es begreiflich, wie ihre Handlungen in den Wandgemälden dem Könige selbst in Verbindung mit einer Göttin beigelegt wurden.

Die Operation des Seilspannens ist eine ungemein alte. Man hat deren Erwähnung auf einer auf Leder geschriebenen Urkunde des Berliner Museums gefunden, wonach sie bereits unter Amenemhat I. stattfand[1]. Vielleicht ist es gestattet, hier nochmals daran (S. 58) zu erinnern, daß Ahmes in den einleitenden Worten seines Papyrus sich darauf beruft, er arbeite nach dem Muster älterer Schriften, und daß es vielleicht König Amenemhat III. war, unter dessen Regierung jene älteren Schriften verfaßt wurden. Ist diese Annahme wirklich richtig, so würden wir wenigstens keinen Anstand nehmen die Möglichkeit solcher Kenntnisse, wie wir sie soeben für die Harpedonapten in Anspruch nahmen, schon in der XII. Dynastie, welcher die Amenemhat angehörten, zuzugestehen. Einer Zeit, welche die Winkellehre so weit ausgebildet hatte, daß sie den Seqt berechnete, können wir auch die Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 zutrauen, die wesentlich erfahrungsmäßig gewonnen worden sein wird, ohne daß irgendwie an einen strengen geometrischen Beweis in unserem heutigen Sinne des Wortes gedacht werden müßte.

Überhaupt zerfällt, wie wir meinen, gerade dem Seqt gegenüber jeder Versuch, die Geometrie der Ägypter auf eine bloße Flächenabschätzung zurückzuführen, während Winkeleigenschaften oder Verhältnisse von Strecken ihr fremd gewesen seien, von selbst, ohne daß

[1]) Dümichen, Denderatempel S. 33.

es mehr nötig wäre, gegen diese Zweifel eines überwundenen Wissensstandpunktes mit eingehender Widerlegung sich zu wenden. Dagegen ist um so erklärlicher, was ein später griechischer Schriftsteller von den Schülern des Pythagoras sagt[1]), was aber gewiß richtig auch auf seine Lehrer, die Ägypter gedeutet worden ist, daß sie die Winkel als bestimmten Göttern geweiht ansahen, und daß der dreiartige Gott die erste Ursache zur Reihe der geradlinigen Figuren in sich begreife.

Eine mindestens nicht ganz zu verwerfende Bestätigung uralter geometrischer Kenntnisse bei den Ägyptern können wir noch beifügen[2]). Wenn aus den ältesten Zeiten auf Wandgemälden Figuren von geometrischer Entstehung sich erhalten haben, so spricht deren Vorhandensein gewiß dafür, daß man mit solchen Zeichnungen sich damals beschäftigte. Ja man kann es wohl einleuchtend nennen, daß ein wirklicher Mathematiker, welcher dieselben, vielleicht Jahrhunderte nach ihrer Anfertigung, häufig, täglich zu Gesicht bekam, fast notwendig darauf hingewiesen werden mußte, über Eigenschaften dieser Figuren, die ihm noch nicht bekannt waren, nachzudenken. Glücklicherweise besitzen wir nun in einem mit Recht wegen seiner Treue und Zuverlässigkeit berühmten Bilderwerke[3]) eine überreiche Menge von Figuren der genannten Art, von denen nur einige wenige, und zwar der leichteren Herstellung wegen ohne die bunten Farben des Originals und in anderem Maßstabe, hier wiedergegeben werden mögen. Schon zur Zeit der V. Dynastie, der unmittelbaren Nachfolger der Pyramidenkönige, wurde in der Totenstadt von Memphis eine aus ineinander gezeichneten verschobenen Quadraten (Fig. 10) gebildete Verzierung angewandt. Das Quadrat mit seinen zu Blättern ergänzten Diagonalen (Fig. 11) findet sich von der XII. bis zur XXVI. Dynastie vielfach. Das gleichschenklige Paralleltrapez kommt in Varianten, welche auf die Zerlegung in anderweitige Figuren sich

---

[1]) Proclus Diadochus, Commentar zum I. Buche der euklidischen Elemente ed. Friedlein. Leipzig 1873, pag. 130 und 155. Auf diese Stellen hat allerdings in der Absicht sie gegen eine wissenschaftliche Geometrie der Ägypter zu verwerten Friedlein aufmerksam gemacht: Beiträge zur Geschichte der Mathematik II. Hof 1872, S. 6. [2]) Zur Anstellung der hier folgenden Untersuchung regten uns einige Bemerkungen von G. J. Allman an: *Greek Geometry from Thales to Euclid* im V. Bd. der Hermathena. Dublin 1877, pag. 169, Note 20 und pag. 186, Note 81. Diese Abhandlung ist mit anderen, die gleichfalls ursprünglich in der Hermathena erschienen, 1889 zu einem Bande vereinigt worden. Dort finden sich die betreffenden Stellen pag. 12, Note 16 und pag. 29, Note 47. [3]) Prisse d'Avennes, *Histoire de l'art Égyptien d'après les monuments*.

beziehen (Fig. 12 und 13), als Zeichnung von unteren Teilen eines Ständers für Waschgefäße und dergleichen fast zu allen Zeiten vor. Ein höchst

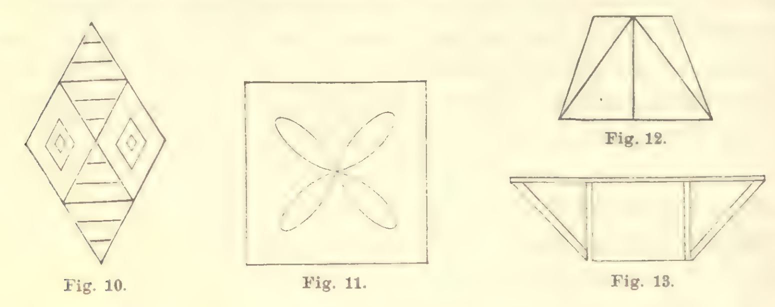


Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

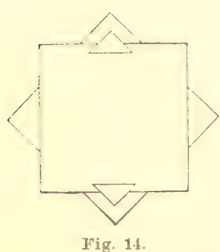


Fig. 14.

merkwürdiges Gewebemuster (Fig. 14) kann als Vereinigung zweier sich symmetrisch durchsetzender Quadrate definiert werden. Unterbrechen wir hier die Angabe geometrischer Figuren aus ägyptischen Wandgemälden und schalten wir zunächst den Bericht über eine für uns ungemein wertvolle Entdeckung ein.

Die Ägypter pflegten die Wände, auf welchen sie Reliefarbeiten anbringen wollten, in lauter einander gleiche Quadrate zu zerlegen und mit deren Hilfe die Umrisse des Einzuhauenden zu zeichnen. Eine unvollendet gebliebene Kammer in dem sogenannten Grabe Belzoni, das ist in dem Grabe Seti I., des Vaters Ramses II. aus der XIX. Dynastie, zeigt dieses ganz deutlich[1]). Es wäre töricht hierin bewußte Anfänge eines Koordinatensystems erkennen zu wollen, aber ebenso töricht wäre es zu verkennen, daß in dieser ausgeprägten Gewohnheit eine geometrische Proportionenlehre so weit enthalten ist, daß wir den verkleinernden, unter Umständen, wo es um Götterfiguren sich handelte, auch den vergrößernden Maßstab angewandt finden. Es kann fast auffallen, daß die Ägypter nicht noch einen Schritt weitergingen und die Perspektive erfanden. Bekanntlich ist von dieser bei ägyptischen Gemälden keine Spur vorhanden, und mag man religiöse oder was immer sonst für Gründe dafür in Anspruch nehmen, immer bleibt geometrisch ausgedrückt die Tatsache: die Ägypter übten nicht die Kunstfertigkeit die zu bemalende Wand als zwischen dem sehenden Auge und dem abzubildenden Gegenstande eingeschaltet zu denken und deren Durchschnittspunkte mit den Sehstrahlen nach jenem Gegenstande durch Linien zu vereinigen.

[1]) Wilkinson, *Manners and customs* III, pag. 313 und ebendesselben *Thebes and Egypt* pag. 107.

Gehen wir in der Zeit tief herunter bis zur Regierung des Königs Ptolemaeus IX. (um 150 v. Chr. G.), so finden wir auf dem großen Pylon vor dem auf der Insel Phylae von jenem Könige errichteten Isistempel eine erhaltene in den Stein eingeritzte Zeichnung, welche allerdings das Recht hat uns in Staunen zu versetzen, und welche wir am besten an dieser Stelle erwähnen. Es ist[1]) der Grundriß einer bei Erbauung des Isistempels zur Verwendung gelangten Säule, und weitere Nachforschungen haben ergeben, daß die hier entgegentretende Art des Einritzens von Zeichnungen in natürlicher Größe dem ägyptischen Baumeister auf Phylae regelmäßige Gewohnheit war. Er hat, wie die Ausgrabungen zeigen, vor dem Beginne des Baues alle seine Grundrisse in Naturgröße auf dem Pflaster, da wo die Mauer kinkommen sollte, aufgerissen.

Wir kehren zu den Figuren geometrischer Art zurück, und zwar zu solchen, bei welchen die Kreislinie vorkommt. Durch Durchmesser in gleiche Kreisausschnitte geteilte Kreise kommen vielfach vor, und zwar ist bei Zieraten die häufigste Teilung die durch 2 oder 4 Durchmesser in 4 oder 8 Teile, während, wie wir im 1. Kapitel (S. 47) erwähnt haben, auf Gefäßen, welche von asiatischen Tributpflichtigen Königen der XVIII. Dynastie, etwa den Zeitgenossen des Schreibers Ahmes, überbracht werden, die Teilung des Kreises durch 6 Durchmesser in 12 Teile (Fig. 15) ausnahmslose Regel ist. Wagenräder haben insbesondere seit Ramses II. aus der XIX. Dynastie fast regelmäßig 6 Speichen, und Räder mit 4 Speichen kommen ganz selten vor. Ergänzend ist zu erwähnen, daß den Ägyptern des alten und des mittleren Reiches Wagen und Pferde noch unbekannt waren. Beide wurden erst unter den Hyksoskönigen von Syrien her eingeführt[2]). Damit ist aber zugleich wahrscheinlich gemacht, daß den Ägyptern vor der Zeit der Hyksoskönige z. B. unter den Amenemhats, unter welchen das Muster zum Handbuche des Ahmes entstand, die mit den 6speichigen Rädern und dem regelmäßigen Sechsecke in enger Verbindung stehende Verhältniszahl $\pi = 3$ nicht bekannt wurde, und daß diese auch späterhin trotz anhaltend enger Beziehungen zu Vorderasien sich nicht einbürgern konnte, weil die Ägypter damals schon mit $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ zu rechnen gewohnt waren. Eine Teilung des Kreises in 10 gleiche Teile durch 5 Durchmesser oder in 5 Teile durch 5 vom Mittelpunkte ausgehende Strahlen ist unserem danach suchenden Auge nicht begegnet. Der

Fig. 15.

[1]) L. Borchardt, Altägyptische Werkzeichnungen. Zeitschr. f. ägypt. Spr. XXXIV, 69—76 (1896). [2]) Steindorff, Die Blütezeit der Pharaonen S. 44.

von Horapollon als Zeichen für 5 beschriebene fünfstrahlige Stern (S. 84) kann kaum als Gegenbeispiel aufgefaßt werden, so auffallend er sein mag.

Wollen wir über wirklich geometrische Überbleibsel in ägyptischer Sprache, nicht über Zeichnungen, aus welchen mehr oder minder gewagte Rückschlüsse auf geometrisches Wissen gezogen werden müssen, berichten, so haben wir plötzlich ungemein tief in die Zeitfolge hinabzugreifen bis zu den Inschriften des Tempels des Horus zu Edfu in Oberägypten[1]), in welchen der Grundbesitz der Priesterschaft dieses Tempels vermessen und angegeben ist. Die Pflocklegung dieses Tempels wurde nach altertümlicher Sitte am 23. August 237 v. Chr. vollzogen[2]). Die aufgezeichneten Grundstücke und deren Schenkung beziehen sich auf König Ptolemäus XI., Alexander I., dessen Regierung durch Gewalttätigkeiten an Bruder und Mutter errungen und bewahrt von 107 bis 88 dauerte, in welch letzterem Jahre er selbst durch den mit Waffengewalt zurückkehrenden Bruder zur Flucht genötigt wurde. Um das Jahr 100 v. Chr. wurden also die betreffenden Messungen angestellt, nicht weniger als 200 Jahre nachdem in Alexandria auf ägyptischem Boden und unter dem Schutze eines Königs von Ägypten Euklid gelebt und gelehrt hatte, dessen Name jedem Gebildeten bis zu einem Grade bekannt ist, der uns verstattet seiner als Maßstab für das mathematische Wissen seiner Zeit auch in diesem Kapitel schon uns zu bedienen. Damals gab es unzweifelhaft eine weit vorgeschrittene theoretische Geometrie, aber die Praxis der Feldmessung ließ sich an den altherkömmlichen Formeln genügen. Wir haben dieses Festhalten an gewohnten, bequemen, eine Wurzelausziehung vermeidenden Methoden schon früher (S. 94) angekündigt. Wir haben es bis zu einem gewissen Grade gerechtfertigt und die Unbedeutendheit des begangenen Fehlers in Betracht gezogen. Es ist möglich gewesen aus den sich aneinander anschließenden Maßen der Edfu-Inschrift eine sehr wahrscheinliche Zeichnung der dort beschriebenen Ländereien anzufertigen[3]), und dieser Plan läßt erkennen, wie wenig die durch Hilfslinien hergestellten viereckigen Abteilungen von Rechtecken sich unterscheiden, bis zu welchem Grade der Genauigkeit trotz Anwendung der alten Formeln man gelangte. In der Häufung jener Hilfslinien, in der Zerlegung des zu messenden Feldes in immer zahlreichere, immer kleinere Teile lag die Verbesserung, welche ein Festhalten der Regeln der Urahnen

---

[1]) R. Lepsius, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu Abhandlungen der Berliner Akademie 1855, S. 69—114). [2]) Dümichen in der Zeitschr. f. ägypt. Spr. u. Alterth. Bd. VIII, S. 7. [3]) R. Lepsius l. c. Tafel VI.

gestattete, und diese Verbesserung war selbst keine Neuerung, sie hatte ihr Vorbild schon in dem Werke des Ahmes. Wir können die Ehrenrettung der Feldmesser zur Zeit von Ptolemäus XI. gewissermaßen vollenden, indem wir an die Scheu vor Wurzelausziehungen erinnern, welche heute noch untergeordneten Beamten des Katasterwesens anzuhaften pflegt und sie wenigstens für vorläufige Flächenschätzung die sogenannten verglichen abgenommenen Maße anwenden läßt, d. i. eben das altägyptische Verfahren seinem Hauptgedanken nach.

Wenn wir sagten, in den Edfu-Inschriften seien die Formeln angewandt, welche uns aus dem Übungsbuche des Ahmes bereits bekannt sind, so müssen wir diese Aussage dahin ergänzen, daß eine weitere theoretisch noch mißbräuchlichere Ausdehnung jener Formeln hinzugekommen und eine nicht ganz unbedeutende Gedankenverschiebung bei ihnen eingetreten ist.

Die Formeln des Ahmes waren $\frac{b}{2} \times a$ und $\frac{b_1 + b_2}{2} \times a$ für die Flächeninhalte des gleichschenkligen Dreiecks und des gleichschenkligen Paralleltrapezes. Die erstere Formel blieb in Geltung, und wenigstens in den im Drucke veröffentlichten Edfu-Inschriften sind andere als gleichschenklige Dreiecke nicht genannt. Bei den Vierecken aber ist die Bedingung, daß es gleichschenklige Paralleltrapeze seien, deren Fläche man berechnen wolle, abhanden gekommen. Die Anzahl so gestalteter Vierecke überwiegt allerdings auch in Edfu, aber neben ihnen kommen ganz willkürliche Vierecke mit den Seiten a_1, a_2, b_1, b_2 vor, wo die beiden durch a und desgleichen die beiden durch b benannten Seiten einander gegenüberliegen sollen, und deren Fläche berechnet sich auf

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

So z. B. 16 zu 15 und 4 zu $3\frac{1}{2}$ macht $58\frac{1}{8}$; $45\frac{1}{4}$ zu $33\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ und 17 zu 15 macht 632; $9\frac{1}{2}$ zu $10\frac{1}{2}$ und $24\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ zu $22\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ macht $236\frac{1}{4}$ usw.

Die angekündigte Gedankenverschiebung besteht aber in folgendem. Ahmes, das suchten wir aus der mutmaßlichen Entstehung der Formeln, aus dem beim Vierecke gebrauchten Namen Hak, Abschnitt, für die eine Seite zu begründen, ging aus vom Dreiecke und ließ das Trapez durch Abstumpfung jener ursprünglichen Figur entstehen. Jetzt hat die Sache sich umgekehrt. Das Viereck ist die zugrunde liegende Figur geworden, das Dreieck entsteht aus ihm als besonderer Fall, indem eine Vierecksseite verschwindet. Nicht von Dreiecken mit den Seiten 5, 17, 17 oder 2, 3, 3 ist in Edfu die Rede, sondern von Figuren mit den Seiten 0 zu 5 und 17 zu 17, beziehungsweise

0 zu 2 und 3 zu 3, deren Flächen alsdann $42\frac{1}{2}$ und 3 sind[1]). Das Wort Null wird, wie wir wohl zum Überflusse bemerken, nicht etwa durch ein besonderes Zahlzeichen, sondern durch eine aus zwei Bildchen sich zusammensetzende hieroglyphische Gruppe mit der Aussprache Nen dargestellt, welche gewöhnlich verneinende Beziehungen ausdrückt, hier die als Dingwort ausgesprochene Verneinung, das Nichts. An eine Zahl Null ist in keiner Weise zu denken.

Fassen wir in eine ganz kurze Übersicht den Hauptinhalt der beiden von ägyptischer Mathematik handelnden Kapitel zusammen. Die Ägypter besaßen, wie wir quellenmäßig belegen konnten, schon im Jahre 1700 v. Chr., wahrscheinlich sogar bereits ein halbes Jahrtausend früher eine ausgebildete Rechenkunst mit ganzen Zahlen und Brüchen, wobei letztere stets als Stammbrüche geschrieben wurden, wenn auch der Begriff gewöhnlicher Brüche, wie aus der Zurückführung auf Generalnenner hervorgeht, nicht fremd war. Die Aufgaben, welche so der Rechnung unterbreitet wurden, gehören dem Gebiete der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten an, wobei die Worteinkleidung eine von einer Aufgabengruppe zur anderen wechselnde ist. Als Gipfelpunkte erscheinen nach moderner Auffassung Beispiele aus dem Gebiete der arithmetischen, vielleicht der geometrischen Reihen. Beispiele aus der Geometrie und Stereometrie gewählt lassen erkennen, daß in jener frühen Zeit die Ägypter einen nicht ganz unglücklichen Versuch gemacht hatten den Kreis in ein Quadrat zu verwandeln, daß ihre Berechnung des Flächeninhalts von gleichschenkligen Dreiecken und von als Abschnitte von ersteren erhaltenen gleichschenkligen Paralleltrapezen von Näherungsformeln Gebrauch machte, ohne daß wir freilich irgend eine Auskunft darüber zu geben vermochten, ob man beim Kreise, ob man bei jenen geradlinig begrenzten Figuren sich bewußt war nur Angenähertes zu erhalten, oder ob man an die genaue Richtigkeit der Ergebnisse glaubte, und wie man zu denselben gelangt war. Zur weiteren Untersuchung dieser hochwichtigen Frage wird es unentbehrlich sein die Tatsache zu berücksichtigen, daß rationale Quadratwurzeln den Ägyptern in sehr alter Zeit bekannt waren. Des weiteren haben wir gesehen, daß man es liebte, wohl auch für notwendig hielt, gegebene Figuren zum Zwecke der Ausmessung durch Hilfslinien in andere Figuren von einfacherer Begrenzung zu zerlegen, und diese Übung zu allen Zeiten beibehielt, gleichwie es mit den alten Näherungsformeln für die Flächen von Dreiecken und Vierecken der Fall war. Endlich ist

[1]) Die hier erwähnten Beispiele vgl. bei Lepsius l. c. S. 75, 79, 82. Auf letzterer Seite findet sich die Rechtfertigung der Null.

festgestellt, daß in gleich grauem Altertume, bis zu welchem aufwärts wir die Flächenberechnung verfolgen können, auch eine Vergleichung von Strecken zum Zwecke des Ähnlichmachens, d. h. zur Wiederholung desselben Winkels an verschiedenen Raumgebilden stattfand. Neben dieser quellenmäßig gesicherten Wissenschaft lernten wir die Überlieferung kennen, welche Geometrie und Rechenkunst heimatlich auf Ägypten zurückführt, welche das bürgerliche Rechnen der Ägypter uns mutmaßlich als Fingerrechnen, mit aller Bestimmtheit als Rechnen mit Steinchen kennen lehrt. Auch aus Figuren des täglichen Gebrauches durften wir geometrische Schlüsse ziehen, Handlungen die mit der Tempelerbauung verbunden waren, durften wir erörtern und gelangten so zu der wahrscheinlichen Folgerung, daß neben jenen geometrischen Vorschriften, welche den Rechnungen dienten, auch solche bestanden, die auf Konstruktionen sich bezogen und namentlich die Zeichnung eines rechtwinkligen Dreiecks durch die gegebenen Längen seiner drei Seiten ermöglichten. Eine deutliche Darlegung dieser von uns vermuteten Vorschriften ist ebensowenig bekannt wie die vorher vermißte Ableitung der Flächenformeln, ebensowenig wie die Begründung der von Ahmes angewandten Formel für Auffindung des Anfangsgliedes einer arithmetischen Reihe aus ihrer Summe, ihrer Gliederzahl und ihrer Differenz. So kommt man unabweislich zur Annahme eines noch nicht wieder aufgefundenen theoretischen Lehrbuches der Ägypter neben dem neuerdings bekannt gewordenen Übungsbuche. Nicht als ob wir an eine Theorie im modernen Sinne dächten. Beweise werden meistens induktiv, wohl auch auf Grund sehr ungenügender Induktion geführt worden sein, wenn man nicht gar den Augenschein für hinreichend hielt jeglichen Beweis zu ersetzen. Dagegen vermuten wir, wie hier vorgreifend bemerkt werde, eine regelmäßig wiederkehrende Form des Lehrbuches, unterschieden von der des Übungsbuches und nur darin mit letzterer zusammentreffend, daß auch sie sich forterbte, gleichwie die Form des Übungsbuches so gut wie ohne jede Veränderung in griechischer Nachbildung sich erhielt. Wir werden in späteren Kapiteln auf diese Meinung, auf diese Behauptung zurückkommen müssen, um die letztere zu beweisen und dadurch der ersteren eine Stütze zu verleihen.



III. Griechen.



4. Kapitel.

Die Griechen. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett.

Wir verlassen die Länder ältester, aber bis vor kurzem und teilweise bis auf den heutigen Tag weniger bekannter Kulturentwicklung. Wir gehen über zu dem Volke, von dessen Bildung wir selbst, der Schreiber wie der Leser, bewußt oder unbewußt, unmittelbar oder mittelbar die merkbarsten Spuren in uns tragen, dessen Schriftsteller uns schon wiederholt als willkommene Ergänzungen dienten, wenn für andere Länder die einheimischen Quellen allzu spärlich flossen, und wir sind geneigt zu erwarten, hier werde geschichtliche Gewißheit uns entgegentreten, jede bloße Vermutung überflüssig machend und darum ersparend. Aber diese Erwartung wird getäuscht. Die Geschichte der griechischen Mathematik, allerdings durch Schriften einzelner hervorragender griechischer Mathematiker selbst unserem Erkennen näher gerückt, ist doch nichts weniger als durchsichtig, als vollständig. Bald, und nicht bloß bei den ersten Anfängen, stehen wir an Lücken, an unvermittelten Übergängen, welche uns nötigen, um nur einigermaßen Bescheid zu erhalten, Schriftsteller zu befragen, deren Glaubwürdigkeit uns selbst nicht gegen jeden Zweifel geschützt ist, oder gar zu eigenen Vermutungen unsere Zuflucht zu nehmen, welche die gähnende Spalte uns überbrücken müssen. Wir glauben unter der Bedingung, daß wir unseren Lesern sagen, was gewiß, was nur möglich sei, eine solche hypothetische Darstellung nicht vermeiden zu sollen, wo der Mangel an sicherer Überlieferung uns dazu nötigt.

Einst flossen die Quellen ergiebiger. Es war eine Eigentümlichkeit der durch Aristoteles gegründeten peripatetischen Schule einen Urheber für jeden Gedanken ausfindig machen zu wollen. Dieser Hang verblieb auch den in Alexandria heimisch gewordenen, dort mit fremdartigen Elementen sich mengenden Peripatetikern. Man suchte allerdings von hier aus mit einer gewissen Vorliebe die Lehren griechischer Philosophen auf einen nichtgriechischen Ursprung zurückzuführen[1], und mit dieser Neigung nimmt die Zuverlässigkeit solcher

[1] Nietzsche, *De Laertii Diogenis fontibus* im Rheinischen Museum XXIV, 205. Frankfurt a. M. 1869.

Angaben wesentlich ab, sofern nicht andere Gründe obwalten, den Glauben an jene Aussagen wieder zu verstärken. Wir rechnen dazu vornehmlich zweierlei. Erstens erhöht es für uns die Bedeutung eines Ursprungszeugnisses aus fremdem Lande, wenn wir selbst dort Erzeugnissen begegnet sind, die dem, was als eingeführt bezeichnet wird, wesentlich gleichen. Zweitens vertrauen wir mit rückhaltloserer Hingebung den Aussprüchen eines Mannes, der als Sachverständiger, als Fachmann redet; ja wir benutzen lieber einen der Zeit nach späteren Mathematiker als Gewährsmann für früher Erdachtes als einen dem Ursprunge gleichaltrigen Laien, der die Jahre, um welche er den Ereignissen näher lebte, dadurch unwirksam macht, daß er dem Inhalte derselben fern stand.

Mit vollstem Vertrauen würden wir daher die Geschichte der Geometrie, der Sternkunde, der Arithmetik als Quelle benutzen, welche Theophrastus von Lesbos, der Schüler des Aristoteles, verfaßt haben soll[1]), wenn dieselben uns auch nur in Spuren erhalten wären. Gern würden wir den gleichaltrigen Xenokrates in seinen Büchern über die Geometer[2]) als Führer wählen — vorausgesetzt, daß dieser Titel und nicht der „über Geometrisches" die richtige Lesart bildet — wenn nicht auch sie durchaus verschollen wären. Mit Freuden bedienen wir uns der Bruchstücke historischer Schriften über Geometrie und Astronomie, die ein dritter Schriftsteller aus der Zeit der unmittelbarsten aristotelischen Schule verfaßt hat: Eudemus von Rhodos[3]). Es sind, wie wir es ausgesprochen haben, nur Bruchstücke dieser Bücher bekannt, welche von anderen Schriftstellern abgeschrieben und gelegentlich, teils mit Nennung des Verfassers, teils mit bloßer Andeutung desselben, ihren Werken einverleibt wurden, aber jedes einzelne Stückchen läßt den Wert des Verlorenen ermessen, seinen Verlust bedauern.

Neben diesen eigentlichen Geschichtsschreibern der Mathematik haben auch andere Fachmänner, Kompilatoren und Kommentatoren mathematischer Schriften, uns manche wertvolle Bemerkung hinterlassen, die wir dankbarst benutzen werden. Geminus von Rhodos, Theon von Smyrna, Porphyrius, Jamblichus, Pappus, Proklus, Eutokius sind die Namen solcher Verfasser, von denen wir mehr als nur einmal zu reden haben werden.

Die Überlieferungen nun in dem Sinne und Umfange benutzt, wie wir es vorausschickend erläutert haben, und unter fernerer Zuziehung auch nichtmathematischer Schriftsteller, wenn keine andere

[1]) Diogenes Laertius V, 48—50. [2]) Diogenes Laertius IV, 13.
[3]) *Eudemi Rhodii Peripatetici fragmenta quae supersunt* ed. L. Spengel. Berlin 1870. Die mathematischen Bruchstücke S. 111—143.

Wahl uns bleibt, belehren uns darüber, daß in dem weiten Ländergebiete, in welchem griechisch gesprochen und griechisch gedacht wurde, und welches deshalb für die Kulturgeschichte Griechenland heißt, wenn es auch keineswegs geographisch mit dem Königreiche Griechenland unseres Jahrhunderts sich deckt, die Mathematik weder gleichzeitig auftrat noch ebenmäßig sich entwickelte. Die kleinasiatische Küstengegend südlich von Smyrna und die davor liegende Inselwelt waren der Schauplatz der ältesten ionischen Entwicklung. Süditalien und Sizilien mit ihrer dorischen Bevölkerung nahmen sodann in weit stärkerem Maßstabe an der Fortbildung Anteil. Jetzt erst als dritter Boden, auf welchem eine dritte Stufe erreicht ward, erscheint das eigentlich griechische Festland, erscheint namentlich Athen in der Geschichte der Mathematik. Aber auch von dort entfernt sich die Schule der vorzüglichsten Mathematiker. Auf ägyptischem Boden entsteht eine griechische Stadt, Alexandria, und dort blühen oder lernen doch wenigstens die großen Geometer eines Jahrhunderts, welchem an Bedeutsamkeit für die Entwicklung der Mathematik nur ein einziges an die Seite gestellt werden kann, sofern unsere Gegenwart geschichtlicher Betrachtung sich noch entzieht: das Jahrhundert von der Mitte des XVI. bis zur Mitte des XVII. S., das Jahrhundert der beginnenden Infinitesimalrechnung. Die großen Geisteshelden des euklidischen Zeitalters hatten ihre Epigonen, die, wenn sie teilweise auch an anderen Orten aufgesucht werden müssen, noch immer in Alexandria wurzeln. Dort zeigt sich in verschiedenen Jahrhunderten wiederholt eine Nachblüte unserer Wissenschaft, die edle Früchte hervorzubringen imstande ist. Männer wie Heron, wie Klaudius Ptolemäus, wie Pappus stehen keinem Mathematiker der euklidischen Zeit an persönlicher Geistesgröße nach, nur die Dichtigkeit ihres Auftretens in einander nahe liegenden Zeiträumen fehlt, und damit das eigentlich kennzeichnende Merkmal der großen alexandrinischen Epoche. Endlich kehrt die griechische Mathematik matt und absterbend nach Hellas zurück. Athen und die im ehemaligen Thrakien entstandene Welthauptstadt Byzanz sehen den Untergang unserer Wissenschaft, den Untergang derselben für die dortige Gegend. Weiter westlish wohnenden Völkern geht sie zur gleichen Zeit neu und strahlend auf[1]).

Wir haben mit wenigen Strichen den Rahmen uns entworfen, in welchen wir das Bild der griechischen Mathematik einzuzeichnen gedenken. Wir müssen mit dieser Einzelarbeit beginnen. Wir sind

---

[1]) Eine sehr umfassende Zusammenstellung gab G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia. Modena 1893—1902.

bei Babyloniern und Ägyptern von den niedrigsten Rechnungsverfahren und von der Bezeichnung der Zahlen ausgegangen als von Dingen, welche kein Volk auch nur in den Anfängen seiner geistigen Entwicklung entbehren kann, und welche die Vorstufe zu jedem mathematischen Denken bilden. Ähnlich werden wir hier verfahren. Wir werden das Zahlenschreiben, wir werden bis zu einem gewissen Grade das Rechnen der Griechen vorwegnehmen müssen.

Ob wir es eine Zahlenbezeichnung[1]) zu nennen haben, wenn in griechischen Inschriften die Zahlwörter ausgeschrieben gefunden werden, dürfte dahingestellt sein. Ebenso kann die Auflösung einer Zahl in lauter einzelne nebeneinander befindliche Striche, wie sie z. B. für die Zahl sieben noch in einer Inschrift von Tralles in Karien aus dem IV. vorchristlichen Jahrhunderte nachgewiesen ist, wie sie aber naturgemäß für eine nur noch etwas größere Zahl gar nicht denkbar ist, kaum als Zahlenbezeichnung gelten. Die älteste wirkliche Bezeichnung erfolgte durch Anfangsbuchstaben der Zahlwörter[2]). Ihre Spuren sollen hinaufrücken bis in die Zeit Solons, also etwa bis zum Jahre 600, während als untere Grenze das perikleische und nachperikleische Jahrhundert genannt wird, ja während Spuren bis auf die Zeit Ciceros hinabführen. Die benutzten Buchstaben sind folgende. Man schrieb Jota I für die Einheit, sei es nun, daß an eine altertümliche Form des Wortes für eins gedacht werden muß, sei es, daß nur ein gerader Strich gemacht wurde, der zufällig auch als Jota gedeutet werden kann. Für fünf wurde ein Pi Π geschrieben wegen $\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$, für zehn ein Delta Δ wegen $\delta\acute{\epsilon}\kappa\alpha$. Hundert, $\acute{\epsilon}\kappa\alpha\tau\acute{o}\nu$, bezeichnete man durch Eta H, welches ursprünglich kein e-Laut, sondern wie später bei den Römern Aspirationszeichen war. Tausend $\chi\acute{\iota}\lambda\iota\alpha$ und zehntausend $\mu\acute{\upsilon}\rho\iota\alpha$ endlich schrieb man mit Chi X und My M. Außerdem waren ebendieselben Buchstaben in- und aneinander geschrieben als Zusammensetzungen, durch welche die Produkte von fünf in Einheiten verschiedenen Ranges dargestellt werden sollten, in Gebrauch, und auch ein als „zehn mal tausend" zusammengesetztes Zehntausend wird überliefert. Daß das Gesetz der Größenfolge stets gewahrt blieb, sei der Vollständigkeit wegen bemerkt. Wir bemerken ferner, daß diese Zeichen von Herodianus[3]), einem byzantinischen Grammatiker, der etwa 200 n. Chr. lebte, ge-

[1]) Ausführliches über Zahlenbezeichnung der Griechen in den Math. Beitr. Kulturl. 111—126. [2]) Außer den in den Math. Beitr. Kulturl. angeführten Quellen vgl. Koehler in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1865, S. 541flgg. und Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869, S. 9. [3]) Math. Beitr. Kulturl. 113.

schildert wurden und daß sie deshalb nicht selten herodianische Zeichen heißen.

Noch während der Jahrhunderte, durch welche jene Bezeichnung der Hauptsache nach verfolgt worden ist, bildeten sich zwei neue Methoden aus, beide zuverlässig nicht vor der sogenannten ionischen Schrift auftretend, deren sie sich bedienen, somit nicht vor 500. Näheres bringen wir weiter unten. Die eine dieser Methoden benutzt die 24 Buchstaben des ionischen Alphabets um die Zahlen 1 bis 24 dadurch auszudrücken. Nach ihr wurden die zehn Phylai der athenischen Richter mit fortlaufender Nummer versehen. Nach ihr gaben später die Alexandriner den Gesängen des Homer ihre Ordnungszahlen. Diese Methode so wenig wie die zweite Methode, welche wir dahin kurz erklären können, daß den einzelnen Buchstaben untereinander verschiedene aber in der natürlichen Zahlenreihe nicht immer unmittelbar sondern sprungweise aufeinanderfolgende Werte beigelegt werden, gehört den Griechen allein an. Wir müssen ihre Spuren auch anderwärts verfolgen und zu diesem Zwecke einschaltend von phönikischer, syrischer, hebräischer Zahlenbezeichnung reden.

Das eigentliche Handelsvolk der alten Welt waren die Phönikier, vielleicht die Fenchu ägyptischer Schriften. Sie durchfurchten als kühne Seefahrer und Seeräuber von ihren dicht an der Küste gegründeten Städten aus das Mittelmeer, welches ihnen Verkehrsstraße und Jagdgebiet war, überall Beziehungen unterhaltend, für welche Zahlenbekanntschaft unentbehrlich war. Dieselben Phönikier werden als Erfinder der eigentlichen reinen Buchstabenschrift gerühmt. Sie gingen mit dieser Erfindung weit hinaus über die Silben darstellenden Zeichen der Keilschrift wie auch über die Hieroglyphen, unter welchen eine Einheit der Bedeutung nicht herrschte, da unter ihnen wirkliche Buchstaben mit Silbenzeichen, mit Wortzeichen, ja mit solchen Zeichen wechselten, die selbst gar nicht ausgesprochen wurden, sondern als sogenannte Determinative die Aussprache anderer daneben geschriebener Zeichen regelten. Die phönikischen Buchstaben, 22 an der Zahl, sind aus hieratischen Zeichen der Ägypter, also ursprünglich aus Hieroglyphenbildern entstanden In dieser Annahme sind alle Sachkundige einig, höchstens daß einer den Durchgang durch hieratische Zeichen in Abrede stellend die phönikischen Buchstaben unmittelbar aus Hieroglyphen ableiten möchte. War nun diese Beschränkung auf einfachste Lautelemente in so geringer Anzahl schon ein ganz gewaltiger Schritt, so war es eine zweite wissenschaftliche Tat, wie man wohl sagen darf, den Buchstaben eine bestimmte Reihenfolge zu geben, aus ihnen ein Alphabet zu bilden. Die Ägypter

scheinen allerdings auch hierin ein Vorbild gewesen zu sein[1]. Mariette hat versucht aus Inschriftsanfängen eine Reihenfolge ägyptischer Buchstaben herzustellen, aber wenn seinem Versuche mehr als bloße Vermutung zugrunde liegt, so war diese ägyptische Anordnung sicherlich eine andere als die der Phönikier und derjenigen Völker, die mit ihnen ein Alphabet besaßen. Phönikische Buchstaben in der späteren Ordnung scheinen bereits auf Tontafeln aus der Bibliothek des Assurbanipal (668—625) in Ninive vorzukommen. Bei den Hebräern ist die Ordnung für die Zeiten, in welchen verschiedene Psalmen[2]) gedichtet wurden, festgesichert, denn wenn auch nur eine nach unseren Begriffen zwecklose Spielerei mit Schwierigkeiten, Zufall kann es doch nicht sein, daß die Verse dieser Lieder der Reihe nach mit den Buchstaben des Alphabets beginnen, darin eine entfernte Ähnlichkeit mit der ersten Verwendung des griechischen Alphabets zur Numerierung der homerischen Gesänge bietend, auf welche wir oben anspielten. Noch eine andere Sicherung der Reihenfolge des hebräischen Alphabets gibt das sogenannte Athbasch, welches sicherlich der babylonischen Gefangenschaft angehört[3]). Es besteht darin, daß die 22 Buchstaben in zwei Reihen geordnet übereinander stehen, der letzte Buchstabe ת über dem ersten א, der vorletzte ש über dem zweiten ב usw. Diese vier Buchstaben je zwei und zwei zusammengelesen lauten eben Athbasch. Der Zweck dieser Anordnung war eine Geheimschrift zu liefern, indem jedesmal statt eines eigentlich anzuschreibenden Buchstabens der im Athbasch über beziehungsweise unter ihm stehende gesetzt wurde. Jedenfalls mußte also damals auch schon die gewöhnliche Ordnung der nämlichen Buchstaben erfunden sein. Wir sagen „erfunden“, denn bei der vollendeten Prinziplosigkeit der Anordnung ist von einem inneren Gesetze derselben, welches nur entdeckt zu werden brauchte, gewiß keine Rede. Griechische Grammatiker haben sich zwar abgequält, Gründe dafür beizubringen, warum man die Buchstaben so, wie es geschah, und nicht anders ordnete, aber nur einer, Cheroboskos, dürfte das Richtige getroffen haben, wenn er sagt, niemand kenne den Grund der Anordnung[4]). War die Buchstabenfolge eine willkürliche, eine vielleicht

---

[1]) Für das Folgende vgl. insbesondere F. Lenormant, *Essai sur la propagation de l'alphabet phénicien.* Paris 1872. I, 101 flgg. [2]) Psalm 111, 112, 119, auch die Klagelieder des Jeremias fangen in aufeinanderfolgenden Versen mit den aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabets an. [3]) Herzogs Realenzyklopädie für protestantische Theologie und Kirche VII, 205 und XIV, 17. [4]) *Grammatici Graeci III (Scholia in Dionysii Thracis Artem Grammaticam* ed. Alfred Hilgard. Leipzig 1901) pag. 485, 2 sqq. 492, 10 sqq. 496, 17 sqq. Die Stelle des Cheroboskos pag. 317, 15: *Αἰτίαν δὲ τῆς τάξεως οἶδεν οὐδὲ εἷς.*

erst nachträglich eingeführte, nachdem die Buchstaben als solche bereits bestanden, so ist vermutlich wieder ein besonderer Akt der Erfindung notwendig gewesen, um die geordneten Buchstaben mit Zahlenwerten zu versehen. Zwei Tatsachen stimmen namentlich zu dieser Vermutung. Die eine, daß auf keiner der zahlreichen phönikischen oder punischen Inschriften, auf keiner Papyrushandschrift sich eine Spur einer alphabetischen Zifferrechnung gefunden hat[1]; die andere, das notwendige Seitenstück zur ersten bildend, daß eine nichtalphabetische Zahlenbezeichnung der Phönikier bekannt ist.

Die Phönikier schrieben entweder die Zahlwörter aus, oder sie bedienten sich gewisser Zeichen, die den Grundgedanken der Juxtaposition, vielleicht wechselnd mit dem der Multiplikation, zur Anwendung brachten[2]. Eins bis neun wurde nämlich durch ebensoviele senkrechte Striche dargestellt. Zehn war meistens ein wagrechter Strich, der aber auch in mehr oder weniger nach oben gekrümmter oder einen Winkel bildender Form vorkommt. Die Zahlen 11 bis 19 wurden durch Juxtaposition eines Horizontalstriches mit Vertikalstrichen geschrieben, von welchen gemäß der von rechts nach links zu lesenden phönikischen Schrift dem Gesetze der Größenfolge gehorchend der Horizontalstrich am weitesten rechts sich befindet. Das nun folgende 20 ist durch zwei Horizontalstriche darzustellen, die aber nicht bloß parallel übereinander gezeichnet wurden, sondern auch schrägliegend und verbunden ⁄γ, oder gar zu einer Gestalt N oder Λ sich veränderten. Jedenfalls trat es jetzt als einfaches neues Zeichen in Gebrauch, ein Vigesimalsystem in der Schrift einleitend. Ein letztes neues Zeichen kam, soweit die Inschriften bis jetzt ergeben haben, durch 100 hinzu < oder |Ɔ|, was wohl als liegende Zehn zwischen zwei Einern zu denken ist, die in dieser Vereinigung eine verzehnfachende Wirkung üben, eine auffallende Erscheinung, welche aber auch nicht ganz vereinzelt dasteht, vielmehr in der römischen Zahlenbezeichnung ein Analogon besitzt.

Die phönikischen Inschriften, welchen diese Zeichen entnommen sind, reichen bis auf viele Jahrhunderte vor Christi Geburt zurück. Die Zeichen unterscheiden sich aber nicht sehr von anderen, welche vom Jahre 2 an bis zur Mitte des III. S. in Palmyra, dem heutigen Tadmor mitten in der syrischen Wüste, in Gebrauch waren[3]. Die

[1] Diese Tatsache ist für Mathematiker zuerst bei Hankel S. 34 hervorgehoben und damit ein langezeit fortgeschleppter Irrtum beseitigt. [2] Adalb. Merx, *Grammatica Syriaca.* Heft 1. Halle 1867. Tabelle zu pag. 17. [3] Über palmyrenische Zahlzeichen vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 254. Zu den dort angegebenen Quellen tritt hinzu ein Aufsatz aus dem Nachlasse von E. F. F. Beer mit Erläuterungen von M. A. Levy in der Zeitschr. d. morgenl. Gesellsch. XVIII, 65—117, besonders S. 115.

Hauptverschiedenheit, abgesehen von Abweichungen in den Formen für 10 und 20, besteht darin, daß ein Zeichen für fünf in der Gestalt Y hinzugekommen ist und daß bei den Hunderten das multiplikative Verfahren durchgeführt ist. Das Zeichen für 10 wird nämlich hier zu 100, indem nur einseitig, und zwar rechts ein nach dem Gesetze der Größenfolge sonst unverständlicher Einheitsstrich ihm beigegeben ist, und gleicherweise werden 200, 300 usw. geschrieben, indem die Zeichen 2, 3 usw. sich rechts von dem für 10 befinden. Das eben beschriebene Zeichen von 100 nebst links folgendem 10 heißt dann natürlich 110, wird aber zum Zeichen von 1000, wenn noch ein horizontaler Deckstrich darüber kommt.

Wieder als Varianten der palmyrenischen Zeichen sind solche zu betrachten, welche in syrischen Handschriften des VI. und VII. S. aufgefunden worden sind[1]. Eine kleine Merkwürdigkeit bieten sie insofern dar, als hier eine Abweichung vom Gesetze der Größenfolge vorkommt. Während nämlich 1 durch einen Vertikalstrich, 2 durch zwei unten im Bogen zusammenhängende Vertikalstriche μ dargestellt wird, sollte 3 von rechts nach links so geschrieben werden, daß an die 2 eine 1 sich anfügte. Statt dessen steht rechts die 1 und links davon die 2, während im übrigen das oft genannte Gesetz befolgt wird.

Der Regel nach benutzten die Syrer allerdings die (S. 121) kurz erläuterte Buchstabenbezeichnung[2]. In einer freilich verhältnismäßig späten, jedenfalls so späten Zeit, daß von Anfängen einer Bezeichnungsweise unter keiner Bedingung die Rede sein kann, bedienten sie sich der 22 Buchstaben ihres Alphabetes, um der Reihe nach die neun Einer (1 bis 9), die neun Zehner (10 bis 90) und die vier ersten Hunderter (100 bis 400) zu bezeichnen. Die folgenden Hunderter wurden durch Juxtaposition gewonnen: $500 = 400 + 100$, $600 = 400 + 200$, $700 = 400 + 300$, $800 = 400 + 400$, $900 = 400 + 400 + 100$ oder durch die Buchstaben, welche vorher schon 50 bis 90 bezeichnet hatten und über die man zur Verzehnfachung ein Pünktchen setzte. Tausende schrieb man durch Einer mit unten rechts angefügtem Komma. Zehntausendfachen Wert erteilte den Einern und Zehnern ein kleiner darunter verlaufender Horizontalstrich. Vermillionfacht endlich wurde der Wert eines Buchstaben durch doppeltes Komma, d. h. also durch Vertausendfachung des schon Tausendfachen. Zur größeren Deutlichkeit pflegte man von diesen beiden, Komma das eine von links nach rechts, das andere von rechts nach links zu

---

[1] Auch diese Zeichen sind besprochen Math. Beitr. Kulturl. 256. [2] Merx, *Grammatica Syriaca* pag. 14 flgg.

neigen. Auch Brüche kommen bei dieser Bezeichnung vor und zwar, wie es scheint, Stammbrüche, welche ähnlich wie bei den Ägyptern nur durch die Zahl des Nenners geschrieben wurden, während ein von links nach rechts geneigtes akzentartiges Strichelchen darüber sie als Brüche kenntlich machte.

Der syrischen Buchstabenbezeichnung der Zahlen ist wieder die der Hebräer sehr nahe verwandt. Wann dieselbe entstand, ist eine noch ziemlich offene Frage. Auf hebräisch geprägten Münzen ist nicht früher als 137 v. Chr. alphabetische Bezeichnung der Zahlen nachweisbar[1]). Eine derartige Zahlendarstellung findet sich ebenso wenig unmittelbar in den Büchern des Alten Testamentes. Nur ihre Anwendung zur Gematria bezeugt ihr Vorhandensein, und wenn diese wirklich bis zum VII. Jahrhundert hinaufreicht (S. 44), so ist das hebräische Volk dasjenige, bei welchem die älteste Spur des Zahlenalphabetes vorkommt, während im entgegengesetzten Falle Griechen auf die Priorität die gerechtesten Ansprüche haben und man alsdann anzunehmen hätte, es sei von den Griechen wieder nach Osten die Erfindung zurückgekehrt. So sehr diese Annahme der landläufigen vielleicht aus dem Alter der biblischen Schriften entstandenen Meinung widerspricht, wird man sich doch zu ihr bequemen müssen[2]). An jene durch Gematria zu erklärende Stelle bei Sacharja zu glauben, haben wir schon, als wir sie im 1. Kapitel erwähnten, Bedenken getragen. Gesicherte Spuren von Gematria finden sich nicht vor Philo von Alexandrien im ersten nachchristlichen Jahrhunderte. Das Wort Gematria ist kaum anders zu erklären als durch Buchstabenverstellung aus γϱαμματεία, und damit wäre der griechische Ursprung des Namens wenigstens gesichert. Benutzung des griechischen Zahlenalphabetes auf Münzen von Ptolemaeus II Philadelphus geht zurück bis 266 v. Chr., ist also um 130 Jahre älter als das älteste hebräische Vorkommen. Diese Umstände vereinigt sprechen dafür, die Erfindung des eigentlichen Zahlenalphabetes den Griechen zuzuschreiben. In der Tat wird als Ort dieser Erfindung von manchen Milet angenommen und als deren Zeitpunkt schon das VIII. vorchristliche Jahrhundert, weil damals in Milet gewisse nachmals außer Übung gekommene Buchstaben, deren später nur die Zahlenschreibung sich bediente (z. B. das Bau) in regelmäßigem Gebrauch waren. Jedenfalls sind beide Schreibweisen von Zahlen, die alphabetische und die herodianische, in einer Inschrift von Halikarnaß vor-

[1]) Nach einer Mitteilung von Dr. Euting an Hankel, die dieser S. 34 seines Geschichtswerkes angeführt hat. [2]) Gow, A short history of greek mathematics. Cambridge 1884, pag. 43—48, hat die Beweisgründe zusammengestellt.

handen, welche um 450 entstanden sein soll, wenn man sich mit diesem Zeitpunkt als ältest gesichertem befriedigt erklärt[1]). Das hebräische Alphabet von 22 Buchstaben reichte gleich dem syrischen bis zur Bezeichnung von 400. Für die höheren Hunderte half man sich wieder durch Zusammensetzungen. Später kam man auf eine andere Aushilfe. Fünf Buchstaben des hebräischen Alphabetes, diejenigen nämlich, welche den Zahlenwerten 20, 40, 50, 80, 90 entsprechen, besitzen zweierlei Gestalt, je nachdem sie am Anfange beziehungsweise in der Mitte eines Wortes auftreten, oder an dessen Ende, eine Eigentümlichkeit, welche mehrere orientalische Schriftarten mit der hebräischen teilen und wovon auch die sogenannte gotische Schrift in ſ und s ein Beispiel aufweist. Die fünf Finalbuchstaben nun benutzte man, um die Hunderte von 500 bis 900 darzustellen und hatte nun die Möglichkeit der Darstellung sämtlicher Zahlen bis zu 999. Bei einer Zahl, bei 15, benutzte man nicht die naturgemäße Bezeichnung $10 + 5$, sondern schrieb statt ihrer $9 + 6$. Der Grund davon war, daß die Buchstaben für 10 und 5 יה den Anfang des heiligen Namen Jehova bilden, der nicht entweiht werden darf durch unnötiges Aussprechen oder Schreiben[2]). Um die Tausende zu bezeichnen kehrte man wieder zum Anfange des Alphabetes zurück, indem jeder Buchstabe durch zwei über ihn gesetzte Punkte den tausendfachen Wert erhielt, und so war es möglich alle Zahlen unterhalb einer Million zu schreiben, womit die Schreibart in Zeichen überhaupt abschließen mochte, wie es unseren früheren Bemerkungen (S. 23) entsprechend auch mit dem genauen Zahlenbegriff der Fall war. Daß die Hebräer von rechts nach links schrieben, daß abgesehen von dem Falle geheimnisvoll erscheinen wollender Gematria, welche als Zahlenschreiben im eigentlichen Sinne des Wortes kaum betrachtet werden kann, das Gesetz der Größenfolge eingehalten wurde, braucht kaum gesagt zu werden. Eben dieses Gesetz gestattete die vertausendfachenden Pünktchen oft wegzulassen, wenn die Reihenfolge der Zahlen die Bedeutung derselben schon außer Zweifel stellte. Der Buchstabe für 1 א z. B. konnte dem für 5 ה in regelmäßiger Zahlenbezeichnung nicht vorhergehen, wohl aber umgekehrt. Deshalb schrieb man 5001 nur durch ה̈א, dagegen 1005 durch א̈ה oder durch אה. Da ferner ם = 40, ף = 800 war, so konnte 5845 = הףמה geschrieben werden. Die letztere Zahl, die Anzahl der Verse im ganzen Gesetze, wurde von den Masoreten, deren Tätigkeit freilich

[1]) Handbuch der klassischen Altertums-Wissenschaft herausgeg. v. Iwan von Müller. Band I: Griech. Epigraphik von Wilhelm Larfeld S. 541—547 (München 1891). [2]) Ist in dieser Schreibart von 15 die Veranlassung zur Gematria bei Alexandrinischen Juden, oder nur das einfachste Beispiel derselben zu erkennen?

erst im VIII. S. n. Chr. abschloß, sogar חחמה geschrieben[1]), indem ח, das Zeichen für 8, einen höheren Rang als das nachfolgende מ, zugleich einen niedrigeren als das vorhergehende durch die Stellung selbst vertausendfachte ח besitzen mußte und daher nur 800 bedeuten konnte. Die Verwechslung von Zahlen mit Wörtern war in der hebräischen Schrift, die fast regelmäßig die Vokale wegließ und deren Ergänzung dem Leser übertrug, ungemein leicht. Sollte also eine Zahl als solche sofort erscheinen, so war ein Unterscheidungszeichen notwendig. Dasselbe bestand darin, daß man über den letzten Zahlbuchstaben zwei Häkchen machte, oder auch diese Häkchen zwischen dem letzten und vorletzten Zahlbuchstaben anbrachte. Bei vier- oder gar mehrstelligen Zahlen wurden die Häkchen öfter wiederholt.

Wir kehren nach diesen Einschaltungen nach Griechenland zurück, bei dieser Rückkehr beiläufig erwähnend, daß die Gematria, die symbolisierende Buchstabenverbindung zu Wörtern mit Zahlenwert, sich auch bei späteren Griechen einheimisch machte. Die Zahl 666 der Apokalypse z. B., welche, wie jetzt wohl kein Fachmann mehr bezweifelt, aus dem Hebräischen stammt und נְרוֹן קֵסַר (Nerun Kesar) bedeutet, wurde von Irenäus, dem berühmten Kirchenlehrer des II. S., als *Λατεινος* gelesen und erklärt.

Die Zahlenwerte der griechischen Buchstaben hier genauer zu erörtern, möchte so ziemlich allen unseren Lesern gegenüber überflüssig sein. Wir begnügen uns daran zu erinnern (S. 125), daß in dem zur Zahlenschreibung dienenden Alphabet altertümliche Buchstaben, die sogenannten Episemen, noch einen Platz einehmen, welche unter den Buchstaben der Griechen als solchen abhanden gekommen waren[2]). Die Buchstaben alpha bis sanpi genügten in ihrer Verbindung zur Darstellung der Zahlen 1 bis 999, wobei ein darüber befindlicher Horizontalstrich die Zahlen als solche kennzeichnete und der Verwechslung mit Wörtern vorbeugen sollte. Die Tausende schrieb man mittels der 9 Einheitsbuchstaben, α bis ϑ, denen man zur Linken einen in Kommagestalt geneigten Strich beifügte. Mitunter wurde, ähnlich wie der vertausendfachende Punkt der Hebräer, das den gleichen Zweck erfüllende Komma der Griechen unter gleichen Voraussetzungen weggelassen, nämlich wenn die Stellung vor einem Buchstaben, dem an und für sich ein höherer Zahlenwert eigentümlich war, die Notwendigkeit ergab um des Gesetzes der Größenfolge willen das betreffende Zahlzeichen tausendfach zu lesen. Allerdings ist auch bei den Griechen ein Abweichen von dem Gesetze der Größenfolge

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S. 494. [2]) Vgl. A. Kirchhoff, Studien zur Geschichte des griechischen Alphabets. 3. Aufl. Berlin 1877.

nachgewiesen worden[1]). Nicht bloß daß in Sizilien der Sprachgebrauch die kleinere Zahl der größeren vorausgehen ließ [z. B. τέσσαρα τετρακόσια ἑξακισχίλια πεντακισμύρια τάλαντα = 56404 Talente], daß bei asiatischen Griechen die gleiche Übung herrschte, daß auf Münzen von Seleucidenkönigen der Berliner und Londoner Sammlungen, deren Prägung innerhalb 210 und 144 v. Chr. Geburt fällt, die Jahreszahlen $\Gamma P = 103$, $A\Xi P = 161$, $B\Xi P = 162$, $\Theta\Xi P = 169$ vorkommen[2]), man hat sogar Inschriften gefunden, bei welchen Größenfolge nach beiden Richtungen miteinander wechselt[3]), z. B. ἔτους ζνφ ὑπερβερεταίου ιε = am 15. des Monats Hyperberetaion im seleucidischen Jahre 557. Zehntausend wurde als Myriade durch *Mυ.* oder durch *M.* bezeichnet. Bei Vielfachen von 10000 konnte der vervielfachende Koeffizient eine dreifache Stellung einnehmen, links vor, rechts nach oder über dem *M.* Im ersten Falle wurde *M.* auch wohl durch einen einfachen Punkt vertreten, welcher aber nicht weggelassen werden durfte, weil die bloße Stellung, wie wir erst bemerkt haben, nur vertausendfachte. Es bedeutete demnach βωλα stets 2831, β.ωλα dagegen 20831.

Man hat verschiedentlich die Behauptung aufzustellen versucht, den Griechen sei, und zwar in alter Zeit, ein Zahlzeichen für Nichts, mithin eine wirkliche Null zu eigen gewesen. Man hat zu diesem Zwecke auf astronomische Werke des Ptolemäus und des Theon von Alexandria, man hat auf eine Steininschrift der Akropolis zu Athen, man hat auf einen Palimpsest im Vatikan hingewiesen. Aber alle diese Hinweise sind durchaus nichtig; von einer Null ist an keiner dieser Stellen die Rede[4]).

Brüche kommen bei griechischen Schriftstellern, insbesondere bei Mathematikern, häufig vor. Die Bezeichnung erfolgt im allgemeinen so, daß man zuerst die Zähler hinschrieb und dieselben mit einem Akzente rechts oben versah, dann die Nenner, denen ein doppelter Akzent beigefügt wurde und die zweimal geschrieben wurden. Z. B. ιζ' κα'' κα'' $= \frac{17}{21}$. Hatte man es mit Stammbrüchen zu tun, so blieb der Zähler α' als selbstverständlich weg, und die einmalige Schreibung des Nenners genügte. Ohne weitere Bemerkung nebeneinander geschriebene Stammbrüche sollten durch Addition vereinigt

---

[1]) J. Woisin, De Graecorum notis numeralibus (Leipziger Doktordissertation in Kiel 1886) pag. 15—16. [2]) Briefliche Mitteilung des Herrn Adolf Richter in Riga. [3]) Corpus Inscriptionum Graecorum (ed. Boeckh) Vol. III. (Berlin 1853) No. 4516. Vgl. auch No. 4503, 4518, 4519. [4]) Math. Beitr. Kulturl. S. 121 flgg. Wichtige Ergänzungen zu unseren Angaben über den Palimpsest bei Hultsch, *Scriptores metrologici Graeci.* Leipzig 1864. Vorrede pag. V—VI.

werden. Z. B. $\delta'' = \frac{1}{4}$ und $\zeta''\ \varkappa\eta''\ \varrho\iota\beta''\ \sigma\varkappa\delta'' = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}$ $= \frac{43}{224}$. Zwei besondere Bezeichnungen sind bemerkenswert: $\frac{1}{2}$ oder ἥμισυ wurde nicht durch β'' sondern durch das altertümliche sigma c angedeutet und dieses vereinigt sich mit $\varsigma'' = \frac{1}{6}$ zu einem neuen dem omega ähnlichen Zeichen ω'' um $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ anzuschreiben[1]).

Die Frage, wie man dazu kam an Stelle einer anderen schon vorhandenen Bezeichnungsweise von Zahlen die neue alphabetische Methode einzuführen, verdient wohl gestellt zu werden und ist auch, wenngleich nicht häufig, gestellt worden[2]). So mächtig wirkt bei den meisten Geschichtsschreibern die Gewohnheit das geschichtlich nacheinander Auftretende als Fortschritt aufzufassen, daß man auch hier einem Fortschritte gegenüberzustehen wähnte, und die Einführung eines solchen bedarf keiner besonderen Erklärung. Statt eines Fortschrittes haben wir es aber hier mit einem entschiedenen Rückschritte zu tun, insbesondere was die Fortbildungsfähigkeit der Ziffernschrift betrifft. Vergleichen wir die älteren herodianischen Zahlzeichen mit den späteren, für welche wir schon wiederholt den Namen alphabetischer Zahlzeichen gebraucht haben, so erkennen wir bei letzteren zwei Übelstände, die den ersteren nicht anhaften. Es mußten jetzt mehr Zeichen und deren Wert dem Gedächtnisse anvertraut werden, es mußte auch das Rechnen eine viel angespanntere Gedächtnistätigkeit in Anspruch nehmen. Die Addition ΔΔΔ + ΔΔΔΔ = 𐅄ΔΔ (30 + 40 = 70) konnte mit der HHH + HHHH = 𐅅HH (300 + 400 = 700) in einen Gedächtnisakt zusammenschmelzen, sofern drei und vier Einheiten derselben Art zu fünf und zwei Einheiten gleicher Art sich vereinigten. Dagegen war mit λ + μ = ο noch keineswegs τ + υ = ψ sofort mitgegeben! Nur einen einzigen Vorzug bot die neue Schreibweise der alten gegenüber, der sich zeigt, wenn man die schriftliche Darstellung nach ihrer Raumausdehnung vergleicht. Man beachte z. B. 849, welches herodianisch 𐅅HHHΔΔΔΔ𐅃IIII, alphabetisch ωμθ aussieht. Jenes ist durchsichtiger, gewährt beim Rechnen die wichtigsten Vorteile; dieses ist unverhältnismäßig viel kürzer, und so werden wir auf diesem den Vermutungen allein preisgegebenen dunkeln Gebiete wohl kaum einen Fehlgriff tun, wenn wir die Meinung aussprechen, nicht Rechner,

[1]) Über Brüche vgl. Hultsch, l. c., pag. 173—175. [2]) Heinr. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I. Teil. Jenaer Inauguraldissertation 1876, S. 25.

sondern Schreiber haben die alte breite Zahlenbezeichnung um der neuen willen im Stich gelassen, und weil es in der großen Menge der Bevölkerung mehr Schreiber gab als Rechner, die zugleich auch Schreiber waren, hat die neue alphabetische Methode so rasch und allgemein sich Eingang verschafft.

Wir sind mit diesen Bemerkungen bereits über die Besprechung des Zahlenschreibens bei den Griechen hinausgegangen und zu deren Zahlenrechnen gelangt. Wieder begegnen uns hier die beiden Rechnungsverfahren, denen wir allgemein menschliche Verbreitung zuerkannt haben: das Fingerrechnen und das Rechnen auf einem Rechenbrette.

Spuren des ersteren sind mancherlei vorhanden[1]). Es mag ja zu weit gegangen sein für dasselbe auf eine Stelle des Herodot sich zu beziehen, wo einer an den Fingern die Monate abrechnet[2]). Auch daß in homerischer Sprache Rechnen *πεμπάζειν*, d. h. wörtlich „abfünfen“ heißt, mag von geringerer Tragweite erscheinen. Aber eine Stelle der Wespen des Aristophanes[3]) bezeugt, daß man Überschlagsrechnungen an den Fingern auszuführen pflegte. Wie die Griechen alter Zeit dabei verfuhren, ist nicht bekannt. Die Wahrscheinlichkeit spricht dafür, daß ähnliche Grundsätze der Fingerbedeutung gegolten haben mögen wie in späterer Zeit, aber eine Sicherheit liegt keineswegs vor. Wir wünschen daher nicht durch Vorgreifen den Anschein einer solchen Sicherheit hervorzurufen, und versparen uns die Darstellung spätgriechischer Fingerrechnung bis zum Schlusse dieses ganzen griechischen Abschnittes, wo eine erhaltene byzantinische Schrift über den Gegenstand uns nötigende Veranlassung geben wird darauf einzugehen.

Das Rechnen auf einem Rechenbrette in Griechenland bezeugt uns Herodot durch dieselbe Stelle[4]), deren wir uns zum Beweise des gleichen Verfahrens in Ägypten schon bedient haben (S. 88). Wir hoben dort bereits hervor, daß die Kolumnen des Brettes gegen den Rechner senkrecht gezogen sein mußten und werden dafür noch anderweitige Gründe weiter unten angeben. Die auf dem Rechenbrette Verwendung findenden Steinchen hießen *ψῆφοι*. Sie wurden, wie aus der Stelle in den Wespen des Aristophanes hervorgeht, auch in dessen Zeit zum genauen Rechnen benutzt, und die Verbreitung dieses Verfahrens wird ersichtlich aus dem Worte *ψηφίζειν*, mit Steinchen hantieren, welches allgemein für das Rechnen eintritt. Auch das Brett, auf welchem gerechnet wurde, bekam einen besonderen Namen *ἄβαξ*.

---

[1]) Stoy, l. c., S. 35 Anmerkg. 4, S. 44 Anmerkg. 3. [2]) Herodot VI, 63 und 65. [3]) Aristophanis Vespae 656. [4]) Herodot II, 36.

Allein gleich bei diesem Namen Abax beginnen die Streitfragen, welche sich mehr und mehr häufen, je weiter die Geschichte der Entwicklung des Rechenbrettes fortschreitet. Man hat nämlich das Wort ἄβαξ bald dem semitischen אבק Staub verglichen und Staubbrett übersetzt, bald hat man den Stamm βαϰ mit verneinendem α zu einem Worte vereinigt, dem die Bedeutung des Nichtgehenkönnens, des Fußlosseins innewohnt[1]). Die letztere Ableitung stützt sich vorwiegend auf die nicht in Zweifel zu stellende Anwendung des Wortes ἄβαξ und ähnlich klingender Wörter in Bedeutungen, welche an Staub in keiner Weise zu denken gestatten. So hieß eine Art von Würfelbrett, ein rundes Körbchen ohne Untergestell, eine runde Platte ἄβαξ und dergleichen mehr. Noch eine dritte Ableitung läßt ἄβαξ durch verneinendes α von βάζω (ich spreche) abstammen; es sei ein Rechnen, bei welchem nicht gesprochen wird[2]). Die erste Ableitung dagegen weiß nur einen Grund für sich anzugeben, der durch ein Spiel sprachlichen Zufalles sich sehr wohl erklären läßt: der griechische Abax als Rechenbrett war nämlich, wenigstens in einer Form, ein wirkliches Staubbrett[3]). Wir wissen dieses aus einer Stelle des Jamblichus, in welcher dieser späte Pythagoräer erzählt, daß der Gründer ihrer Schule die Beweise der Arithmetik wie der Geometrie auf dem Abax geführt habe, was nur dann verständlich ist, wenn auf dem Abax Zahlzeichen und Linien leicht gezeichnet, leicht verwischt werden konnten; wir wissen es deutlicher aus einer zweiten Stelle desselben Jamblichus, die uns ausdrücklich sagt, der Abax der Pythagoräer sei ein mit Staub bedecktes Brett gewesen[4]). Auch eine Stelle des Eustathius ist damit in Übereinstimmung, welche den Abax als den Philosophen, die Figuren auf denselben zeichneten, nützlich rühmt[5]). Das letztere Zeugnis gehört freilich erst dem Ende des XII. S. an, aber bei der berühmten Gelehrsamkeit des Bischofs von Thessalonike, der sie niederschrieb und dem sicherlich noch Quellen

---

[1]) Für die erste Ableitung Nesselmann, Algebra der Griechen S. 107, Anmerkg. 5 und Vincent in Liouville's *Journal des Mathématiques* IV, 275 Note mit Berufung auf Etienne Guichart, *Harmonie des langues*. Für die letztere Th. H. Martin, *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-age*. Rome 1864, pag. 34—35 mit zahlreichen Quellenangaben. [2]) E. Clive Bayley im Journal of the Royal Asiatic Society, new series, XIV, 369 (London 1882). [3]) Als Beispiel sprachlicher Zufälligkeiten erinnern wir an das englische *degree* und das arabische *daraga*. Beide bedeuten Grad (Winkeleinteilung), sind aber nicht entfernt verwandten Stammes trotz Gleichlautes und Bedeutungsgleichheit. [4]) Jamblichus, *De vita Pythagorica* cap. V, § 22 und desselben *Exhortatio ad philosophiam Symbol.* XXXIV. [5]) Eustathius in Odysseam zu Gesang I, vers. 107. Vgl. die römische Ausgabe dieses Kommentators pag. 1397 lin. 50.

zugänglich waren, die wir nicht mehr kennen, nehmen wir ebensowenig Anstand dasselbe zu verwerten, wie die oft angerufenen Zeugnisse späterer Lexikographen.

Sollte auf dem Abax gerechnet werden, so mußten, wie wir wissen, auf demselben Abteilungen gebildet werden, deren jede zwischen zwei Strichen verlief, oder durch einen einzelnen Strich sich darstellte. Die Abteilungen, Kolumnen nennt man sie gemeiniglich, und auch wir werden uns dieses Ausdruckes von jetzt an ausschließlich bedienen, waren gegen den Rechner senkrecht gezeichnet. Das geht nächst der Stelle bei Herodot, welche wir so deuteten, aus einem Vasengemälde hervor, das aus griechischer Vorzeit auf uns gekommen ist. Wir meinen diejenige Vase, welche den Altertumsfreunden als die große Dariusvase in Neapel wohl bekannt ist[1]). Auf dieser Vase ist ein Rechner gut erkennbar, der auf einer Tafel den Tribut zu buchen scheint, welcher dem Darius dargebracht wird. Die Tafel ist in zu dem Rechner senkrechte mit Überschriften versehene Kolumnen eingeteilt, und die Überschriften bestehen aus herodianischen Zahlzeichen. Eben dieses Vasengemälde ist es, welches einen zuverlässigen Beweis persischen, mithin mutmaßlich auch babylonischen Kolumnenrechnens uns liefern würde, wenn wir der Gewißheit uns hingeben dürften, daß der Künstler nicht aus freier Phantasie arbeitend griechische Gewohnheiten ins Ausland übertrug, ohne sich darum zu kümmern, ob er damit der Wahrheit widersprach.

Die Kolumnen hatten den Zweck, den zum Rechnen dienenden Marken einen in verschiedenen Kolumnen verschiedenen Stellungswert zu verleihen. Zwei Schriftsteller bezeugen uns dieses. Von Solon wird uns der Vergleich mitgeteilt, wer bei Tyrannen Ansehen besitze, sei wie der Stein bei der Rechnung; bald bedeute dieser mehr, bald weniger, und so achte der Tyrann jenen bald hoch, bald gar nicht[2]). Desselben Vergleiches bedient sich Polybios, der arkadische Geschichtsschreiber, welcher 203—121 lebte, und gebraucht dabei einen nicht unwichtigen Ausdruck. Er sagt nämlich, die Marken auf dem Abax gelten nach dem Willen des Rechnenden bald einen Chalkus, bald ein Talent[3]).

Die Bedeutsamkeit gerade dieser von Polybios genannten gegensätzlichen Werte erkennen wir in ihrer Übereinstimmung mit den Endwerten niedersten und höchsten Ranges, welche auf einem grie-

[1]) Vgl. eine Abhandlung von F. G. Welcker in dessen Alte Denkmäler V, 349 flgg. nebst Tafel XXIII. Der erste Abdruck in Gerhards Archäologischer Zeitung 1857, S. 49—55, Tafel 103. [2]) Diogenes Laertius I, 59. [3]) Polybios V, 26, 13.

chischen Denkmale, auf der Tafel von Salamis angegeben waren. Damit ist nämlich entweder eine annähernde Datierung jener ihrem Alter nach bis jetzt ganz unbestimmbaren Marmortafel, welche sich gegenwärtig im Nationalmuseum (Ethnikon) zu Athen befindet, ermöglicht oder man hat die für langdauernde Übung Zeugnis ablegende Erhaltung genau derselben Abteilungszahl vor sich. Die salaminische Tafel[1]) von Marmor 1,5 m lang, 0,75 m breit wurde zu Anfang des Jahres 1846 auf der Insel, deren Namen sie führt, aufgefunden. Sie war der Größe ihrer Abmessungen, dem Gewichte des Materials, der durch beide vereinigten Umstände erhöhten Unbeweglichkeit zufolge, sicherlich keine gewöhnliche Rechentafel. Wir haben vielmehr entweder an den Geschäftstisch eines öffentlichen Wechslers zu denken, deren es in Griechenland bereits gab, oder an eine Art von Spielbrett mit zur Verrechnung von Gewinn und Verlust vorgerichteten Kolumnen. Die Einrichtung war nämlich allem Anscheine nach die, daß jedem der beiden Spieler, beziehungsweise Rechner, fünf Hauptkolumnen, je zwischen zwei Striche eingeschlossen, und vier Nebenkolumnen zur Verfügung standen. Erstere dienten von links nach rechts im Werte abnehmend für Talente (6000 Drachmen), 1000, 100, 10 und 1 Drachmen, letztere für die Bruchteile der Drachmen Obolus $\left(\frac{1}{6}\text{ Drachme}\right)$, halber Obolus, viertel Obolus und achtel Obolus oder Chalkus[2]). Jede der Hauptkolumnen war durch einen durch alle Abteilungen gemeinschaftlich durchlaufenden Querstrich in zwei Hälften geteilt, deren eine, sei es die obere, sei es die untere, den eingelegten Marken den fünffachen Wert gab wie die anderen. Es ist dies ein tatsächlich vorhandenes Beispiel dessen, was wir (S. 42) bei den Babyloniern vermutungsweise annahmen, um die Entstehung des Wortes Ner uns zu verdeutlichen. Wir dürfen zugleich hervorheben, daß die 5 Hauptkolumnen ihrer Anzahl nach mit den fünf einfachen Grundzahlwörtern der Griechen von der Monas bis zur Myrias übereinstimmen, dürfen zugleich an das früher über Beschränkung volkstümlicher Zahlenbegriffe Gesagte erinnern. Daß unsere in allen wesentlichen Punkten von Letronne herstammende Erklärung der salaminischen Tafel richtig sein muß, beweisen insbesondere die auf der Tafel befindlichen selbst 13 mm hohen Zahlzeichen. Sie sind herodianische Zeichen, und es ist eben so fein

---

[1]) Math Beitr. Kulturl. S. 132 und 136 flgg. die genaueren Quellenangaben. Vgl. ferner A. Nagl, Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus in Abhndlgen. z. Gesch. d. Math. IX, 337—357. Kubitschek, Die salaminische Rechentafel in Numismatische Zeitschrift (Wien 1900) XXXI, 393—398. A. Nagl, Der griechische Abakus in Numism. Zeitschr. (Wien 1903) XXXV, 131—143. [2]) Der attische Obolus hatte 8 Chalkus. Vgl. Hultsch, Metrologie (2. Aufl.) S. 133.

als richtig hervorgehoben worden, es sei kein Zufall, wenn diese Bezeichnung, welche neben den einzelnen Grundzahlen auch deren Fünffache kürzer zu schreiben gestatte, auf einem nach demselben Gedanken abgeteilten Rechentische sich finde[1]). Ein Bruchstück einer der salaminischen vielleicht ähnlichen Tafel ist dann später (1886) auch in Akarnanien aufgefunden worden[2]).

Dürfen wir vielleicht den Rückschluß ziehen, das Rechenbrett ähnlicher Art müsse bei den Griechen mindestens so alt wie jene Zeichen gewesen sein? Dürfen wir das in einer Quelle berichtete Vorkommen herodianischer Zeichen in solonischer Zeit mit dem eben angeführten Ausspruche Solons, der für das Vorhandensein eines Rechenbrettes zwingend wäre, wenn er selbst als beglaubigt betrachtet werden könnte, in Verbindung bringen? Dürfen wir beide als gegenseitige Stützen betrachten und somit um 600 ein schon ziemlich ausgebildetes Rechnen auf dem Rechenbrett in Griechenland annehmen?

Wir wollen uns nicht soweit in Vermutungen einlassen, daß wir alle diese Möglichkeiten als Wahrheiten behaupteten. Nur eines sei bemerkt, daß auf dem Sandbrette sehr leicht mittels eines Stiftes Kolumnen bildende Linien gezogen werden konnten, daß somit durchaus kein Grund vorliegt einen Zweifel zu hegen, ob gleichzeitig mit der Herstellung der salaminischen Tafel und ähnlicher Tische auch die pythagoräische Benutzung des Sandbrettes zum Rechnen in Übung gewesen sei. Das Rechnen selbst beschränkte sich anfangs gewiß auf die einfachsten Grundverfahren des Zusammenzählens und Abziehens. Ein mathematisches Rechnen kam erst in Frage, als eine wirkliche Mathematik in Griechenland sich gebildet hatte, und wird erst in jener Zeit von uns behandelt werden dürfen.

Das mathematische Denken war in Griechenland vorzugsweise ein geometrisches. Der Geometrie gehören auch die Anfänge der Mathematik an, zu welchen wir uns jetzt wenden.

5. Kapitel.

Thales und die älteste griechische Geometrie.

Ein gelehrter Philosoph des V. S. Proklus Diadochus hat uns ein ungemein wertvolles Bruchstück eines älteren Schriftstellers aufbewahrt, welches uns ein Bild der ältesten griechischen Mathematik

[1]) Stoy, l. c., S. 26. [2]) Woisin, De Graecorum notis numeralibus pag. 4 mit Berufung auf Bulletin de Correspondence Hellénique, année X (1886) pag. 179.

in Ionien, in Unteritalien und in Athen den Umrissen nach erkennen läßt. Es stammt nach Proklus' Aussage von denen her, „die die Geschichte geschrieben haben", und man ist allgemein darin einig hier ein Fragment des Eudemus, oder wenigstens einen Auszug aus dessen historisch-geometrischen Schriften zu erkennen[1]). Wir werden dasselbe häufig zu nennen haben und ihm zu diesem Zwecke den seinem Inhalte wohl am meisten entsprechenden Namen des alten Mathematikerverzeichnisses beilegen. Chronologisch teilt es uns nämlich nach kurzer Einleitung die Namen derjenigen Männer mit, die nach der Meinung des Verfassers die Entwicklung der Mathematik vorzugsweise gefördert haben. Chronologisch, wie wir sie brauchen, werden wir die einzelnen Sätze abdrucken. Sie bilden gewissermaßen die Überschrift einzelner Paragraphen, in welche wir unterzubringen haben werden, was in bezug auf die einzelnen Persönlichkeiten aus anderen Quellen bekannt geworden ist. Die einleitenden Worte lauten folgendermaßen:

„Da es nun notwendig ist, auch die Anfänge der Künste und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu betrachten, so berichten wir, daß zuerst von den Ägyptern der Angabe der meisten zufolge die Geometrie erfunden ward, welche ihren Ursprung aus der Vermessung der Ländereien nahm. Denn letztere war ihnen nötig wegen der Überschwemmung des Nil, der die einem jeden zugehörigen Grenzen verwischte. Es hat aber nichts Wunderbares, daß die Erfindung dieser sowie der anderen Wissenschaften vom Bedürfnis ausgegangen ist, da doch alles im Entstehen Begriffene vom Unvollkommenen zum Vollkommenen vorwärtsschreitet. Es findet von der sinnlichen Wahrnehmung zur denkenden Betrachtung, von dieser zur vernünftigen Erkenntnis ein geziemender Übergang statt. Sowie nun bei den Phönikiern des Handels und des Verkehrs halber eine genaue Kenntnis der Zahlen ihren Anfang nahm, so ward bei den Ägyptern aus dem erwähnten Grunde die Geometrie erfunden."

Wir begnügen uns unter Abdruck dieser Sätze darauf aufmerksam zu machen, daß hier über die Erfindung der Geometrie dasselbe behauptet wird, was wir früher (S. 102—103) nach anderen Quellen als

[1]) Diese Stelle ist abgedruckt in *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii* (ed. Friedlein). Leipzig 1873, pag. 64 lin. 16—68 lin. 6. Der Urtext mit gegenüberstehender deutscher Übersetzung bei Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870, S. 27—30. Wir zitieren dieses Werk künftig kurz als Bretschneider. Wir bedienen uns der Hauptsache nach der dort mitgeteilten Übersetzung, von der wir nur in wenigen Punkten, wo wir B's Auffassung nicht teilen können, uns entfernen.

die wenigstens in bezug auf den ägyptischen Ursprung wohlbegründete Meinung des griechischen Altertums mitgeteilt haben. Die Geometrie kam aus Ägypten nach Griechenland. Wie und durch wen, darüber belehrt uns das Mathematikerverzeichnis, wenn es fortfährt:

„Thales, der nach Ägypten ging, brachte zuerst diese Wissenschaft nach Hellas hinüber und vieles entdeckte er selbst, von vielem aber überlieferte er die Anfänge seinem Nachfolger; das eine machte er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer."

Thales von Milet[1]), Sohn des Examios und der Kleobuline, aus einem ursprünglich phönikischen Geschlechte stammend, wurde um das 1. Jahr der 39. Olympiade[2]), also um 624, geboren und lebte noch im 1. Jahre der 58. Olympiade, d. h. 548. Er wurde also über 76 Jahre alt, eine Berechnung, welche in vollem Einklang mit anderen Angaben ist, die ohne genaue Jahrgänge festzustellen ihn ein hohes Alter erreichen lassen. Eine ganze Menge von mehr unterhaltenden als wichtigen Geschichten knüpfen sich an seinen Namen. Aus denselben scheint hervorzugehen, daß Thales Kaufmann war, bald einen Salzhandel trieb, bald in Ölgeschäfte sich einließ, und daß er vermutlich auf diese Weise nach Ägypten kam. Einen ägyptischen Aufenthalt bezeugt ferner die Bemerkung, niemand sei dem Thales Lehrer gewesen, nur während seines Verweilens in Ägypten habe er mit den Priestern verkehrt[3]). Ein drittes Zeugnis ist das der Pamphile, einer Geschichtsschreiberin zur Zeit Neros, welche weiß, daß Thales in Ägypten Geometrie erlernte[4]). Die Belege könnten noch weiter bis zu fast beliebiger Anzahl vermehrt werden, so daß an der Tatsache, Thales sei in Ägypten gewesen, und dort mit Geometrie bekannt geworden, nicht wohl zu zweifeln ist[5]), wenn auch zugegeben werden

[1]) Bretschneider S. 35—55. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889) pag. 7—17. Eine Monographie von Decker, *De Thalete Milesio*, Halle 1865, ist uns nur dem Titel nach bekannt. Hauptquelle ist Diogenes Laertius. Die Familie des Thales I, 1 nach Herodot, Duris und Demokrit; seine Lebenszeit I, 10 nach Apollodor und Sosikrates und I, 3, wo bezeugt ist, daß Thales beim Ausbruche des Vernichtungskampfes zwischen Krösus und Kyrus (548) noch lebte. [2]) Vgl. Diels im Rheinischen Museum für Philologie, Neue Folge XXXI, 16 (1876). [3]) Diogenes Laertius I, 27. [4]) Diogenes Laertius I, 24. [5]) Eine vortreffliche Zusammenstellung der Beweisstellen bei Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung I, 169, Anmerkung 1 (3. Auflage, Leipzig 1869). Wenn in diesem Werke — wir werden es künftig nur als Zeller I zitieren — dessen scharfe, mitunter vielleicht allzu skeptische Kritik mit Recht anerkannt ist, aus allen diesen Stellen die Überzeugung gewonnen wird, der ägyptische Aufenthalt des Thales sei möglich, sogar wahrscheinlich, aber allerdings nicht vollständig erwiesen, so dürfen wir diesen Ausspruch für unsere Meinung deuten.

muß, daß keines der Zeugnisse älter als das Mathematikerverzeichnis zu sein scheint, und dieses eine höher liegende Quelle außer für eine einzige Angabe überhaupt nicht angibt. Nach seiner Heimat Milet kehrte Thales in vorgeschrittenen Jahren zurück. „Er befaßte sich erst später und gegen das Greisenalter hin mit Naturkunde, beobachtete den Himmel, musterte die Sterne und sagte öffentlich allen Miletern voraus, daß am Tage Nacht eintreten, die Sonne sich verbergen und der Mond sich davor legen werde, so daß ihr Glanz und ihre Lichtstrahlen aufgefangen werden würden.“ So der wörtliche Bericht eines Schriftstellers, welcher in seiner Einfachheit sehr glaubwürdig erscheint[1]). Offenbar ist in ihm von derselben Sonnenfinsternis die Rede, von der neben anderen auch Herodot weiß, daß Thales sie den Ioniern angesagt hatte mit Vorausbestimmung des Jahres, in welchem die Umwandlung von Tag in Nacht erfolgen sollte[2]). Nur im Vorbeigehen bemerken wir, auf die Aussage eines unverwerfbaren Fachgelehrten gestützt[3]), daß in so weiten Grenzen wie die eines Jahres die Verkündigung einer Sonnenfinsternis unter allen Umständen möglich war. Trat nun gar diese Finsternis zur Zeit einer Schlacht zwischen Medern und Lydern — wie man jetzt ziemlich allgemein annimmt am 28. Mai 585[4]) — ein und erhielt dadurch eine gewisse erhöhte historische Bedeutung, so begreift man, wie damit zugleich der Ruhm des Verkündigers unter seinen Landsleuten steigen mußte. Um so glaublicher wird der von der Erzählung der Sonnenfinsternisvoraussagung unabhängige Bericht, Thales habe unter dem Archontat des Damasias (zwischen 585 und 583) den Beinamen des „Weisen“ erhalten[5]). Mit ihm zugleich erhielten denselben Beinamen bekanntlich noch 6 andere Männer, die uns aber insgesamt hier gleichgültig sein können, weil nur eine politische Bedeutung der 7 Männer, eine Staatsweisheit, durch jene ehrende Bezeichnung anerkannt wurde, worin wir rückwärts eine Bestätigung dafür finden können, daß die Sonnenfinsternis von 585 und deren Verkündigung erst nachträglich zur Bedeutung wuchs, als die leichtgläubige Bevölkerung in ihr eine Vorbedeutung erkennen mochte. Wir übergehen Einmengungen in das Staatsleben Milets, welche von Thales berichtet werden. Wir übergehen die ihm zugeschriebenen Ansichten über das Weltall und über vorzugsweise astronomische Dinge. Es muß uns genügen, Thales als

---

[1]) Themistios Orat. XXVI, pag. 317. [2]) Herodot I, 74. [3]) Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877, S. 10. [4]) Vgl. G. Hofmann, Die Sonnenfinsterniss des Thales vom 28. Mai 585 v. Chr. (Triest 1870). Gelzer im Rheinischen Museum für Philologie, Neue Folge XXX, 264 (1875). Ed. Mahler in Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch. 4. III. 1886. Mathem.-naturw. Klasse, II. Abtlg., Bd. XCIII, S. 455—469. [5]) Diogenes Laertius I, 1.

der Zeit nach ersten ionischen Naturphilosophen zu kennzeichnen. Wir gelangen zu den mathematischen Dingen, mit welchen der Name des Thales in Verbindung gebracht wird.

Proklus nennt Thales, abgesehen von jener dem Mathematikerverzeichnisse angehörenden Stelle, viermal[1]). Dem alten Thales gebührt, so lautet die erste Stelle, wie für die Erfindung so vieles anderen, so auch für die dieses Theorems Dank; er soll nämlich zuerst gewußt und gesagt haben, daß die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich seien, die gleichen Winkel nach altertümlicher Ausdrucksweise als ähnliche benennend.

Die zweite Stelle besagt: Dieser Satz lehrt, daß, wenn zwei Gerade sich schneiden, die am Scheitel liegenden Winkel gleich sind. Erfunden ist dieses Theorem, wie Eudemus angibt, zuerst von Thales. Eines wissenschaftlichen Beweises aber achtete der Verfasser der Elemente (Euklid) es wert.

Zum dritten sagt Proklus bei Erörterung des Bestimmtseins eines Dreiecks durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel: Eudemus führt in seiner Geschichte der Geometrie diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art, auf welche er die Entfernung der Schiffe auf dem Meere gefunden haben soll, sagt er, bedürfe er dieses Theorems ganz notwendig.

Die vierte Erwähnung ist die Angabe: daß die Kreisfläche von dem Durchmesser halbiert wird, soll zuerst jener Thales bewiesen haben.

Zu diesen vier Erwähnungen bei einem und demselben mathematischen Schriftsteller kommen noch zwei andere. Pamphile erzählt, daß als Thales bei den Ägyptern Geometrie erlernte, er zuerst dem Kreise das rechtwinklige Dreieck eingeschrieben und deshalb einen Stier geopfert habe[2]). Endlich ist es die sogenannte Schattenmessung, welche auf Thales zurückgeführt zu werden pflegt. Hieronymus von Rhodos, ein Schüler des Aristoteles, erzählt, Thales habe die Pyramiden mittels des Schattens gemessen, indem er zur Zeit, wenn der unsrige mit uns von gleicher Größe ist, beobachtete[3]). Entsprechend berichtet auch Plinius: das Höhenmaß der Pyramiden und aller ähnlichen Körper zu gewinnen erfand Thales von Milet, indem er den Schatten maß zur Stunde, wo er dem Körper gleich ist[4]). Etwas darüber hinausgehend ist die Erzählung des Plutarch, der in seinem Gastmahle Thales mit anderen über den König Amasis von

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 250, 299, 352, 157. [2]) Diogenes Laertius I, 24—25. [3]) Diogenes Laertius I, 27. [4]) Plinius, *Historia naturalis* XXXVI, 12, 17.

Ägypten sich unterhalten läßt. Niloxenus äußert sich bei dieser Gelegenheit: Obschon er auch um anderer Dinge willen Dich bewundert, so schätzt er doch über alles die Messung der Pyramiden, daß Du nämlich ohne alle Mühe und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, sondern indem Du nur den Stock in den Endpunkt des Schatten stellst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigest, daß der eine Schatten zum andern dasselbe Verhältnis hat wie die Pyramide zum Stock[1]).

Aus diesen der Zahl und der unmittelbaren Bedeutung nach geringfügigen Angaben ein vollständiges Bild von dem, was Thales aus Ägypten mitbrachte, von dem, was er selbst dazu erfunden hat, zu gewinnen ist schwer, und war doppelt schwer, solange die ägyptische Mathematik in tiefes Dunkel gehüllt war. So kam es, daß dem einen bewiesen schien, die Ägypter hätten von Winkeln nichts gewußt, und Thales sei der Erste gewesen, der eine Winkelgeometrie ersann: daß ein zweiter ein Verdienst des Thales darin fand, daß er eine Liniengeometrie in dem Sinne schuf, daß er das Verhältnis der Linien einer Figur ins Auge faßte, während den Ägyptern nur die praktische Geometrie der Flächenausmessung bekannt gewesen sei; daß ein dritter nicht Anstand nahm Thales und die älteren Griechen überhaupt fast jeden Erfinderrechtes für verlustig zu erklären und ihr ganzes geometrisches Wissen für Ägypten zurückzufordern; daß ein vierter an die entgegengesetzte Grenze streifend es für gleichgültig hielt, ob Thales überhaupt Ägypten besucht habe oder nicht, weil er Geometrisches in nennenswerter Menge von dort nicht habe mitbringen können. Diese eine weite Kluft zwischen den Streitenden offen lassenden Gegensätze, welche wir hier erwähnen, welche aber nicht bei den Untersuchungen über Thales allein sich zeigten, sondern überall, wo es um durch bestimmte Persönlichkeiten vermittelte Übertragung orientalischer Wissenschaft nach Griechenland sich handelte, müssen gegenwärtig sich einander wesentlich nähern, nachdem das Übungsbuch des Ahmes uns zugänglich gemacht ist. Man wird nicht mehr leugnen wollen, daß vieles von dem, was die Anfänge der griechischen Geometrie bildet, ägyptischen Lehren verdankt sein kann; man wird von der anderen Seite des gewaltigen Unterschiedes sich bewußt bleiben, der zwischen ägyptischem und griechischem Denken auch bei Gleichheit des Gegenstandes des Denkens obwaltete.

Wird z. B. irgendwer, der an das Seqt genannte Verhältnis, an das Ähnlichmachen der Ägypter (S. 99) sich erinnert, der dieses selbe

[1]) Plutarch Vol. 2, III, pag. 174 ed. Didot.

Verhältnis mit Notwendigkeit in gleicher Größe entstehen sieht. ob man von dem einen Endpunkte der Grundfläche, ob von dem entgegengesetzten aus die betreffenden Messungen vornimmt, wird ein solcher zweifeln können, daß die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks den Schülern des Ahmes bekannt sein konnte, wenn nicht bekannt sein mußte? Thales wußte und sagte es zuerst, d. h. er zuerst sagte es seinen Landsleuten, und mutet uns die altertümliche Ausdrucksweise „ähnliche Winkel“ statt gleicher Winkel, deren er sich dabei bediente, nicht an wie eine Übersetzung von Seqt?

Wir fragen weiter: Kann nach Betrachtung der vielfach geteilten Kreise auf ägyptischen Wandgemälden ein Zweifel daran obwalten, daß auch die Wahrheit, daß der Durchmesser die Kreisfläche zu Hälften teile, in Ägypten gelernt werden konnte? Ja sogar einen Beweis dieser Wahrheit, der, wie uns gerühmt wird, von Thales zuerst geführt worden sei, möchten wir den Ägyptern nicht gerade absprechen, wenn auch die Art des Beweises dort eine andere gewesen sein mag als in dem Munde von Thales.

Wir stehen hier an dem Punkte, von welchem aus die Verschiedenheit ägyptischen und griechischen Denkens, welche wir oben betonten, uns deutlicher bemerkbar wird. Das Mathematikerverzeichnis sagt uns von Thales, das eine habe er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer gemacht. Es will uns scheinen, als sei damit gerade die griechische und zugleich ägyptisierende Form seiner Leistungen gekennzeichnet. Als Grieche hat er verallgemeinert, als Schüler Ägyptens sinnlich erfaßt, was er dann den Griechen wieder faßbar gemacht hat. Es war eine griechische Stammeseigentümlichkeit den Dingen auf den Grund zu gehen, vom praktischen Bedürfnisse zu spekulativen Erörterungen zu gelangen. Nicht so den Ägyptern. Wir glauben zwar nicht, daß die Ägypter jegliche Theorie entbehrten, wir haben schon früher (S. 113) das Gegenteil dieser Annahme ausgesprochen; aber wir haben dort auch gesagt, wie wir ägyptische Theorie uns denken: als wesentlich induktive, während die Geometrie der Griechen deduktiver Natur ist. Der Ägypter könnte einen Beweis des Satzes, daß der Durchmesser den Kreis halbiere durch die bloße Figur, oder vielleicht durch Berechnung der Flächen beider Halbkreise nach derselben möglicherweise unverstandenen Vorschrift als vollständig geführt erachtet haben. Der Grieche würde sich allenfalls mit der Figur begnügt haben, wenn auch der Beweis des Thales uns in keiner Andeutung bekannt ist. So zeigt sich, auch in den Beweisen, eine Abhängigkeit der griechischen Geometrie von der ägyptischen, die sich lange erhielt. Die griechische Deduktion war bei ihrem Beginne selbst induktiv. Sie

war gewohnt von dem Vielen zum Einen, von der Unterscheidung zahlreicher Fälle zum allgemein gültigen Satze überzugehen. Sie blieb deduktiv, sofern sie nicht unterließ jeden Einzelfall aus sich heraus zu gestalten, ihn nicht der Erfahrung, der sinnlichen Anschauung zu entnehmen.

Fassen wir mit Bezug auf Thales zusammen, was wir hier in allgemeinerer Erörterung, deren nur persönliche Gültigkeit wir behaupten, die also Andersmeinenden eine eigentliche Beweiskraft kaum besitzen dürften, zu begründen suchten, so gelangen wir dahin, die wissenschaftliche Bedeutung des Thales nicht in der Anzahl der Sätze zu finden, welche er selbst entdeckte, sondern in dem Anstoß zu geometrischen Studien, den er gab, nebst den Anfängen deduktiver Behandlung, welche er lehrte. Daß wir übrigens von so wenigen Sätzen nur wissen, deren Urheberschaft in mehr oder weniger bestimmter Weise auf Thales zurückgeführt wird, kann auf zwei verschiedenen Umständeu beruhen. Einmal ist nur über das erste Buch der euklidischen Elemente ein fortlaufender Kommentar des Proklus auf uns gekommen. Wir können also nur erwarten durch denselben über die Urheberschaft von Sätzen jenes ersten Buches mit Bestimmtheit aufgeklärt zu werden, während Thales gar wohl Sätze der folgenden Bücher gekannt haben könnte, ohne daß wir berechtigt wären Proklus das Stillschweigen darüber in dem auf uns gelangten Kommentare zu verübeln. Zweitens aber mag in der Tat das, was Thales in Ägypten sich anzueignen imstande war, nicht alles umfaßt haben, was die Ägypter selbst wußten, er, dem, wie die Berichte uns sagten[1], niemand Lehrer war, bevor er mit den ägyptischen Priestern verkehrte, der sich erst später und gegen das Greisenalter hin mit Naturkunde befaßte.

Man hat aus den Sätzen, welche als thaletisch überliefert sind, Schlußfolgerungen auf solche, die Thales bekannt gewesen sein müssen, gezogen. Der letzte Forscher auf diesem Gebiete[2]) insbesondere hat mit großem Aufwande von Scharfsinn entwickelt, die Summe der Dreieckswinkel müsse dem Thales bekannt gewesen sein. Wenn nämlich Thales den Satz von den Winkeln eines gleichschenkligen Dreiecks und den vom rechtwinkligen Dreiecke im Kreise kannte, wenn ihm, wie dieser selbe Satz und der von der Halbierung des Kreises durch den Durchmesser bezeugen, die Definition des Kreises bekannt war, so mußte ihm, meint Allman, etwa folgende Betrachtung gelingen. Er werde von dem Kreismittelpunkt O aus (Fig. 16) eine

[1]) Diogenes Laertius I, 27 und Themistios, Orat. XXVI, pag. 317.
[2]) G. J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid* (1889) pag. 11.

Linie OC nach der Spitze des rechten Winkels im Halbkreise gezogen haben. Aus den beiden gleichschenkligen Dreiecken ACO und BCO sei die Gleichheit der Winkel $CAO = ACO$ und $CBO = BCO$, mithin auch der Summe $CAO + CBO = ACO + BCO = ACB$ hervorgegangen; er habe aber gewußt, daß ACB ein rechter Winkel sei und demgemäß die Summe der Winkel bei A, bei B und bei C als zwei Rechten gleich gefunden. Wir haben dem Scharfsinne des Wiederherstellers unsere Anerkennung gezollt, wir sind auch geneigt von seinen Schlüssen einige uns anzueignen, allein wir möchten die umgekehrte Reihenfolge für richtiger halten. Wir nehmen an und wollen nachher begründen, auf welche Überlieferung hin wir zu dieser Annahme uns bekennen, Thales habe gewußt, daß die Dreieckswinkel zusammen zwei Rechte betragen, er habe auch gewußt, daß die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, dann mag ihn höchst wahrscheinlich eine Zeichnung wie Figur 16 zur Erkenntnis geführt haben, daß der Winkel bei C so groß sein müsse als die Summe der Winkel bei A und B, mithin so groß als die halbe Winkelsumme des Dreiecks ABC, oder gleich einem rechten Winkel.

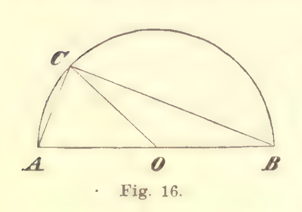


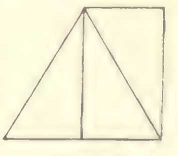
Fig. 16.

Unsere Beweggründe sind folgende. An und für sich sind beide Sätze, der von der Winkelsumme des Dreiecks, der vom rechten Winkel im Halbkreise, schon ziemlich künstlicher Natur, nicht auf den ersten Anblick einleuchtend. Der eine wie der andere bedurfte einer wirklichen Entdeckung und eines Beweises; wenn also eine gegenseitige Abhängigkeit beider Sätze stattzufinden scheint, so ist es von vornherein ebensogut möglich dem einen als dem andern das höhere Alter zuzuschreiben. Nun findet sich aber ein Beweis des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise bei Euklid Buch III Satz 31 vor, welcher dem von uns vermuteten sehr ähnlich ist. Eine Zusammenstellung wie die euklidischen Elemente ist aber, so genial, so gedankenreich ihr Verfasser sein mag, durch ihren Inhalt selbst darauf hingewiesen wesentlich kompilatorisch zu sein, und so ist es gar nicht unmöglich, daß auch bei diesem Satze Euklid der altertümlichen Beweisführung treu blieb, ohne daß wir davon unterrichtet sind, weil ein alter Kommentar zum III. Buche nicht vorhanden ist. Dazu kommt als weitere Tatsache, daß wir über die älteste Beweisführung des Satzes von der Winkelsumme im Dreiecke Bescheid wissen, und daß diese auch nicht entfernt den Schlußfolgerungen gleicht, welche nach Allmans Meinung Thales gezogen haben soll.

Geminus, ein Mathematiker des letzten Jahrhunderts vor Christus,

erzählt in einem bei einem noch späteren Schriftsteller, Eutokius von Askalon, erhaltenen Bruchstücke, daß „von den Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten besonders bewiesen ward, zuerst für das gleichseitige, sodann für das gleichschenklige, und endlich für das ungleichseitige, während die Späteren das allgemeine Theorem bewiesen: die drei Innenwinkel jedes Dreiecks sind zweien Rechten gleich"[1]).

Wir werden nun bald sehen, daß die Späteren, von welchen Geminus redet, nicht gar lange nach Thales gelebt haben, daß also die Alten im Gegensatze zu jenen auf die thaletische Zeit, wenn nicht gar auf die ägyptischen Lehrer des Thales gedeutet werden müssen. Die Andeutungen des Geminus über diesen ältesten Beweis haben dem Scharfblicke Hankels die Möglichkeit gegeben, den älteren Beweis wiederherzustellen[2]). Seine Gedanken darüber sind, nur wenig abgeändert, folgende. Den Figuren gemäß, welche wir bei den Ägyptern fanden, war dort, vielleicht aus asiatischer Quelle, seit dem XVII. S. v. Chr. die Zerlegung der Kreisfläche in sechs gleiche Ausschnitte bekannt. An diese Figur dachten wir oben, als wir die Kenntnis des Satzes, daß ein Durchmesser den Kreis halbiere, für die Ägypter in Anspruch nahmen und die Figur selbst als Beweis dienen ließen. Verband man die Endpunkte der Halbmesser miteinander, so entstand das regelmäßige Sechseck, oder vielmehr sechs um den Mittelpunkt geordnete gleichseitige Dreiecke, die den ebenen Raum um jenen Mittelpunkt herum vollständig ausfüllten. Drei dieser Winkel bildeten vereinigt einen gestreckten Winkel, wie der Augenschein lehrte, und vertraute man weiter dem Augenscheine für die Tatsache, daß jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks dem anderen gleich war, so hatte man jetzt den ersten Fall des Berichtes von Geminus erledigt: die Winkel des gleichseitigen Dreiecks betrugen zusammen zwei Rechte. Demnächst mochte man (Fig. 17) die Zerlegbarkeit des gleichschenkligen Dreiecks in zwei Hälften, welche zu einem Rechtecke sich ergänzen, erkennen und wieder lehrte der Augenschein, daß bei einem derartigen Vereinigen der zwei Dreieckshälften vier rechte Winkel erschienen, von welchen zwei aus den ursprünglichen Winkeln des gleichschenkligen Dreiecks, von denen nur einer in Gestalt zweier Hälften auftrat, sich zusammensetzten. Jetzt fehlte nur noch der dritte und letzte Schritt. Ein beliebiges Dreieck wurde (Fig. 18) als Summe der Hälften zweier Rechtecke gezeichnet, so


Fig. 17.

---

[1]) Apollonii Pergaei Conica (ed. Halley), Oxford 1710, pag. 9.
[2]) Hankel S. 95—96.

erschienen drei den ursprünglichen Dreieckswinkeln gleiche Winkel an der Spitze des Dreiecks zu einem gestreckten Winkel vereinigt.

Eine Spur dieses ältesten Beweisverfahrens, wie es Geminus uns schildert, hat sich auf griechischem Boden bei einem sehr späten Praktiker erhalten. Ein anonymer Feldmesser des X. S., der nachweislich sein Buch aus ungefähr 1000 Jahre alten Musterwerken zusammenschrieb, sagt ausdrücklich: Daß aber jedes durch Einbildung oder Wahrnehmung zugängliche Dreieck die drei Winkel in der Größe von zwei Rechten besitzt, ist daher offenbar, daß jedes Viereck seine Winkel vier Rechten gleich besitzt und durch die Diagonale in zwei Dreiecke mit sechs Winkeln geschieden wird[1].

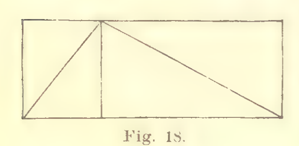


Fig. 18.

Eigentliche Beweisführung wird man solche Zeichnungen gewiß nicht nennen. Sie bewirkten nichts, als daß der Augenschein induktiv wirkend eine Überzeugung herbeiführte. War die Überzeugung gebildet, so begnügte sich damit die ältere Zeit, die spätere suchte nach weiterer Begründung. Noch für andere Sätze, welche in Verbindung mit dem Namen des Thales auftreten, möchten wir den Augenschein als damals einzigen Beweis auffassen. Der Augenschein wird dem Satze von den Winkeln an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks, wird dem von den Scheitelwinkeln den Ursprung gegeben haben; und eine Unterstützung dieser Behauptung dürfte in der Angabe des Eudemus liegen, daß Thales den Satz von den Scheitelwinkeln erkannt, Euklid ihn eines Beweises wert geachtet habe[2].

Wir gehen in der Durchsprechung der Dinge, welche aus den Überlieferungen der thaletischen Geometrie zu folgern sind, weiter. Man hat[3]) aus der Kenntnis des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise auf das damals schon vorhandene Bewußtsein dessen, was man später geometrischen Ort nannte, geschlossen. Wir begnügen uns solches zu erwähnen, ohne es uns aneignen zu können. Wir verbinden dagegen zu einem einheitlichen Gedanken die Schattenmessung und die Bestimmung eines Dreiecks durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. Beides waren praktische Ausführungen, sofern das Dreieck, wie uns gesagt ist, zur Bestimmung von Schiffsentfernungen dient. Beide beruhten auf der Anwendung eines rechtwinkligen Dreiecks. Das eine Mal wurden die Katheten jenes Dreiecks gebildet durch den Stab und seinen Schatten, das

[1]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque Impériale de Paris*, Tom. XIX, Partie 2, pag. 368. [2]) Proklus (ed. Friedlein), pag. 299. [3]) Allman, l. c., pag. 13—14.

andere Mal (Fig. 19) durch die Warte, von welcher aus die Beobachtung angestellt wurde, und die Entfernung des Schiffes[1]. Trennend ist zwischen beiden Aufgaben der Umstand, daß in dem einen Falle die Schattenlänge selbst gemessen, in dem anderen die Schiffsentfernung aus dem beobachteten Winkel erschlossen werden mußte. Beide Aufgaben waren einem Schüler ägyptischer Geometrie zugänglich. Sie sind nahe verwandt dem Finden des Seqt aus gegebenen Seiten, dem Finden der einen Seite aus der anderen mit Hilfe des Seqt.

Zu einer Früheres ergänzenden notwendigen Bemerkung gibt übrigens die Schattenmessung des Thales, welche ihm in zu wiederholter Beglaubigung zugeschrieben wird, als daß wir Zweifel in sie setzen könnten, Anlaß. Mag die Schattenmessung nach der einfacheren oder nach der dem Gedanken nach zusammengesetzteren von den beiden berichteten Methoden erfolgt sein, mag sie ein bloßes Messen der der gesuchten Höhe gleichen Schattenlänge oder das Berechnen eines Verhältnisses gegebener Zahlen nötig gemacht haben, eines setzt sie unter allen Umständen voraus: die Übung, den von einem senkrecht aufgestellten Gegenstande geworfenen Schatten wirklich abzumessen. Damit vervollständigen sich unsere früheren Mitteilungen (S. 50) über den Gnomon, seine Erfindung und Übertragung. Wir haben damals erwähnt, daß der eigentliche Gnomon nach Herodot in Babylon zu Hause war, daß gleichfalls nach Osten der Name des Berosus hinweist, daß die Bekanntschaft der Hebräer mit dem Stundenzeiger alt verbürgt ist. Neu tritt jetzt hinzu, daß auch in Ägypten Schatten gemessen wurden, eine Überlieferung, welche mit jener ersteren keineswegs in Widerspruch steht. Wir haben mehrfach schon mathematische Zeugnisse alter Verbindungen zwischen Nil- und Euphratländern anführen dürfen; hier ist vielleicht wieder ein solches, und überdies ist es noch immer nicht das Gleiche, wenn an einem Orte der Schatten zu geometrischen Zwecken gemessen wurde, am anderen zu Herstellung einer Schattenuhr diente.



Fig. 19.

Wir haben auch schon den Mann genannt, der die Schattenuhr den Griechen bekannt machte. Anaximander von Milet war es, welcher Favorinus zufolge[2]) zuerst eine solche in Lakedämon aufstellte; während wohl durch ein Mißverständnis genau dasselbe durch

[1]) Bretschneider S. 43—46. [2]) Diogenes Laertius II, 1.

Plinius[1]) dem Anaximenes, dem Schüler des Anaximander nachgerühmt wird. Anaximander war 611 geboren und wurde Schüler des Thales, als dieser in der Heimat sich niederließ, wofür wir etwa das Jahr 586 anzunehmen durch die vorausgesagte Sonnenfinsternis Veranlassung haben. Anaximander starb kurz nachdem er 64 Jahre alt geworden war, also etwa 545. Ein Lexikograph Suidas berichtet von ihm, er habe nächst der Einführung des Gnomon vollständig eine Hypotyposis der Geometrie gezeigt[2]). Wir begnügen uns mit der Wiedergabe des griechischen Wortes, mit welchem wir bei dem Fehlen jeder deutlicheren Angabe nichts anzufangen wissen. Es ist ja richtig, daß Hypotyposis durch „bildliche Darstellung" übersetzt werden darf, ohne daß eine sprachliche Einrede erhoben würde; es ist auch möglich, daß die Meinung sei, Anaximander habe eine „Reißkunst" geschrieben, d. h. eine Angabe geometrischer Konstruktionen ohne Begründung derselben[3]); aber mehr als eine schwache Möglichkeit liegt nicht vor. Am wahrscheinlichsten klingt die Übersetzung Hypotyposis = Abriß, Grundzüge, in welcher Bedeutung das Wort auch anderwärts vorkommt[4]).

Jedenfalls hat das alte Mathematikerverzeichnis von dieser geometrischen Tätigkeit des zweiten ionischen Naturphilosophen nicht Notiz genommen. Es fährt nämlich fort:

„Nach ihm (Thales) wird Mamerkus, der Bruder des Dichters Stesichorus, als ein eifriger Geometer erwähnt; auch berichtet Hippias der Eleer von ihm, daß er sich als Geometer Ruhm erworben habe."

Diese Persönlichkeit ist ein so untrügliches Zeugnis für die Vergänglichkeit irdischen Ruhmes, wie kaum eine zweite, denn wir kennen heute von dem gerühmten Geometer nicht einmal mehr den Namen mit einiger Sicherheit. Wir haben hier Mamerkus nach der Lesart der gegenwärtig allgemein benutzten letzten Ausgabe des Proklus geschrieben[5]). Andere nennen den Bruder des Stesichorus Mamertinus, noch andere Ameristus. Ein wegen seiner Ungenauigkeit berüchtigter mathematischer Historiker des XVII. S., Milliet Dechales, macht sogar zwei berühmte Geometer aus ihm, einen Mamertinus und einen Amethistus. Wir begnügen uns mit dem Eingeständnisse

[1]) Plinius, *Historia naturalis* II, 76. [2]) Suidas s. v. Anaximandros: *γνώμονά τ' εἰσήγαγε καὶ ὅλως γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν.* [3]) Bretschneider S. 62 teilweise nach Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 132. Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik II, Hof 1872, S. 15, übersetzt: er gab eine bildliche Darstellung der ganzen Geometrie heraus. [4]) W. Schmidt (Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker 1890—1901) verweist dafür auf Proklos (*ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* = Abriß der astronomischen Voraussetzungen) und auf Sextus Empiricus (*Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις* = Grundzüge des Pyrro). [5]) Proklus (ed. Friedlein) p. 65, lin. 12.

gar nichts von ihm zu wissen. Der Bruder Stesichorus ist eine bekanntere Persönlichkeit. Er starb um 560 im Alter von 85 Jahren und stammte aus Himera in Sizilien. Jedenfalls weist also die geometrische Tätigkeit des Bruders des Dichters uns darauf hin, daß der Geschmack an Wissenschaft, an Geometrie insbesondere, seit Thales die Anfänge aus Ägypten mitgebracht hatte, weitere Verbreitung gewann, daß die Zeit jetzt nahte, wo in Sizilien und in Unteritalien eine schulmäßige Beschäftigung mit unserer Wissenschaft ihre gedeihliche Wirkung äußern konnte unter der Leitung eines Mannes, der eben dort seine Studien machte, wo auch Thales in die Geometrie eingeweiht worden war.

Thales hat also nebst seinen nächsten ionischen Nachfolgern für uns die Bedeutung, daß man durch ihn in Erfahrung gebracht hatte, wo Geometrie zu Hause sei; daß von ihm die ersten der Zahl nach geringen, der Anwendung nach schon wertvollen Sätze der Geometrie bekannt gemacht wurden; daß von ihm eine etwas strengere Beweisführung ausging; daß er endlich eine Schule gründete, die der Wissenschaft diente und nicht Staatsleben und Geldverdienst allein als die Dinge ehrte, denen ein Mann seine Kräfte widmen konnte. In allen diesen Richtungen können wir den Mann als seinen Nachfolger betrachten, dem wir jetzt uns zuwenden: Pythagoras von Samos.

6. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik.

„Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlage derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellektueller erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen Körper erfand.“

Pythagoras von Samos, über welchen wir soeben das alte Mathematikerverzeichnis haben reden lassen, war Sohn des Mnesarchus. Er gründete in den dorisch bevölkerten Städten von Süditalien, in dem sogenannten Großgriechenland, eine Schule, die zahlreiche Anhänger versammelte und so geschlossen auftrat, eine solche auch politische Bedeutung gewann, daß sie die Feindschaft der außerhalb der Schule Stehenden auf sich zog und gewaltsam zersprengt wurde.

Diese Tatsachen stehen nach den Aussprüchen sämtlicher alten Berichterstatter allzu fest, als daß sie auch nur von einem einzigen

neueren Geschichtsschreiber angefochten würden. In jeder anderen Beziehung aber herrschen über das Leben des Pythagoras, über seine Lehre, über das was man ihm, was man seinen Schülern zuzuschreiben habe, die allergrößten Meinungsverschiedenheiten. Greifen wir nur einige gewiß wichtige Punkte heraus: das Geburtsjahr des Pythagoras, das Jahr seiner Ankunft in Italien, sein Todesjahr, die Zeit, zu welcher die Schule zersprengt wurde, das alles liegt im Widerstreite der Meinungen. Wenn ein Forscher[1]) Pythagoras 569 geboren, 510 in Italien aufgetreten, 470 bei dem gegen die Schule entbrannten Aufstande umgekommen sein läßt, sagt uns ein anderer Forscher[2]), die Geburt habe um 580, die Ankunft in Italien um 540 stattgefunden, Pythagoras sei um 500 gestorben, die Schule erst ein halbes Jahrhundert später zersprengt worden. Ähnliche Gegensätze treten in allen Äußerungen derselben Gelehrten über Pythagoras und die Pythagoräer hervor, und wir können diese Gegensätze so ziemlich auf einen einzigen grundsätzlichen zurückführen. Der erste Gelehrte, dessen Datierungen wir angaben, ging von dem Bestreben aus, die überreichen Mitteilungen, welche erst in nachchristlichen Jahrhunderten von griechischen Schriftstellern in Form spannender aber romanartiger mit Wundergeschichten reichlich durchsetzter Bücher zusammengestellt wurden, nach Ausscheidung dessen, was augenscheinlich sagenhafte Erfindung war, zu benutzen. Der zweite verwirft jene Romane ganz und gar, läßt höchstens die Benutzung einiger weniger Stellen derselben zu, wo die Gewährsmänner ausdrücklich genannt sind und ihre Nennung selbst Vertrauen verdient. Beide gehen wohl in ihren polemisch erprobten und dadurch nur um so stärker befestigten Meinungen zu weit, wenn wir auch heute gern erklären, daß wir uns in den meisten Punkten den Ansichten des Vertreters derjenigen Auffassung, die man als skeptische bezeichnen könnte, nähern, wenn nicht anschließen. Für uns gibt es aber noch einen Mittelweg, den wir vielfach an der Hand des letzten Bearbeiters[3]) unseres Gegenstandes zu gehen lieben, so weit überhaupt die Geschichte der Mathematik uns die Pflicht auferlegt über die Streitpunkte ein Urteil auszusprechen.

Ein derartiger Streitpunkt ist der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, der von größter Bedeutung für die ganze Entwicklungsgeschichte der griechischen Mathematik ist, wenn man an ihn glaubt, jene Geschichte noch rätselhafter macht, als sie vielfach be-

[1]) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie. Bd. II. [2]) Zeller I. [3]) A. Ed. Chaignet, *Pythagore et la philosophie Pythagoricienne contenant les fragments de Philolaus et d'Archytas. Ouvrage couronné par l'institut.* Paris 1873. Wir zitieren dieses Werk kurz als Chaignet.

reits erscheint, wenn man ihn verwirft. Der älteste Bericht über diesen Aufenthalt, um dessen Glaubwürdigkeit oder Unglaubwürdigkeit es sich begreiflicherweise in erster Linie handelt, stammt von dem Redner Isokrates, dessen schriftstellerische Tätigkeit auf 393, also höchstens etwa 100 Jahre nach dem Tode des Pythagoras und bevor die Mythenbildung sich seiner Persönlichkeit bemächtigt hatte, fällt. Isokrates sagt von den ägyptischen Priestern[1]): Man könnte, wenn man nicht eilen wollte, viel Bewunderungswürdiges von ihrer Heiligkeit anführen, welche ich weder allein noch zuerst erkannt habe, sondern viele der jetzt Lebenden und der Früheren, unter denen auch Pythagoras der Samier ist, der nach Ägypten kam und ihr Schüler wurde und die fremde Philosophie zuerst zu den Griechen verpflanzte. Dieser Stelle ist mit entschiedenem Zweifel begegnet worden[2]), der auf den Inhalt der Rede des Isokrates sich gründet. Busiris war eine ägyptische Stadt mitten im Nildelta, in der große Isisfeste gefeiert wurden. In Erinnerung an die frühere Abgeschlossenheit Ägyptens Fremden gegenüber hatte die griechische Sage aber auch einen König gleichen Namens mit der Stadt erdacht, der jeden Fremden schlachten ließ. Zur Zeit der Sophisten liebten die griechischen Rhetoren sich mit Redestückchen gegenseitig zu überbieten, Lobreden auf Tadelnswerte, Anklagen gegen Vortreffliche zu verfassen. So hatte Polykrates eine Apologie jenes Busiris geschrieben, und nun wollte Isokrates dem Nebenbuhler zeigen, wie er sein Thema eigentlich hätte behandeln müssen. Polykrates, meint er, habe darin gefehlt, daß er dem Busiris ganz unglaubliche Dinge zugeschrieben habe, einerseits die Ableitung des Nils, andererseits das Auffressen der Fremden; dergleichen werde man bei ihm nicht finden. Wir lügen zwar beide, sagt er aufrichtig genug, aber ich mit Worten, welche einem Lobenden, Du mit solchen, welche einem Scheltenden geziemen. Aus diesem Geständnisse hat man die Folgerung gezogen, daß Angaben, die sich selbst als rednerische Erfindung geben, nicht den geringsten Wert haben. Diese Folgerung ist aber nur da richtig, wo es um rednerische Erfindung sich überhaupt handeln kann. Hätte also Busiris, dem Isokrates lobend nachlügt, er sei der Urheber der ganzen ägyptischen Kultur gewesen, wirklich gelebt, wir würden doch von jenem Lobe nichts halten. Sind wir deshalb berechtigt, auch von der ägyptischen Kultur nichts zu halten, nichts von den ägyptischen Priestern als Trägern dieser Kultur? Das wünscht wohl der Zweifelsüchtigste nicht. Und wenn die allgemein anerkannte Tat-

[1]) Isokrates, Busiris cap. 11. [2]) Die Zweifel sind hier teilweise wörtlich aus Zeller I, 259 Note 1 entnommen.

sache ägyptischer hoher Bildung nur den unwahren Zwecken des Isokrates mittelbar dienen soll, so hat es für ihn auch nur mittelbare Bedeutung, wenn er jener Tatsache eine Stütze gibt, wenn er sich darauf beruft, Pythagoras sei Schüler dieser hochgebildeten Priester gewesen. Der falsche Satz: Busiris sei der Urheber aller Bildung, wird dadurch in keiner Weise wahr, wenn die Bildung vorhanden war, wenn sie auf fremde Persönlichkeiten sich übertrug. Überdies bedurfte Isokrates zu diesem letzteren Erweise keiner Unwahrheit. Er konnte auf die Reisen, auf die Berichte anderer Männer sich beziehen, eines Thales, eines Herodot, eines Demokritos. Wenn er es vorzog, statt ihrer nur Pythagoras zu nennen, so wird man das dadurch erklären müssen, daß das Ansehen, in welchem Pythagoras schon zur Zeit des Isokrates stand, doch ein anderes war, als das der eben genannten wenn auch berühmten Persönlichkeiten. Isokrates, wir können es nur immer stärker betonen, log nicht um zu lügen, er log nur in den Lobsprüchen, die er seinem um jeden Preis zu erhebenden Helden zollte, und die erfundenen Verdienste des Busiris konnten eine gewisse Scheinbarkeit, auf deren Erlangung es bei dem rednerischen Kunststücken allein ankam, nur dann gewinnen, wenn alles Beiwerk der Wahrheit entsprach, wenn nicht auch nebensächliche Dinge den Hörer sofort kopfscheu machten. Wir zweifeln daher keinen Augenblick, daß der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, daß der Unterricht, welchen er bei den dortigen Priestern genoß, zu den Dingen gehört, die landläufige Wahrheit waren, als Isokrates sie aussprach, die niemand neu, niemand absonderlich oder gar unwahrscheinlich vorkamen[1]).

Der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, den wir jetzt schon für durchaus gesichert halten, wird weiter durch eine Menge anderer Schriftsteller behauptet. Freilich sind es Schriftsteller, die insgesamt später, teilweise viel später als Isokrates gelebt haben. Strabon meldet uns in nüchternem, einfachem und dadurch um so glaubwürdigerem Tone: Die Geschichtsschreiber teilen mit, Pythagoras sei aus Liebe zur Wissenschaft nach Ägypten und Babylon gegangen[2]). Antiphon, allerdings der Lebenszeit nach nicht genauer bestimmt, aber von späteren Schriftstellern unter Namensnennung mit großer Zuversicht benutzt, hat in seinen Lebensbeschreibungen von durch Tugend sich auszeichnenden Männern Ausführliches über den ägyptischen

---

[1]) Chaignet pag. 43 hält die ägyptische Reise auch für erwiesen, läßt sich aber auf eine Verteidigung des Ausspruches des Isokrates, wie wir sie geliefert haben, nicht ein. Dagegen sind bei ihm die Zitate anderer Schriftsteller, welche über jene Reise berichten, in großer Vollständigkeit gesammelt.
[2]) Strabo, XIV, 1, 16.

Aufenthalt des Pythagoras erzählt[1]. Viel weniger Gewicht legen wir — von anderen Zeugnissen zu schweigen — dem bei, was ägyptische Priester ruhmredig dem Diodor erzählten und was er uns mit folgenden Worten wiederholt: Die ägyptischen Priester nennen unter den Fremden, welche nach den Verzeichnissen in den heiligen Büchern vormals zu ihnen gekommen seien, den Orpheus, Musäus, Melampus und Dädalus, nach diesen den Dichter Homer und den Spartaner Lykurg, ingleichen den Athener Solon und den Philosophen Platon. Gekommen sei zu ihnen auch der Samier Pythagoras und der Mathematiker Eudoxus, ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios. Von allen diesen weisen sie noch Spuren auf[2]. Diese altägyptischen Matrikellisten mitsamt den aufgewiesenen Spuren sind an sich recht sehr verdächtig, doppelt verdächtig durch Namen wie Orpheus und Homer, die dort eingetragen sein sollen. Wir haben die Stelle überhaupt nur aus einem, wie uns scheint, erheblichen Grunde mitgeteilt. Sie beweist nämlich, daß zu Diodors Zeiten um die dort genannten Männer ein ziemlich gleicher Strahlenkranz von Berühmtheit sich gebildet hatte, der von ihnen auf die Lehrer, die sie hatten oder gehabt haben sollten, zurückstrahlt.

Die von uns angeführte Stelle des Strabon gibt auch Auskunft über eine Studienreise des Pythagoras nach Babylon. Offenbar genoß diese zur Zeit von Christi Geburt, das ist zur Zeit Strabons, einer hinreichend guten Beglaubigung, um als geschichtliche Tatsache kurz erwähnt zu werden. Als sichergestellt erscheint uns damit so viel, daß Pythagoras in Babylon hätte gewesen sein können. Drücken wir uns deutlicher aus. Wir meinen, es müssen innerhalb der pythagoräischen Schule Lehren vorgetragen worden sein, welche überraschende Ähnlichkeit mit solchen Dingen besaßen, denen das Griechentum seit dem Alexanderzuge an dem zweiten Mittelpunkte ältester Kulturverbreitung neben Ägypten, in Babylon wiederbegegnete. Eine gegenteilige Annahme würde das Entstehen des Glaubens an die Sage von dem Aufenthalte bei den Chaldäern jeder Grundlage berauben. Wir nennen den Aufenthalt eine Sage, weil auch uns jetzt ein erstes Zeugnis Strabons ohne Kenntnis des Alters seiner Quellen zur vollen geschichtlichen Wahrheit nicht ausreicht. Immerhin bleibt die Art, wie babylonische Elemente, deren wir auf mathematischem Gebiete einige erkennen werden, in die pythagoräische Lehre eindrangen, und die Rolle, welche sie darin spielten, in hohem Grade rätselhaft, wenn wir ganz verwerfen wollten, Pythagoras selbst oder einer seiner

---

[1]) Als Bruchstück erhalten bei Porphyrius, *De vita Pythagorae* cap. 7, auch bei Diogenes Laertius VIII, 3. [2]) Diodor I, 96.

nächsten Schüler sei unmittelbar an die Quelle geraten, aus welcher dieselben zu schöpfen waren.

Mit dem Ausdrucke Pythagoras selbst oder einer seiner nächsten Schüler haben wir eine unleugbare Schwierigkeit bezeichnet, einen Gegenstand wissenschaftlichen Zweifels berührt, welcher hier im Wege liegt und zu dessen Wegräumung uns keine Mittel gegeben sind. Die pythagoräische Schule war, wie schon oben erwähnt wurde, eine eng geschlossene. Mag es Wahrheit oder Übertreibung genannt werden, daß unverbrüchliches Stillschweigen überhaupt den Pythagoräern zur Pflicht gemacht war, daß ihnen unter allen Umständen das verboten war, was wir sprichwörtlich aus der Schule schwatzen nennen, sicher ist, daß über den oder die Urheber der meisten pythagoräischen Lehren kaum irgendwelche Gewißheit vorliegt. *Ἐκεῖνος ἔφα* oder *Αὐτὸς ἔφα*, ER, der Meister, hat's gesagt, war die vielbenutzte Redensart, und welcher Zeit dieselbe auch angehört, sie läßt, je später sie aufgekommen sein mag, um so deutlicher die ganz ungewöhnliche, durch viele Jahrhunderte in der Überlieferung sich erhaltende geistige Überlegenheit des Pythagoras, der alles, was von Wert war, selbst gefunden und gelehrt haben sollte, läßt aber auch die Unmöglichkeit erkennen scharf zu sondern, was wirklich von Pythagoras selbst, was von seinen Schülern herrührte. Vielleicht ist es dabei gestattet aus den erwähnten inneren Gründen anzunehmen, daß, wo ein Pythagoräer als Entdecker bestimmt genannt ist, die Richtigkeit der Angabe nicht leicht zu bestreiten sei, daß dagegen, wo Pythagoras selbst der Urheber gewesen sein soll, sehr wohl eine Namensverschiebung stattgefunden haben könne.

Einige von den Dingen, welche ganz besonders der Geschichte der Mathematik angehören, werden wir allerdings nicht verzichten Pythagoras selbst zuzuschreiben. Dazu gehört der pythagoräische Lehrsatz, den wir unter allen Umständen ihm erhalten wissen wollen. Sei es darum, daß man den Zeugnissen des Vitruvius, des Plutarch, des Diogenes Laertius, des Proklus, so bestimmt sie auch lauten [1]), wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe. Schwerer fallen doch die in die Wagschale, welche Proklus als seine Gewährsmänner anführt: „Die welche Altertümliches erkunden wollen“ [2]), sei damit, wie man gewöhnlich annimmt, Eudemus gemeint oder nicht. Am überzeugendsten vollends ist uns die mittelbare Bestäti-

[1]) Diese Zeugnisse zusammengestellt bei Allman l. c. pag. 26. k.
[2]) Proklus ed. Friedlein 426 *τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων*. Das Wort *ἱστορεῖν* besitzt bei Proklus nirgend eine spöttische Nebenbedeutung, man darf also nicht, wie es geschehen ist, übersetzen „die alte Geschichten erzählen wollen“.

gung in dem alten Mathematikerverzeichnisse. Pythagoras, heißt es dort ausdrücklich, erfand die Theorie des Irrationalen. Eine solche Theorie war aber ganz unmöglich, eine Beschäftigung mit dem Irrationalen undenkbar, wenn nicht der Satz von den Quadraten der drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vorher bekannt war, und man würde, wollte man Pythagoras nicht als seinen Urheber gelten lassen, in die noch schwierigere Lage versetzt, ihn älter als Pythagoras annehmen zu müssen.

Auf Grundlage des Mathematikerverzeichnisses sehen wir ferner in Pythagoras selbst wirklich den Erfinder der Konstruktion der kosmischen Körper, d. h. der regelmäßigen Vielflächner in einem Sinne, der nachher noch auseinandergesetzt werden soll.

Glaubwürdig ist uns auch, was der bekannte Musikschriftsteller Aristoxenus, einer der zuverlässigsten Gelehrten der peripatetischen Schule, berichtet, daß Pythagoras vor allen die Zahlenlehre[1]) in Achtung gehabt und dadurch gefördert habe, daß er von dem Bedürfnisse des Handels weiter schritt alle Dinge den Zahlen vergleichend[2]). Wir glauben an die Berechtigung der Verbindung des Namens des Pythagoras mit der musikalischen Zahlenlehre, mag das Monochord von ihm herrühren oder nicht, wir glauben, daß er hauptsächlich um die arithmetische Unterabteilung der Geometrie sich bemüht habe[3]).

Ja wir gehen noch weiter und schreiben dem Pythagoras den Besitz einer mathematischen Erfindungsmethode zu, des mathematischen Experimentes, wie wir dieses Verfahren anderwärts genannt haben[4]), womit freilich ebensowenig gesagt sein soll, daß das Bewußtsein ihm innewohnte darin eine wirkliche Methode zu besitzen, als daß er ihr Erfinder war, die er aus den in Ägypten gewonnenen Anschauungen jedenfalls leicht abstrahieren konnte, wenn er sie nicht fertig von dort mitbrachte.

Auf die persönliche Zuweisung sonstiger Dinge verzichten wir und werden im folgenden von der Mathematik der Pythagoräer, nicht des Pythagoras reden. Freilich vergrößert sich dadurch der Zeitraum, dessen wissenschaftliches Bild wir zu gewinnen trachten, erheblich. Wenn auch nicht bis zu den letzten eigentlichen Pythagoräern, deren Tätigkeit auf 366 angesetzt wird[5]), so doch bis vor Platon, etwa bis zum Jahre 400 erstreckt sich unserer Meinung nach die mathematische Tätigkeit des Pythagoräismus als solchem. Von

[1]) Diogenes Laertius VIII, 14. [2]) Stobaeus, Ecloga phys. I, 1, 6.
[3]) Diogenes Laertius VIII, 12: *μάλιστα δὲ σχολάσαι τὸν Πυθαγόραν περὶ τὸ ἀριθμητικὸν εἶδος αὐτῆς* (sc. *γεωμετρίας*) *τόν τε κάνονα τὸν ἐκ μιᾶς χορδῆς εὑρεῖν.*
[4]) Math. Beitr. Kulturl. 92. [5]) Zeller I, 288, Note 5.

seinen meistens namenlosen, mitunter an bestimmte Persönlichkeiten geknüpften Leistungen wissen wir aus verschiedenen teilweise späten, uns jedoch in den Dingen, für welche wir sie gebrauchen wollen, als zuverlässig geltenden Quellen.

Als solche Quelle betrachten wir vor allen Dingen den „Timäus“ überschriebenen Dialog des Platon. Timäus von Lokri war ein echter Pythagoräer, Platon dessen Schüler. Soll man nun annehmen, Platon habe diesem seinem Lehrer wissenschaftliche Äußerungen in den Mund gelegt, die er nicht ganz ähnlich von ihm gehört hatte, er habe ihm insbesondere Mathematisches untergeschoben? Wir können einem solchen Gedanken uns nicht hingeben, können es um so weniger, als Platons eigene Abhängigkeit von den Pythagoräern in vielen Dingen durch einen so unverdächtigen Zeugen wie Aristoteles bestätigt wird. Die Philosophie Platons, sagt er[1]), kam nach der pythagoräischen, in vielem ihr folgend, anderes eigentümlich besitzend. Eine zweite wichtige Quelle liefert uns ein Werk des Theon von Smyrna[2]). Dieser Schriftsteller lebte zwar erst um 130 n. Chr., also in einer Zeit, wo die Mythenbildung, die Pythagorassage, wie man einigermaßen schroff sich ausgedrückt hat, in dem Leben des Pythagoras von Apollonius von Tyana, in den unglaublichen Dingen jenseits Thule von Antonius Diogenes, schon romanhafte Gestalt gewonnen hatte. Aber für die Dinge, für welche wir Theon gebrauchen wollen, war in einem Roman blutwenig zu schöpfen. Man lese doch das Leben des Pythagoras von Porphyrius, das ähnliche teilweise daran sich anlehnende Buch von Jamblichus, man lese was Diogenes Laertius von dem Leben des Pythagoras aufgespeichert hat, und man wird zwar unterhaltende Geschichtchen genug finden, Mathematisches aber nur insoweit als Laien mit mathematischen Wörtern um sich zu werfen imstande sind, es sei denn, daß ältere Fachleute wie der Musiker Aristoxenus, der Rechenmeister Apollodorus als Gewährsmänner auftreten, zu welchen als Fachmann Jamblichus selbst hinzutritt, der uns in dieser Gestalt im 23. Kapitel begegnen wird. Was also Theon von Smyrna als pythagoräische mathematische Lehren hervorhebt, das muß aus ganz anderen nicht mythischen Schriften geschöpft sein, von welchen Porphyrius, Jamblichus in ihren Biographien des Pythagoras wenigstens in diesem Sinne keinen Gebrauch gemacht haben.

Wer freilich solche Schriften verfaßte, und wie sie hießen, das dürfte ein unlösbares Rätsel bleiben, wenn man auch versucht hat

[1]) Aristoteles Metaphys. I, 6. [2]) *Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium.* Edid. Ed. Hiller. Leipzig 1878.

die zweite Frage zu beantworten[1]). Bei Jamblichus findet sich folgendes[2]): „Die Pythagoräer erzählen, die Geometrie sei so in die Öffentlichkeit gelangt. Einer von den Pythagoräern habe sein Vermögen verloren, und da habe man ihm gestattet, die Geometrie als Erwerbszweig zu benutzen." Daran schließt sich die fast unverständliche Stelle: *Ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία*, welche unser Gewährsmann übersetzt: „Die Geometrie wurde aber Überlieferung von Pythagoras genannt." So ansprechend die Vermutung an sich klingt, wobei an dem fehlenden zu *ἱστορία* gehörenden Artikel kein Anstoß genommen zu werden braucht, da Plato eine ganz ähnliche Wendung benutzt hat[3]), so ist doch vielleicht die Übersetzung *ἱστορία* = Forschung noch richtiger. Der Satz hieße dann auf deutsch: „Es wurde aber die Geometrie Forschung von seiten des Pythagoras genannt"[4]).

Die Benutzbarkeit des Theon von Smyrna gründet sich wesentlich auf dem ausgesprochenen Zwecke seines Werkes. Er will die zum Verständnis Platons und der Platoniker nötigen Vorkenntnisse mitteilen. Er will dabei der Reihe nach die Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, die Geometrie, die Stereometrie, die Astronomie, die Musik der Welten behandeln. Hier finden wir also hauptsächlich dasjenige in der Sprache des II. nachchristlichen Jahrhunderts vorgetragen, was von mathematischen Kenntnissen für das Studium Platons notwendig ist. Das können aber vermöge der selbstverständlichen Tatsache, daß wissenschaftliche Anspielungen eines früheren Jahrhunderts nicht mit Hilfe der Errungenschaften eines späteren Jahrhunderts sich erklären, nur solche Kenntnisse sein, die nach Theons bestem Wissen den platonischen Schriften selbst geschichtlich vorausgingen, in ihnen zur Verwertung kommen konnten. Da ferner Theon von Platon selbst sagt, er folge oft den Pythagoräern[5]), so wird seine Brauchbarkeit für uns hier vollends erhöht. Diese beiden Werke sind also unsere Hauptquellen. Wir werden zu ihnen auch noch aus anderen Schriftstellern da und dort einen geringen Zufluß erhalten, die sich, wie wir sehen wollen, zu einem ganz stattlichen Ganzen vereinigen.

---

[1]) La géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique par Paul Tannery (Paris 1887) pag. 81. [2]) De pithagorica vita (ed. Kiessling) 89 und Ansse de Villoison, Anecdota Graeca II, 216, lin. 22—25, sowie Jamblichus, De communi mathematica (ed. Festa) 78, 1—5. [3]) Platon, Phädon 96[a] τῆς σοφίας ἣν δὴ καλοῦσι περὶ φύσεως ἱστορίαν ohne Artikel. [4]) So die Meinung von W. Schmidt, der auch auf die Parallelstelle im Phädon hingewiesen hat. [5]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 12.

Theon hat, sagten wir, zuerst die Arithmetik behandelt. Damit ist uns Gelegenheit geboten, eine ungemein wichtige Zweispaltung der Lehre von den Zahlen ins Auge zu fassen. Die ganze Mathematik zerfiel, nach Geminus[1]), in zwei Hauptteile, deren Unterschied er darin erkannte, daß der eine Teil sich mit dem geistig Wahrnehmbaren, der andere sich mit dem sinnlich Wahrnehmbaren beschäftige. Geistigen Ursprungs ist ihm Arithmetik und Geometrie, sinnlichen Ursprungs dagegen Mechanik, Astronomie, Optik, Geodäsie, Musik, Logistik. Von den übrigen Teilen und dem, was Geminus des weiteren über sie bemerkt, sehen wir ab. Arithmetik und Logistik erklärt er dahin, daß die erstere die Gestaltungen der Zahl an und für sich betrachte, die letztere aber mit Bezug auf sinnliche Gegenstände. Arithmetik ist ihm also eine theoretische, Logistik eine praktische Wissenschaft. Arithmetik ist ihm, um die heute gebräuchlichen Wörter anzuwenden, das was seit Gauß höhere Arithmetik, seit Legendre Zahlentheorie genannt wird. Logistik ist ihm die eigentliche Rechenkunst.

Diese strenge Unterscheidung war allerdings in den Zeiten pythagoräischer Mathematik noch nicht zum Durchbruch gelangt. Die Pythagoräer stellten die beiden Fragen: Wie viel? und Wie groß?[2]) In der Beantwortung beider trennten sie aufs neue. Das eine Mal wurde die Vielheit an sich in der Arithmetik, die Vielheit bezogen auf anderes in der Musik behandelt. Das andere Mal bildete die ruhende Größe den Gegenstand der Geometrie, die bewegte Größe den Gegenstand der Sphärik.

Bei manchem Wechsel der sonstigen Systematik blieb die eigentliche Arithmetik vom VI. bis zum I. vorchristlichen Jahrhundert, von den Pythagoräern bis zu Geminus fast mit gleichem Inhalte ausgestattet, und dieser gleichartige Inhalt wahrte sich weiter, solange überhaupt in griechischer Sprache über diesen Teil der Mathematik geschrieben wurde. Einiges kam natürlich im Laufe der zeitlichen Entwicklung hinzu. In die griechische Arithmetik drang ein, was wir jetzt Algebra oder Lehre von den Gleichungen nennen, soviel davon bekannt war. Ihr gehörte die Lehre von den nach bestimmten Gesetzen gebildeten Reihen und deren Summierung, ihr die Proportionenlehre an, wie sie nach und nach in weiterem und weiterem Umfang sich bildeten, aber niemals begriff die Arithmetik das eigentliche Rechnen unter sich.

Wir werden uns wohl der Wahrheit nähern, wenn wir annehmen,

---

[1]) Proklus ed. Friedlein, pag. 38. Vgl. auch Nesselmann, Algebra der Griechen, S. 40 flgg. [2]) Proklus ed. Friedlein, pag. 35—36.

die Logistik, die Rechenkunst, sei erst allmählich als Gegenstand schriftlicher Unterweisung in Büchern behandelt worden. Sie verdankte vorher ihre unentbehrliche Verbreitung vorwiegend dem mündlichen Unterricht. Sie war allgemeines Bedürfnis, nicht Wissenschaft, und es mag lange gedauert haben, bevor es einem Rechenmeister einfiel, über den Inhalt seines Unterrichts sich schriftlich auszusprechen. Zu dieser Annahme gelangen wir von der Erwägung aus, daß eine Logistik bestand und uns quellenmäßig gesichert ist, lange bevor wir von Büchern über dieselbe hören. Ihr Name kommt schon in einem platonischen Dialoge vor, wo die Logistik der Arithmetik gegenübergestellt ist[1]), und in einem anderen Dialoge des gleichen Verfassers ist von den Logistikern[2]) die Rede.

Wenn wir bei der Betrachtung der pythagoräischen Mathematik von den arithmetischen Dingen ausgehen, so folgen wir nur der Aussage, welche in dieses Gebiet die wesentlichsten Leistungen des Pythagoras verlegt, und welche, selbst wenn ihr kein Gewährsmann von der Bedeutung des Aristoxenus Gewicht verliehe, in dem allgemeinen Bewußtsein, daß die der Arithmetik nächststehende Zahlensymbolik so recht eigentlich altpythagoräisch war, ihre Rechtfertigung finden könnte. Wir haben ein Beispiel pythagoräischer Zahlenmystik an früherer Stelle (S. 42) verwertet. Ein anderes mag hier Platz finden, welches gleichfalls Plutarch uns aufbewahrt hat: Es haben sich aber wohl die Ägypter die Natur des Weltalls zunächst unter dem Bilde des schönsten Dreiecks gedacht; auch Platon in der Schrift vom Staate scheint das Bild gebraucht zu haben, da wo er ein Gemälde des Ehestandes entwirft. Das Dreieck enthält eine senkrechte Seite von 3, eine Basis von 4 und eine Hypotenuse von 5 Teilen, deren Quadrat denen der Katheten gleich ist. Man kann nun die Senkrechte mit dem Männlichen, die Basis mit dem Weiblichen, die Hypotenuse mit dem aus beiden Geborenen vergleichen und somit den Osiris als Ursprung, die Isis als Empfängnis und den Horus als Erzeugnis denken[3]). Mit dem Vorbehalte auf diese nicht unwichtige Stelle zurückzukommen, benutzen wir sie hier nur als freilich spätes Beispiel pythagoräischer Zahlenspielerei, dem eine übergroße Menge ähnlicher Dinge, Vergleichungen von Zahlen mit einzelnen Gottheiten oder Vergleichungen von Zahlen mit gewissen sittlichen Eigenschaften usw. aus älterer und ältester Zeit zur Seite gestellt werden könnte[4]), wenn die Geschichte der Mathematik neben dem allgemeinen Vergleiche mit babylonischen Gedankenfolgen einen besonderen unmittel-

[1]) Platon, Gorgias 451, B. [2]) Platon, Euthydemus 290, B. [3]) Plutarch, *De Iside et Osiride* 56. [4]) Eine reiche Sammlung von Stellen bei Zeller I, 334—345, namentlich in den Anmerkungen.

baren Nutzen daraus zu ziehen imstande wäre. Allenfalls könnte dieses für einen Satz zutreffen, welcher, wie sich zeigen wird, durch Jahrhunderte sich forterbte, den Satz: daß die Einheit Ursprung und Anfang aller Zahlen, aber nicht selbst Zahl sei[1]).

Wir werden bald sehen, daß die Pythagoräer es liebten auf Gegensätze ihr Augenmerk zu richten, und ein solcher Gegensatz war der zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. Ein alter Pythagoräer, Thymaridas von Paros[2]) war es vermutlich, der den Primzahlen den Namen der geradlinigen Zahlen, ἀριθμοὶ εὐθυγραμμικοὶ, beilegte[3]), jedenfalls im Gegensatze zu Flächenzahlen, von welchen auch noch in diesem Kapitel die Rede sein wird. Derselbe Thymaridas aber hat sich ein außerordentlich viel größeres Verdienst dadurch erworben, daß er ein Verfahren zur Auflösung gewisser Aufgaben erfand, welches von hoher Tragweite ist, und welches wir nach Jamblichus auseinandersetzen[4]). Das Verfahren muß sehr verbreitet gewesen sein. Dafür bürgt außer Gründen, welche im 29. Kapitel auf indischem Boden sich ergeben werden, der doppelte Umstand, daß Jamblichus es geradezu als eine Methode, ἔφοδος, bezeichnet und es mit einem bestimmten Namen nennt, welcher demselben schon früher eigentümlich gewesen zu sein scheint. Das Epanthem, d. h. die Nebenblüte des Thymaridas, besteht in folgendem[5]): „Wenn gegebene (ὡρισμένα) und unbekannte Größen (ἀόριστα) sich in eine gegebene teilen und eine von ihnen mit jeder anderen zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraktion der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addierten ganz zuerkannt, bei vier deren Hälfte, bei fünf deren Drittel, bei sechs deren Viertel und so fort." Damit ist gemeint, daß, wenn n Unbekannte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ heißen, und wenn außer ihrer Gesamtsumme $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = s$ die Summe der ersten Unbekannten x_1 mit jeder der folgenden Unbekannten einzeln gegeben ist, also $x_1 + x_2 = a_1$, $x_1 + x_3 = a_2$, $\cdots x_1 + x_n = a_{n-1}$, daß alsdann $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - s}{n-2}$ sein muß. Das ist,

[1]) Vgl. Aristoteles, Metaph. XIII, 8, ferner Nicomachus, Eisagoge arithmet. II, 6, 3 (ed. Hoche pag. 84) und am deutlichsten bei Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 24: οὔτε δὲ ἡ μονὰς ἀριθμὸς, ἀλλὰ ἀρχὴ ἀριθμοῦ. [2]) Paul Tannery, Pour l'histoire de la science Hellène (Paris 1887) pag. 382 bis 386 über die Persönlichkeit des Thymaridas. [3]) Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem (ed. Tennulius 1668) pag. 36, (ed. Pistelli 1894) pag. 27, 4. [4]) Ebenda (ed. Tennulius) pag. 89, (ed. Pistelli) pag. 62, 19. Diese verderbte und darum ungemein schwierige Stelle hat zuerst Nesselmann, Algebra der Griechen S. 232 flgg. richtig erklärt. [5]) Wir benutzen die Übersetzung Nesselmanns.

wie man sieht, vollständig gesprochene Algebra, welcher nur Symbole fehlen, um mit einer modernen Gleichungsauflösung durchaus übereinzustimmen, und insbesondere ist mit Recht auf die beiden Kunstausdrücke der gegebenen und unbekannten Größe aufmerksam gemacht worden.

Genug die Pythagoräer, seit Gründung der Schule, beachteten die Zahlen und wußten verschiedene Gattungen derselben, so namentlich die geraden und ungeraden Zahlen, erstere als *ἄρτιοι*, letztere als *περισσοί*, zu unterscheiden[1]). Diese Unterscheidung war so landläufig, daß zu Platons Zeit das Spiel „Grad oder Ungrad" schon in Übung war[2]). Wir erinnern uns, daß auch den Ägyptern dieser Unterschied nicht entgangen war, wie wir aus der Einrichtung ihrer Zerlegungstabelle für Brüche schließen durften (S. 64). Ob sie freilich bestimmte Namen für das Gerade und für das Ungerade hatten, was zum vollen Bewußtsein dieser Zahlengattungen gehört, das schwebt so lange im Dunkel, als nicht ein ägyptisches theoretisches Werk entdeckt ist, dessen Notwendigkeit zur Ergänzung des Übungsbuches wir eingesehen haben. Letzteres enthält jedenfalls solche Namen nicht.

Die Pythagoräer sahen überdies in den geraden und ungeraden Zahlen Glieder von Reihen, nannten solche Reihenglieder *ὅροι* und besaßen vermutlich in dem Worte *ἔκθεσις* auch einen Namen für den Begriff von Reihe selbst[3]). Auch diese Tatsache kann uns nicht in Erstaunen setzen, nachdem die Kenntnis der arithmetischen wie der geometrischen Reihe bei Ägyptern und Babyloniern, die Kenntnis der Summenformel für arithmetische Reihen mit Gewißheit, für geometrische Reihen als Möglichkeit bei den Ägyptern festgestellt werden konnte.

Mit den Reihen der geraden und ungeraden Zahlen wurden bei den Griechen — wir behaupten bei den Pythagoräern — nach den Zeugnissen des Theon von Smyrna mannigfache Summierungen vorgenommen. Man addierte die sämtlichen aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenfolge von der 1 bis zu einem beliebig gewählten Endgliede und fand $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ die Dreieckszahl[4]). Man addierte die ungeraden Zahlen für sich und

[1]) *ὅ γε μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδια εἴδη περισσὸν καὶ ἄρτιον* heißt es in einem Fragmente des Philolaus. Vgl. Zeller I, 299, Anmerkg. 1 und Chaignet I, 228. [2]) Platon, Lysis pag. 206. [3]) Vgl. Bienaymé in einer Notiz über zwei Stellen des Stobäus in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften vom 3. Oktober 1870. [4]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 31.

fand $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ die Quadratzahl, zu deren Erklärung man eben diese Entstehungsweise benutzte[1]). Man addierte die geraden Zahlen für sich und fand $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ die heteromeke Zahl[2]), d. h. das Produkt zweier Faktoren, deren einer um die Einheit größer ist als der andere, und welches eben dieses Größersein der einen Zahl in seinen Namen aufnahm.

Wir haben hier arithmetische Erklärungen und Lehrsätze den Pythagoräern überwiesen, welche trotz ihres Vorkommens bei Theon von Smyrna, trotz der von uns vorausgeschickten allgemeinen Rechtfertigung der Benutzbarkeit seines Werkes für diese weit zurückliegende Zeit, einigermaßen stutzig machen könnten. Da wir in unseren Folgerungen noch weiter zu gehen gedenken, so dürfte es nicht unzweckmäßig sein, andere Beweisgründe für die Richtigkeit unserer Annahme hier einzuschalten, welche ein bedeutend älterer Schriftsteller von allseitig anerkannter Zuverlässigkeit, mit einem Worte, welche Aristoteles uns liefert. In dessen Metaphysik[3]) finden wir die sogenannte pythagoräische Kategorientafel, in welcher zehn Paar Grundgegensätze aufgezählt werden, die der pythagoräischen Schule angehört haben. Diese heißen 1. Grenze und Unbegrenztes; 2. Ungerades und Gerades; 3. Eines und Vieles; 4. Rechtes und Linkes; 5. Männliches und Weibliches; 6. Ruhendes und Bewegtes; 7. Gerades und Krummes; 8. Licht und Finsternis; 9. Gutes und Böses; 10. Quadrat und Heteromekie. Wir dürfen vielleicht annehmen, daß unter dem 3. Paare die Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen inbegriffen sind. Wir erkennen in den beiden mit 2. und 10. bezeichneten Paaren die Zusammengehörigkeit des Ungeraden mit dem Quadrat, des Geraden mit der Heteromekie, und sollte diese Zusammengehörigkeit nicht in der Entstehungsweise der Quadrate und der Heteromeken ihre vollgültige Begründung finden? Allerdings hat man, wie wir sehen werden, eine andere Erklärung gesucht, weshalb das 10. Paar, dessen Vorhandensein unter allen Umständen einer Rechtfertigung bedarf, weil seine Gegensätze nicht so scharf und natürlich sind, wie die der neun anderen Paare, Aufnahme gefunden habe. Wir sind nicht gewillt, jene andere Erklärung schon jetzt geradezu zu verwerfen, aber noch weniger auf die unsrige zu verzichten. Konnte es doch in der Tafel der Grundgegensätze, auf welche alle Erscheinungen zurückzuführen sind, nur erwünscht sein, durch ein Paar sofort zwei wesentlich verschiedene Beziehungen dargestellt zu wissen. Ist doch überdies mindestens die Entstehung des Quadrats als Summe der mit der Einheit beginnen-

---

[1]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 28. [2]) Ebenda 27 und 31. [3]) Aristoteles, Metaphys. I, 5, 6, vgl. Zeller, 5. Aufl. I, 354, Anmerkg. 3.

den ungeraden Zahlen wieder durch Aristoteles als echt pythagoräisch bezeugt[1]).

Aristoteles bedient sich dabei eines Wortes, welches für uns von großer und vielfacher Wichtigkeit ist, des Wortes Gnomon. Was ist ein Gnomon? Wörtlich genommen ein Erkenner, und zwar bedeutete es zunächst einen Erkenner der Zeit, dann der senkrechten Stellung, welche der Stab, um als Schattenwerfer und Stundenzeiger Anwendung finden zu können, einnehmen mußte. So wurde das Wort allmählich aus einem Kunstausdrucke der praktischen Astronomie zu einem solchen der Geometrie, und man sagte „die nach dem Gnomon gerichtete Linie"[2]), wenn man von einer Senkrechten reden wollte. Der Sinn des Wortes veränderte sich aber nun noch weiter. Ein mechanisch herzustellender rechter Winkel (Fig. 20) wurde so genannt oder geometrisch ausgedrückt: Gnomon war das, was von einem Quadrat übrig blieb, wenn aus dessen einer Ecke ein kleineres Quadrat herausgeschnitten wurde. Diese Bedeutung des Wortes war bei den Pythagoräern gang und gebe. Den untrüglichen Beweis dafür liefert ein erhaltenes Bruchstück des Philolaus[3]), eines Pythagoräers, dessen Lebenszeit so ziemlich gleichmäßig von den Grenzen des Jahrhunderts zwischen 500 und 400 abstehen möchte. Ebendemselben Philolaus dürfte auch der Begriff des zusammengesetzten Verhältnisses schon bekannt gewesen sein, welcher uns im 12. Kapitel begegnen wird. In noch späterer Zeit verschob sich die Bedeutung des Wortes Gnomon noch weiter. Euklid stellte um 300 die Definition auf, in einem Parallelogramme heiße ein jedes der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme mit den beiden Ergänzungen zusammen ein Gnomon[4]). Der Sinn dieser im Wortlaute nicht allzu deutlichen Erklärung ist folgender. Werden in einem Parallelogramme durch einen und denselben Punkt der Diagonale Parallellinien zu den beiden Seiten gezogen, so entstehen (Fig. 21) zwei in unserer Figur wagerecht schraffierte Parallelogramme, und zwei in unserer Figur schräg schraffierte Ergänzungsdreieckchen. Diese vier kleinen

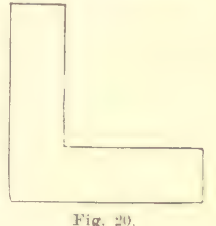


Fig. 20.

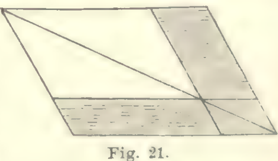


Fig. 21.

[1]) Aristoteles, Physic. III, 4. Vgl. Zeller I, 300, Anmerkung und Chaignet II, 61—62. [2]) Proklus ed. Friedlein 283, 9. [3]) Philolaus, des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes von Aug. Böckh. Berlin 1819, Fragment 18, S. 141. — Chaignet I, 240. — Wm. Romaine Newbold, Philolaus. Archiv für Geschichte der Philosophie XIX, 176—217 (Berlin 1905). [4]) Euklid, Elemente II, Definition 2.

Figuren zusammen bilden das euklidische Gnomon, eine Verallgemeinerung des älteren Begriffes insofern, als ein Stück aus einem Parallelogramme statt aus einem Quadrate herausgeschnitten wird, um es hervorzubringen. Noch etwas allgemeiner wird die Erklärung, welche nachmals Heron von Alexandria gab: Alles was zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt das Ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heißt Gnomon[1]). Doch auch diese letzte Verallgemeinerung knüpft wieder an alte Begriffe an, indem schon Aristoteles sagt, wenn man ein Gnomon um ein Quadrat herumlege, werde zwar die Größe, aber nicht die Art der Figur verändert[2]).

Nachdem wir erörtert haben, was ein Gnomon in der Geometrie bedeute, ist der Zusatz wohl leicht verständlich, daß in alten Zeiten die ungerade Zahl auch wohl Gnomonzahl genannt wurde. Denken wir uns nämlich ein Quadrat, dessen Seite n Längeneinheiten mißt, und beabsichtigen wir dieses Quadrat zum nächstgrößeren mit der Seite von $n + 1$ Längeneinheiten durch Hinzufügung eines Gnomon zu ergänzen, so ist klar, daß dieses Gnomon bestehen wird aus einem Quadratchen von der Seite 1 und aus zwei Rechtecken von den Seiten 1 und n, daß es also $1 + 2 \times n$ Flächeneinheiten besitzen wird, welche in der Tat die vorhandenen n^2 Flächeneinheiten des früheren Quadrates zu den $(n + 1)^2$ Flächeneinheiten des neuen Quadrates ergänzen. Das heißt in Zahlen: die Quadratzahl n^2 wird zur nächsten Quadratzahl $(n + 1)^2$, wenn man ihr die Gnomonzahl $2n + 1$ beifügt. So sind wir zum Verständnis der vorher angedeuteten Stelle der aristotelischen Physik gelangt[3]), einem Verständnis, in welchem wir uns mit allen alten und neuen Erklärern zusammenfinden. Die Pythagoräer, sagt dort Aristoteles, hätten die Quadratzahlen gebildet, indem sie die Gnomonen allmählich zur Einheit hinzufügten. Das will eben nichts anderes heißen als (Fig. 22) die Pythagoräer haben die Summierung $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ vollzogen, haben dieses Verfahren mit klarer Einsicht in den darin zutage tretenden Gedanken ausgeübt.

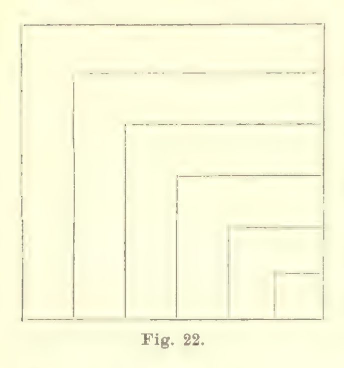


Fig. 22.

Sehen wir einen Augenblick von der arithmetischen Wichtigkeit des Satzes, der uns beschäftigt hat, ab, so ist er uns auch für die älteste Geometrie ein später noch zu verwertendes Zeugnis.

---

[1]) Heron Alexandrinus (ed. Hultsch) Definit. 59, pag. 21. [2]) Aristoteles, Categor. XIV, 5 und XI, 4. Vgl. Chaignet II, 62, Note 2. [3]) Aristoteles, Physic. III, 4.

Er läßt uns erkennen, daß die Pythagoräer den Zusammenhang, welcher zwischen den Seiten eines Quadrates, eines Rechteckes und deren Flächeninhalt stattfindet, mehr als nur ahnten, was freilich bei Schülern einer aus Ägypten eingewanderten Geometrie nicht verwundern kann. Er läßt uns ferner die Kenntnis der eigentümlichen Figur des Gnomon beachten. Einen mechanisch herzustellenden rechten Winkel nannten wir oben diese Figur, und in der Tat ist das Alter dieses Werkzeugs geradezu sagenhaft. In Ägypten sind wir ihm (S. 105) auf der bildlichen Darstellung einer Schreinerwerkstätte begegnet, und bei Plinius hat sich die Überlieferung erhalten, die Werkzeuge der Architekten, wie Axt, Säge, Bohrer, Setzwage rührten von Dädalus und dessen Neffen Talus her, welche vor dem trojanischen Kriege lebten, der rechte Winkel von Theodorus von Samos, einem der Erbauer des Tempels von Ephesus um das Jahr 600 etwa[1]).

Und noch etwas lernen wir aus der pythagoräischen Begründung des Satzes von der Entstehung der Quadratzahlen: die Neigung zur geometrischen Versinnlichung von Zahlengrößen und deren Verknüpfungen, welche wir für griechische Eigentümlichkeit halten, entsprechend dem viel und mit Recht gerühmten plastischen Sinne der Hellenen. Der erste Anstoß könnte ja, wenn man für alles eine äußere Veranlassung suchen wollte, in der ägyptischen uns aus dem Übungsbuche des Ahmes bekannten Gewohnheit den Figuren die Maßzahlen ihrer Längen, ihrer Flächen beizuschreiben gefunden werden, aber immerhin läßt das griechische Verfahren sich als einen Gegensatz zu diesem ägyptischen bezeichnen. Bei dem einen handelt es sich um die Möglichkeit geometrische Gebilde in Rechnung zu bringen, bei dem anderen um die Möglichkeit das Ergebnis rechnender Überlegung den Sinnen erfaßbar zu machen. Die Gnomonzahlen waren unter den bis hierher besprochenen nicht die einzigen, deren Versinnlichung die Pythagoräer sich angelegen sein ließen. Die Quadratzahlen selbst bilden ein anderes Beispiel, ein anderes die Heteromeken. Auf die Versinnlichung führen auch die Namen Flächen- und Körperzahlen zurück, zu deren pythagoräischem Vorkommen wir uns nunmehr wenden.

Im platonischen Timäus findet sich eine Stelle, welche etwa folgendermaßen heißt: Um mit zwei Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äußere Glieder sie sein sollen, genüge es eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen; sollen aber zwei Körper die äußeren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so

---

[1]) Plinius, Histor. natural. VII, 56.

müsse man zwei voneinander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden sei[1]).

Flächen und Körper können hier nur als Zahlen und zwar als Produkte von zwei beziehungsweise von drei Faktoren angesehen werden. Das heißt man wußte damals, daß im allgemeinen das Maß einer Fläche, eines Körpers gefunden werde, indem man zwei, drei Abmessungen miteinander vervielfältigte. Die Erklärung von Flächen- und Körperzahlen als solcher Produkte ist ausgesprochen bei Euklid[2]), sie ist ausgesprochen bei Theon von Smyrna[3]). Beide bedienen sich der Namen ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι für die Flächen-, ἀριθμοὶ στερεοί für die Körperzahlen, und der pythagoräische Ursprung derselben beweist sich aus der eben hervorgehobenen Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die Timäusstelle zur Klarheit gelangt. Denken wir uns $p_1 p_2 p_3$ $q_1 q_2 q_3$ als sechs Primzahlen und jedenfalls keine von den Primzahlen p einer Primzahl q gleich. Nun ist $p_1 p_2$ eine Flächenzahl, $q_1 q_2$ eine zweite. Deren geometrisches Mittel läßt sich bilden, d. h. $\sqrt{p_1 p_2 q_1 q_2}$ ist rational ausziehbar, sofern $p_1 = p_2$ und zugleich $q_1 = q_2$. Die gefundene Proportion heißt unter Weglassung der in diesem Falle unnötig gewordenen Indices $p^2 : pq = pq : q^2$ und es genügte wirklich eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzusetzen, um mit den angegebenen beiden Flächen eine geometrische Proportion zu bilden, deren äußere Glieder sie sein sollten. Körperzahlen werden ferner sowohl $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ als $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$. Deren geometrisches Mittel $\sqrt{p_1 p_2 p_3 q_1 q_2 q_3}$ ist aber nie rational, wenn die Vorschrift kein p einem q gleich werden zu lassen eingehalten wird, mögen die p und die q je unter sich gleich oder verschieden sein. Durch zwei Mittelglieder dagegen läßt sich die Proportion in mannigfaltiger Weise ergänzen z. B. $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_2 q_1 = q_2 q_3 p_3 : q_1 q_2 q_3$ oder $p_1 p_2 p_3 : p_1 p_3 q_2 = q_1 q_3 p_2 : q_1 q_2 q_3$ usw. Im Timäus heißt das so: Sollten zwei Körper die äußeren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so mußte man zwei voneinander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht vorhanden ist. Werden hier die p und die q wieder alle als unter sich gleich betrachtet und läßt man deshalb die Indices wieder weg, so entsteht $p^3 : p^2 q = pq^2 : q^3$ oder $p^3 : pq^2 = p^2 q : q^3$. Eine andere Auswahl von Mittelgliedern gibt es in diesem besonderen Falle nicht. Gerade er hat sich auch anderweitig erhalten. Euklid beweist, daß zwischen zwei Quadratzahlen eine, zwischen zwei Kubikzahlen zwei

---

[1]) *Études sur le Timée de Platon par* Th. H. Martin I, 91 und 337—345 und Hultsch in Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik. Jahrgang 1873. Bd. 107, 493—501. [2]) Euklid VII, Definitionen 16 und 17. [3]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller), pag. 36—37 und häufiger.

mittlere Proportionalen fallen[1]) und Nikomachus nennt diese beiden Sätze ausdrücklich platonisch[2]), ohne Zweifel in Berücksichtigung der damals allgemein bekannten Timäusstelle.

Eben diese Stelle hat bei der ausführlicheren Besprechung noch erhöhte Bedeutsamkeit für uns gewonnen. Zwei wichtige Tatsachen gelangten dadurch zu unserem Bewußtsein, die eine daß der Begriff des Irrationalen der Schule des Pythagoras angehörte, die andere daß dieselbe Schule sich viel mit Verhältnissen beschäftigte. Auf den ersteren Gegenstand kommen wir im nächsten Kapitel bei Gelegenheit des pythagoräischen Lehrsatzes zu reden. Von den Verhältnissen handeln wir sogleich.

Schon die Beziehung zwischen zwei Zahlen, welche wir heute als einen Bruch bezeichnen, gehört hierher. Die Griechen hatten für solche Beziehungen die verschiedensten Namen. Jedes $\frac{n}{n+1}$ hieß z. B. ἐπιμόριον, und Archytas hat schon den Satz ausgesprochen und bewiesen[3]), daß wenn ein Epimorion $\frac{\alpha}{\beta}$ auf seine kleinste Benennung gebracht werde, welche etwa $\frac{\mu}{\nu}$ heiße, immer $\nu = \mu + 1$ sein müsse. Da nämlich $\alpha : \beta = \mu : \nu$, so ist $\alpha = \gamma\mu$, $\beta = \gamma\nu$. Ferner folgt aus $\mu : \nu = n : (n + 1)$, daß $\nu = \mu + \frac{\mu}{n}$ und bei $\frac{\mu}{n} = \delta$, daß $\mu = n\delta$, $\nu = (n + 1)\delta$. Nun kann $\frac{\mu}{\nu} = \frac{n\delta}{(n+1)\delta}$ nur dann als auf die kleinste Benennung gebracht erscheinen, wenn $\delta = 1$, d. h. wenn $\mu = n, \nu = n + 1$ oder $\nu = \mu + 1$ ist. Satz und Beweis haben sich in musikalischen Schriften von Euklid (Κατατομὴ κανόνος) und Boethius, von welchen im 13. und im 27. Kapitel die Rede sein wird, erhalten, doch ist dort der Beweis für heutige Leser vielleicht nicht ganz so durchsichtig wie in unserer Wiedergabe, weil er nach griechischer Gewohnheit an Strecken geführt ist, welche bald durch einen einfachen Buchstaben, bald durch zwei Buchstaben (den Endpunkten der betreffenden Strecken zugehörend) bezeichnet sind. Bei Boethius ist auch beachtenswert, daß er, dem die Einheit keine Zahl war, zwischen Zahl und Einheit unterscheidet.

Wir sind nicht auf die Timäusstelle allein angewiesen, um die Analogien und Mesotäten, das sind die griechischen Namen für Verhältnisse und dabei auftretende Mittel, für die Pythagoräer in

---

[1]) Euklid VIII, 11 und 12. [2]) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 24, 6 (ed. Hoche), pag. 129. [3]) P. Tannery in der Bibliotheca Mathematica 3. Folge, Bd. VI, 225—229 unter Berufung auf Musici Scriptores (ed. v. Jan pag. 152) und Boethius, De institutione musica III, 11 (ed. Friedlein pag. 285).

Anspruch zu nehmen. Ein bei Nikomachus aufbewahrtes Bruchstück des Philolaus[1]) läßt den Würfel die geometrische Harmonie genannt werden, weil seine sämtlichen Abmessungen völlig gleich untereinander und somit in vollständigem Einklange seien. Dementsprechend habe man den Namen harmonisches Verhältnis wegen der Ähnlichkeit mit der geometrischen Harmonie eingeführt. In der Tat spiegle sich dieses Verhältnis in jedem Würfel mit seinen 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen ab. Wir haben kaum notwendig diese Stelle noch zu erläutern und zu bemerken, daß 6, 8, 12 in stetigem harmonischen Verhältnisse stehen, weil $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$.

Ein bei Porphyrius erhaltenes Bruchstück des soeben erwähnten Pythagoräers Archytas[2]) spricht nicht nur von dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, er definiert sie geradezu, und zwar die beiden ersten in der heute noch gebräuchlichen Weise. Bei dem harmonischen Verhältnisse, fährt er fort, übertrifft das erste Glied das zweite um den gleichen Teil seiner selbst, wie dieses mittlere Glied das dritte um den Teil des dritten. In Buchstaben geschrieben heißt das: b ist harmonisches Mittel zwischen a und c, wenn $a = b + \frac{a}{n}$ und zugleich $b = c + \frac{c}{n}$. Wirklich folgt aus diesen beiden Gleichungen $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ und daraus $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

Jamblichus[3]) führt die Kenntnis der drei stetigen Proportionen, der arithmetischen, geometrischen und harmonischen, auf Pythagoras und seine Schule zurück und läßt die musikalische Proportion, welche aus zwei Zahlen, deren arithmetischem und harmonischem Mittel sich bilde $\left(a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b\right.$, z. B. $6 : 9 = 8 : 12$), durch Pythagoras aus Babylon, wo sie erfunden worden sei, zu den Hellenen bringen.

Es fällt nicht schwer das Auftreten der harmonischen Proportion auch von ägyptischen Anfängen aus zu erklären. War doch in der Bezeichnung der Stammbrüche durch ein Pünktchen über der den Nenner bildenden Zahl die Zumutung, möchten wir sagen, mit enthalten, neben solchen Zahlen a, b, c, welche eine arithmetische Reihe

[1]) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 26, 2 (ed. Hoche), pag. 135. Vgl. Boeckh, Philolaus fragm. 9, S. 87. Chaignet I, 233. [2]) Porphyrius ad Ptolemaei Harmonica. Vgl. Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoreer. Berlin 1840, S. 94. Chaignet I, 282—283. [3]) Jamblichus, Introductio in Nicomachi arithmeticam (ed. Tennulius), Arnheim 1668, pag. 141—142 und 168 (ed. Pistelli) pag. 100 und 118.

darstellen, auch eben dieselben punktiert zu betrachten, und dann hatte man die harmonische Reihe, deren musikalische Bedeutung bei der Entstehung der Töne auf dem Monochorde wohl erst in zweiter Linie bemerkt worden sein mag. Allerdings ist andererseits nicht zu vergessen, daß im alten Ägypten eine Proportionenlehre noch nicht nachgewiesen hat werden können, daß arithmetische und geometrische Reihen wie in Ägypten so auch in Babylon bekannt waren, daß nach dem letzteren Orte Quadratzahlen und Kubikzahlen hinweisen. Wir erinnern ferner daran, daß Jamblichus sich genauer mit Chaldäischem beschäftigte (S. 51) und sind darum trotz der späten Zeit, in welche seine schriftstellerische Tätigkeit fällt, sehr geneigt diesen seinen Worten soweit Glauben zu schenken, als sie alte gräkobabylonische Beziehungen betreffen. Auch mehr oder weniger auf Zahlenspielerei herauskommende Zahlenverknüpfungen, Vergleichung von Zahlen mit einzelnen Götterfiguren, das sind lauter Dinge, die den Babyloniern, die den Pythagoräern eigen sind. Dafür aber, daß wir alles in der pythagoräischen Schule von solchen Dingen Vorgetragene auch in ihr erfunden lassen sein sollten — der einzige Ausweg, wenn jede Verbindung mit Babylon verworfen wird — dafür erscheinen uns dieselben zu entwickelt. Solche arithmetische Kenntnisse setzen eine ganze lange Vorgeschichte voraus. Die Überzeugung davon würde nun ungemein befestigt, wenn es wahr sein sollte, daß auch die befreundeten und vollkommenen Zahlen bereits der pythagoräischen Schule angehörten.

Befreundete Zahlen sind solche, wie 220 und 284, von welchen jede gleich der Summe der aliquoten Teile der anderen ist: $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ und $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. Jamblichus führt deren Kenntnis auf Pythagoras selbst zurück[1]). Man habe ihn befragt, was ein Freund sei, und er habe geantwortet: „Einer der ein anderes Ich ist, wie 220 und 284.“ Wir möchten freilich auf diese Behauptung wenig Gewicht legen und kein größeres darauf, daß im IX. S. ein arabischer Gelehrter Tâbit ibn Kurra für die Kenntnis der befreundeten Zahlen auf die Pythagoräer verwies[2]). Letzterer kann sehr wohl seine Wissenschaft dieses Umstandes aus Jamblichus geschöpft haben, ersterem kann vorgeschwebt haben, daß die Innigkeit der Freundschaften unter den Pythagoräern von jeher als kennzeichnend für diese Schule galt[3]).

Vollkommene Zahlen sind solche, welche wie 6, 28, 496 der

---

[1]) Jamblichus in Nicomach. arithm. ed. Tennulius pag. 47—48 ed. Pistelli pag. 35. [2]) Vgl. Woepke im *Journal Asiatique*, IV. Série, T. 20 (Jahrgang 1852), pag. 420. [3]) Vgl. Zeller I, 271, Anmerkung 3.

Summe ihrer aliquoten Teile gleich sind: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$. Daneben unterscheidet man überschießende und mangelhafte Zahlen, wenn die aliquoten Teile eine zu große beziehungsweise zu kleine Summe liefern, wie z. B. $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$; $8 > 1 + 2 + 4$. Euklid hat sich ausführlich mit den vollkommenen Zahlen beschäftigt[1]). Theon von Smyrna hat den drei verschiedenen Gattungen seine Aufmerksamkeit zugewandt und dieselben als *ἀριθμοὶ τέλειοι*, *ὑπερτέλειοι*, *ἐλλιπεῖς* benannt[2]). Man könnte demzufolge geneigt sein diese Begriffe als vorplatonische anzuerkennen, wenn nicht ein kaum zu beseitigender Gegengrund vorhanden wäre. Plato versteht nämlich in einer berühmten Stelle seines Staates den Ausdruck vollkommene Zahl ganz anders[3]) und Aristoteles bezeichnet mutmaßlich aus pythagoräischer Quelle die Zehn als vollkommene Zahl[4]) wiederum notwendig von einer ganz anderen Erklärung ausgehend. Diese beiden Gegenstände arithmetischer Grübelei werden wir daher am sichersten zwar Pythagoräern aber nicht solchen der alten Schule zuschreiben, sondern solchen, die in viel späterer Zeit den Namen und zum Teil auch die Forschungsweise derselben erneuerten.

Die Dreieckszahlen, sagten wir (S. 159) gestützt auf Theon von Smyrna, wurden von den Pythagoräern gebildet, indem sie versuchsweise die aufeinanderfolgenden Zahlen der mit 1 beginnenden natürlichen Zahlenreihe addierten. In diesem Namen Dreieckszahl zeigt sich aufs neue der Hang zur figürlichen Versinnlichung der nach unserer heutigen Auffassung abstrakten Zahlenbegriffe. Die aufeinanderfolgenden Zahlen nämlich durch gleich weit voneinander entfernte Punkte reihenweise untereinander zur Darstellung gebracht bildeten Dreiecke, und daß man diese Versinnlichung wirklich vornahm, mag man zu ihr gelangt sein wie man wolle, dafür bürgt eben der Name Dreieckszahl, *ἀριθμὸς τρίγωνος*. Es ist vielleicht wünschenswert noch von anderer Seite her zu bestätigen, daß wir hier wirklich Altertümliches vor uns haben, und dazu sind wir in der Lage. Wenig Gewicht freilich legen wir für diese Rückdatierung auf den an sich interessanten von Plutarch uns erhaltenen Lehrsatz, daß die mit 8 vervielfachten und um 1 vermehrten Dreieckszahlen Quadratzahlen gaben[5]) d. h. daß $8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2$. Erheblicher

---

[1]) Euklid IX, 36. [2]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 45. [3]) Plato Republ. VIII, pag. 546. Vgl. einen Aufsatz von Th. H. Martin in der *Revue Archéologique* T. XIII. [4]) Aristoteles, Metaphys. I, 5. [5]) Plutarch, Platonicae Quaestion. V, 2, 4.

ist schon das, was Lucian uns erzählt[1]). Pythagoras habe einen zählen lassen. Dieser sagte: „1, 2, 3, 4", worauf Pythagoras dazwischen fuhr: Siehst du? Was du für 4 hältst, das ist 10 und ein vollständiges Dreieck und unser Eidschwur! Hierin ist die Kenntnis der Dreieckszahl 10 mit echt pythagoräischen Dingen in Verbindung gesetzt. Weit älter und dadurch noch überzeugender ist das Vorkommen des Begriffes wenn nicht des Wortes bei Aristoteles: Die einen führen die Zahlen auf Figuren wie das Dreieck und Viereck zurück[2]). Kommt nun endlich noch hinzu, daß einem Schüler des Sokrates und des Platon, dem Philippus Opuntius, bereits eine Schrift über vieleckige Zahlen zugeschrieben wird, welche er nebst einer anderen über Arithmetik bei Philipp von Mazedonien verfaßt haben soll[3]), so scheint uns damit der Beweis geliefert, daß wie die Quadratzahl und ihre Entstehung aus den ungeraden, wie die heteromeke Zahl und ihre Entstehung aus den geraden, so auch die Dreieckszahl und ihre Entstehung aus den unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen bereits pythagoräisch gewesen sein müsse.

Bei diesen drei Summierungen von nach einfachen Gesetzen fortschreitenden Zahlen blieb man aber, wie uns berichtet wird, nicht stehen. Man schrieb die Reihe der Quadratzahlen, von der 1 an, man schrieb darunter aber erst von der 3 anfangend die ungeraden Zahlen, und wenn man nun jede solche ungerade Zahl der zugehörigen Quadratzahl als Gnomon zufügte, so entstanden wieder Quadratzahlen[4]). Für uns heute fällt freilich diese Entstehungsweise:

$$\begin{array}{cccl} 1 & 4 & 9 & \ldots n^2 \\ 3 & 5 & 7 & \ldots 2n+1 \\ \hline 4 & 9 & 16 & \ldots (n+1)^2 \end{array}$$

mit der ersterläuterten Bildung der Quadratzahlen zusammen, aber den Alten war sie besonderer Hervorhebung wert. Nikomachus, ungefähr Zeitgenosse des Theon von Smyrna, und ihm geistesverwandt, hat ein Beispiel ähnlichen Verfahrens bei Dreieckszahlen uns bewahrt[5]). Jede Dreieckszahl, sagt er, mit der nächstfolgenden Dreieckszahl vereinigt gibt eine Quadratzahl, und wirklich ist $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$. Hier wagen wir nun, gestützt auf alle diese einander ähnlichen Verfahren, eine unmittelbar nicht auf Überlieferung sich stützende Vermutung[6]). Wir nehmen an, es sei auch die Addi-

[1]) Lucian *Βίων πρᾶσις*, 4. Vgl. Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* pag. 28 r. [2]) Aristoteles, Metaphys. XIV, 4. [3]) *Βιογραφοί, vitarum scriptores Graeci minores* edit. Westermann. Braunschweig 1845, pag. 446. [4]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 32. [5]) Nicomachus, Eisagog. arithm. II, 12 (ed. Hoche), pag. 96. [6]) Math. Beitr. Kulturl. 105—107.

tion von je zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen vorgenommen worden, um wie in den vorher erwähnten Beispielen einmal zuzusehen, ob dabei etwas Bemerkenswertes sich enthülle. In der Tat fand sich ein höchst auffallendes Ergebnis: Die Quadratzahlen 9 und 16 lieferten als Summe die nächste Quadratzahl 25, und nur bei ihnen zeigte sich diese Erscheinung. Dem heutigen Mathematiker ist solches freilich nicht auffallend. Wir erkennen sofort, daß die Gleichung $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ nur die Wurzeln $x = 4$ und $x = 0$ besitzt, daß also nur $3^2 + 4^2 = 5^2$ auftreten kann, wenn man $(-1)^2 + 0^2 = 1^2$ oder anders geschrieben $0 + 1 = 1$ nicht beachten will. Aber der Grieche jener alten Zeit konnte diese Überlegung nicht anstellen, konnte, wenn sie ihm möglich gewesen wäre, die zweite Gleichung nicht denken. Wir kommen auf den Zahlenbegriff der Griechen noch zurück. Gegenwärtig wissen wir nur, daß die Null, für welche sie kein Zeichen hatten, ihnen auch keine Zahl war. Wir sind darüber aufs deutlichste durch einen der schon genannten Arithmetiker unterrichtet. Nikomachus sagt uns, jede Zahl sei die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abstehenden Zahlen; nur die Einheit bilde eine Ausnahme, weil sie keine zwei Nachbarzahlen besitze; sie sei darum die Hälfte der einen unmittelbar benachbarten Zahl[1]).

So mußten die Zahlen 9, 16, 25 und mit ihnen die Zahlen 3, 4, 5, deren Quadrate sie waren, welche ihre Ordnungszahlen in der Reihe der Quadratzahlen bildeten, der Aufmerksamkeit empfohlen sein, um so dringender empfohlen sein, wenn dieselben Zahlen schon anderweitig als mit merkwürdigen Eigenschaften versehen bekannt waren. Daß dem so war, darüber müssen wir uns jetzt zu vergewissern suchen, ohne zu vergessen, daß $3^2 + 4^2 = 5^2$ den Ägyptern bekannt war.

7. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie.

Wir sind an dem Punkte angelangt, wo wir die nur im Bilde geometrische Arithmetik der Pythagoräer mit ihrer eigentlichen Geometrie in Verbindung treten sehen. Wir haben demgemäß auch auf diesem Gebiete abzusuchen, was unmittelbare oder mittelbare Überlieferung dem Pythagoras und seiner Schule zuweist.

Zunächst können wir eine ganze Gruppe von geometrischen Kenntnissen zusammenfassen unter dem gemeinsamen Namen der An-

---

[1]) Nicomachus, Eisagog. arithm. I, 8 (ed. Hoche), pag. 14.

legung der Flächen. „Altertümlich, so sagen die Schüler des Eudemus, und Erfindungen der pythagoräischen Muse sind diese Sätze, die Anlegung der Flächen, ihr Überschießen, ihr Zurückbleiben.“ ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις[1]). So lautet der erläuternde Bericht des Proklus zu der euklidischen Aufgabe an einer gegebenen Geraden unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm zu entwerfen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei. Desselben Wortes ἐλλείπειν bei Anlegung von Flächen bedient sich Platon in seinem Menon[2]), und Plutarch läßt an einer Stelle das Anlegen von Flächen, παραβάλλειν τοῦ χωρίου, von Pythagoras selbst herstammen[3]), während er an einer anderen Stelle sich folgendermaßen ausdrückt: „Eines der geometrischsten Theoreme oder vielmehr Probleme ist das, zu zwei gegebenen Figuren eine dritte anzulegen — παραβάλλειν —, die der einen gleich und der anderen ähnlich ist. Pythagoras soll, als er die Lösung gefunden, ein Opfer gebracht haben. Und wirklich ist es auch feiner und wissenschaftlicher als das, daß das Quadrat der Hypotenuse denen der beiden Katheten gleich ist“[4]). Über die genauere Bedeutung der drei Wörter Parabel, Ellipse, Hyperbel bei Flächenanlegungen werden wir bei Besprechung der euklidischen Geometrie im 13. Kapitel zu reden haben. Fürs erste genügt die allgemeine aus den angeführten Stellen leicht zu schöpfende Überzeugung, daß es um die Zeichnung von Figuren gegebener Art und gegebener Größe sich handelt. Solche Zeichnung ist aber unmöglich, wofern man nicht mit den Haupteigenschaften der Parallellinien und ihrer Transversalen, mit den hauptsächlichen Winkelsätzen der Planimetrie vertraut ist, wofern man nicht die Auffindung von Flächeninhalten, deren Abhängigkeit von den die betreffende Figur bildenden Seiten in richtiger Weise kennt.

In der ersteren Beziehung sind wir wieder in der günstigen Lage, unsere Behauptung bestätigen zu können. Die Pythagoräer verwandten die Parallellinien zum Beweise des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. Wir sahen (S. 143), daß die thaletische Zeit, vielleicht Thales selbst, den Satz von der Winkelsumme in dreifacher Abstufung an dem gleichseitigen, an dem gleichschenkligen, an dem unregelmäßigen Dreiecke behandelte. Eudemus läßt durch die Pythagoräer den Satz für jedes beliebige Dreieck so bewiesen werden, daß durch die Spitze des Dreiecks die Parallele zur Grundlinie gezogen und daraus die Gleichheit der Winkel an der

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 419. [2]) Platon, Menon pag. 87. [3]) Plutarch, *Non posse suaviter vivi secundum Epicur.* cap. 11. [4]) Plutarch, *Convivium* VIII, cap. 4.

Grundlinie mit ihren an jener Parallelen hervortretenden Wechselwinkeln gefolgert wurde. Einer jener Wechselwinkel wurde sodann mit dem ursprünglichen Dreieckswinkel an der Spitze zu einem einzigen Winkel vereinigt, welcher selbst wieder den anderen Wechselwinkel als Nebenwinkel besaß und mit ihm zusammen zwei Rechte ergab[1]).

Aus dieser Darstellung zeigt sich so recht deutlich an einem besonders merkwürdigen, in der Stufenfolge der Beweisführungen uns glücklich erhaltenen Beispiele, wie die Wissenschaft der Geometrie sich entwickelte. Von dem Zerlegen des Satzes in drei Fälle stieg man auf zur Behandlung des allgemeinen Falls, aber in diesem Aufwärtsstreben hielt man wieder ein. Man erhob sich noch nicht zu dem Ausspruche, die drei Winkel an der früheren Dreiecksspitze besäßen als Winkel, die je einen Schenkel gemeinsam für zweie haben, und die einfach auftretenden äußersten Schenkel zu einer und derselben Geraden sich verlängern lassen, die Winkelsumme von zwei Rechten. Man mußte vielmehr erst zwei Winkel zu einem neuen, diesen alsdann mit dem dritten verbinden. Freilich ist der letzterwähnte Fortschritt, den man noch nicht wagte, nach unserem Gefühle, auch wohl nach dem Gefühle des Proklus, welcher wenigstens von dessen Urheber uns nichts sagt, ein weit geringerer, als der, den man wirklich vollzog, und wir erkennen hier bewundernd den „höheren Gesichtspunkt, von welchem aus Pythagoras, dem Mathematikerverzeichnisse (S. 147) zufolge, die Grundlage unserer Wissenschaft betrachtete".

Wir haben auch die Notwendigkeit betont, den Flächeninhalt einer Figur aus den dieselbe bildenden Seiten in richtiger Weise finden zu können. Unseren mathematischen Lesern dürfte diese Betonung überflüssig erscheinen, aber sie ist es nicht so ganz. Bei einem Volke von überwiegend geometrischer Begabung, wie es unstreitig das griechische war, konnte noch um das Jahr 400 v. Chr., also zur Zeit Platons, einer der geistreichsten, tiefsten Geschichtsschreiber aller Jahrhunderte, konnte noch ein Thukydides so wenig Bescheid wissen, daß er Inhalt und Umfang als proportional dachte, daß er infolgedessen die Fläche der Insel nach der zum Umfahren nötigen Zeit abschätzte[2]). Diese Unkenntnis auch hochgebildeter Laien in einem theoretisch so einfachen, praktisch so wichtigen Kapitel der Planimetrie läßt sich dann weiter und weiter verfolgen. Um 130 v. Chr. erzählt Polybius, daß es Leute gebe, die nicht be-

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 379. [2]) Thukydides VI, 1 (ed. Rothe), pag. 95.

greifen könnten, daß Lager bei gleicher Umwallungslänge verschiedenes Fassungsvermögen besitzen[1]). Quintilian, der römische Schriftsteller über Beredsamkeit in der zweiten Hälfte des ersten nachchristlichen Jahrhunderts, gibt als dem Laien leicht aufzudrängenden Trugschluß den an, daß gleicher Umfang auch gleichen Inhalt beweise[2]). Vielleicht hatte Quintilian bei diesem Vorwurfe seinen Zeitgenossen Plinius im Auge, welcher die Größenverhältnisse der Erdteile durch Addieren ihrer Länge zu ihrer Breite verglich[3]). Proklus erzählt mit offenbarer Beziehung auf Vorkommnisse seiner Zeit, also des V. S., daß manche schon bei der Teilung von Flächen ihre Gesellschafter übers Ohr gehauen haben, indem sie eine größere Fläche mit Bezugnahme auf die Gleichheit des Umfanges für sich beanspruchten[4]). Steuerbeamte in Palästina ließen sich gleichfalls um das V. S. in solcher Weise täuschen, indem sie einem Gemeindevorsteher, welchem als Steuer der Ertrag einer mit Weizen zu besäenden Fläche von 40 Ellen im Quadrat auferlegt war, verwilligten, er könne in zwei Abteilungen jedesmal eine Fläche von 20 Ellen im Quadrat besäen, in der Meinung, dann sei er seiner Verpflichtung nachgekommen[5]), und ganz Ähnliches wird von einem Araber des X. S. erzählt[6]). Wir haben diese fehlerhafte Auffassung absichtlich durch einen längeren Zeitraum und durch Völker hindurch verfolgt, welche einer Stetigkeit der Geistesrichtung als Beispiel dienen können, denn das mathematische, insonderheit das geometrische Denken der Römer, der späteren Juden, der Araber war nicht anders als griechisch. Wir haben sie verfolgt, um uns über einen allgemeinen geschichtlichen Lehrsatz klar zu werden, dem wir eine nicht geringe Tragweite besonders bei geschichtlich vergleichenden Forschungen beilegen. Die Unwissenheit, so lautet unser Satz, und das noch schlimmere falsche Wissen sind erblich, es gibt eine konservative Kraft der Unwissenheit. Was an unrichtigen Ergebnissen einmal gewonnen ist, das wird so leicht nicht zerstört, das wird mit um so größerer Zähigkeit festgehalten, je mehr es unverstanden ist. Nur die Menge der Unwissenden und Halbwissenden wechselt, und in ihrer Beschränkung liegt das, was man Fortschritt der Durchschnittsbildung nennt.

---

[1]) Polybius IX, 21 (ed. Hultsch), pag. 686. [2]) Quintilianus, *Institutio oratoria* I, 10, 39 flgg. (ed. Halm) pag. 62. [3]) Detlefsen, Die Maasse der Erdtheile nach Plinius. Programm des Glückstädter Gymnasiums für 1883, S. 6—7 mit Berufung auf Plinius, Histor. natur. VI, 208. [4]) Proklus (ed. Friedlein), pag. 237. [5]) Jerusalem. Talmud Sota 20a nach Zuckermann, Das Mathematische im Talmud. Breslau 1878, S. 43, Note 58. [6]) Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert, S. 35.

Der Flächenanlegung nahe verwandt und mit ihr den Pythagoräern eigen ist die Lehre von den regelmäßigen Vielflächnern, angedeutet in den Worten des Mathematikerverzeichnisses: „Pythagoras ist es auch, der die Konstruktion der kosmischen Körper erfand.“ Der Name der kosmischen Körper bedarf der Erklärung. Wie Aristoteles uns berichtet, war Empedokles von Agrigent in Sizilien, ein Philosoph, der um 440, jedenfalls später als Pythagoras lebte, der erste, der vier Elemente, Erde, Wasser, Luft und Feuer, annahm, aus denen alles zusammengesetzt sei[1]). Vitruvius und andere Gewährsmänner wollen, Pythagoras habe schon vorher das Gleiche ausgesprochen[2]). Wir haben eine Wahl zwischen beiden Meinungen hier nicht zu treffen. Jedenfalls übernahm Timäus von Lokri aus der einen oder anderen Quelle die Lehre, wie der nach ihm benannte platonische Dialog erkennen läßt. Timäus erläutert die Entstehung der Welt, setzt das Vorhandensein der vier Grundstoffe auseinander, gibt denselben besondere Gestalten[3]). Das Feuer trete als Tetraeder auf, die Luft bestehe aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Gestaltung möglich war, so habe Gott diese, das Pentagondodekaeder benutzt, um als Umriß des Weltganzen zu dienen[4]). Diese fünf Körper heißen dem entsprechend kosmische Körper als zum Kosmos in notwendiger Beziehung stehend.

Die Geschichte der Mathematik entnimmt den atomistischen Versuchen jener ältesten Lehren dieser Art die wichtige Wahrheit, daß Timäus die fünf regelmäßigen Körper kannte. Ob er ahnte, daß es wirklich keinen sechsten regelmäßigen Körper gebe, ob er ohne auch nur die Frage nach einem solchen zu erheben sich mit Verwertung der nun einmal bekannten Körperformen begnügte, wissen wir nicht. Wahrscheinlicher deucht uns das letztere, und nun gar einen Beweis der Unmöglichkeit eines sechsten regelmäßigen Körpers in so früher Zeit anzunehmen, würden wir aufs entschiedenste ablehnen müssen. Dagegen hat es keine Schwierigkeit diejenigen Kenntnisse, welche wir als Timäus geläufig bezeichneten, d. h. die Gestalt der fünf regelmäßigen Körper bis in jene Zeit, auch wohl darüber hinaus zu verfolgen[5]).

Körper wie der Würfel, das Tetraeder, welches nichts anderes

---

[1]) Aristoteles, Metaphys. I, 4. [2]) Vgl. Chaignet II, 164flgg. [3]) Vgl. Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon* I, 145flgg. und II, 234—250. [4]) Zeller I, 350, Anmerkung 1 nimmt an, das Dodekaeder sei nicht die Gestalt des Weltganzen, sondern des Ätheratoms, d. h. des kleinsten Teiles der das Weltganze umgebenden äußeren Schichten. [5]) Das hier Folgende wesentlich nach Bretschneider S. 86 und 88.

als eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, das Oktaeder, welches eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche ist, müssen noch weit über das Zeitalter des Pythagoras zurück sich als den Ägyptern bekannt vermuten lassen. Wer bei ihnen jahrelang verweilte, ja wer nur kurze Zeit die Baudenkmäler ihres Landes in Augenschein nahm, dem ist die Kenntnis auch jener Körper mit Notwendigkeit zuzusprechen, und daß die Pythagoräer kein Bedenken trugen, was ihr Lehrer wußte, als seine Erfindung zu verehren, wurde schon erwähnt. Auch das Ikosaeder und nicht minder das Dodekaeder muß wohl oder übel den Pythagoräern bekannt gewesen sein. Sonst könnte nicht Philolaus schon von den fünf Körpern in der Kugel reden[1]), sonst würde nicht das alte Mathematikerverzeichnis nebst anderen übereinstimmenden Berichten[2]) so deutlich sämtliche kosmische oder regelmäßige Körper als pythagoräisch bezeichnen. Möglicherweise haben wir den Verlauf der Entdeckung jener Körper so zu denken, daß man zuerst nur von Würfel, Tetraeder, Oktaeder wußte, daß dann das Ikosaeder, zuletzt erst, wenn auch jedenfalls noch vor Timäus, das Dodekaeder hinzutrat. Mit dieser Annahme würde die Schwierigkeit sich lösen, daß die ursprünglich jedenfalls in Vierzahl angenommenen Grundstoffe mit den fünf Körpern nur sehr künstlich in Verbindung zu bringen sind. Es würden nämlich zunächst vier Körper mit vier Elementen durch einen naturgemäßen Gedanken sich gepaart haben, und zu dem nachträglich gefundenen fünften Körper würde dann eine kosmische Bedeutung erst gesucht worden sein.

Mit dieser Annahme würde auch die Erzählung des Jamblichus[3]) sich decken, daß Hippasus, ein Pythagoräer, der das Pentagondodekaeder der Kugel zuerst einschrieb und veröffentlichte, wegen dieser Gottlosigkeit im Meer umgekommen sei. Er habe den Ruhm der Entdeckung davongetragen, „aber es sei das Eigentum JENES, so bezeichnen sie nämlich den Pythagoras und nennen ihn nicht bei Namen“.

Man würde vielleicht eine größere Sicherheit in der Beantwortung dieser Fragen erlangen, wenn man Alter und Herkunft eines noch vorhandenen Bronzedodekaeders zu bestimmen imstande wäre[4]). Dabei sind zahlreiche andere Dodekaeder zu vergleichen, welche auf keltischem Boden[5]), welche auch in Oberitalien[6]) aufgefunden worden sind.

---

[1]) Boeckh, Philolaus fragm. 21, S. 160. Chaignet I, 248. [2]) Vgl. Wyttenbach, Ausgabe von Platons Phädon. Leiden 1810, pag. 304—307. [3]) Jamblichus, *Vita Pythagorica* 88. [4]) Vgl. verschiedene Notizen von Graf Leopold Hugo in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie der Wissenschaften. Bd. LXXVII. [5]) Conze, Über ein Bronzegerät in Dodekaederform. Westdeutsche Zeitschrift für Geschichte und Kunst (1892) XI, 204. [6]) F. Linde-

Man hat diese Funde für sehr alt und um Jahrhunderte über Pythagoras hinausreichend erklärt, und, wenn diese Zeitbestimmung richtig sein sollte, so dürfte auch gegen gewisse Folgerungen aus denselben[1]) wenig einzuwenden sein. Unter den Eisenerzen kommt der Pyrit (Schwefelkies) auf Elba und in den südlichen nach dem Piemont ausmündenden Alpentälern, sonst aber nirgend, in Kristallen vor, welche von 20 Dreiecken, und in anderen, welche von 12 Fünfecken begrenzt sind. Regelmäßige Ikosaeder und Dodekaeder sind das nicht, ähneln denselben aber, und als in der anfangenden Eisenzeit jenes Metall an Wichtigkeit gewann, können jene Kristallformen Verehrung und Nachbildung gefunden haben. Wenn nun[2]) berichtet wird, Pythagoras habe auch von den Galliern gelernt, ein Bericht, den wir, weil wir ihm nicht zu sehr trauen, bei unseren Angaben über das Leben des Pythagoras übergingen, so könnte das auf das Kennenlernen jener Körperformen von Norden her sich beziehen. Pythagoras hätte dann in der Tat alle regelmäßigen Körper oder denselben einigermaßen ähnelnde gekannt, und dem Hippasus blieb als lohnende Aufgabe das mathematische Erkennen des vor ihm nur erfahrungsmäßig Vorhandenen.

Mit den Angaben über die fünf Körper im engsten Zusammenhange stehen die über die Kugel, in welche jene beschrieben gedacht sind, und welche demzufolge nebst einigen ihrer Eigenschaften gleichfalls den Pythagoräern bekannt gewesen sein muß.

In demselben Zusammenhange erscheinen Angaben, welche sich auf die Grenzflächen jener Körper, auf die regelmäßigen Vielecke, als Dreiecke, Vierecke, Fünfecke beziehen, und denen wir uns nunmehr zuzuwenden haben. Wir kehren damit zur Flächenanlegung zurück, deren Verwandtschaft zur Lehre von den Vielflächnern wir oben zunächst unerwiesen behauptet haben. Platon läßt seinen Timäus über die Entstehung der regelmäßigen Dreiecke und Vierecke sich aussprechen. Er sagt[3]), diese Figuren setzten ihre Fläche immer aus rechtwinkligen Dreiecken zusammen, und zwar entweder aus solchen, welche zugleich gleichschenklig sind, oder aus solchen, deren spitze Winkel, der eine einem Dritteil, der andere zwei Dritteilen des rechten Winkels gleich sind. Das hat nun offenbar seine Richtigkeit, indem das Quadrat in zwei oder vier Dreiecke der ersten Art (Fig. 23), das gleichseitige Dreieck in zwei oder sechs

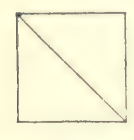


Fig. 23.

mann, Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen. Sitzungsberichte der mathem. physik. Klasse der k. bayer. Akad. der Wissensch. (1897) XXVI, 625—758.

[1]) Lindemann l. c. [2]) Zeller I, 277. [3]) Platon, Timaeus 54 B und 54 D.

Dreiecke der zweiten Art (Fig. 24) zerlegt werden kann. Übereinstimmend damit, aber sicherlich einer anderen Quelle als dem platonischen Timäus, über dessen Angaben er hinausgeht, folgend sagt Proklus, es sei ein pythagoräischer Lehrsatz, daß die Ebene um einen Punkt herum durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate oder drei regelmäßige Sechsecke vollständig erfüllt werde, so daß nur diese Figurengattungen zur gänzlichen Zerlegung einer Ebene in lauter identische Stücke Benutzung finden[1]. Wir wollen daran anknüpfend nur erinnern, daß wir schon (S. 143) die Kenntnis solcher um einen Punkt herumliegenden sechs gleichseitigen Dreiecke wahrscheinlich zu machen suchen mußten, und daß folglich rückwärts die Angabe des Proklus unsere dortigen Behauptungen zu stärken imstande ist.

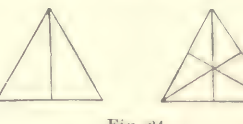


Fig. 24.

Wie verhält es sich aber gegenüber der Zerfällung der Grenzflächen der vier ersten Körper mit der Grenzfläche des fünften und letzten, mit dem regelmäßigen Fünfecke? Das Fünfeck ist, wie leicht ersichtlich, mittels der beiden rechtwinkligen Dreieckchen, die wir nach der Vorschrift des Timäus für die Herstellung von Dreieck und Viereck benutzten, nicht zusammenzusetzen, eine Zerlegung in eben solche kann mithin nie gelungen sein. Wohl aber dürfen wir erwarten, Spuren verfehlter Versuche anzutreffen, und diese fehlen nicht. Plutarch hat an zwei Stellen von der Zerlegung der das Dodekaeder begrenzenden Fläche in 30 Elementardreiecke gesprochen, hat das eine Mal hervorgehoben, daß somit alle 12 Flächen 360 Dreieckchen liefern, gleich an Zahl mit den Zeichen des Tierkreises[2], hat das andere Mal bemerkt, es solle, wie man sage, das Elementardreieckchen des Dodekaeders von dem des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders verschieden sein[3]. Ein anderer Schriftsteller des II. S., Alkinous, hat in seiner Einleitung zum Studium des Platon gleichfalls von den 360 Elementen gesprochen, welche erzeugt werden, indem jedes Fünfeck in 5 gleichseitige Dreiecke, jedes von diesen in 6 ungleichseitige zerfalle[4]. Nimmt man nun diese Zerlegung wirklich vor (Fig. 25), so tritt aus dem Gewirre der

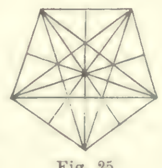


Fig. 25.

Fig. 26.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 304—305. Vgl. auch Heron (ed. Hultsch) pag. 22 Definitio 74. [2]) Plutarchus, Quaest. Platon. V. [3]) Plutarchus, *De silentio oracul.* cap. 33. [4]) Alcinous, *De doctrina Platonis* (ed. Lambinus). Paris 1567, cap. 11.

Linien am deutlichsten das Sternfünfeck heraus, welches demnach für sich schon ein Zeugnis der versuchten Zerlegung des Fünfecks in Elementardreiecke ablegt. Das Sternfünfeck (Fig. 26) soll aber den Pythagoräern Erkennungszeichen gewesen sein. Lucian und der Scholiast zu den Wolken des Aristophanes berichten darüber gleichmäßig[1]). Briefe pflegten mit irgend einer ständigen Anfangsformel eingeleitet zu werden. Die einen schrieben: Freue Dich, *χαίρειν*, die anderen mit Platon: Sei glücklich in Deinen Handlungen, *εὐ πράττειν*, die Pythagoräer: Sei gesund, *ὑγιαίνειν*. Gesundheit heißt auch bei ihnen das dreifache Dreieck, das durch gegenseitige Verschlingung das Fünfeck erzeugt, das sogenannte Pentagramm, dessen sich die Glieder des Bundes als Erkennungszeichen bedienen. Freilich kommt das Pentagramm auf der sogenannten Aristonophosvase aus Caere, welche dem 7. vorchristlichen Jahrhunderte angehören soll, kommen fünfeckige Ornamente in mykenischen Funden, kommen fünfspeichige Räder auf oberitalienischen Fundstücken vor[2]), und wieder unter der Annahme richtiger Zeitbestimmung für die Entstehung hätten wir alsdann das Fünfeck als vorpythagoräisch anzuerkennen, und nur die mathematische Betrachtung desselben gehörte der Schule an.

Unter allen Umständen ist die seltsame Bedeutung, welche die freilich auch seltsame Figur des Sternfünfecks bei den Pythagoräern besaß, eine Unterstützung der kaum mehr bestrittenen Vermutung, daß das regelmäßige Fünfeck von den Pythagoräern der Beachtung unterzogen, wenn nicht erfunden worden sei. Daß diejenigen, welche dasselbe als Grenzfläche eines Körpers verwerteten, es gekannt haben müssen, bedarf keines Beweises, aber woher sollten sie es entnommen haben? Wir erinnern daran, daß wenigstens unter den Abbildungen aus chaldäischer, wie aus ägyptischer Vorzeit, welche wir vergleichen konnten, ein regelmäßiges Fünf- oder Zehneck, eine Zerlegung der Kreisfläche in Ausschnitte nach irgend einer durch fünf teilbaren Anzahl nicht vorkommt (S. 49 und 109). Wir machen ferner darauf aufmerksam[3]), daß die Einzeichnung des Fünfecks in den Kreis geometrisch genau erst dann erfolgen konnte, als der Satz von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, als zugleich auch der goldne Schnitt bekannt geworden war.

Der goldne Schnitt spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch wirksamste Verhältnis, und das ist das stetige, ist in den athenischen

[1]) Beide Stellen sind vielfach abgedruckt, z. B. bei Bretschneider S. 85 bis 86. [2]) Lindemann l. c. S. 730—733. [3]) Bretschneider S. 87 hat diese gewiß richtige Bemerkung mutmaßlich zuerst gemacht.

Bauten aus den Jahren 450—430 aufs schönste verwertet[1]. Wir können bei solcher Regelmäßigkeit des Auftretens nicht an ein instinktives Zutreffen glauben, am wenigsten, wenn wir des eben berührten geistigen Zusammenhangs zwischen goldnem Schnitte, regelmäßigem Fünfecke und pythagoräischem Lehrsatze gedenken.

Bevor wir zu diesem letzteren uns wenden, müssen wir[2] noch einem längere Zeit viel verbreiteten Irrtume begegnen. Diogenes Laertius berichtet: „Unter den körperlichen Gebilden, sagen die Pythagoräer, sei die Kugel, unter den ebenen der Kreis am schönsten"[3]. Man hat daraus entnehmen wollen, Pythagoras oder doch seine Schule hätten auch die Grundlage zu der Lehre von den isoperimetrischen Raumgebilden gelegt. Man ist dabei gewiß von der richtigen Deutung jenes Satzes abgewichen. Es sollte damit ein eigentlicher geometrischer Lehrsatz überhaupt nicht ausgesprochen werden. Nur die gleichmäßige Rundung erhielt in den gemeldeten Worten das gebührende Lob.

Den gemeinsamen, für Arithmetik und Geometrie gleichmäßig bedeutsamen Schlußstein unserer Untersuchungen über Pythagoras und seine Schule bildet nunmehr der nach dem Lehrer selbst benannte Satz vom rechtwinkligen Dreiecke. Nicht als ob wir in ihm auch den Schlußstein des von den Pythagoräern aufgeführten mathematischen Gebäudes vermuteten. Keineswegs. Wir haben vielmehr schon gesehen und werden noch weiter sehen, daß unter den schon besprochenen geometrischen Dingen einige nicht gut anders als infolge des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck aufgetreten sein können. Die Beziehung des regelmäßigen Fünfecks zu diesem Satze ist erst erwähnt. Die Elementardreieckchen des Timäus dienen als Beweis, daß die Pythagoräer denjenigen sonderbaren rechtwinkligen Dreiecken ihre Aufmerksamkeit zuwandten, welche in dieser physikalisch-geometrischen Eigenschaft Verwertung fanden. Das war einmal dasjenige Dreieck, dessen beide Katheten je eine Längeneinheit als Maß besitzen, das war zweitens dasjenige, dessen Hypotenuse doppelt so groß ist, als die kleinere Kathete, so daß also 1 und 2 die Maße dieser beiden Seiten bezeichnen.

Wir haben uns (S. 152) schon darüber ausgesprochen, daß wir für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck Pythagoras selbst als den Entdecker betrachten, und uns wesentlich auf den Bericht bezogen,

---

[1] Vgl. Zeisings verschiedene Schriften, über welche mit für den mathematischen Leser genügender Ausführlichkeit S. Günther in der Zeitschr. Math. Phys. XXI, histor.-literar. Abtlg. S. 157—165 berichtet hat. [2] Auch hier rührt die richtige Ansicht von Bretschneider S. 89—90 her. [3] Diogenes Laertius VIII, 19.

diejenigen, welche Altertümliches erkunden wollten, führten den Satz auf Pythagoras zurück[1]). Der in Euklids Elementen vorgetragene Beweis dagegen, derselbe Beweis, der auch heute noch der bekannteste ist, bei welchem die Quadrate über die drei Dreiecksseiten nach außen hin gezeichnet werden und das Quadrat der Hypotenuse durch eine von der Spitze des rechten Dreieckswinkels auf die Hypotenuse gefällte gehörig verlängerte Senkrechte in zwei Rechtecke zerfällt, von denen jedes dem ihm benachbarten Kathetenquadrate flächengleich ist, dieser Beweis rührt nach Proklus' ausdrücklicher Aussage von Euklid selbst her. Daß Plutarch[2]) den Satz vom rechtwinkligen Dreieck als Satz des Pythagoras kennt, wissen wir (S. 171). Der Rechenmeister Apollodotus oder Apollodorus, wie Diogenes Laertius denselben nennt[3]), erzählt in Versen von dem Stieropfer, welches Pythagoras gebracht habe, als er den Satz von den Quadraten der Hypotenuse und der Katheten entdeckt hatte. Nicht wenige Schriftsteller sind in ihren Angaben bezüglich des Satzes in einer wesentlichen Beziehung genauer, indem sie den Namen des Pythagoras mit demjenigen rechtwinkligen Dreiecke in Verbindung bringen, dessen Seiten die Maßzahlen 3, 4, 5 besitzen. Am deutlichsten ist in dieser Beziehung Vitruvius, in dessen im Jahre 14 n. Chr. verfaßter Architektur ausdrücklich berichtet wird, daß Pythagoras einen rechten Winkel mit Hilfe der drei Längenmaße 3, 4, 5 zu konstruieren lehrte, und daß eben derselbe erkannte, daß die Quadrate von 3 und von 4 dem von 5 gleich seien[4]). Eine Plutarchstelle, in welcher dasselbe Dreieck besprochen wird[5]), ist uns (S. 157) schon vorgekommen. Dasselbe Dreieck spielt in Platons Staate eine Rolle. Und wenn wir auf ganz späte Zeiten zu dem Zwecke herabgehen dürfen, um mindestens zu zeigen, daß die Überlieferung der Überlieferung sich erhalten hat, so möchten wir als letzten Gewährsmann einen Glossator vom Anfange des XII. S. nennen, der vom pythagoräischen Dreiecke redend das mit den Seiten 3, 4, 5 unter diesem Namen versteht[6]).

Wir glauben nun, daß die Wahrheit, welche jener Überlieferung zugrunde liegt, darin besteht, daß Pythagoras an dem Dreiecke 3, 4, 5 seinen Satz kennen lernte. „Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze, sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadrat-

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 426. [2]) Plutarchus, *Convivium* VIII, 4. [3]) Diogenes Laertius VIII, 12. [4]) Vitruvius IX, 2. [5]) Plutarchus, *De Iside et Osiride* 56. [6]) Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst. Leipzig 1875, S. 156 und Note 288. Wir verweisen künftig auf dieses Buch unter dem Titel „Agrimensoren".

zahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben"[1]). So drückte sich ein deutscher Gelehrter bereits 1833 aus, welcher aber keineswegs zuerst diese, wie wir glauben, richtige Anschauung von dem Entwicklungsgange sich aneignete. Die gleiche Ansicht ist schon in der Euklidausgabe des Clavius (1574) ausgesprochen mit dem Zusatze, es sei dieses die Meinung verschiedener[2]). Pythagoras bemerkte, meinen wir, daß von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ausschließlich $9 + 16 = 25$ (S. 170). Als er diese unter allen Umständen interessante Bemerkung machte, kannte er bereits, gleichviel aus welcher Quelle, die Erfahrungstatsache, daß ein rechter Winkel durch Annahme der Maßzahlen 3, 4, 5 für die Längen der beiden Schenkel und für die Entfernung der Endpunkte derselben konstruiert werde. Wir haben (S. 105) darauf hingewiesen, daß die Ägypter, (S. 49) daß die Babylonier vielleicht die gleiche Kenntnis besaßen, daß die Chinesen ihrer sicherlich teilhaftig waren. Ein chinesischer Schriftsteller hat nämlich gesagt: „Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandteile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie 5, wenn die Grundlinie 3 und die Höhe 4 ist"[3]). Die geometrische und die arithmetische Wahrheit vereinigten sich nun in dem Bewußtsein des Pythagoras zu einem gemeinschaftlichen Satze. Der Wunsch lag nahe zu prüfen, ob auch bei anderen rechtwinkligen Dreiecken die Maße der Seiten zu Quadratzahlen erhöht das gleiche Verhalten bieten. Die einfachste Voraussetzung war die des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, wo Höhe und Grundlinie gleich der Längeneinheit waren. Die Hypotenuse wurde gemessen. Sie war größer als eine, kleiner als zwei Längeneinheiten. Die mannigfaltigsten Versuche mögen darauf angestellt, andere und andere Zahlenwerte für die gleichen Katheten eingesetzt worden sein, um eine Zahl für die Hypotenuse zu erhalten. Vergebens. Man erhielt wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maße der Hypotenuse nahe kamen, Näherungswerte von $\sqrt{2}$ würden wir heute sagen, aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schließen, und diesen Schritt vollzog Pythagoras.

Er fand, daß die Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen

[1]) So Jul. Fr. Wurm schon 1833 in Jahns Jahrbüchern IX, 62. Meine denselben Grundgedanken einzeln durchführende Darstellung in den Math. Beitr. Kulturl. ist 1863 entstanden, ohne daß ich Wurms Aufsatz oder die Stelle bei Clavius kannte. [2]) ut nonnulli volunt. [3]) Vgl. Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen in Crelles Journal. Bd. 52.

Dreiecks mit meßbaren Katheten selbst unmeßbar sei, daß sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei[1]); er entdeckte das Irrationale, worauf das alte Mathematikerverzeichnis ein so sehr berechtigtes Gewicht legt. Er entdeckte es gerade an der Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, wie aus mehr als nur einem Umstande wahrscheinlich gemacht werden kann.

So erzählt uns Platon, der Pythagoräer Theodorus von Kyrene, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtet hatte, habe bewiesen, daß die Quadratwurzel aus 3, aus 5 und anderen Zahlen bis zu 17 irrational sei[2]). Von der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ist dabei keine Rede; diese muß also vorher bekannt gewesen sein. Aristoteles weiß dagegen an vielen Stellen von der Irrationalität der Diagonale des Quadrates von der Seite 1 zu reden, und sagt einmal geradezu, der Grund dieser Irrationalität liege darin, weil sonst Gerades und Ungerades gleich sein müßte[3]). Den Sinn dieser Worte erläutert aber Euklid. Er gibt nämlich folgenden Beweis, den wir nur so weit abgeändert haben, daß wir Euklids Worte in moderne Zeichensprache umsetzten[4]). Es sei $A\Gamma$ zu AB (Fig. 27) kommensurabel und verhalte sich in kleinsten Zahlen wie α zu β; folglich muß wegen $A\Gamma > AB$ auch $\alpha > \beta$ und sicherlich > 1 sein. Weiter folgt $A\Gamma^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$ und wegen $A\Gamma^2 = 2AB^2$ auch $\alpha^2 = 2\beta^2$, folglich α^2 und mit dieser Zahl zugleich auch α eine gerade Zahl. Die zu α teilerfremde β muß daher ungerade sein. Die gerade α sei $= 2\gamma$, so folgt $\alpha^2 = 4\gamma^2$. Es war $\alpha^2 = 2\beta^2$, mithin ist $2\beta^2 = 4\gamma^2$, $\beta^2 = 2\gamma^2$ gerad und auch β gerad, was mit dem eben bewiesenen Gegenteil einen Widerspruch bildet, der zur Aufhebung der Annahme führt, als könne die Diagonale mit der Quadratseite in einem rationalen Zahlenverhältnisse stehen. Man sieht, das muß der Beweis gewesen sein, an welchen Aristoteles bei seiner Äußerung dachte. Es ist also ein Beweis, dessen Altertum über Aristoteles hinaufreicht, und der, nach der kurzen Weise, in welcher dieser ihn andeutet, zu schließen, den Lesern des Aristoteles zur Genüge bekannt sein mußte. Wir gehen deshalb vielleicht nicht zu weit, wenn wir gerade diesen Beweis als einen hergebrachten ansehen, als denjenigen, der in der alten pythagoräischen Schule geführt wurde, mag ihn Pythagoras selbst oder einer seiner unmittelbaren Schüler und Nachfolger ersonnen haben.

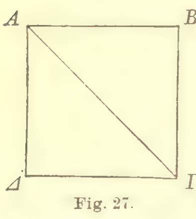


Fig. 27.

[1]) ῥητόν und ἄλογον sind die griechischen Namen für Rationalzahl und Irrationalzahl; ἄλογον heißt sowohl ohne Verhältnis als ohne Wort d. h. nicht aussprechbar. [2]) Platon, Theaetet 147, D. [3]) Aristoteles, Analytica prot. I, 23, 11. [4]) Euklid X, 117.

War in der Tat die Diagonale des Quadrates als irrational, die Diagonale des Rechteckes mit den um eine Längeneinheit verschiedenen Seiten 3 und 4 als rational, nämlich mit der Länge 5, bekannt, dann war es möglich, daß man auch Quadrat und Heteromekie als diejenigen Gegensätze in die pythagoräische Kategorientafel, welche uns durch Aristoteles bekannt geworden ist, aufnahm, die den sonst dort fehlenden Gegensatz des Rationalen und Irrationalen ersetzen sollten[1]). Wir haben eine solche von der unsrigen zunächst abweichende Erklärung angekündigt (S. 160) und nicht ganz von der Hand gewiesen. Allein sie vollkommen uns anzueignen, auch in der Verbindung mit unserer eigenen Vermutung, die wir dort als notwendig betonten, vermögen wir trotz eines unterstützenden Grundes, auf welchen wir im 11. Kapitel zu reden kommen, doch nicht. Es könnte nämlich gerade das Fehlen des Gegensatzes des Rationalen und des Irrationalen in der Kategorientafel als bezeichnend betrachtet werden müssen.

Nach einem alten Scholion zum X. Buche der euklidischen Elemente, welches man in neuerer Zeit dem Proklus zuzuschreiben pflegt[2]), dürfte diese Annahme eine nicht ungerechtfertigte sein. „Man sagt, daß derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und daß der, welcher von ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung[3]) versetzt und dort von ewigen Fluten umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen."

Das Mystische dieser Erklärungen stimmt allerdings durchaus zu den übrigen philosophischen Floskeln des Proklus und sie sind offenbar pythagoräischer Überlieferung entnommen. Mystisch war, das ist wieder einer der allseitig anerkannten Punkte, der ganze Pythagoräismus, und wir dürfen vielleicht hier als an dem geeignetsten Orte darauf hinweisen, daß Philolaus schon die Winkel von

---

[1]) So die Meinung Hankels S. 110, Anmerkung. [2]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen. Herford 1865, S. 17—28, besonders S. 23. [3]) Dr. P. Hohlfeld machte uns brieflich aufmerksam, die griechische Stelle heiße *εἰς τὸν τῆς γενέσεως τόπον* = an den Ort der Entstehung, womit die Übersetzung des Commandinus *in generationis hoc est profundi locum* übereinstimme; wenn Hankel übersetze „in den Ort der Mütter", so beruhe dieses wahrscheinlich auf unbewußter Erinnerung an eine bekannte Stelle in Goethes Faust, zweiter Teil.

Figuren bestimmten Göttern weihte[1]), daß Platon umgekehrt die Gottheit immer geometrisch zu Werke gehen ließ[2]).

War einmal die Irrationalität als solche, und zwar an der Diagonale des Quadrates erkannt, war man sich bewußt geworden, daß die Diagonale des Rechtecks von den Seiten 3 und 4 genau in 5 Einheiten sich darstellte, die des Rechtecks von gleichen Seiten aber nicht angebbar war, welche Länge man auch den beiden Seiten beilegte, so mußte man wohl auch andere Rechtecke prüfen, z. B. von der Voraussetzung ausgehen, daß die Diagonale zur einen Seite im einfachsten Zahlenverhältnisse von 2 zu 1 stehe, und nun die andere Rechtecksseite zu messen suchen. Wir sehen hier das zweite Elementardreieckchen vor uns, dessen Benutzung neben dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zur Flächenbildung wir aus Platons Timäus kennen, und dessen somit nachgewiesener pythagoräischer Ursprung den hier ausgesprochenen Vermutungen eine immer breitere Grundlage gewähren dürfte.

Wieder weiterschließend war die Untersuchung an einem Punkte angelangt, wo der Weg sich spaltete. Man konnte, wo die Zahl ihren Dienst versagte, geometrische Beweise für den Satz von den Quadraten über den Seiten rechtwinkliger Dreiecke suchen. Man konnte solche Zahlen suchen, die als Seiten rechtwinkliger Dreiecke auftreten konnten. Man schlug beide Wege ein.

Hier ist vielleicht der geeignete Ort, auf die Bedeutung des Wortes Hypotenuse (*ὑποτείνουσα*) einzugehen[3]). Man hat *χορδή*, die Saite, als zu ergänzendes Hauptwort vermutet, also die von unten nach oben gespannte Saite. Die Meinung ist durch ägyptische Abbildungen von Harfen dreieckiger Gestalt gestützt. Ob der der Hypotenuse gegenüberliegende Winkel ein rechter ist oder nicht, darauf kommt es nicht an. Musikalische Versuche werden Pythagoras ohnehin nacherzählt, und mit diesen in Verbindung könnte die Beachtung der dreieckigen Harfe an Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Wir haben oben gesagt, daß der heute gebräuchlichste Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes von Euklid herrühre. Der in der pythagoräischen Schule selbst geführte muß von diesem verschieden ge-

---

[1]) Böckh, Philolaus S. 155. Chaignet I, 245—247. [2]) Plutarchus, Convivia VIII, 2 *Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν Θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν*. Die Stelle bei Platon selbst ist nicht bekannt. Wenn Vossius in seiner Geschichte der Mathematik dafür auf den Dialog „Philebus" verweist, so dürfte dieses Zitat auf einem Irrtum beruhen; sagt doch schon Plutarch an der angegebenen Stelle ausdrücklich, jener Ausspruch finde sich nicht in Platons Schriften, könne aber ganz wohl platonisch sein. [3]) Max C. P. Schmidt, Philologische Beiträge, zweites Heft. Terminologische Studien. *Ὑποτείνουσα* pag. 9—45 (Leipzig 1905).

wesen sein. Er dürfte seiner Altertümlichkeit entsprechend viele Unterfälle unterschieden haben und gerade vermöge dieser Weitläufigkeit aufs gründlichste beseitigt worden sein, wie wir daraus schließen dürfen, daß Proklus auch mit keiner Silbe des Ganges des voreuklidischen Beweises gedenkt. Waren Unterfälle unterschieden, so ist die Wahrscheinlichkeit vorhanden, die Beweisführung sei von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen[1]) und habe die Zerlegung des Quadrates durch seine Diagonalen (Fig. 28) zur Grundlage gehabt[2]), wenigstens hat sich in Platons Menon dieser Beweis des Sonderfalles erhalten. Wie der weitere Fortschritt zum Beweise des allgemeinen Satzes vollzogen wurde, darüber ist man in keiner Art unterrichtet. Die verschiedenen Wiederherstellungsversuche, so geistreich manche derselben sind, schweben alle so ziemlich in der Luft[3]).

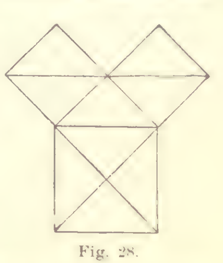


Fig. 28.

Die arithmetische Aufgabe Zahlen zu finden, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gezeichnet werden können, löste Pythagoras gleichfalls, und hier sind wir in der günstigen Lage, daß Proklus uns seine Auflösungsmethode aufbewahrt hat[4]). Er sei von irgend einer ungeraden Zahl $2\alpha + 1$ ausgegangen, welche er als kleinere Kathete betrachtete. Die Hälfte des um 1 verminderten Quadrates derselben gab die größere Kathete $2\alpha^2 + 2\alpha$, diese wieder um 1 vermehrt die Hypotenuse $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. Wie kam Pythagoras zu dieser Auflösung? Ein möglicher Weg ist folgender, welchen wir nur wenig gegen die Art, wie er zuerst vermutungsweise geschildert worden ist[5]), verändert der Prüfung unterbreiten. Ist $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Die Aufgabe der erstgeschriebenen Gleichung zu genügen läßt sich also erfüllen, wenn nur $a + b$ und $a - b$ beide gerad oder beide ungerad und zudem solche Zahlen sind, welche miteinander vervielfacht eine Quadratzahl liefern. Solche Zahlen kannte höchstwahrscheinlich bereits die vorplatonische Zeit, da sie unter dem Namen ähnlicher Zahlen bei Theon von Smyrna erklärt sind[6]). Die andere von uns

---

[1]) Hankel S. 98. [2]) Allman l. c. S. 29. [3]) Vgl. Camerers Euklidausgabe I, 444 mit Bretschneider 82, sowie Zeuthen, Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter (Kopenhagen 1896) S. 50, wo die Meinung ausgesprochen ist, der alte Beweis sei mittels Ähnlichkeit von Dreiecken, also unter Ziehung der Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse geführt worden. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 428. [5]) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 527. [6]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 36.

hervorgehobene Bedingung beruht darauf, daß a und b ganzzahlig zu erhalten nur dann möglich ist, wenn Summe und Differenz von $a+b$ und $a-b$ beide gerad sind. Der einfachste Fall ähnlicher Zahlen ist nun selbstverständlich der der Einheit und einer Quadratzahl c^2, und weil 1 ungerad ist, muß hier auch c^2 und somit c selbst ungerad sein, etwa $c = 2\alpha + 1$. So kam die Formel des Pythagoras darauf hinaus $(2\alpha + 1)^2 = (2\alpha + 1)^2 \cdot 1$ zu setzen, und danach aus $(2\alpha + 1)^2 = a + b$ und $1 = a - b$ die Werte $b = \frac{(2\alpha + 1)^2 - 1}{2}$ und $a = \frac{(2\alpha + 1)^2 - 1}{2} + 1$ zu ermitteln, welche zusammen mit $c = 2\alpha + 1$ die gestellte Aufgabe lösen. Die Formen, in welchen b und a auftreten, entsprechen, wie man sofort erkennt, genau dem Wortlaute der Angabe des Proklus, was immer ein günstiges Vorurteil für die Richtigkeit eines Wiederherstellungsversuches gewährt, und da überdies in Ägypten, wie wir aus dem Übungsbuche des Ahmes wissen, Aufgaben von algebraischer Natur zu lösen nicht ungebräuchlich war, so scheitert der Versuch auch nicht an der Frage, ob es für Pythagoras möglich gewesen sei, schon derartige Schlüsse zu ziehen, wie sie hier verlangt wurden.

Fassen wir den Inhalt dieses und des zunächst vorhergehenden Kapitels in Kürze zusammen. Pythagoras hat, so suchten wir zu erweisen, sicherlich in Ägypten, vielleicht in den Euphratländern mathematisches Wissen sich angeeignet. Ersteres geht wie aus den ausdrücklichen Überlieferungen, so auch aus dem ägyptischen Gepräge mancher geometrischer Entwicklungen, letzteres aus den babylonisch anmutenden Zahlendifteleien der Pythagoräer hervor. Die Summe des geometrischen Wissens, welches von Pythagoras und seiner Schule den Griechen vor dem Jahre 400 zugänglich gemacht wurde, ist eine nicht ganz geringfügige. Sie umfaßte die Kenntnis von den Parallellinien und den durch dieselben beweisbaren Winkelsätzen, insbesondere den Satz von der Summe der Dreieckswinkel. Sie umfaßte Kongruenzsätze des Dreiecks und Sätze über Flächengleichheit, deren Anwendung die sogenannte Anlegung von Flächen bildete. Sie ließ umgekehrt Figuren als Summe anderer Figuren entstehen, wobei vielleicht das Sternfünfeck entdeckt wurde, wenn wir auch für dieses nicht mit gleicher Sicherheit wie für die anderen Dinge die alten Pythagoräer als Urheber behaupten möchten. Sie umfaßte den pythagoräischen Lehrsatz und den goldnen Schnitt. Sie enthielt endlich auch Anfänge einer Stereometrie, insbesondere die Kenntnis der fünf regelmäßigen Körper und der Kugel, welche dieselben umfaßt. Die Sätze waren mit Beweisen versehen. Allerdings ließen die Beweise vermutlich nicht gleich die Strenge erkennen, welche man geradezu

geometrische Strenge zu nennen pflegt, und legten erst nach und nach den Charakter eines Erfahrungsbeweises ab, nahmen noch später jene allgemeineren Fassungen an, welche in einheitlicher Betrachtung die Notwendigkeit der Unterscheidung von Sonderfällen verbannt. Noch unvergleichbar mehr leistete die pythagoräische Schule in der Arithmetik, gerade durch die Größe der Leistungen die Wahrscheinlichkeit fremden Ursprunges auch für diesen Zweig griechischer Mathematik bezeugend. Arithmetische, geometrische, harmonische Verhältnisse und Reihen, unter den arithmetischen Reihen auch solche, welche die Sprache heutiger Wissenschaft arithmetische Reihen höherer Ordnung nennt, sind Dinge, die man am Anfange einer Entwicklung nicht zu finden erwarten darf, noch weniger die freilich auch weniger gut beglaubigten befreundeten und vollkommenen Zahlen. Die Überlieferung läßt wirklich einige dieser Gegenstände aus Babylon eingeführt sein. Fremdländisch war vielleicht auch die Methode des mathematischen Experimentes d. h. der Zerlegung von Figuren in andersgestaltete, der Vereinigung von Reihengliedern derselben oder verschiedener Reihen zu Summen, zunächst nur in der unbestimmten Absicht zu versuchen, ob dabei etwas geometrisch, etwas arithmetisch Merkwürdiges sich offenbaren möchte. Für griechisch dagegen hielten wir die eigentümliche Verquickung von Geometrie und Arithmetik, die geometrische Versinnlichung der Zahlenlehre, wie sie in der Ebenen- und Körperzahl, in der Dreiecks- und Quadratzahl, in der Vielecks- und Gnomonzahl zutage tritt. Pythagoräisch war nach unserer durch mannigfache Überlieferung gestützten Darstellung die Erfindung des Satzes von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als eines arithmetischen ausgehend von dem bestimmten Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pythagoräisch war endlich eine Regel zur Ermittelung anderer Zahlen als 3, 4, 5, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen können, pythagoräisch die Lehre vom Irrationalen. Vom Irrationalen sagen wir und müssen wir sagen, nicht von der Irrationalzahl, denn das Irrationale war den Griechen keine Zahl. War den Pythagoräern doch sogar die Einheit noch keine Zahl, sondern erst eine Vielheit von Einheiten. Brüche mögen dem Rechner vorgekommen sein, sei es als wirkliche Brüche mit Zähler und Nenner, sei es als Unterabteilungen von Münzen, von Gewichten, von Feldmaßen, jedenfalls immer als konkrete Brüche. Der abstrakte Bruch war für den Arithmetiker nicht vorhanden. Er kannte Brüche nur mittelbar als Verhältnis zweier Zahlen. Um so weniger konnte ihm das Irrationale eine Zahl sein, welchem nicht einmal ein aussprechbares Verhältnis den Eintritt in die Zahlenreihe gestattete. Diese wichtige Beschränkung des Begriffes der Zahl er-

hielt sich über die Zeit der Pythagoräer weit hinaus. Sie blieb, was den Ausschluß der Irrationalen betrifft, so lange, als überhaupt von griechischer Arithmetik die Rede ist.

8. Kapitel.

Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule.

Die Mathematik nahm, wie wir weitläufig gesehen haben, einen mächtigen Aufschwung durch die pythagoräische Schule. Es war wohl eng damit verbunden, sei es als Ursache, sei es als Folge, daß, wie uns berichtet wird, die Mathematik den Pythagoräern als erstes und wichtigstes Lehrelement diente[1]. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch andere Schriftsteller sich noch verdient machten. Hören wir, wie das alte Mathematikerverzeichnis fortfährt:

„Nach ihm (dem Pythagoras) lieferte der Klazomenier Anaxagoras vieles über Geometrie, ingleichen Oinopides von Chios, der etwas jünger ist als Anaxagoras. Beider gedenkt Platon in den Nebenbuhlern als berühmter Geometer."

Anaxagoras von Klazomene[2]) wurde vermutlich 500 geboren und starb 72 Jahre alt 428. Er gehörte einem vornehmen und reichen Hause an, achtete aber aus Liebe zur Wissenschaft weder auf die Verwaltung seines Vermögens, noch auf eine ihm leicht erringbare politische Stellung. Seinen verwahrlosten Besitz soll er schließlich seinen Angehörigen überlassen, die Nichteinmengung in staatliche Verhältnisse aber damit erklärt haben, daß ihm der Himmel Vaterland und die Beobachtung der Gestirne seine Bestimmung sei. Um 464 etwa dürfte er nach Athen gekommen sein, wenn anders der Bericht der Wahrheit entspricht, daß sein dortiger Aufenthalt 30 Jahre gedauert habe. Er verließ nämlich diese Stadt um 434, wenige Jahre vor dem Beginne des peloponnesischen Krieges. Anaxagoras lehrte in Athen als einer der ersten Philosophie, und unter seinen Schülern waren zwei Männer von verschieden begründetem, aber gleich hohem Ruhme: Euripides und Perikles. Perikles insbesondere blieb zu seinem Lehrer in fortwährend freundschaftlichem Verhältnisse, und als in der angegebenen Epoche, wenige Jahre vor 431, die Gegner des großen athenischen Staatsmannes ihrer Feindschaft gegen ihn in Gestalt von Verfolgung seiner Freunde Luft zu machen begannen, war gerade Anaxagoras eine zur Eröffnung des

[1]) Porphyrius, *De vita Pythagor.* 47. Jamblichus, *De philosophia Pythagor.* lib. III, abgedruckt bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca.* Venedig 1781, pag. 216. [2]) Schaubach, *Fragmenta Anaxagorae.* Leipzig 1827. Zeller I, 783—791.

Angriffes geeignete Persönlichkeit. Lehren eines Philosophen zu verdächtigen, eines Denkers, welchen nicht jeder aus dem großen Haufen versteht, ist bei einigem guten Willen niemals unmöglich, und das mußte Anaxagoras erfahren. Er wurde ins Gefängnis gebracht und entkam diesem, sowie der Stadt Athen, man weiß nicht genau wie. Die einen berichten von Flucht aus dem Gefängnisse, die anderen von Verbannung, die dritten von Freisprechung und darauf folgendem nichterzwungenem Verlassen der ihm zuwider gewordenen Stadt. Sicher ist, daß Anaxagoras die letzte Zeit seines Lebens in Lampsakus zubrachte. Wir haben über den eigenen Bildungsgang des Anaxagoras nichts gesagt. Die Nachrichten aus dem Altertume schweigen entweder über einen Lehrer, dem er gefolgt wäre, oder sie nennen ihn Schüler des Anaximenes. Wieder andere wissen von einer Studienreise nach Ägypten zu erzählen. Die erstere Angabe läßt sich mit dem gemeiniglich auf 499 angesetzten Todesjahr des Anaximenes nicht vereinigen. Die zweite ist an sich nicht unwahrscheinlich, da, wie wir bei Thales und Pythagoras gezeigt haben, ein Handelsverkehr zwischen den ionischen Städten und Ägypten stattfand und selbst Studienreisen wohl beglaubigt sind.

Von dem, was Anaxagoras als Mathematiker leistete, sind wir so ziemlich, davon, wie er es leistete, gar nicht unterrichtet. Daß es etwas Hervorragendes gewesen sein muß, läßt sich zum voraus erwarten. Da in den Nebenbuhlern, einem Gespräche in Platons Art, wenn auch nach heutiger Annahme nicht von Platon verfaßt, ein Streit über astronomische und mathematische Dinge kurzweg als Streit über Anaxagoras oder über Oinopides bezeichnet wird[1]), so geht schon aus dieser Redeweise hervor, daß zur Zeit, als jenes Gespräch entstand, beide hochberühmt in ihrem Fache waren.

Plutarch erzählt, Anaxagoras habe im Gefängnisse, das wäre also um 434, die Quadratur des Kreises gezeichnet[2]). So fraglich dieser Bericht früher erscheinen mochte, jetzt ist er sehr glaubwürdig geworden, nachdem wir wissen, daß die Ägypter mehr als ein Jahrtausend vor Anaxagoras die Quadratur des Kreises zeichneten, d. h. eine Figur konstruierten, welche als Quadrat die Fläche des Kreises mehr oder weniger genau darstellte. Daß Anaxagoras der mangelnden Genauigkeit sich voll bewußt gewesen sein sollte, ist nicht anzunehmen. Er wird wohl, wie viele nach ihm, die volle Quadratur zu erreichen gesucht haben. Aber auch darin liegt ein Verdienst, eine Aufgabe an die Tagesordnung gebracht zu haben, welche später als fruchtbringend sich erwies.

---

[1]) Platon, Rivales 132 A. [2]) Plutarchus, *De exilio* cap. 17 *ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἔγραψε.*

Ein anderes Verdienst schreibt Vitruvius dem Anaxagoras zu. Als Aeschylus in Athen Dramen aufführen ließ, also um etwa 470, habe ein gewisser Agatharchus die Schaubühne hergerichtet und eine Abhandlung darüber geschrieben. Daraus haben sodann Anaxagoras und Demokrit Veranlassung genommen den gleichen Gegenstand zu erörtern, wie man die gezogenen Linien den aus den Augen kommenden Sehstrahlen bei Annahme eines bestimmten Mittelpunktes entsprechend ziehe, so daß z. B. Gebäude auf Dekorationen dargestellt werden konnten, und was in einer Ebene gezeichnet war bald zurückzutreten, bald vorzurücken schien[1]). Das ist wenn auch in ungenügender so doch in nicht mißzuverstehender Weise beschrieben eine Perspektive. Deren Erfindung oder Ausbildung ist sicherlich nicht ohne Bedeutung, namentlich wenn die Reise des Anaxagoras nach Ägypten als wahr gelten darf, da er dort sein Auge nur an unperspektivisch entworfene Gemälde zu gewöhnen imstande war, und die gewohnte Darstellung ihn ebensowenig gehindert haben wird als Tausende, die vor ihm, die nach ihm bewundernd die bemalten Tempelwände anstaunten.

Der andere durch die erwähnte Stelle in den Nebenbuhlern als allbekannt erwiesene Geometer war Oinopides von Chios. Er sei etwas jünger als Anaxagoras, meldet das uns in jeder Beziehung glaubwürdige Mathematikerverzeichnis. Eine annähernde Gleichaltrigkeit beider bestätigt Diogenes Laertius[2]). Oinopides soll gleichfalls in Ägypten gewesen sein. Gekommen sei zu ihnen ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios[3]), meldet Diodor an einer früher (S. 151) von uns angeführten Stelle. Geometrisches wissen wir von Oinopides nur, was Proklus in seinem Kommentare zum ersten Buche der euklidischen Elemente ihm zuschreibt[4]), daß er nämlich die beiden Aufgaben gelöst habe[5]), von einem Punkte außerhalb einer unbegrenzten Geraden ein Lot auf letztere zu fällen und an einem in einer Geraden gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen, der einem gegebenen Winkel gleich sei. Bei ersterer Aufgabe bedient sich Oinopides des „altertümlichen“ Wortes (S. 161) einer nach dem Gnomon gerichteten Linie. Aus dem ungemein elementaren Gegenstande der ihm zugeschriebenen Aufgaben einen Schluß auf die Verdienste des Oinopides ziehen zu wollen, hieße seinen griechischen Verehrern jede Urteilsfähigkeit absprechen. Er muß noch Anderes und Bedeutenderes geleistet haben, was wir

---

[1]) Vitruvius VII, praefat. 11. [2]) Diogenes Laertius IX, 37 und 41. [3]) Diodor I, 96. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 283 und 333. [5]) Euklid I, 12 und 23.

aber nicht kennen. Seine Beziehung zu den beiden Aufgaben des Lotes und der Winkelanlegung ist gewiß dahin richtig gedeutet worden[1]), Proklus wolle nur sagen, die bei Euklid gelehrten Auflösungen rührten von Oinopides her, während andere Auflösungen derselben dem Praktiker auf Weg und Steg vorkommenden Aufgaben längst vorher in Ägypten wie in Griechenland bekannt gewesen sein müssen.

Im Zusammenhang mit beiden Geometern, mit Anaxagoras wie mit Oinopides, haben wir einen dritten genannt: Demokritus. Abdera, jenes thrakische Krähwinkel des Altertums, von dessen Bewohnern die schnurrigsten Geschichten erzählt werden, war die Heimat des Demokritus, dessen Ruhm, so bedeutend er war, nicht hinreichte, das Abderitentum in Schutz zu nehmen. Nach eigener Aussage 40 Jahre jünger als Anaxagoras[2]) muß er um 460 geboren sein. Nach Diodor sei er dagegen im 1. Jahre der 94. Olympiade, das ist 404 auf 403, im Alter von 90 Jahren gestorben[3]), was einen unlösbaren Widerspruch herstellt. Beglaubigt ist, daß Demokritus ein hohes Alter von mindestens 90 Jahren erreichte; manche Berichte lassen ihn sein Leben sogar auf 100, auf mehr als 100, auf 109 Jahre bringen[4]). Vereinigen wir seine Geburtsangabe als mutmaßlich glaubwürdigste mit dieser Lebensdauer, so wird der Irrtum keinesfalls sehr groß sein, wenn man sein Leben etwa von 460—370 ansetzt, den Mittelpunkt seiner Tätigkeit in die Jahre 420—400 verlegt. Demokritus gehörte, wie aus der Diodorstelle hervorgeht, zu den Fremden, deren Namen in den Matrikellisten der ägyptischen Priester aufgeführt wurden. Nach einem weiteren Berichte des Diodor verweilte er fünf Jahre in Ägypten[5]), und wenn in einem bei Clemens von Alexandria erhaltenen Bruchstücke des Demokrit selbst von 80jährigem Aufenthalte die Rede ist[6]), so dürfte die Erklärung stichhaltig sein, hier habe einfach eine Verwechslung der älteren Zahlbezeichnung $\Pi = 5$ mit der jüngeren $\pi' = 80$ stattgefunden. Auch Vorderasien und Persien bereiste Demokrit, wie allgemein berichtet und geglaubt wird[7]). Wir glauben diesen Umstand betonen zu sollen, da er je nach den persönlichen Ansichten des einen oder des andern entweder dazu führen kann ähnlichen Reisen, welche Pythagoras etwa 100 Jahre früher unternommen haben soll, einen gewissen Wahrscheinlichkeitshalt zu gewähren, oder eine Erklärung uns darbietet, auf welche Weise ungefähr durch andere Reisende schon im V. S.

---

[1]) Bretschneider S. 65. [2]) Diogenes Laertius IX, 41. [3]) Diodor XIV, 11. [4]) Vgl. Zeller I, 686. [5]) Diodor I, 98. [6]) Clemens Alexandr. Stromata I, 304 A. [7]) Zeller I, 688.

vorchristlicher Zeitrechnung babylonische Lehren in das fast vollendete Gebäude pythagoräischer Schulweisheit Eingang finden konnten.

In Erinnerung an seinen ägyptischen Aufenthalt gebrauchte Demokrit das stolze Wort: „Im Konstruieren von Linien nach Maßgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Ägypter", dessen wir (S. 104) gedachten, als von jenen Seilspannern die Rede war. Auch Cicero rühmt Demokrit als gelehrten, in der Geometrie vollkommenen Mann[1]. Mathematische Schriften des Demokrit nennt uns Diogenes Laertius[2], doch ist es leider nicht möglich, aus diesen Büchertiteln mehr als nur allgemeinste Kenntnis ihres Inhalts, und das nicht immer, zu gewinnen. Über Geometrie; Zahlen, das sind Titel allgemeinster Art, und ob wir unter der Geometrie etwa Feldmessung in unmittelbarer Beziehung zur Tätigkeit jener Harpedonapten zu verstehen haben, wagen wir kaum in Gestalt einer Frage zu äußern. Was mag aber der Titel *περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης* (wörtlich: über den Unterschied des Gnomon oder über die Berührung des Kreises und der Kugel) bedeuten? Als mögliche Erklärung ist vorgeschlagen worden[3], Demokrit habe einen rechten Winkel so mit dem Kreise beziehungsweise der Kugel in Verbindung gesetzt, daß der eine Schenkel durch den Mittelpunkt ging, die Spitze des Winkels auf die Kreislinie (Kugeloberfläche) fiel, weil alsdann der andere Schenkel zur Berührungslinie wurde. Besser sagt uns die Erklärung zu[4], welche auf ältere Handschriften des Diogenes Laertius zurückgreifend den Titel *περὶ διαφορῆς γνώμης κ. τ. λ.* liest, d. h. über einen Meinungsunterschied oder über die Berührung des Kreises und der Kugel. Der Meinungsunterschied beziehe sich auf den Winkel, welchen die Berührungslinie mit dem Kreise bilde, einen Winkel, von welchem, wie wir im 12. Kapitel sehen werden, Euklid im III. Buche seiner Elemente handelte, und bestehe in der Größenvergleichung dieses Winkels mit geradlinigen Winkeln. Ein weiterer durch Diogenes Laertius überlieferter Titel ist: *περὶ ἀλόγων γραμμῶν καί ναστῶν β'* (zwei Bücher von irrationalen Linien und den dichten Dingen)?[5]. Auch dafür ist eine Erklärung versucht worden[6]. Der Titel sei nämlich verderbt aus *περὶ ἀλόγων γραμμῶν κλαστῶν* d. h. über irrationale gebrochene

---

[1] Cicero, *De finibus bonorum et malorum* I, 6, 20. [2] Diogenes Laertius IX, 47. [3] Allman, Greek geometry from Thales to Euclid, pag. 80. [4] Briefliche Mitteilung von T. L. Heath. [5] Daß *γραμμαὶ ἄλογαι* nicht Asymptoten bedeuten kann, wie in einer sonst brauchbaren Programmabhandlung gesagt ist, versteht sich von selbst. [6] Hultsch in den Neuen Jahrbüchern für Philol. u. Pädagog. (1881) Bd. 123, S. 578—579.

Linien, und unter dieser Überschrift habe die Untersuchung sich teils mit solchen Irrationalitäten beschäftigen können, welche Summen von rationalen und irrationalen Teilen waren, teils mit Zerbrechung, d. h. Teilung von irrationalen Linien nach gegebenen Verhältnissen. Jedenfalls können wir, mag das letzte Wort des Titels geheißen haben, wie es will, seinen ersten Worten die nicht unwichtige Tatsache entnehmen, daß Name und vermutlich auch Begriff des Irrationalen trotz der mystischen Scheu der Pythagoräer verhältnismäßig frühzeitig außerhalb der Schule in Anwendung kam. Wichtig wäre uns vielleicht noch ganz besonders eine Stelle bei Plutarch, Demokrit habe den Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten[1]), wenn über Art und Zweck der Schnittführung nur irgend Genaues gesagt wäre. Wir würden Einzelangaben etwa im Mathematikerverzeichnisse oder bei Proklus mit Freuden begrüßen. Da wie dort kommt der Name des Demokrit nicht einmal vor!

Das Schweigen des Proklus läßt allerdings als absichtliches sich auffassen. Proklus gehörte zu den begeistertsten Spätplatonikern. Platon war Gegner des Demokritus, dessen Werke er vernichtet wissen wollte, dessen Namen er in seinen zahlreichen Schriften niemals nennt[2]). Proklus mochte nach Platons Beispiel handeln. Aber das Mathematikerverzeichnis? Aristoteles, Theophrastus, Eudemus schätzten Demokritus und beschäftigten sich eingehend mit ihm. Daß das Mathematikerverzeichnis ihn, den vielgerühmten Geometer, nicht nennt, kann nur in doppelter Weise erklärt werden. Entweder ließ Proklus aus dem Verzeichnisse den ihm mißliebigen Namen weg, oder der Verfasser des Verzeichnisses hat ihn mit Unrecht vergessen, eine Vergeßlichkeit, welche uns einen der zahlreichen Belege für den Satz liefert, daß aus dem zufälligen Schweigen eines Schriftstellers Schlüsse nicht gezogen werden dürfen[3]).

Der Vollständigkeit entbehrt das Mathematikerverzeichnis auch in einer anderen Beziehung, indem es über die Sophisten, welche der Mathematik sich befleißigten, insbesondere über Hippias von Elis in halbes Schweigen sich hüllt. Wir nennen es ein halbes Schweigen, weil der Name dieses Mannes, wie wir uns erinnern (S. 146), einmal bereits vorkam. Es handelte sich um den geometrischen Ruhm des Mamerkus, für welchen Hippias von Elis als Gewährsmann angerufen wurde, und diese Anrufung selbst genügt zum Nachweise, daß Hippias nach der Meinung des Verfassers des Verzeichnisses wohl fähig war über geometrische Tüchtigkeit ein Urteil

[1]) Plutarchus, *De communibus notitiis adversus Stoicos* cap. 39, § 3.
[2]) Diogenes Laertius IX, 40. [3]) Vgl. Zeller I, 690.

zu fällen. Allein der eigentliche Ort, des Hippias von Elis und seiner Verdienste um die Mathematik zu gedenken, würde doch erst neben oder nach Anaxagoras und Oinopides gewesen sein, und hier vermissen wir seine Erwähnung.

Proklus spricht dafür von ihm an zwei anderen Stellen[1]). Man hat freilich mehrfach Zweifel dagegen erhoben, daß der bei Proklus genannte Hippias wirklich Hippias von Elis sei[2]), aber sicherlich mit Unrecht. Proklus besitzt nämlich in seinem Kommentare eine Gewohnheit, von der er nie abgeht. Er schildert einen Schriftsteller, welchen er anführt, sofern Mißverständnisse möglich wären, mit deutlicher Benennung, läßt aber später die Beinamen weg, wenn er es unbeschadet der Deutlichkeit tun darf. So nennt er einen Zenon von Sidon später nur Zenon den früher erwähnten oder kurzweg Zenon; Leodamas heißt beim ersten Vorkommen von Thasos, später nur Leodamas; Oinopides von Chios wird später zum einfachen Oinopides, Theätet von Athen zum Theätet usw. Hippokrates der Arzt wird an einer Stelle, Hippokrates von Chios an einer späteren genannt, und wo noch später der letztere wieder auftritt, heißt er wieder Hippokrates von Chios, weil eben vorher zwei des Namens genannt waren, und damit zum Mißverständnisse Gelegenheit geboten war. Wenn also Proklus uns einen Hippias schlechtweg nennt, so muß das Hippias von Elis sein, der schon vorher einmal in demselben Kommentare deutlich bezeichnet war. Aber sehen wir sogar von dieser Gewohnheit des Proklus ab. Bei jedem Schriftsteller, insbesondere bei jedem, der den Werken Platons ein eingehendes Studium gewidmet hatte, konnte Hippias ohne jedwede andere Bezeichnung nur Hippias von Elis sein, eine viele Jahrhunderte lang teils um seiner Persönlichkeit willen, teils um seines mit zwei Dialogen verknüpften Namens wegen weit und breit bekannte Figur. Hippias von Elis war ein wegen seiner Eitelkeit, die selbst für einen Sophisten etwas hochgradig gewesen zu sein scheint, berüchtigter älterer Zeitgenosse des Sokrates. Seine Geburt dürfte auf 460 etwa anzusetzen sein[3]). Die Geistesrichtung und die Tätigkeit der Sophisten ist bekannt. Den eignen Vorteil über alles stellend lehrten sie auch andere gegen mitunter recht hohe Bezahlung ihres Vorteils wahrnehmen und durch Künste der Beredsamkeit, durch Schlüsse, welche Trugschlüsse sein durften, wenn sie nur wirksam sich erwiesen, im

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 272 und 356. [2]) F. Blaß in den Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik Bd. 105 in einem Referate über Bretschneiders Geometrie und Geometer vor Euklid. Hankel S. 151; aber auch schon im *Bulletino Boncompagni* 1872, pag. 297. Friedlein, Beiträge III, S. 8 (Programm für 1873). [3]) Zeller I, 875.

Staatswesen und vor Gericht Einfluß und Geltung sich erwerben. Sittlichkeit kann die berufsmäßigen Rechthaber nicht ausgezeichnet haben, aber Scharfsinn, Schlagfertigkeit, umfassendes Wissen den Sophisten im allgemeinen und dem Hippias als einem ihrer Hauptvertreter insbesondere abzusprechen ist man in keiner Weise befugt. So darf es gewiß nicht als Ironie aufgefaßt werden, wenn der Verfasser eines gleichviel ob mit Recht oder Unrecht Platon zugeschriebenen Gespräches sich zu den Worten veranlaßt sieht: Was du am besten verstehst, was die Sterne betrifft und was am Himmel sich zuträgt? . . . Aber etwas über Geometrie hören sie gern[1]). Ironisch klingt es auch nicht, wenn gesagt wird: Hippias sei des Rechnens und der Rechenkunst kundig vor allen anderen und kundig auch der Meßkunst[2]). Am allerwenigsten vollends kann ein solcher Beischmack in der Rede gefunden werden, welche Platon dem Protagoras in den Mund legt: Die anderen Sophisten beeinträchtigen die Jünglinge. Sie führen dieselben, die von den Künsten sich abwendeten, den Künsten wider deren Willen zu, indem sie Rechenkunst und Sternkunde und Meßkunst und Musik sie lehren — und dabei warf er einen Blick auf Hippias — kommt er aber zu mir, wird er über nichts anderes Etwas lernen, als weshalb er zu mir kam[3]). Nach allen diesen Äußerungen glauben wir uns berechtigt anzunehmen, daß Hippias von Elis als Lehrer der Mathematik mindestens in gleichem Range wie als eigentlicher Sophist gestanden haben muß, daß er in naturwissenschaftlichem, mathematischem und astronomischem Wissen auf der Höhe der Bildung seiner Zeit sich befand[4]).

Damit stimmt nun vollkommen überein, was von Hippias als Mathematiker uns mitgeteilt wird. Proklus spricht, wie erwähnt, zweimal von ihm. Die erste Stelle heißt: Nikomedes hat jeden geradlinigen Winkel gedritteilt mittels der konchoidischen Linien, deren eigentümlicher Natur Entdecker er ist, und von denen er Entstehung, Konstruktion und Eigenschaften auseinandergesetzt hat. Andere haben dieselbe Aufgabe mittels der Quadratricen des Hippias und Nikomedes gelöst, indem sie sich der gemischten Kurven bedienten, die eben den Namen Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*) führten; wieder andere teilten einen Winkel nach gegebenem Verhältnisse, indem sie von den Archimedischen Spirallinien ausgingen[5]). Die zweite Stelle lautet: Ganz auf die nämliche Weise pflegen auch die übrigen Mathematiker die Kurven zu behandeln, indem sie das jeder Eigentümliche ausein-

[1]) Platon, Hippias major 285. [2]) Hippias minor 367—368. [3]) Platon, Protagoras 318. [4]) So Karl Steinhart in seiner Einleitung zum größeren Hippias. [5]) Proklus (ed. Friedlein) 272.

andersetzen. So zeigt Apollonius das Eigentümliche jedes Kegelschnittes, Nikomedes dasselbe für die Konchoiden, Hippias für die Quadratrix, Perseus für die Spiren[1]). Eine dritte Stelle eines anderen mathematischen Gewährsmannes allerersten Ranges, des Pappus von Alexandria, sagt uns dagegen: Zur Quadratur des Kreises wurde von Dinostratus, Nikomedes und einigen anderen Neueren eine Linie benutzt, welche eben von dieser Eigenschaft den Namen erhielt. Sie wird nämlich von ihnen Quadratrix genannt[2]).

Aus der Zusammenfassung dieser drei Stellen[3]) dürfte kaum ein anderer Sinn zu entnehmen sein, als der folgende. Hippias, und zwar Hippias von Elis, hat um 420 etwa eine Kurve erfunden, welche zu doppeltem Zwecke dienen konnte, zur Dreiteilung eines Winkels und zur Quadratur des Kreises. Von letzterer Anwendung erhielt sie ihren Namen, Quadratrix, wie er in lateinischer Übersetzung zu lauten pflegt, aber dieser Name scheint nicht über Dinostratus hinaufzureichen, dessen Zeitalter als Bruder des Menächmus, eines Schülers des Eudoxus von Knidos, etwa in die zweite Hälfte des IV. S. gesetzt werden muß. Ob die Kurve früher einen anderen Namen führte, ob sie überhaupt mit Namen genannt wurde, wissen wir nicht. Der erste ganz gesicherte Name einer von der Kreislinie verschiedenen krummen Linie wird uns am Anfang des zweiten Drittels des IV. S., annähernd 20 bis 30 Jahre vor Dinostratus begegnen, wo Eudoxus seine Hippopede erfand. Ist aber der Name Quadratrix erst nachträglich der Kurve des Hippias beigelegt worden, so schwindet die Notwendigkeit anzunehmen, sie sei zum Zwecke der Kreisquadratur erfunden worden, und man darf ihren ursprünglichen Zweck in dem suchen, was nach Proklus durch sie zu verwirklichen war, in der Dreiteilung des Winkels.

Daß diese Aufgabe selbst auftauchte, kann uns nicht in Verwunderung setzen. Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß die Konstruktion regelmäßiger Vielecke eines der geometrischen Lieblingsgebiete der Pythagoräer bildete. Die Teilung des ganzen Kreisumfanges in sechs, in vier, in fünf gleiche Teile wurde gelehrt, und namentlich letztere als bedeutend schwieriger erkannt als die anderen längst bekannten Teilungen. Eine überwundene Schwierigkeit reizt zur Besiegung anderer, und so mag das Verlangen wach geworden sein nicht mehr den ganzen Kreis, sondern einen beliebigen Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen. Schon bei

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 356. [2]) Pappus, Collectio Lib. IV, cap. XXX (ed. Hultsch). Berlin 1876—1878, pag. 250. [3]) Vgl. Bretschneider 96 und 153—154.

der Dreiteilung traten unbesiegbare Schwierigkeiten auf. Versuche diese Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und des Lineals zu lösen mögen angestellt worden sein. Es ist uns nichts von ihnen bekannt geworden. Sie mußten erfolglos bleiben. Aber das zweite große Problem der Geometrie des Altertums neben der Quadratur des Kreises, deren wir bei Anaxagoras gedenken mußten, war gestellt, und wie in der Geschichte der Mathematik fast regelmäßig zunächst unlösbaren Aufgaben zuliebe neue Methoden sich entwickelten und kräftigten, so führte die Dreiteilung des Winkels, τριχοτόμια γωνίας, die Trisektion, wie man gewöhnlich sagt, zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren krummen Linie.

Die Linie des Hippias entsteht durch Verbindung zweier Bewegungen, einer drehenden und einer fortschreitenden. „In ein Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 29) ist um α als Mittelpunkt und mit der Seite des Quadrats $\alpha\beta$ als Halbmesser ein Kreisquadrant $\beta\varepsilon\delta$ beschrieben. Die Gerade $\alpha\beta$ bewegt sich dabei so, daß ihr einer Endpunkt α fest bleibt, der andere β längs des Bogens $\beta\varepsilon\delta$ fortschreitet. Andererseits soll die $\beta\gamma$ immer der $\alpha\delta$ parallel bleibend mit dem Endpunkte β auf der $\beta\alpha$ fortrücken, und zwar sollen die beiden selbst gleichmäßigen Bewegungen der Zeit nach so erfolgen, daß sie zugleich beginnen und zugleich endigen, daß also $\alpha\beta$ in seiner Drehung, $\beta\gamma$ in seinem Fortgleiten im selben Moment in der Lage $\alpha\delta$ eintreffen. Die beiden bewegten Geraden werden in jedem Augenblicke einen Durchschnittspunkt gemein haben, der selbst im Fortrücken begriffen eine gegen $\beta\varepsilon\delta$ hin gewölbte krumme Linie $\beta\zeta\eta$ erzeugt, welche geeignet erscheint ein der gegebenen Kreisfläche gleiches Quadrat finden zu lassen. Ihre beherrschende Eigenschaft besteht jedoch darin, daß eine beliebige Gerade $\alpha\zeta\varepsilon$ bis zum Kreisquadranten gezogen das Verhältnis dieses Quadranten zum Bogen $\varepsilon\delta$ gleich dem Verhältnisse der beiden Geraden $\beta\alpha$ und $\zeta\theta$ zueinander macht. Das ist nämlich klar aus der Entstehung der krummen Linie.“ So Pappus, der hier getreuer Berichterstatter über die alte Erfindung zu sein scheint. Die Kreisquadratur mit Hilfe der Quadratrix schließt sich bei Pappus unmittelbar an. Wir werden diese Anwendung erst in Verbindung mit dem Namen Dinostratus zur Rede bringen [1].

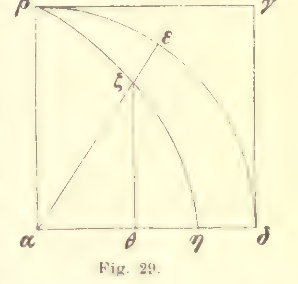


Fig. 29.

[1] Diese ganze Stelle schließt sich eng an Bretschneider l. c. an.

Noch von einer anderen Persönlichkeit müssen wir hier einschaltend einiges sagen, von Zenon von Elea. Dieser Erfinder[1]) der eigentlichen Dialektik dürfte noch um 20 Jahre älter als Demokritus, um 30 bis 40 Jahre älter als Hippias gewesen sein und seine geistige Blüte in der Zeit gefeiert haben, als letzterer kaum geboren war. Nach der als Stoa bezeichneten Halle, in welcher Zenon in Athen seine Vorträge hielt, nannte man seine Schüler die Stoiker. Zu diesen unmittelbaren Schülern gehörte Posidonius von Alexandria. Würde Zenon als Mathematiker eine Bedeutung haben, so könnte man uns mit Recht den Vorwurf machen, seiner hier an unrichtiger Stelle zu gedenken, der weiter oben behandelt werden mußte. Aber Zenon war nicht Mathematiker. Man wäre fast versucht, ihn das Gegenteil eines solchen zu nennen. Wenigstens versuchte er mit philosophischem Scharfsinne die mathematischen Meinungen zu stürzen statt sie zu stützen. Die Zeit brachte das so mit sich. Die Atomistiker hatten die Teilbarkeit der Körperwelt in Frage gestellt, indem sie unteilbar kleine Urteilchen annahmen. Noch ungeheuerlicher war der Bruch mit dem Gewohnten als die Pythagoräer den Begriff des Irrationalen unter die Denker warfen. Beabsichtigt oder nicht, dieser Begriff drang, wie wir bei Demokritus (S. 193) gesehen haben, in weitere und weitere Kreise. Das Unaussprechliche war ausgesprochen, das Undenkbare in Worte gekleidet, das Unenthüllbare den Augen preisgegeben. Und wer nüchternerer Auffassung diese pythagoräische Scheu nicht teilte, dem war wenigstens eine ganz neue Schwierigkeit unterbreitet, welche strengen Schlüssen nicht standhielt. Zahl und Raumgröße, bisher als zur gegenseitigen Messung oder Versinnlichung als unbedingt tauglich erachtet, zeigten plötzlich einen Widerspruch. Jeder Zahl entsprach noch immer eine Länge, aber nicht jeder Länge entsprach eine Zahl. Stetigkeit und Unstetigkeit waren damit entdeckt und den Philosophen als neues Denkobjekt vorgelegt. Kann man sich wundern, wenn letztere, um des Widerspruches, der in jenem Gegensatze enthalten ist, sich zu erwehren, zu weit gingen, wenn sie dabei zur Leugnung der Vielheit, zur Leugnung der Bewegung gelangten?

Man kennt ja die eigentümlichen Schlüsse Zenons[2]). Jede Viel-

---

[1]) Diogenes Laertius XI, 25 *φησὶ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῷ Σοφιστῇ εὑρετὴν αὐτὸν γενέσθαι διαλεκτικῆς*. Ebenso derselbe VIII, 57. [2]) Vgl. Zeller I, 497 bis 507, woher wir unsere Auszüge meistens wörtlich entnehmen. Ferner Gerling, Ueber Zeno des Eleaten Paradoxen über die Bewegung (Marburg 1846). E. Raab, Die Zenonischen Beweise (Schweinfurt 1880) und P. Tannery, Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et G. Cantor, im Oktoberheft 1885 der Revue philosophique pag. 385—410.

heit ist eine Anzahl von Einheiten, eine wirkliche Einheit aber nur das Unteilbare. Jedes von den vielen muß also selbst eine unteilbare Einheit sein, oder aus solchen Einheiten bestehen. Was aber unteilbar ist, das kann keine Größe haben, denn alles, was eine Größe hat, ist ins Unendliche teilbar. Die einzelnen Teile, aus denen das Viele besteht, haben mithin keine Größe. Es wird also auch nichts dadurch größer werden, daß sie zu ihm hinzutreten, und nichts dadurch kleiner, daß sie von ihm hinweggenommen werden. Was aber zu anderem hinzukommend dieses nicht vergrößert, und von ihm weggenommen es nicht verkleinert, das ist nichts. Das Viele ist mithin unendlich klein, denn jeder seiner Bestandteile ist so klein, daß er nichts ist. Andererseits aber müssen diese Teile auch unendlich groß sein. Denn da dasjenige, was keine Größe hat, nicht ist, so müssen die Vielen, um zu sein, eine Größe haben, ihre Teile müssen mithin voneinander entfernt sein, d. h. es müssen andere Teile zwischen ihnen liegen. Von diesen gilt aber das Gleiche: auch sie müssen eine Größe haben und durch weitere von den anderen getrennt sein, und so fort ins Unendliche, so daß wir demnach unendlich viele Größen, oder eine unendliche Größe erhalten. Man kennt den Ausspruch des Zenon gegen Protagoras, ein Scheffel Frucht könne beim Ausschütten ein Geräusch nicht hervorbringen, wenn nicht jedes einzelne Korn und jeder kleinste Teil eines Kornes ein Geräusch hervorbrächte. Man kennt seine Beweise für die Unmöglichkeit einer Bewegung. Ehe der bewegte Körper am Ziele ankommen kann, muß er erst in der Mitte des Weges angekommen sein, ehe er an dieser ankommt in der Mitte seiner ersten Hälfte, ehe er dahin kommt in der Mitte des ersten Viertels, und so fort ins Unendliche. Jeder Körper müßte daher, um von einem Punkte zum anderen zu gelangen, unendlich viele Räume durchlaufen. Es ist mithin unmöglich von einem Punkte zu einem anderen zu gelangen, die Bewegung ist unmöglich. Ebenso folgt die Unmöglichkeit, daß die Schildkröte, wenn sie nur einen Vorsprung hat, durch den schnellen Achilleus eingeholt werden könne, weil während Achilleus den ersten Vorsprung durchläuft, die Schildkröte bereits einen zweiten Vorsprung gewonnen hat, und so fort ins Unendliche.

Der mathematisch sein sollenden Form wegen ist ein letzter Einwurf Zenons gegen die Bewegungslehre erwähnenswert. Eine Reihe von Gegenständen α_1, α_2, α_3, α_4 ist räumlich mit zwei anderen Reihen von Gegenständen β_1, β_2, β_3, β_4 und γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 in Beziehung gesetzt, so daß sie nachfolgende gegenseitige Lage besitzen:

$$\begin{array}{llllllllll} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & & & & & & \\ & & & & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & . \end{array}$$

Die α sind in Ruhe, die β und die γ sind in entgegengesetzter Bewegung, jene von links nach rechts, diese von rechts nach links. Wenn β_1 bei α_4 angelangt ist, ist γ_1 bei α_1 angelangt, und zu derselben Zeit β_4 bei α_1, γ_4 bei α_4. Demgemäß ist β_1 sowohl an α_3 und α_4 als an γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 vorbeigekommen, hat in einer und derselben Zeit an zwei und an vier Gegenständen von genau gleicher Entfernung sich vorbeibewegen können und folglich zugleich eine einfache und eine doppelte Geschwindigkeit besessen, was unmöglich ist.

Wir haben dem Zenon weiter oben die Eigenschaft als Mathematiker abgesprochen. Gerade dieser letzte Trugschluß rechtfertigt uns, denn hier sind irrigerweise absolute und relative Bewegungsgrößen einander gleichgesetzt, was einem Mathematiker kaum begegnet wäre. Anders dagegen verhält es sich mit den vorher hervorgehobenen Schlüssen und ihren sich widersprechenden Ergebnissen. Zenon suchte darzutun, daß ein Körper nicht eine Summe von Punkten, ein Zeitraum nicht eine Summe von Augenblicken, eine Bewegung nicht eine Summe einfacher Übergänge von einem Punkte des Raumes zum anderen sei. Dieser ganze in geistreich erfundenen Widersprüchen geführte Streit richtete sich gegen die Pythagoräer[1]), welchen der Punkt eine *μονὰς ἔχουσα θέσιν*, eine Einheit an bestimmtem Platze hieß. War diese Erklärung richtig, dann war der Körper als Vielheit eine Summe von Einheiten, d. h. von Punkten, und dagegen erhob Zenon seine Stimme. Er sah hier, was vor ihm vielleicht noch nicht gesehen, jedenfalls nicht in gleich scharfer Betonung bemerklich gemacht worden war: Schwierigkeiten, denen in der Tat weder der Philosoph noch der Mathematiker in aller Strenge gerecht werden kann, wenn auch der Mathematiker dazu gelangte durch Einführung bestimmter Zeichen die Stetigkeit zu einer definierbaren Eigenschaft zu machen, und mit den Grenzen zugleich den Übergang zu den Grenzen der Untersuchung zu unterwerfen. Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, daß sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche, freilich anders ausgesprochen, noch Streitfragen unserer Gegenwart bilden.

---

[1]) Die Gegnerschaft Zenons gegen die Pythagoräer ist von Tannery l. c. hervorgehoben worden.

9. Kapitel.

Mathematiker außerhalb der pythagoräischen Schule. Hippokrates von Chios.

Den Mathematikern scheint nächst dem Irrationalen bei Gelegenheit der Kreisquadratur der erste Anlaß geboten worden zu sein, Fragen des stetigen Überganges zu behandeln, und dieses führt uns zurück zu dem Mathematikerverzeichnisse, welches mit den Worten fortfährt:

„Nach diesen wurde Hippokrates von Chios, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt. Unter den hier Genannten hat zuerst Hippokrates Elemente — σтοιχεῖα — geschrieben.“

Von dem Leben des Hippokrates von Chios sind uns nur wenige Züge bekannt[1]). Ursprünglich Kaufmann kam er durch einen unglücklichen Zufall um sein Vermögen. Die einen erzählen, die Zolleinnehmer von Byzanz, gegen welche er sich leichtgläubig erwies, hätten ihn darum geprellt, die anderen lassen ihn durch Seeräuber geplündert worden sein. Man hat beide Angaben so zu vereinigen gesucht, daß man mutmaßte, athenische Seeräuber hätten aus Veranlassung eines Krieges gegen Byzanz das Schiff des Hippokrates weggenommen. Jener Krieg sei der sogenannte Samische Krieg um das Jahr 440 gewesen, an welchem tatsächlich die Byzantiner gegen die Athener teilnahmen, und um diese Zeit sei also Hippokrates nach Athen gekommen. Ohne die Möglichkeit in Abrede zu stellen, daß es sich so verhalten haben könne, bedürfen wir jedoch dieser Vermutung nicht, um die wichtigste Folgerung zu ziehen, welche sie für uns enthält, nämlich den Aufenthalt des Hippokrates in Athen zu begründen und zeitlich zu bestimmen. Die ungefähre Lebenszeit des Hippokrates geht schon aus seiner Stellung innerhalb des Mathematikerverzeichnisses hervor, sein Aufenthalt in Athen, der Stadt, welche gerade damals mit Recht begann als erste Stadt Griechenlands zu gelten, hat eine besondere Veranlassung nicht notwendig gehabt. Jedenfalls war Hippokrates von Chios in der zweiten Hälfte des V. S. in Athen und kam dort mit Pythagoräern, d. h. offenbar mit versprengten Mitgliedern der italischen Schule zusammen, in deren

---

[1]) Die betreffenden Stellen des Aristoteles (*Ethic. ad Eudem.* VII, 14) und des Johannes Philoponus (*Comment. in Aristotel. phys. auscult.* f. 18) sind abgedruckt bei Bretschneider 97, wo die im Texte dargestellte Vereinigung der beiden Angaben versucht ist.

Gesellschaft er geometrisches Wissen sich aneignete. Es wird sogar erzählt, er habe es sehr bald dahin gebracht, selbst Unterricht in der Mathematik erteilen zu können und habe dafür Bezahlung angenommen. Von da an hätten die Pythagoräer ihn gemieden[1]).

Diese Geschichte erscheint, insbesondere was den durch Hippokrates gewohnheitsmäßig erteilten mathematischen Unterricht betrifft, sehr glaubwürdig. Damit stimmt nämlich vortrefflich überein, was das Mathematikerverzeichnis uns meldet, daß Hippokrates das erste Elementarlehrbuch der Mathematik verfaßt habe. Weit hervorragender aber sind die eigentlichen geometrischen Erfindungen des Hippokrates, welche auf zwei Probleme sich beziehen: auf die Quadratur des Kreises und auf die Verdoppelung des Würfels.

Die Quadratur des Kreises, von Anaxagoras zuerst versucht, hat auch unter den Sophisten wenige Jahrzehnte vor Hippokrates wenn nicht bis zu seiner Zeit herab Bearbeiter gefunden. Es ist kaum wahrscheinlich, daß die Wortklauberei so alt sei, mit welcher man nach einer Quadratzahl suchte, die zugleich zyklisch sei[2]), d. h. mit derselben Endziffer schließe wie ihre Wurzel z. B. $25 = 5^2$, $36 = 6^2$. Diese Spitzfindigkeit ist erst bei Alexander von Aphrodisias (um 200 nach Christus) nachweisbar[3]). Aber die Versuche von Antiphon und Bryson sind sehr bemerkenswert.

Antiphon, ein Zeitgenosse des Sokrates, mit welchem er über verschiedene Dinge in Hader lag[4]), schlug den Weg ein, daß er in den Kreis ein regelmäßiges Vieleck, etwa ein Quadrat oder ein regelmäßiges Dreieck, einzeichnete[5]). Von diesem ging er zu dem Vielecke doppelter Seitenzahl über. So soll man fortschreiten bis dem Kreise ein Vieleck werde eingeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreise zusammenfallen würden. Nun könne

[1]) Jamblichus, *De philosoph. Pythagor.* lib. III, bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca*, pag. 216. [2]) So berichtet Simplicius in einer unter anderen bei Bretschneider 106—107 abgedruckten Stelle. [3]) Vgl. über das Alter der Stelle P. Tannery in der Bibliotheca Mathematica 1900 (3. Folge I, 266). [4]) Diogenes Laertius II, 46. [5]) Der Bericht des Simplicius abgedruckt bei Bretschneider, der das große Verdienst sich erworben hat, diese sämtlichen Untersuchungen zuerst für die Geschichte der Mathematik nutzbringend gemacht zu haben. Bedeutend vertieft haben sich die Forschungen über das, was Simplicius berichtet, seit der Ausgabe von Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores durch Herm. Diels (Berlin 1882), in deren Vorrede auch Arbeiten von Usener und P. Tannery verwertet sind. Noch neuer ist Tannery, Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules (Mémoires de la Société de sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2e Série T. V und Heiberg im Philologus XLIII, 336—344. Abschließend ist Ferd. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates in der Bibliotheca Mathematica 1902 (3. Folge III, 7—62).

man, wie man in den Elementen gelernt habe, zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat zeichnen, folglich auch zu dem Kreise mittels des Vielecks, welches an seine Stelle getreten sei. So der Bericht des Simplicius, eines Erklärers des Aristoteles aus dem VI. S., in seinem Kommentare zur Physik des Stagiriten als Einleitung in den selbst aus Eudemus geschöpften Bericht über den Quadrierungsversuch des Hippokrates, der uns nachher zu beschäftigen hat. Ein anderer Kommentator des Aristoteles, Themistius (ungefähr 317—387), weiß die Sache ganz ähnlich[1]). Die Übereinstimmung beider Berichte spricht für eine gleiche Quelle, wahrscheinlich den Eudemus.

Ein anderer Geometer der gleichen Zeit etwa wie Antiphon war der Sophist Bryson aus Herakläa, der Sohn des Herodorus. Er wird auch wohl als Pythagoräer bezeichnet. Er ging in seinem Versuche die Quadratur des Kreises zu finden, von welchem wir wieder durch einen anderen Erklärer des Aristoteles, durch Johannes Philoponus unterrichtet sind[2]), um einen sehr bedeutsamen Schritt über Antiphon hinaus. Er begnügte sich nicht damit ein Kleineres als den Kreis zu finden, welches sich nur wenig von ihm unterschied, er verschaffte sich auch ein der gleichen Forderung genügendes Größeres. Er zeichnete neben den eingeschriebenen Vielecken auch umschriebene Vielecke von immer größerer Seitenzahl und beging bei Ausführung dieses vollständig richtigen Gedankens nur einen damals freilich verzeihlichen Fehler, indem er meinte, die Kreisfläche sei das arithmetische Mittel zwischen einem eingeschriebenen und einem umschriebenen Vielecke. Es ist nicht wahr, sagte später Proklus diesen Versuch vornehm zurückweisend, daß die Stücke, um welche jene Vielecke größer und kleiner als der Kreis sind, sich gleichen. Aber auch welche Entwicklung der Geometrie zwischen Bryson und Proklus! Wir glauben über das Irrige an Brysons Folgerung hinweggehen zu dürfen, den Tadel irgend einen Mittelwert mit dem arithmetischen Mittel verwechselt zu haben, ersticken zu müssen unter dem Lobe in der Erkenntnis des Grenzbegriffes weiter gekommen zu sein als alle Vorgänger.

So weit freilich wie Aristoteles, wenn wir dieses vorgreifend hier erwähnen dürfen, ist auch Bryson nicht gegangen. Aristoteles wußte und sagte[3]) in Worten, deren wir heute uns noch vielfach

[1]) Themistii in Aristotelis physica paraphrasis (ed. H. Schenkl, Berlin 1900). [2]) Bretschneider 126. [3]) Aristoteles, Physic. III, 4. Die Zusammenstellung der auf den Grenzbegriff und auf das Unendliche bezüglichen Stellen des Aristoteles usw. bildet eines der schönsten Kapitel bei Hankel 115—127. Vgl. auch Görland, Aristoteles und die Mathematik (Marburg 1899) S. 162 bis 183.

bedienen, ohne das Bewußtsein zu haben seine Schüler zu sein: „Stetig — *συνεχές* — sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgender Teile, mit der dieselben sich berühren, eine und die nämliche wird und, wie es auch das Wort bezeichnet, zusammengehalten wird.“ Aristoteles wußte, daß es ein anderes ist unendlich vieles zu zählen, oder durch unendlich viele nicht voneinander zu scheidende Punkte sich bewegen. Er löste das Paradoxon der Durchlaufung dieser unendlich vielen Raumpunkte in endlicher Zeit durch das neue Paradoxon, daß innerhalb der endlichen Zeit unendlich viele Zeitteile von unendlich kleiner Dauer anzunehmen seien. Es gibt für ihn kein reales Unendliches in zusammenhangloser Unbeschränktheit des Begriffes, so daß Größeres oder Kleineres nicht möglich ist, sondern nur Endliches von beliebiger Größe, von beliebiger Kleinheit. Das Unendliche bleibt nicht, es wird.[1]) Aber man vergesse nicht, daß Aristoteles schon um ein weiteres Jahrhundert nach der Zeit lebte, welche uns in diesem Augenblicke beschäftigt, und daß er Aristoteles war, einer jener Geister, die für alle Zeiten lebend der eigenen Zeit meist unverstanden bleiben.

Bis zu einem gewissen Grade darf man letzteres vielleicht auch für Antiphon und Bryson behaupten. Die Mitte des V. S. konnte sich mit Schlußfolgerungen, wie diese beiden Männer sie zogen, nicht befreunden. Sie konnte nicht über den Widerspruch hinaus, noch um den Widerspruch herum kommen, der darin liegt, die krumme Kreisfläche durch eine geradlinig begrenzte Vielecksfläche erschöpfen zu lassen. Eine mathematische Begründung irgendwelcher Art, am naturgemäßesten ein selbst auf einen Widerspruch gebauter Beweis der Unmöglichkeit der entgegengesetzten Annahme, mußte vorausgehen und das bilden, was man die geometrische Exhaustion nennt.

Aller Wahrscheinlichkeit nach versuchte Hippokrates von Chios zuerst oder als einer der Ersten eine solche Schlußfolgerung um zu dem Satze zu gelangen, daß Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional seien, ein Satz, den er, wie Eudemus ausdrücklich sagt[2]), bewiesen hat.

Die Wiederherstellung dessen, was in der Tat Hippokrates angehört, ist allerdings schwierig. Der Bericht im ganzen stammt, wie wir (S. 202) sagten, von Simplicius her. Manches hat dieser von Alexander von Aphrodisias entnommen, anderes und zwar wörtlich (*κατὰ λέξιν*) von Eudemus. Er selbst hat es an erläuternden Bemerkungen auch nicht fehlen lassen, deren Erkennungszeichen zum

---

[1]) Aristoteles, Physic. III, 7 *οὐδὲ μένει ἡ ἀπειρία ἀλλὰ γίγνεται.* [2]) *Eudemi fragmenta* (ed. Spengel) pag. 128, lin. 29.

Teil ein plötzlicher Übergang der Redeweise aus der dritten in die erste Person bildet. Wie ist aus diesem Gemenge das herauszuschälen, was Eudemus sagte, wie daraus wieder was in der Abhandlung des Hippokrates stand? Wir folgen in unserer Darstellung dem letzten Bearbeiter der Frage[1]) und verweisen für die nähere Begründung auf dessen umfangreiche Studie.

Zunächst ist von der Form zu reden. Es ist wohl nicht daran zu zweifeln, daß Eudemus, daß vor ihm Hippokrates Figuren zeichnete und an die einzelnen Punkte derselben Buchstaben schrieb. Wir haben früher gesehen, daß die Ägypter ihren Figuren teilweise die Längenmaße beischrieben, welche den Linien derselben zukamen. Wir haben darin vielleicht die Anregung gefunden, infolge deren Zahlengrößen durch Linien zur Versinnlichung gebracht wurden (S. 163). Die Ägypter gingen über diese messende Bezeichnung hinaus. Eine gewisse Allgemeinheit gab sich kund, wenn die Scheitellinie mit *merit*, die Grundlinie der Pyramide mit *uchatebt* usw. bezeichnet wurde, indem hierdurch die von Figur zu Figur unveränderliche Lage gegen die jedesmal wechselnde Länge als das wichtigere in den Vordergrund trat. Aber Punkte nun gar durch Buchstaben zu benennen, welche nicht Zahlenwerte, nicht Abkürzungen von Wörtern, welche etwa so anfingen, sein sollten, sondern nur Buchstaben als solche, damit die Möglichkeit zu geben eine Figur auch ziemlich verwickelter Art nur zu denken und doch mit dem Texte in verständlichen Einklang zu bringen: das ist eine Art von allgemeiner Symbolik, ist die bei Geometern erkennbare Vorläuferin der algebraischen Bezeichnung der Unbekannten durch einen Buchstaben, oder wenigstens durch ein Wort. Und innerhalb dieser Symbolik selbst ist ein Fortschritt nachweisbar: die älteren Geometer, wie Eudemus, wie vor ihm vermutlich Hippokrates, sprechen von einer Linie, „an welcher AB (steht)", von einem Punkte, „an welchem K (steht)", während es bei den Späteren, bei Euklid usw. kurzweg heißt „die Linie AB" oder „der Punkt K".

Ob Hippokrates der erste war, welcher die geometrischen Figuren mit zur Bezeichnung dienenden Buchstaben versah, das wissen wir nicht. Wahrscheinlich ist es uns nicht, weil Eudemus sonst vermutlich in seinem Berichte auf diese Neuerung hingewiesen haben würde. Wir neigen weit eher der Meinung zu, Hippokrates werde die geometrische Anwendung der Buchstaben von den Pythagoräern gelernt haben, denen er ja auch sein mathematisches Wissen

[1]) F. Rudio in der Bibliotheca mathematica 1902, 3. Folge III, 7—62 und in der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrgang L (1905).

überhaupt verdankt haben soll. Dafür spricht, daß das Sternfünfeck, welches den Pythagoräern als Erkennungszeichen, auch wohl als Briefüberschrift diente (S. 178), an seinen Ecken die Buchstaben geführt haben soll, welche das Wort Gesundheit bildeten. So wird wenigstens allgemein die Stelle aufgefaßt, daß jene Figur Gesundheit genannt worden sei.

Bei Hippokrates bestand dagegen eine Sitte noch nicht, welche bei Euklid mit der Regelmäßigkeit eines Gesetzes herrschend geworden ist: die Sitte nämlich unter die zur Bezeichnung von Figuren benutzten Buchstaben niemals das I zu begreifen, sondern nach Θ sofort zu K überzugehen. Offenbar wollte man dadurch der leicht möglichen Verwechslung des Buchstaben I mit einem einfachen Vertikalstriche vorbeugen[1]. Der Bericht des Eudemus über Hippokrates, also wahrscheinlich auch Hippokrates selbst, übersprang das I noch nicht[2], und auch bei der eben erwähnten pythagoräischen Bezeichnung der Ecken des Pentalpha spielt I eine Rolle.

Wir kommen nach diesen die Form betreffenden Vorbemerkungen zu dem eigentlichen Inhalte der Abhandlung des Hippokrates, dessen Verständnis wesentlich davon beeinflußt ist, wie man das in dem Berichte vorkommende Wort *τμῆμα* übersetzt, welches jedenfalls ein durch Schneiden aus dem Kreise hervorgegangenes Flächenstück bedeutet. Wie der erzeugende Schnitt beziehungsweise die erzeugenden Schnitte geführt werden, ist nicht gesagt. An und für sich kann also ebensogut das gemeint sein, was man nachmals einen Kreisabschnitt, Segment, als das, was man nachmals einen Kreisausschnitt, Sektor, nannte. Der neueste Herausgeber[3] ist der Ansicht, man habe in früher Zeit bald das eine, bald das andere *τμῆμα* genannt, und man müsse meistens Segment als Übersetzung gelten lassen, was aber nicht ausschließe, daß in vereinzelten Fällen die Übersetzung Sektor richtig sei. Ein anderes offenbar von Hippokrates eingeführtes Wort *μηνίσκος* Mondchen (lateinisch *lunula*) bedarf kaum einer besonderen Erklärung; es ist eine Mondsichel gebildet durch zwei Kreisbögen, welche verschiedenen Kreisen angehörend nach der gleichen Richtung gekrümmt sind und mit ihren Endpunkten zusammentreffen.

Grundlage der ganzen Untersuchung ist der Satz, daß ähnliche Segmente dasselbe Verhältnis zueinander haben wie die Grundlinien in der Potenz. Ähnliche Sektoren sind nämlich solche, welche gleiche Untervielfache der betreffenden Kreise sind, und wie die Kreise selbst

[1] Nach Professor Studemund. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XXI, Historisch-literarische Abteilung S. 183. [2] Rudio l. c. S. 24. [3] Rudio, Anmerkung 67 auf S. 41—46.

den Potenzen ihrer Durchmesser oder auch ihrer Halbmesser proportional sind, so verhält es sich auch mit ähnlichen Sektoren derselben. Der Sektor besteht aber aus einem Dreiecke und einem Segmente. Ähnlichen Sektoren entsprechen ähnliche Dreiecke, welche ebensogut den Potenzen der Halbmesser als der Grundlinien proportional sein müssen, und die ähnlichen Segmente werden wieder in dem gleichen Verhältnisse stehen müssen. Ähnliche Segmente nehmen gleiche Winkel auf, und zwar sind die aller Halbkreise Rechte und die der größeren kleiner als Rechte und die der kleineren größer als Rechte.

Wir halten einen Augenblick ein, um festzustellen, daß demnach Hippokrates mit der Gleichheit von auf demselben Bogen aufstehenden Peripheriewinkeln bekannt war.

Allein auch das von ihm benutzte Wort *δύναμις*, Vermögen, lateinisch *potentia* gibt zu Bemerkungen Anlaß. Daß aus der lateinischen Übersetzung nachmals unsere Potenzgrößen entstanden sind, liegt auf der Hand. Ursprünglich war unter *δύναμις* nur die zweite Potenz verstanden und das Vorkommen des Wortes als Kunstausdruck bei Hippokrates, den Eudemus hier wörtlich ausgenutzt haben dürfte, ist das erste nachweisbare. Später kommt das Wort sowohl in mathematischem als in nichtmathematischem Sinne ungemein häufig vor. Platon hat es benutzt[1]), Aristoteles nicht minder an unzähligen Stellen, wo auch von dem dynamischen Auftreten dieser oder jener Eigenschaft — wir sagen gewöhnlich in einer lateinischen Wortform deren virtuelles Auftreten — die Rede ist, der Kunstausdruck der einen Wissenschaft zum Kunstausdrucke einer anderen wurde. Es scheint fast, als läge in den Wörtern *δύναμις* und *τετράγωνος* ein ähnlicher Gegensatz wie in unseren Ausdrücken „zweite Potenz“ und „Quadrat“. Das eine Wort bezieht sich auf die arithmetische Entstehung als Zahl, das andere auf die geometrische Deutung als Fläche, und somit wäre bei Hippokrates von einer rechnenden Vergleichung der Kreisflächen, wie sie aus ihren Durchmessern sich ermitteln lassen, die Rede. Damit soll freilich, wie wir im 11. Kapitel sehen werden, keineswegs gesagt sein, Hippokrates habe die Proportionalität von Kreisfläche und zweiter Potenz des Durchmessers rechnend erkannt.

Das Verfahren des Hippokrates wird nun in der Weise geschildert, daß dessen erster Versuch dahin ging, die Quadratur eines Mondchen zustande zu bringen, dessen äußerer Bogen ein Halbkreis wäre (Fig. 30). Zu diesem Zweck beschrieb er um ein sowohl recht-

---

[1]) Platon, Theaetet pag. 147.

winkliges als gleichschenkliges Dreieck einen Halbkreis und über der Basis ein Kreissegment ähnlich denen, die von den Seiten abgeschnitten werden. Das Segment über der Basis ist gleich den beiden über den anderen Dreiecksseiten und so wird, wenn der Teil des Dreiecks, der außerhalb des über der Basis beschriebenen Segmentes liegt, beiderseits hinzugefügt ist, das Mondchen gleich dem Dreiecke sein.

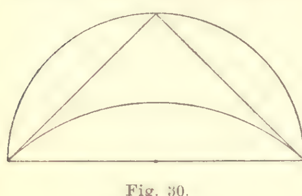


Fig. 30.

Der zweite Versuch gilt einem Mondchen, dessen äußerer Bogen größer als ein Halbkreis ist (Fig. 31). Hippokrates beschreibt in das durch den erwähnten größeren Bogen und dessen Sehne gebildete Segment ein Paralleltrapez mit drei gleichen Seiten; er bestimmt dabei, daß das Quadrat der Grundlinie so groß sein solle wie die Summe der Quadrate der drei anderen Seiten[1]). Wird alsdann über der Grundlinie ein Segment ähnlich den drei anderen gezeichnet, so ist das hierdurch entstehende Mondchen quadrierbar[2]). Daß der äußere Bogen des Mondchen größer als ein Halbkreis sei, wird von Eudemus, vielleicht schon von Hippokrates, bewiesen und zwar mit Hilfe des Satzes, daß der Winkel, welchen eine Seite des Trapezes mit einer Diagonale desselben bildet, ein spitzer Winkel sei. Diese Tatsache folgt ihm aber selbst wieder daraus, daß das Quadrat der Grundlinie des Trapezes, dessen Beziehung zu den anderen Seiten des Trapezes bekannt ist, kleiner als die Summe des Quadrates einer kleinen Trapezseite und des Quadrates einer Trapezdiagonale ist, welches selbst, weil die Diagonale einem von zwei kleinen Trapezseiten gebildeten stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als das doppelte Quadrat einer kleinen Trapezseite ist.

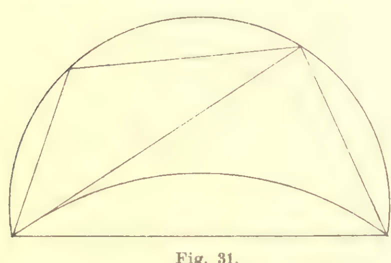


Fig. 31.

Eine sprachliche und eine sachliche Bemerkung sei hier eingeschaltet. Was hier als Diagonale übersetzt wurde, heißt bei Eudemus und auch sonst häufig Diameter. In den beiden ersten Quadrierungsversuchen ist der wichtige Satz benutzt, daß das Quadrat einer

[1]) Das tritt ein, wenn die kleine Seite $a = r\sqrt{3} - \sqrt{3}$. Vgl. über die Mondchen des Hippokrates einen Aufsatz von Clausen (Crelles Journal XXI, 375) und Hankel 127. [2]) Das Mondchen ist, wie Simplicius beweist, gleich dem Trapeze, welches entsteht, wenn von dem großen Segmente die drei kleinen Segmente abgezogen werden, während das Mondchen durch Abziehen jenes den drei kleinen Segmenten ähnlichen Segmentes über der Grundlinie übrig bleibt.

Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Dreiecksseiten, größer als diese Summe, kleiner als diese Summe ist, je nachdem ihr ein rechter, ein stumpfer, ein spitzer Winkel gegenüberliegt.

Der dritte Versuch beschäftigt sich mit einem Mondchen, dessen äußerer Bogen kleiner als ein Halbkreis ist (Fig. 32). Hippokrates verschafft sich dasselbe folgendermaßen. Um K als Mittelpunkt und mit AB als Durchmesser wird ein Halbkreis gezeichnet, ferner die Gerade $\Gamma\Delta$, welche die KB senkrecht halbiert. Von B aus wird die

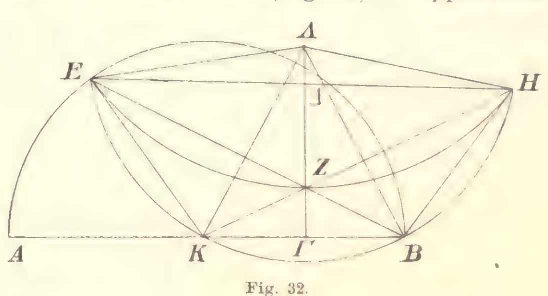


Fig. 32.

BZE derartig gezeichnet, daß das Quadrat des zwischen der $\Gamma\Delta$ und der Kreisperipherie liegenden Stückes ZE anderthalbmal so groß sei als das Quadrat von $K\Delta$. Von E aus wird EH parallel zu AB bis zum Durchschnitt mit der verlängerten KZ gezogen. Mittels der an Länge einander gleichen KE und BH entsteht das Trapez $EKBH$, um welches ein Kreis beschrieben wird[1], der seinen Mittelpunkt in Δ besitzt. Auch um das Dreieck EZH wird ein Kreis beschrieben und nun ist das Mondchen gebildet, dessen innerer Bogen EZH, dessen äußerer Bogen $EKBH$ ist. Sein Flächeninhalt ist gleich dem der Summe der drei Dreiecke BZH, BZK, EKZ, sein äußerer Bogen ist kleiner als der Halbkreis. Letzteres folgt aus der Stumpfheit des Winkels EKH, der Flächeninhalt aus der Ähnlichkeit der Kreisabschnitte über EZ, ZH, EK, KB, BH in Verbindung mit der Proportion $EZ^2 : EK^2 = 3 : 2$[2].

Wir möchten auf die Einzeichnung des Stückes ZE zwischen die Gerade $\Gamma\Delta$ und die Kreisperipherie AEB in vorgeschriebener Länge besonders hinweisen. Sie konnte nur empirisch erfolgen, indem man um B eine Gerade BZE in Drehung versetzte und mit dieser Drehung innehielt, sobald ZE die gewünschte Länge besaß. Das ist das erste Beispiel einer Bewegungsgeometrie, die in späteren Zeiten geradezu den Charakter einer Methode annahm[3].

Wir gelangen zu einem vierten Versuche, bei welchem es auf die Quadrierung eines Kreises zusammen mit einem Mondchen ankam

---

[1]) Simplicius hat die Gleichheit von KE mit BH bewiesen und ebenso auch die Möglichkeit eines Umkreises um das Trapez $EKBH$. [2]) Auch hier hat Simplicius die notwendigen Beweise geliefert. [3]) Wöpcke, L'algèbre d'Omar Alkhayâmî (Paris 1851) pag. 120.

(Fig. 33). Um K als Mittelpunkt sind zwei Kreise mit je einem eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecke gezeichnet, die als kleiner und großer Kreis, als kleines und großes Sechseck unterschieden werden mögen. Dabei sind die Halbmesser so gewählt, daß $HK^2 = 6AK^2$. Augenscheinlich folgt daraus $HI^2 = 3HK^2 = 2HK^2 + 6AK^2$, indem HI Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen andere Kathete eine große Sechsecksseite und dessen Hypotenuse der große Durchmesser ist. Wird über HI mittels eines neugezeichneten Kreisbogens ein kleineres Kreissegment hergestellt ähnlich sowohl dem über $H\Theta$ als dem über AB, so muß es dreimal so groß wie das über $H\Theta$ sein, oder so groß wie das über $H\Theta$, das über ΘI und die sechs Segmentchen im kleinen Kreise über den kleinen Sechsecksseiten. Das Mondchen $I\Theta H$ ist aber gleich dem Dreiecke $H\Theta I$ und den Segmenten über $H\Theta$ und ΘI weniger dem kleineren Kreissegment über HI. Es ist leicht einzusehen, daß alsdann das Mondchen nebst dem kleinen Kreise dem Dreiecke $H\Theta I$ nebst dem kleinen Sechsecke flächengleich sind, wodurch die Quadratur gegeben ist.

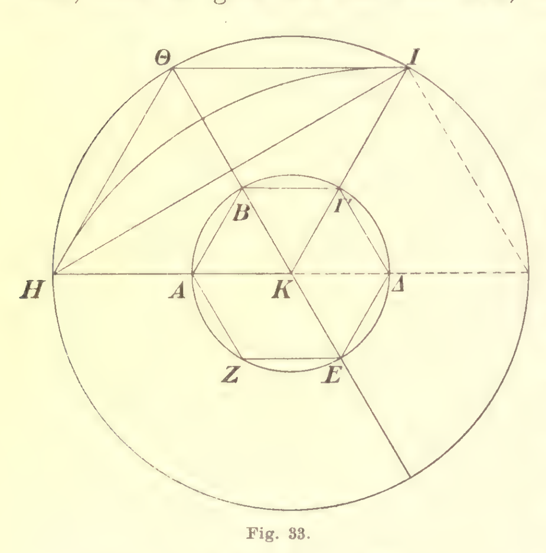


Fig. 33.

Dieses sind die vier von Hippokrates gemachten Versuche krummlinig begrenzte Figuren in ihnen flächengleiche Quadrate zu verwandeln, so wie sie von Eudemus berichtet werden, aus welchem dann später Simplicius' seinen durch sachgemäße Erläuterungen ergänzten Auszug veranstaltete. Man muß sicherlich zugestehen, daß Hippokrates bei der Auswahl der von ihm untersuchten Mondchen eine weit mehr als gewöhnliche Erfindungsgabe an den Tag legte, und daß er bereits über einen achtungswerten Vorrat an geometrischem Wissen verfügte. Hat er, wie vermutet worden ist[1]), beim Niederschreiben seiner ihrem Hauptinhalte nach sicherlich ganz neuen Abhandlung die Überzeugung gewonnen, es sei an der Zeit ein Elementarlehrbuch zusammenzustellen, auf welches man für notwendige Hilfssätze sich berufen könne, oder aber hatte er, als er die Abhand-

[1]) Bretschneider 131.

lung schrieb, sein Elementarwerk (S. 201) schon veröffentlicht und deswegen sich über manches weniger ausfürlich verbreitet als es späteren Lesern und Erklärern wünschenswert erschien, das ist eine Frage, auf die wir keine endgültige Antwort zu geben vermögen.

Hippokrates beschäftigte sich, wie wir (S. 202) ankündigend bemerkten, auch noch mit einem anderen mathematischen Probleme, mit der Würfelverdoppelung. Das ist die letzte uns hier begegnende von den drei großen Aufgaben der griechischen Mathematiker, welche ihnen Gelegenheit gaben ihre Kräfte zu üben und das zu erfinden, was man die höhere Mathematik jenes Zeitraumes zu nennen berechtigt ist. Über die Geschichte der Würfelverdoppelung sind wir durch namhafte Überbleibsel aus alter Zeit ziemlich gut berichtet, und selbst der sagenhafte Anstrich des Ursprungs der Aufgabe wird im 30. Kapitel sich als erheblich ausweisen. Ein griechischer Mathematiker Eratosthenes im III. S. schrieb an Ptolemäus Euergetes den ägyptischen König einen Brief über diesen Gegenstand, der sich bei Eutokius von Askalon, einem späten Kommentator des Archimed, erhalten hat und dessen Anfang wir hier beifügen[1]). Trotzdem er ziemlich weit jenseits der gegenwärtig allein zu behandelnden Zeit hinabführt, glaubten wir doch eine Trennung des zusammengehörigen Textes nicht vornehmen zu sollen und werden lieber später, wo es nötig ist, auf dieses Kapitel hier zurückverweisen.

„Dem Könige Ptolemäus wünscht Eratosthenes Glück und Wohlsein. Von den alten Tragödiendichtern, sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten ließ, und hörte, daß es auf allen Seiten 100 Fuß haben werde, sagen lassen:

Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft,
Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht.

Man untersuchte aber auch von seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne daß er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgabe der Art des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zugrunde legend suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun langezeit hindurch alle ratlos waren, entdeckte zuerst der Chier Hippokrates, daß, wenn man herausbrächte

[1]) Zur Geschichte der Würfelverdoppelung vgl. N. T. Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione*. Göttingen 1798. J. H. Dresler, Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels. Osterprogramm 1828 für die herzogl. Nassauischen Pädagogien zu Dillenburg, Hadamar und Wiesbaden. Ch. H. Biering, *Historia problematis cubi duplicandi*. Kopenhagen 1844. Teilweise Neues auch an Stellenmaterial in der Dissertation von C. Blass, *De Platone mathematico*. Bonn 1861, pag. 22—30. Unsere Übersetzung des Briefes des Eratosthenes nach Dresler l. c. S. 8—10.

zu zwei gegebenen geraden Linien, wo die größere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte; wonach er dann seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit verwandelte. Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheißen worden einen ihrer Altäre zu verdoppeln und in dieselbe Verlegenheit geraten. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden. Da sich nun diese mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei Gegebenen zwei Mittlere suchten, soll sie der Tarentiner Archytas vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben, Eudoxus aber vermittelst der sogenannten Bogenlinien. Es widerfuhr ihnen aber insgesamt, daß sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten, außer etwa einigermaßen die des Menächmus, doch auch nur mühsam."

Der alte Tragiker, auf dessen Verse Eratosthenes sich beruft, ist kein anderer als Euripides, in dessen verloren gegangenem Poleidos sie vorkommen, wie sehr wahrscheinlich gemacht worden ist[1]). Da nun Euripides 485—406 lebte, seine dichterische Wirksamkeit also etwa in die gleiche Zeit fällt, in die wir die wissenschaftliche Tätigkeit des Hippokrates verlegen, so geht hieraus hervor, daß eben damals die Sage von dem Grabmale des Glaukos bekannt war. Ob damals die Sage schon alt gewesen; ob Euripides ihrer gedachte, weil die Gelehrten des Tages sich bereits mit Würfelverdoppelung beschäftigten, die Anspielung also einen gewissen Eindruck auf die feiner gebildeten Zuhörer machen mußte; ob man den entgegengesetzten Tatbestand annehmen soll, daß die Volkstümlichkeit der Verse des Euripides die Mathematiker auf die eigentümlich gestellte Aufgabe aufmerksam machte; ob wir daran erinnern dürfen, daß Euripides der Dichter selbst ein Gelehrter, daß er ein Schüler des Anaxagoras war, das alles gehört in das Bereich gewagtester Vermutung, oder wenigstens noch unerledigter Forschung. Als gesichert ist gemäß dem Berichte des Eratosthenes nur so viel zu betrachten, daß nach fruchtlosen Versuchen anderer über die Aufgabe der Würfelverdoppelung Herr zu werden, Hippokrates von Chios auf die Bemerkung fiel, daß die Aufgabe auch in anderer Gestalt sich aussprechen lasse. Findet die fortlaufende Proportion $a:x=x:y=y:b$

---

[1]) Valkenarius, *Diatribe de fragm. Eurip.* pag. 203. Vgl. Reimer, *De cubi duplicatione* pag. 20.

statt, so ist $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, mithin $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$ und $x^3 = a^2b$ oder, wenn $b = 2a$, wie es bei der Würfelverdoppelung notwendig erscheint, $x^3 = 2a^3$. Die Seite des doppelten Würfels ist in der Tat die erste von zwei mittleren Proportionalen, welche zwischen der einfachen und der doppelten Seite des ursprünglichen Würfels eingeschaltet werden. Diese Erkenntnis, welche auch Proklus[1]) dem Hippokrates nachrühmt, war ein Schritt weiter auf dem richtigen Wege, aber allerdings ein verhältnismäßig kleiner Schritt. Hippokrates verwandelte nur, wie Eratosthenes in fast scherzhaftem Tone sagt, seine Ratlosigkeit in eine andere nicht geringere Ratlosigkeit. Wie sollten jene beiden mittleren Proportionalen gefunden werden? Die Männer, welche der Lösung dieser Aufgabe sich gewachsen fühlten, sind es, die uns im folgenden entgegentreten werden.

Auf ihre Gemeinschaft führt auch das Mathematikerverzeichnis uns hin, wenn es neben Hippokrates von Chios noch Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt nennt. Von diesem wissen wir an geometrischen Tatsachen nur, daß er die Irrationalität der Quadratwurzeln von Zahlen zwischen 3 und 17 bewies[2]) (S. 182). Wir wissen von ihm außerdem, daß er der Schule der Pythagoräer angehörte[3]), und daß er Lehrer des Platon in mathematischen Dingen war[4]).

Platon und die Akademie nehmen jetzt, wie in der Geschichte der griechischen Philosophie, so in der Geschichte der griechischen Mathematik, die leitende Stellung ein. Mit ihnen müssen wir uns beschäftigen.

10. Kapitel.

Platon.

Zwei Kriege von schwerwiegender Bedeutung für die Gestaltung staatlicher Verhältnisse, wie für die Entwicklung der Wissenschaften wurden auf griechischem Boden innerhalb eines Menschenlebens gekämpft. Der peloponnesische Krieg, welcher die Macht Athens vernichtete, welcher den Staat des Perikles von seiner geistigen, wissenschaftlichen wie künstlerischen Höhe herabstürzte, begann 431. Der sogenannte heilige Krieg, in welchem die Thebaner durch ein kurzes Übergewicht erschöpft, König Philipp von Mazedonien zu Hilfe riefen und ihm so den ersten willkommenen Anlaß gaben in griechische Dinge sich einzumengen, endete 346. Dieselben Jahreszahlen

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 213. [2]) Platon, Theaetet 147, D. [3]) Jamblichus, *Vita Pythagor.* 267. [4]) Diogenes Laertius II, 103.

begrenzen fast genau das Leben Platons. Seine Geburt fällt in das Jahr 429, in das Schreckensjahr, in welchem die durch die Schilderung des Thukydides in gräßlicher Wahrheit bekannte Pest Athen in Trauer hüllte, in welchem Perikles starb. Sein Tod erfolgte 348 an demselben Tage, an welchem er 81 Jahre früher geboren war.

In Platons Lebenszeit fallen auch zwei Künstler, deren die Geschichte der Mathematik Erwähnung tun darf: Pheidias und Polyklet, die Verfertiger des Olympischen Zeus, der Argivischen Here. Von Pheidias erzählt Lucian in dem Dialoge über die philosophischen Sekten[1], er sei imstande gewesen aus der Klaue eines Löwen anzugeben, wie groß der ganze Löwe war, woher die griechische Redensart ἐξ ὀνύχων λέοντα[2], lateinisch *ex ungue leonem* stammt, welche sich bis zu unseren Tagen erhalten hat. Von Polyklet meldet Galen[3], er habe in einer Schrift, die Kanon überschrieben war, die Lehre von allen Verhältnissen des Körpers aufgestellt. Wer denkt dabei nicht an die vorgezeichneten Quadrate im Grabmale Seti I (S. 108), wer nicht an die Notwendigkeit einer in weite Kreise eingedrungenen Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren?

Platon gehörte einer der angesehensten athenischen Familien an. Bis auf König Kodrus führte der Stammbaum des Vaters, bis auf Solon der der Mutter zurück[4]. Platons erste Jugend fiel, wie wir wissen, in eine für Athen trübe und bewegte Zeit, aber bald lächelte das Glück der Stadt, welche es liebgewonnen, aufs neue. Die Knabenjahre Platons fallen mit der Glanzzeit des Alkibiades zusammen, und der Freund des Alkibiades, Sokrates, war Platons Lehrer. Im Verkehre mit den geistig bedeutendsten Männern seiner Vaterstadt entwickelte der Knabe sich zum Manne. Bei Sokrates insbesondere wird Platon jene Methode erlernt haben, welche als eigentlich sokratische gerühmt wird, und welche darin bestand, durch fortgesetztes Fragen immer schärfer umgrenzte Definitionen, aber auch das Eingeständnis von Widersprüchen infolge ungenügender Begriffsbestimmungen hervorzulocken. Um das Jahr 400 etwa, nachdem Sokrates den Giftbecher hatte leeren müssen, verließ Platon die Heimat, in welcher es für den nächsten Schüler des gleichviel ob gerechtem oder ungerechtem Volkshasse zum Opfer Gefallenen nicht mehr sicher war, und verwandte eine längere Reihe von Jahren zu Reisen, welche seine wissenschaftliche Ausbildung vollendeten. Nach Kyrene, wo an der Nordküste Afrikas griechische Bildung schon eine Pflanzstätte

[1] Lucian, Ἑρμότιμος ἢ περὶ αἱρέσεων cap. 55 pag. 147 ed. Sommerbrodt. [2] Diogenes Laertius V, 15. [3] Galen, Περὶ τῶν καθ' Ἱπποκράτην καὶ Πλάτωνα. [4] Diogenes Laertius III, 1.

geschaffen hatte, lockte es ihn. War doch dort die Heimat jenes Theodorus, welcher, wie wir im Theätet erfahren, bei Lebzeiten des Sokrates in Athen verweilte, und welchen wir am Schlusse des vorigen Kapitels Platons Lehrer in der Mathematik genannt haben. Ägypten sah ihn jedenfalls zu längerem Aufenthalte, wenn auch Strabons Berichterstatter sehr übertrieben haben dürften. Bei der Beschreibung der alten Priesterstadt Heliopolis in Ägypten sagt nämlich dieser geographische Schriftsteller: Hier nun zeigt man die Häuser der Priester und auch die Wohnungen des Platon und Eudoxus. Denn letzterer kam mit Platon hierher, und sie lebten daselbst mit den Priestern dreizehn Jahre zusammen, wie einige angeben.[1]) Dann wird ein großes Gewicht auf einen Aufenthalt Platons in Großgriechenland zu legen sein, wo er mit Archytas von Tarent und mit Timäus von Lokri im engsten Verkehre stand[2]). Weiter führte ihn sein Weg nach Sizilien, wo er im 40. Lebensjahre, also im Jahre 389 eintraf[3]). Diese durch ihn selbst bezeugte Zeitangabe nötigt uns auf alle Reisen bis nach Sizilien etwa 11 Jahre zu verteilen und widerlegt somit die 13jährige Dauer des Aufenthalts in Ägypten. Platons Freimütigkeit scheint bei dem Gewaltherrn von Syrakus, bei Dionysius, Anstoß erregt zu haben, so daß dieser ihn gefangen nehmen ließ und ihn als Athener dem lakedämonischen Abgesandten auslieferte, welcher ihn als Sklaven nach Ägina verkaufte. Ein Kyrenaiker zahlte das erforderliche Lösegeld, um Platon wieder frei zu machen, und nun kehrte dieser nach Athen zurück, wo er in den schattigen Spaziergängen der durch Kimon einst verschönerten Akademie nordwestlich vor der Stadt seine die Philosophie umgestaltenden Vorträge hielt, deren Bedeutung auch für die Geschichte der Mathematik nicht hoch genug angeschlagen werden kann[4]).

Eigentlich mathematische Schriften hat Platon zwar nicht verfaßt, aber einiges wird doch auf ihn als Entdecker zurückgeführt, und vielleicht noch wichtiger ist seine Vorliebe für die Mathematik dadurch geworden, daß er auf fähige Schüler sie forterbte. Platon war ja ein Schüler der Pythagoräer in vielen Dingen, in so vielen, daß Aristoteles es ausdrücklich bezeugt hat[5]), daß Asklepius zu dieser Stelle der aristotelischen Metaphysik jedenfalls übertreibend hinzufügte: nicht vieles, alles habe Platon von den Pythagoräern ent-

---

[1]) Strabo XVII, ed. Meinicke pag. 1124. [2]) Cicero, *De finibus* V, 19, 50. *Tusculan.* I, 17, 39. *De republica* I, 10, 15. [3]) Platons Briefe: *Epistola* VII, 324, a. [4]) Über Platon in seinen Beziehungen zur Mathematik vergl. C. Blass, *De Platone mathematico.* Bonn 1861, und B. Rothlauf, Die Mathematik zu Platons Zeiten und seine Beziehungen zu ihr. München 1878. [5]) Aristoteles, Metaphys. I, 6.

nommen. Wie nun die Pythagoräer Mathematik als den ersten Gegenstand eines wirklich wissenschaftlichen Unterrichts betrachteten, wie die Ägypter ihre Kinder zugleich mit den Buchstaben in den Anfangsgründen der Lehre von den Zahlen, von den auszumessenden Räumen und von dem Umlaufe der Gestirne unterrichteten, so wollte auch Platon verfahren haben [1]). Kein Unkundiger der Geometrie trete unter mein Dach, *μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην*, war die Ankündigung, mit welcher der angehende Akademiker empfangen wurde [2]), und Xenokrates, der nächst Speusippus als zweiter Nachfolger Platons die Akademie leitete [3]), blieb ganz in den Fußstapfen seines Lehrers, wenn er einen Jüngling, der die verlangten geometrischen Vorkenntnisse noch nicht besaß, mit den Worten zurückwies: Gehe, Du hast die Handhaben noch nicht zur Philosophie, *πορεύου λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας* [4]).

Platon war in dieser Beziehung so sehr Pythagoräer geworden, daß er den Gegensatz nicht scheute, in welchen er seinen ältesten und verehrtesten Lehrer Sokrates scheinbar zu sich selbst setzte. Sokrates, wie Xenophon in seinen Erinnerungen ihn schildert [5]), wollte die Geometrie nur so weit getrieben wissen, bis man Land mit dem Maßstabe in Besitz nehmen oder übergeben könne. Der Sokrates in Platons Dialogen, dem dieser stets die Gesinnungen in den Mund zu legen liebt, die ihn selbst erfüllen, erklärt dagegen [6]), daß die ganze Wissenschaft doch nur der Erkenntnis wegen betrieben werde. Es ist bekanntlich, sagt er auch, in bezug auf jedes Lernen, um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied zwischen einem, der sich mit Geometrie befaßt hat, und dem, der es nicht getan hat.

Wir verzichten darauf alle Stellen zu sammeln, an welchen Plato ähnliche Gesinnungen über die Mathematik äußert, und zu welchen auch der Ausspruch (S. 184) gehört, daß Gott allezeit geometrisch verfahre, nur eine Bemerkung über das Wort Mathematik wollen wir hier einschalten. Von einer Wissenschaft der Mathematik wußte Platon so wenig wie seine Zeitgenossen [7]). Wohl besaßen sie das Wort *μαθήματα* (Lehrgegenstände), aber es umfaßte alles, was im wissenschaftlichen Unterrichte vorkam. Erst bei den Peripatetikern bekam das allgemeine Wort die besondere Bedeutung, welche wir ihm gegenwärtig noch beilegen und umfaßte fortan Rechenkunst und Arithmetik, Geometrie der Ebene und Stereometrie, Musik und Astro-

---

[1]) Die bezüglichen Stellen aus Platons Staat vergl. bei Rothlauf l. c. S. 12. [2]) Tzetzes, Chil. VIII, 972. [3]) Diogenes Laertius I, 14. [4]) Diogenes Laertius IV, 10. [5]) Xenophon, Memorabil. IV, 7 und ihm folgend Diogenes Laertius II, 32. [6]) Die Stellen aus Platons Staat bei Rothlauf S. 2 und 7. [7]) Rothlauf S. 18—19.

nomie, während zugleich auch der Name der Philosophie, welcher für Platon erst die wörtliche Bedeutung der Weisheitsliebe besaß, einer besonderen Wissenschaft zuerteilt wurde.

Die Vorliebe Platons für mathematische Dinge äußert sich neben den schon berührten Vorschriften über Jugenderziehung in seinem idealen Staatswesen, wo ein Schulzwang innerhalb der einfachsten Lehrgegenstände obwalten, wo Lesen, Schreiben und Rechnen allen Mädchen wie Knaben beigebracht werden soll[1]), auch darin, daß er in vielen seiner in Gesprächsform geschriebenen Abhandlungen mathematische Beispiele zur Verdeutlichung philosophischer Gedanken benutzt. Meistens sind diese Beispiele für Laien berechnet und darum laienhaft einfach, so daß dieselben kaum ein Recht haben in einer Geschichte der Mathematik aufzutreten. Wir machen eine Ausnahme zugunsten der früher geradezu berüchtigten Kapitel des Menon[2]). Nicht als ob es sich mit deren Inhalt anders verhielte, aber weil wir früher (S. 185) auf diese Kapitel uns berufen haben. Sie blieben den Erklärern platonischer Gespräche solange unverstanden, als man in ihnen wunder welche tiefsinnige Dinge suchte. Sie wurden kinderleicht und klar, sobald der Wortlaut mit den Figuren in Zusammenhang gebracht wurde, welche zwar in den Handschriften wie in den Druckausgaben fehlen, von welchen man aber dem Texte gemäß annehmen muß, daß sie im Laufe des Gespräches in den Sand gezeichnet worden waren. Diese Figuren dürften zwei an der Zahl gewesen sein, ein einfacher Kreis und eine einigermaßen zusammengesetzte Vereinigung mehrerer geradliniger Figuren in eine einzige (Fig. 34), die wir uns als nach und nach entstehend zu denken haben. Den Kreis zeichnet Sokrates, um als Beispiel des Runden zu dienen, welches eine Figur, aber nicht die Figur überhaupt sei[3]). Im weiteren Verlaufe des Gespräches[4]) zeichnet Sokrates, die leitende Persönlichkeit der Abhandlung, ein Quadrat von der Seitenlänge 2 mit seinen Mittellinien, welche die Mittelpunkte je gegenüberstehender Seiten verbinden. Er erweitert die Figur zur vierfachen Größe, d. h. zum Quadrat mit

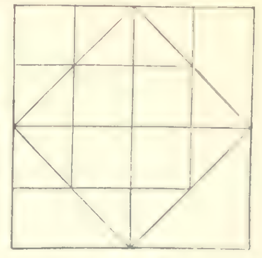


Fig. 34.

[1]) Platon, Gesetze pag. 805. [2]) Vergl. Benecke, Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon. Elbing 1867 und unsere Besprechung Zeitschr. Math. Phys. XIII, Literaturzeitung 9—13. Friedleins Programm von 1873: Beiträge zur Geschichte der Mathematik III pflichtet im ganzen denselben Ansichten bei. Rothlauf S. 64 huldigt, trotzdem er Beneckes Programm kennt, einer künstlichen, wie wir überzeugt sind, falschen Meinung. [3]) Platon, Menon 73 E. [4]) Platon, Menon 82 B bis 85 B.

der Seitenlänge 4, und innerhalb dieses großen Quadrates zum Quadrat mit der Seitenlänge 3, das aus neun Feldern besteht; endlich zeichnet er das Quadrat von der Fläche 8, dessen Seiten die Diagonalen, oder, wie die Sophisten und mit ihnen Platon immer sagten, die Diameter der vier kleineren Quadrate sind, in welche das größte Quadrat von der Seitenlänge 4 zerfällt. Dieses schrägliegende Quadrat von der Fläche 8 ist doppelt so groß, als das ursprünglich gegebene Quadrat von der Fläche 4, und es kam Platon gerade darauf an zu zeigen, daß ein solches Quadrat von doppelter Größe als ein gegebenes genau und leicht gezeichnet werden könne. Es war, wie ganz richtig bemerkt worden ist[1]), der Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes für den Fall des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, der hier geliefert wurde, möglicherweise, wie wir (S. 185) andeuteten, der älteste von Pythagoras selbst herrührende Beweis dieses ersten und einfachsten Falles, vorausgesetzt daß wirklich beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes ursprünglich verschiedene Fälle unterschieden wurden. Nachdem mit dieser ersten und zweiten geometrischen Exemplifikation vollständig abgeschlossen ist, kehrt Sokrates an einer späteren Stelle[2]) wieder zur Geometrie zurück, um ihr ein passendes in die Sinne fallendes Beispiel für die eben zwischen ihm und Menon erörterte Frage, ob Tugend lehrbar sei oder nicht, zu entnehmen. Er will erörtern, daß das Tunliche im allgemeinen sich selten behaupten lasse, daß es Fälle der Möglichkeit wie der Unmöglichkeit gebe. Er will ein recht zutreffendes Beispiel dafür wählen, und da bleibt sein ringsum suchendes Auge an den im Sande noch erkennbaren Figuren haften. Ist es, fragt er, möglich dieses Quadrat als gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck in diesen Kreis auf dem Durchmesser als Grundlinie genau einzuzeichnen? Unter diesem Quadrate versteht er das von der Seitenlänge 2, dessen Verwandlung in ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus der Figur gleichfalls zu erkennen war, wo das gewünschte Dreieck als Hälfte des schräggezeichneten Quadrates erscheint. Sokrates hat die Frage gestellt, er gibt auch die Antwort. Sie lautet ja und nein! Es wird möglich sein, das Verlangte zu tun, wenn die Seite des Quadrates dem Kreishalbmesser gleich ist, oder, was dasselbe heißt, wenn sie auf dem Durchmesser aufgetragen ein ihr gleiches Stück übrig läßt, sonst nicht. Der Wortlaut ist freilich ein einigermaßen

[1]) Rothlauf S. 61. Es ist nicht ohne Interesse, daß auch Leibniz den gleichen Beweis verwertet hat, um den algebraischen Zusammenhang zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrates zu erörtern. Vgl. dessen *Nova algebrae promotio* in der durch C. J. Gerhardt besorgten Ausgabe der mathematischen Schriften von Leibniz VII, 155 (Halle 1863). [2]) Platon, Menon 86.

dunkler, aber auch seine philologische Übereinstimmung mit diesem hier frei erläuterten Sinne hat nachgewiesen werden können.

Die Stelle des Menon ihrer einstigen Schwierigkeit entkleidet enthält freilich nicht mehr den Beweis, daß Platon mit dieser oder jener feinen geometrischen Theorie bekannt war, aber sie enthüllt uns noch immer einen ungemein wichtigen methodischen Fortschritt[1]), der um diese Zeit sich vollzog. Sokrates leitet die letzte Auseinandersetzung durch die Worte ein: „Unter der Untersuchung von einer Voraussetzung aus verstehe ich das Verfahren, welches die Geometer oft im Auge haben; wenn sie jemand fragt, z. B. über eine Fläche, ob in diesen Kreis die Fläche als Dreieck eingezeichnet werden könne usw.“ Es war mithin damals schon oft von Geometern geschehen, was, wie wir im vorigen Kapitel (S. 208) sahen, Hippokrates von Chios noch unterließ. Es war die Frage aufgeworfen worden, ob eine Konstruktion möglich sei oder nicht.

In der Akademie unter Platons Leitung wurden sicherlich diese und ähnliche Fragen erörtert[2]). Die Philosophie der Mathematik ist in der Akademie entstanden, wenn ihre Wurzeln auch schon aus den Lehren des Sokrates Nahrung sogen. So führte nach Berichten bei Aristoteles, aber auch nach bestimmt nachweisbaren platonischen Stellen Platon geometrische Definitionen ein, welche in dem von ihm gebrauchten Wortlaut ein Alter von mehr als zwei Jahrtausenden erreicht haben. Die Figur ist die Grenze des Körpers, heißt es im Menon[3]). Gerade ist doch, wessen Mitte dem beiderseitigen Äußersten im Wege ist, heißt es im Parmenides[4]), und ebenda wird der Kreis definiert: rund ist doch wohl das, dessen äußerste Teile nach allen Seiten hin gleichweit von der Mitte abstehen. Der Punkt sei die Grenze der Linie, die Linie die Grenze der Fläche, die Fläche die Grenze des Körpers genannt worden, sagt uns Aristoteles; der Körper sei das, was drei Ausdehnungen besitze; die Linie sei Länge ohne Breite. Daß auch Grundsätze, wie der häufig bei Aristoteles erwähnte, daß Gleiches von Gleichem abgezogen Gleiches übrig lasse, schon der Akademie angehört haben werden, ist nicht in Zweifel zu ziehen. Wohl aber dürfte es in ähnlicher Weise wie bei

---

[1]) Blass in seiner Dissertation *De Platone mathematico* pag. 20 scheint zuerst die große methodische Bedeutung der Stelle Menon 86 erkannt zu haben. [2]) Zusammenstellungen bei Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik III, S. 9 flgg., bei Hankel S. 135—136, bei Rothlauf S. 51, von denen jede irgend etwas eigentümlich hat, was in den anderen fehlt. [3]) Platon, Menon 76. [4]) Platon, Parmenides 137 E. Wie diese Stelle zu verstehen sei, kann man bei Proklus (ed. Friedlein) pag. 109 lin. 21 bis pag. 110 lin. 4 nachlesen. Vgl. Majers Programm des Kön. Gymnasiums in Stuttgart für 1880—81, S. 14.

den Pythagoräern schwer sein, innerhalb der Akademie eine Sonderung des geistigen Besitzes von Platon und seinen Schülern vorzunehmen, zu ermitteln, was von den Definitionen, von den Grundsätzen dem einen, was den anderen angehört.

Auf dem Gebiete mathematischer Methodik ist es noch eine einen gewaltigen Fortschritt eröffnende Erfindung, welche Platon zugeschrieben wird: die Erfindung der analytischen Methode. Wir haben darüber eine ganz kurze Notiz des Diogenes Laertius: Platon führte zuerst die analytische Methode der Untersuchung für Leodamas von Tasos ein[1]), und eine ausführlichere des Proklus: Es werden auch Methoden angeführt, von denen die beste die analytische ist, die das Gesuchte auf ein bereits zugestandenes Prinzip zurückführt. Diese soll Platon dem Leodamas mitgeteilt haben, der dadurch zu vielen geometrischen Entdeckungen soll hingeleitet worden sein. Die zweite Methode ist die trennende, die, indem sie den vorgelegten Gegenstand in seine einzelnen Teile zerlegt, dem Beweise durch Entfernung alles der Konstruktion der Aufgabe Fremdartigen einen festen Ausgangspunkt gewährt; auch diese rühmte Platon sehr als eine für alle Wissenschaften förderliche. Die dritte Methode ist die der Zurückführung auf das Unmögliche, welche nicht das zu Findende selbst beweist, sondern das Gegenteil desselben bestreitet und so die Wahrheit auf Seite des mit der Behauptung Übereinstimmenden findet[2]). Endlich gehören hierher die beiden bei Euklid erhaltenen Definitionen: Analysis ist die Annahme des Gesuchten als zugestanden durch Folgerungen bis zu einem als wahr Zugestandenen. Synthesis ist die Annahme des Zugestandenen durch Folgerungen bis zu dem Erschließen und Wahrnehmen des Gesuchten[3]) und die dem Sinne nach damit übereinstimmenden im Wortlaute viel ausführlicheren Erörterungen des Pappus[4]).

Die Sache verhält sich folgendermaßen[5]). Soll die Wahrheit eines Satzes D bewiesen oder widerlegt werden — beides kann man verlangen — so sagt der Analytiker: Wenn D stattfindet ist C wahr; wenn C stattfindet ist B wahr; wenn B stattfindet ist A wahr; aus D folgt also endlich A; nun ist A wahr oder nicht wahr, also ist

---

[1]) Diogenes Laertius III, 24. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 211, lin. 18 — pag. 212, lin. 4. A. Sturm in der Bibliotheca Mathematica 1903, 3. Folge II, 283. [3]) Euklid XIII, 1. Anmerkung. [4]) Pappus, VII Praefatio (ed. Hultsch) pag. 634 flgg. [5]) Hübsche Entwicklungen über die analytische Methode der Alten bei Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik. Ulm 1860. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Paris 1865—1866. Besonders T. I, chap. 10. *De l'analyse et de la synthèse chez les anciens.* Hankel 137—150.

auch D wahr oder ist es nicht. Der Synthetiker dagegen beginnt mit der Behauptung der Wahrheit von A, welche ihm auf irgend eine Weise bekannt ist. Daran knüpft er die Folgerung, es werde B stattfinden, folglich sei auch C wahr, und folglich sei D wahr — oder möglicherweise ein Satz, der das Gegenteil von D bezeichnet, und den man deshalb Nicht-D zu nennen pflegt. Es ist einleuchtend, daß der synthetische Beweis unter allen Umständen richtig ist, der analytische aber nicht. Zur Richtigkeit desselben gehört nämlich, daß die in dem analytischen Beweise aufgestellten gleichzeitigen Wahrheiten auch in umgekehrter Reihenfolge sich gegenseitig bedingen, mathematisch ausgedrückt, daß man lauter umkehrbare Sätze aussprach. Von der Notwendigkeit diese Umkehrbarkeit selbst zu erweisen ist man nur in einem Falle befreit, wenn nämlich das aus D geschlossene A nicht wahr ist. Dann freilich kann D nun und nimmermehr stattfinden. Das heißt: die Beweisform der Zurückführung auf das Unmögliche ist eine immer gestattete Unterart des analytischen Beweises; der direkte analytische Beweis dagegen erfordert stets eine Ergänzung, welche rückwärts gehend die Sätze synthetisch auseinander ableitet, deren Behauptungen die vorausgehende analytische Methode kennen lehrte. Aus diesen Betrachtungen gehen nun mehrere Folgerungen hervor.

Erstlich die, daß die analytische Methode, vermöge der Notwendigkeit ihr, falls sie direkt zu Werke ging, eine Synthese folgen zu lassen, weniger für die Beweisführung von Sätzen, dagegen vortrefflich für die Auflösung von Aufgaben sich eignet, bei welchen die analytisch gefundene Auflösung meistens die notwendige Voraussetzung zur Entdeckung ihres synthetischen Beweises bildet, und in der Tat spielt die Analysis ihre Hauptrolle in dem sogenannten aufgelösten Orte, d. h. bei Aufgaben, die einen geometrischen Ort oder eine Aufeinanderfolge von Punkten betreffen, deren jeder sich einer gewissen Eigenschaft erfreut, welche ihrerseits keinem anderen Punkte außerhalb des Ortes zukommt.

Zweitens scheint die indirekte Methode der Zurückführung auf das Unmögliche, die sogenannte apagogische Beweisführung[1]) wegen ihrer unbedingten Gültigkeit vorzuziehen. In der Tat haben die Alten sich derselben wenn auch nicht gerade überwiegend doch viel häufiger als die modernen Geometer bedient. Namentlich bei den Sätzen, in welchen eine sogenannte Exhaustion vorgenommen wird, wo also der Grenzbegriff das unmittelbare Erreichen des Zieles ausschließt und nur die synthetische Hypothese des Unendlichkleinen

[1]) ἀπαγωγὴ εἰς ἀδύνατον, lateinisch *reductio ad absurdum* oder *demonstratio e contrario*.

als Ersatz zu dienen vermag, wird man bei griechischen Schriftstellern stets Beweisen aus dem Gegenteil begegnen. Wir haben zugleich angedeutet, daß in neuerer Zeit die indirekten Beweise nicht beliebt sind. Der Grund liegt darin, daß bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirekte Beweis der Einbildungskraft keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht-D eine Koexistenz von D zulassen, und nur schwer gibt sie sich gefangen, daß wirklich die Einteilungsteile des Einteilungsganzen vollständig erschöpft wurden, daß wirklich zwei sich ausschließende Tatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können.

Drittens liegt, wie wir gesehen haben, jedem Beweise, werde er analytisch oder synthetisch, direkt oder indirekt geführt, die Wahrheit eines gewissen Satzes A zugrunde, deren man sich versichert halten muß. In vielen Fällen wird dieses A Ergebnis früherer Lehrsätze und gehörigen Ortes streng erwiesen sein. Allein immer ist dieses nicht der Fall und kann es nicht der Fall sein, da eine unendliche Kette von Rückschlüssen nicht denkbar ist. Irgend einmal muß man stehen bleiben und eine Grundwahrheit als von selbst einleuchtend oder erfahrungsmäßig gegeben zum Ausgangspunkte der Beweisführung annehmen. Wer also wie Platon auf das Wesen der Beweisführung selbst einging, mußte auf dem Wege dieser Untersuchung das tun, was wir oben von Platon berichtet haben. Er mußte Definitionen geben, welche der unendlichen Spaltung der Begriffe zugunsten einfacher Begriffe ein Ziel setzten; er mußte auch Axiome, Grundsätze und Annahmen, anerkennen, welche man nicht weiter beweist, sei es daß sie als von unmittelbarer Gewißheit nicht mehr bewiesen zu werden brauchen, oder daß sie nicht bewiesen werden können.

Wir kehren von dieser das Wesen antiker geometrischer Beweisführung berührender Auseinandersetzung, zu welcher die mathematischen Kapitel im Menon uns fast mehr Gelegenheit als Veranlassung boten zu einer anderen Schrift Platons und einer nicht minder übelberüchtigten Stelle derselben zurück. Wir meinen den Anfang des VIII. Buches vom Staate[1]. Auch diese Stelle hat eine ganze Literatur hervorgerufen[2], welche jedoch unserem Gefühle

[1] Platon, Staat 546 B, C. [2] Vgl. Th. Henri Martin, *Le nombre nuptial et le nombre parfait de Platon* im XIII. Bande der *Revue archéologique* und Rothlauf S. 29 flgg. Bei Martin insbesondere finden sich zahlreiche Verweisungen auf ältere Abhandlungen. Seitdem sind noch zahlreiche Arbeiten von Adam, Demme, Dupuis, Gow, Hultsch, Tannery veröffentlicht worden.

nach noch nicht vermochte, die Schwierigkeiten der sehr dunkeln Anspielungen, in welchen Platon sich hier gefällt, endgültig zu lösen. Gehen doch die Ansichten so weit auseinander, daß nicht bloß über den Sinn der sogen. platonischen Zahl, sondern über ihre Größe selbst ein Einverständnis nicht herrscht. Nur ein wie beiläufig eingeschalteter kleiner Satz dieser Stelle gibt uns Anlaß zu einer, wie wir glauben, geschichtlich wichtigen Bemerkung. Es ist unserer Meinung nach von der Länge der Diagonale des Quadrates über der Seite 5 die Rede, welche rational ausfalle, wenn 1 fehle, irrational wenn 2 fehlen[1]), und wir können das nicht anders verstehen, als daß jene Diagonale oder $\sqrt{50}$ in den rationalen Wert 7 übergehe, wenn die Zahl 50 um 1 verringert werde, dagegen irrational $\sqrt{48}$ bleibe, wenn man 2 von den 50 abziehe. Wir haben, wo von der Entdeckung des Irrationalen durch Pythagoras (S. 181) die Rede war, hervorgehoben, man werde wohl Versuche angestellt haben, die Diagonale eines Quadrates dadurch aussprechbar, also rational, zu machen, daß man andere und andere Seitenlängen wählte, man werde so zwar das wirklich angestrebte Ziel natürlich nicht erreicht, aber doch Näherungswerte von $\sqrt{2}$ gefunden haben. Die eben angeführte platonische Stelle bringt uns diesen Gegenstand ins Gedächtnis zurück. — Wir möchten einschalten, daß von Architekten bei Nachmessungen an den Bauwerken der Akropolis das häufige Vorkommen der Verhältnisse $1:3$ sowie $7:12$ und $7^2:12^2$ bemerkt worden ist[2]). Uns scheint das letztere dem ersten als gleichwertig gedacht worden zu sein, so daß $\frac{12}{7}$ einen Näherungswert von $\sqrt{3}$ darstellte, und Platon, meinen wir, hat auch gewußt, daß $\sqrt{50}$ oder $5\sqrt{2}$ nur wenig von 7 sich unterscheidet. Ist er so weit gegangen in der Praxis des Rechnens $\sqrt{2}$ annähernd gleich $\frac{7}{5}$ zu setzen? Darüber fehlt uns die Sicherheit, aber das steht fest, daß jenes Bewußtsein bei Platonikern und deren Schülern sich fortwährend erhalten hat. Proklus sagt uns ausdrücklich, es gebe keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl anders als nahezu sei; so sei das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrates von 5, an welchem nur 1 fehle[3]). Es wird uns später gelingen, den Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ noch bestimmter nachzuweisen und damit die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, daß die Nutzbarmachung jener bei Platon nachgewiesenen Kenntnis in der Tat statt-

---

[1]) *ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀῤῥήτων δὲ δυεῖν.*
[2]) Hultsch in Fleckeisen u. Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik Bd. 123, S. 586—587. [3]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 427, lin. 21—24.

gefunden habe. Daß nämlich Platon sich mit rationalen und mit irrationalen Quadratwurzeln überhaupt beschäftigt hat, geht aus einer anderen Nachricht hervor, von der jetzt die Rede sein soll.

Heron von Alexandria[1]) und ebenso auch Proklus[2]) teilen uns eine Methode zur Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke mit, welche sie ausdrücklich als Erfindung des Platon bezeichnen, und wenn auch eine unter dem gefälschten Namen des Boethius umlaufende Geometrie von dieser Angabe abweichend einen Architas als Erfinder nennt[3]), so tragen wir doch kein Bedenken, dem älteren griechischen Berichterstatter den Vorzug der Glaubwürdigkeit vor dem jüngeren Schriftsteller zu gewähren. Schon Pythagoras fand, wie wir uns erinnern (S. 185), rationale rechtwinklige Dreiecke, indem er wohl davon ausging, den Unterschied zwischen der Hypotenuse a und der größeren Kathete b der Einheit gleich zu setzen, wodurch er genötigt war die Summe der Hypotenuse und derselben Kathete in Form einer sonst beliebigen ungeraden Quadratzahl zu wählen. War solches in der Tat der Weg, auf welchem Pythagoras zu seinen Werten gelangte, so mußte ein nächster Versuch jene Differenz $a - b = 2$ setzen, und die ihr ähnliche Flächenzahl $a + b$ mußte dann das Doppelte einer Quadratzahl oder $2\alpha^2$ sein, beziehungsweise die Hälfte einer geraden Quadratzahl $\frac{(2\alpha)^2}{2}$. Dann wurde von selbst $c = 2\alpha$, $b = \alpha^2 - 1$, $a = \alpha^2 + 1$, und genau so verfuhr Platon. Proklus sagt uns mit einer Deutlichkeit, die nichts zu wünschen übrig läßt: Platons Methode geht von der geraden Zahl aus; man nimmt nämlich eine gerade Zahl an und setzt sie gleich einer der beiden Katheten; wird diese halbiert, die Hälfte quadriert und zu diesem Quadrate die Einheit addiert, so ergibt sich die Hypotenuse; wird aber die Einheit vom Quadrate subtrahiert, so erhält man die andere Kathete.

So dienen beide Methoden, die des Pythagoras und die des Platon, einander zur Ergänzung und rechtfertigen gegenseitig die Vermutungen, welche wir darüber aussprachen, wie man dieselben gefunden haben mag. Platon erscheint uns dabei nicht sowohl erfindungsreich, als daß er vorher betretene Wege umsichtig zu gehen wußte. Er muß jedenfalls auf der Höhe des mathematischen Wissens seiner Zeit gestanden haben, mag ihn im mathematischen Können dieser oder jener übertroffen haben. Seine für die damalige Zeit große mathematische Gelehrsamkeit wird durch alles, was wir von ihm wissen, bestätigt. Wir erinnern uns des reichen für die Ge-

---

[1]) Heron (ed. Hultsch) *Geometria* pag. 57. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 428. [3]) Boethius (ed. Friedlein) *Geometria* pag. 408.

schichte der Mathematik bei den Pythagoräern von uns ausgenutzten Inhaltes des platonischen Timäus. Die Zusammensetzung regelmäßiger ebener Figuren aus rechtwinkligen Dreiecken, die Bildung der fünf regelmäßigen Körper waren ihm bekannt. Wenn auch Pappus diese letzteren geradezu als solche bezeichnet, von denen bei Platon die Rede sei [1]), so wissen wir doch, daß Platon keineswegs der Erfinder war. Die eigentliche Stereometrie scheint übrigens, trotz der Kenntnis der regelmäßigen Körper, damals noch recht im argen gelegen zu haben. „Hinsichtlich der Messungen von allem, was Länge, Breite und Tiefe hat, legen die Griechen eine in allen Menschen von Natur vorhandene ebenso lächerliche als schmähliche Unwissenheit an den Tag", sagt Platon [2]) und fährt in wenig gewählter Ausdrucksweise fort, es sei in dieser Beziehung bestellt „nicht wie es Menschen, sondern wie es Schweinen geziemt, und ich schämte mich daher nicht bloß über mich selbst, sondern für alle Griechen". Am weitesten entwickelt war die Arithmetik. Daß Platon über die Proportionenlehre, über die Begriffe von Flächenzahlen und Körperzahlen Herr war, wissen wir aus dem Timäus. Wir erinnern uns auch, daß (S. 165) ein besonderer Fall der pythagoräischen Sätze über geometrische Mittel zwischen Flächenzahlen und zwischen Körperzahlen als platonisch genannt wird [3]). Wir können noch zwei andere Stellen platonischer Schriften anführen, welche für seine Kenntnisse in der Arithmetik von Wichtigkeit sind. Im Phädon sagt Platon, die ganze eine Hälfte der Zahlen sei gerad, die andere sei ungerad [4]). In den Gesetzen weiß er, daß die Zahl 5040 durch 59 verschiedene Zahlen teilbar ist, unter welchen sämtliche Zahlen von 1 bis 10 sich befinden [5]). Das sind in der Tat ganz anständige Kenntnisse, wenn wir auch natürlich annehmen, daß die Teiler von 5040 empirisch gefunden und gezählt wurden. Vielleicht kann das Aufsuchen der Teiler doch in Zusammenhang mit einer Bekanntschaft mit befreundeten und mit vollkommenen Zahlen gedeutet werden müssen, wenn wir auch (S. 168) uns sträubten, diese in so frühe Zeit zu verlegen. Aber wie kam man dazu, die Zahl 5040, das Produkt der aufeinander folgenden Zahlen von 1 bis 7, zur Untersuchung zu wählen? Auf diese Frage wissen wir keine Antwort.

Eine Erfindung Platons wird uns berichtet, welche ihm als Geometer alle Ehre macht, und welche somit den ersten Teil dessen, was das Mathematikerverzeichnis von Platon zu sagen weiß, ebenso

---

[1]) Pappus V, 19 (ed. Hultsch) pag. 352. [2]) Platon, Gesetze pag. 805. [3]) Nicomachus, Eisagoge arithm. II, 24, 6 (ed. Hoche) pag. 129. [4]) Platon, Phaedon pag. 104. [5]) Platon, Gesetze pag. 737.

voll bestätigt, wie der zweite Teil jener Charakteristik in unserer seitherigen Darstellung zur Geltung kam. Wir müssen nachholend diese Schilderung hier einschalten.

„Platon, der auf diese (Hippokrates und Theodorus) folgte, verschaffte sowohl den anderen Wissenschaften als auch der Geometrie einen sehr bedeutenden Zuwachs durch den großen Fleiß, den er bekanntlich auf sie verwandte. Seine Schriften füllte er stark mit mathematischen Betrachtungen und hob überall hervor, was von der Geometrie sich in bemerkenswerter Weise an die Philosophie anschließt.“

Vielleicht ist unter dem bedeutenden Zuwachse, der durch Platons Fleiß der Geometrie verschafft wurde, seine Auflösung der Aufgabe von der Würfelverdoppelung verstanden, welcher wir uns hiermit zuwenden. Freilich steht es schlimm mit derselben, wenn die Meinung derer sich als richtig erweisen sollte, welche den ganzen darüber uns zugekommenen Bericht anzweifeln. Wir wollen die schwerwiegenden Bedenken derselben nachträglich erörtern und fürs erste dem Berichte selbst hier einen Platz einräumen.

Eutokius von Askalon hat im VI. S. einen Kommentar zu des Archimed Schrift über Kugel und Zylinder verfaßt und in diesen Kommentar sehr wichtige Mitteilungen über die Aufgabe der Würfelverdoppelung eingeflochten. Dorther kennen wir den Brief des Eratosthenes über jenes Problem (S. 211), dorther eine ganze Anzahl von untereinander verschiedenen Auflösungen, darunter solche von Platon, von Menächmus, von Archytas. Die Auflösung des Archytas hat Eutokius dem Eudemus entnommen, und bei der unbedingten Zuverlässigkeit dieses Gewährsmannes ist an der Genauigkeit des Berichtes nie der leiseste Zweifel erhoben worden. Woher stammen die übrigen Auflösungen? Eutokius sagt es uns nicht, aber er leitet den ganzen Bericht damit ein, er wolle die Gedanken der Männer, welche auf uns gekommen sind, ersichtlich machen. Sollte in Zusammenhang mit dieser Erklärung sein Schweigen nicht beredt genug sein? Sollte es nicht zu verstehen geben, daß, wo eine zweite Quelle nicht genannt wurde, die Originalschriften selbst von Eutokius benutzt wurden, oder doch solche, welche er für die Originalschriften hielt? Sollte der Umstand, daß die Auflösungen als solche richtig sind und somit die Unverletztheit des Gehaltes der Schriften, von welchen Eutokius Gebrauch machte, verbürgen, nicht auch bei Prüfung der Richtigkeit der Namen, unter welchen die Auflösungen mitgeteilt sind, von Gewicht sein? Unter den von Eutokius mitgeteilten Auflösungen steht die Platons an der Spitze, mutmaßlich wegen der großen Berühmtheit des Verfassers. Jedenfalls ist eine

Zeitfolge der Auflösungen aus der Anordnung, in welcher sie bei Eutokius erscheinen, in keiner Weise zu entnehmen. Sie sind vielmehr bunt durcheinander gewürfelt, und um nur solche Männer zu nennen, deren Zeitalter durch Jahrhunderte getrennt liegen, bei denen also ein Zweifel unmöglich ist, kommt Heron vor Apollonius, Pappus vor Menächmus zu stehen.

Das Verfahren des Platon[1]) beruht auf einer Vorrichtung, welche sich (Figur 35) als Rechteck $A\Delta EZ$ mit zwei festen und zwei in paralleler Lage verschiebbaren Seiten $E\Delta$ und $A\Delta$ bezeichnen läßt. Mittels gehöriger Verschiebung der beweglichen Seiten nebst entsprechender Drehung der ganzen Vorrichtung soll unter vorheriger Annahme der Länge von zwei zueinander senkrechten Linien $AB = b$, $B\Gamma = a$ folgendes bewirkt werden: A soll in den Durchschnitt der festen ZA mit der beweglichen $A\Delta$, Γ auf die zweite feste Seite ZE, zugleich der Eckpunkt E des Rechtecks auf die Verlängerung von AB und endlich der zweite Durchschnittspunkt der beweglichen $A\Delta$ mit der beweglichen $E\Delta$ auf die Verlängerung von ΓB fallen.

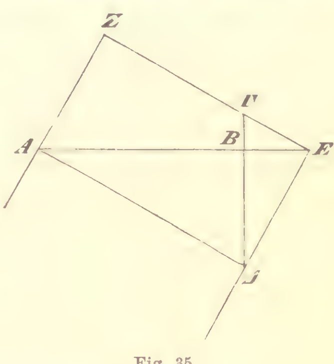


Fig. 35.

Nennen wir nun $BE = x$, $B\Delta = y$, so ist im rechtwinkligen Dreiecke $\Gamma\Delta E$ die BE senkrecht aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, und die gleiche Rolle spielt die $B\Delta$ im rechtwinkligen Dreiecke $A\Delta E$. Folglich ist $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$. Mithin sind x und y die beiden mittleren Proportionalen, welche zwischen a und b eingeschaltet werden mußten,

$$x = a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \text{ und unter der Voraussetzung } b = 2a \text{ endlich } x = a\sqrt[3]{2}.$$

Wir bemerken[2]), daß dieses Verfahren, sofern es von Platon herrührt, uns ein Zeugnis dafür ist, daß damals griechische Geometer den Satz kannten, daß die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks das geometrische Mittel zwischen den Stücken ist, in welche sie die Hypotenuse zerlegt. Wir bemerken ferner, daß hier ein Beispiel einer Bewegungsgeometrie vorliegt (S. 209).

Wir stellen neben dieses Verfahren sofort dasjenige, welches Eutokius uns nach Eudemus von Archytas berichtet[3]). Es stimmt,

---

[1]) Archimedis Opera ed. Heiberg. Leipzig 1880—81. III, 66 sqq. [2]) Vgl. Bretschneider 142. [3]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 98 sqq.

wie wir sehen werden, vollkommen zu den Worten im Briefe des Eratosthenes: „Der Tarentiner Archytas soll sie vermittelst der Halbzylinder aufgefunden haben.“ Es seien (Fig. 36) $A\Delta = b$ und $AB = a$ die beiden Geraden, zwischen welche zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind. Die größere $A\Delta$ wird als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, in welchen die kleinere AB als Sehne eingezeichnet wird. Aber auch senkrecht zu diesem ersten Halbkreise wird über $A\Delta$ ein zweiter Halbkreis errichtet, der in A befestigt über die Ebene $AB\Delta$ weggeschoben werden kann. Er bildet dabei auf dem über dem Halbkreis $AB\Delta$ errichteten Halbzylinder eine krumme Linie. Andererseits ist das Dreieck $A\Delta\Pi$ gegeben durch die $A\Delta$, die AB und die Berührungslinie $\Delta\Pi$ an den Halbkreis in Δ. Dieses Dreieck liefert um $A\Delta$ als Achse in Drehung versetzt eine Kegeloberfläche, welche gleichfalls den Halbzylinder und die vorher auf ihm erzeugte Kurve schneidet, letztere in einem Punkte K, der als dem Halbzylinder angehörend senkrecht über einem Punkte I des Halbkreisbogens $AB\Delta$ liegen muß. Während $A\Pi$ die Kegeloberfläche beschreibt, beschreibt endlich auch das Stück AB dieser Geraden eine Fläche gleicher Art, beziehungsweise der Punkt B einen Halbkreis BMZ, der senkrecht zur Horizontalebene $AB\Delta Z$ steht. Da zu dieser Ebene auch $AK\Delta'$ senkrecht steht, so ist zu ihr auch $M\Theta$ senkrecht, die Durchschnittsgerade der beiden genannten Ebenen, beziehungsweise $M\Theta \perp BZ$ als Durchschnittsgeraden der BMZ mit der $AB\Delta Z$. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Eigenschaft von BMZ als Halbkreis und von BZ als dessen Durchmesser, daß $M\Theta^2 = B\Theta \times \Theta Z$. Aber $B\Theta \times \Theta Z = A\Theta \times \Theta I$, weil BZ und AI zwei in Θ sich schneidende Sehnen desselben Kreises sind. Also $M\Theta^2 = A\Theta \times \Theta I$, also der Winkel AMI ein Rechter, d. h. ebenso groß wie $AK\Delta'$, welcher Winkel im Halbkreise ist, und folglich MI parallel zu $K\Delta'$. Damit ist die Ähnlichkeit des Dreiecks $\Delta' AK$ mit IAM, aber auch mit KAI bewiesen, und damit die Proportion $AM : AI = AI : AK = \Delta K : \Delta' A$. Setzt man endlich $AM = AB = a$, $\Delta' A = A\Delta = b$, $AI = x$, $AK = y$, so ist wieder $a : x = x : y = y : b$, wie es verlangt wurde. Aus diesem Verfahren geht, was wir zu bemerken nicht versäumen wollen, die Kenntnis mehrerer wichtiger Sätze von seiten des Erfinders hervor. Nicht bloß die beiden plani-

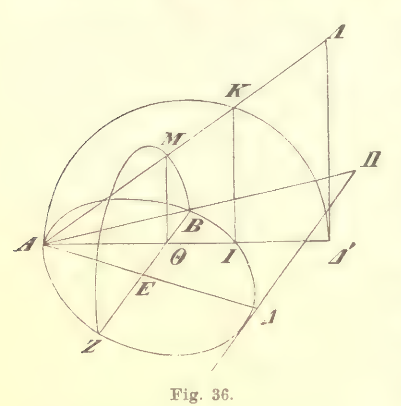


Fig. 36.

metrischen Lehrsätze, daß die Berührungslinie an den Kreis senkrecht zum Durchmesser steht und daß Kreissehnen einander in umgekehrt proportionalen Stücken schneiden, mußten ihm geläufig sein, auch von der durch Platon beklagten allgemeinen Unwissenheit auf stereometrischem Gebiete bildete er eine rühmliche Ausnahme. Archytas wußte, daß die Durchschnittsgerade zweier zu einer dritten Ebene senkrechten Ebenen gleichfalls senkrecht auf dieser und insbesondere senkrecht auf deren Durchschnittsgeraden mit einer der senkrechten Ebenen steht. Er besaß, was wir noch weit höher anschlagen, über die Entstehung von Zylindern und Kegeln, über gegenseitige Durchdringung von Körpern und dabei auf ihrer Oberfläche entstehenden Kurven vollständig klare Anschauungen. Sollte Archytas ein Modell sich angefertigt haben, an welchem er sein Verfahren sich ausbildete? Wir stellen die Frage, ohne eine Antwort darauf zu wissen und finden eine solche auch nicht in den Worten des Diogenes Laertius, der uns erzählt: „Archytas zuerst behandelte die Mechanik methodisch, indem er sich dabei geometrischer Grundsätze bediente; auch führte er zuerst die organische Bewegung in die Konstruktion geometrischer Figuren ein, indem er durch den Schnitt des Halbzylinders zwei mittlere Proportionalen zur Verdoppelung des Würfels zu erhalten suchte“[1]. In dem durch Eutokius überlieferten Text kommt auch das Wort τόπος vor[2]. Dieses Wort hat in späterer Zeit den Sinn „geometrischer Ort“ angenommen. Hier bedeutet es aber nur die Stelle[3]. Man kann also keinerlei Schlüsse aus dem Auftreten des Wortes ziehen, mag es selbst in dem Urtexte des Archytas schon vorgekommen sein, soviel derselbe sonst von Eudemus im übrigen verändert worden zu sein scheint. Selbstverständlich nehmen wir aber nur an, Eudemus habe den Wortlaut des Archytas einigermaßen frei behandelt. Den Sinn muß er getreu wiedergegeben haben, und so bleiben die Folgerungen, welche wir auf stereometrische Kenntnisse des Archytas gezogen haben, unberührt.

Wir lassen auch die Würfelverdoppelungen des Menächmus gleich folgen. Eutokius teilt uns zwei voneinander verschiedene Verfahren dieses Schriftstellers mit[4]. Das eine Mal wird die Aufgabe durch eine Parabel in Verbindung mit einer Hyperbel gelöst, das andere Mal werden zwei Parabeln benutzt. Hier kann, wie wir betonen müssen, ein wörtlicher Auszug aus Menächmus unter keiner Bedingung vorliegen, da diese Namen Hyperbel und Parabel, wie wir

---

[1]) Diogenes Laertius VIII, 83. [2]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 100 lin. 10. [3]) Gow, A short history of Greek mathematics, pag. 187, Note 1. [4]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 92 sqq.

noch sehen werden, viel späteren Ursprunges sind. Der Bericht des Eutokius über die Würfelverdoppelungen des Menächmus unterscheidet sich in wesentlicher Art von dem über die Methode des Archytas. Während bei Archytas nur die Synthese mitgeteilt, die Analyse aber verschwiegen ist[1]), ist bei Menächmus über Analyse und Synthese gleichmäßig berichtet und uns dadurch ein vortreffliches Beispiel zur Kenntnis jener beiden Schlußarten der Alten in die Hand gegeben. Mögen a, x, y, b wieder die vorige Bedeutung haben, mithin

$$a : x = x : y = y : b$$

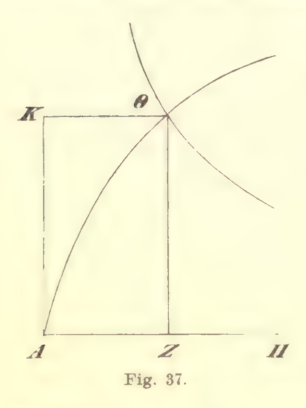


Fig. 37.

zu konstruieren sein. Weil $a : x = x : y$ wird (Fig. 37) ein Punkt Θ, von dem aus die Senkrechte $\Theta Z = x$ auf eine Gerade AH gefällt ist, auf der von einem gegebenen Anfangspunkte A aus die Länge $AZ = y$ genannt wird, notwendig auf einer durch A hindurchgehenden Parabel liegen. Zieht man ferner $AK \# \Theta Z$ und $\Theta K \# AZ$, so ist das Rechteck $AK\Theta Z$ gemessen durch $x \times y$ d. h. wegen $a : x = y : b$, gemessen durch $a \times b$, oder gegeben. Demzufolge liegt Θ auch auf einer Hyperbel, deren Asymptoten die AK und AZ sind. Das ist die Analyse. Sie geht aus von der Annahme, der Punkt Θ, welcher durch die Linien x, y erst festgelegt werden soll, sei schon vorhanden, und zieht daraus Folgerungen, welche für die Lage von Θ anderweitige Merkmale liefern. Nun kommt die Synthese, d. h. hier die Konstruktion der genannten Kurven. In einem Punkte A läßt man zwei Senkrechte zusammentreffen. Dann zeichnet man eine Parabel mit A als Scheitelpunkt, der einen der gezogenen Geraden AH als Achse und a als Parameter. Ferner zeichnet man zwischen die beiden Geraden AH und AK als Asymptoten eine Hyperbel unter der Bedingung, daß das Rechteck der mit KA, AH bis zum Durchschnitte mit diesen Geraden in umgekehrter Folge von jedem Hyperbelpunkte gezogenen Parallelen dem Rechtecke aus a und b gleich sei. Dann schneiden sich Parabel und Hyperbel in dem Punkte Θ,

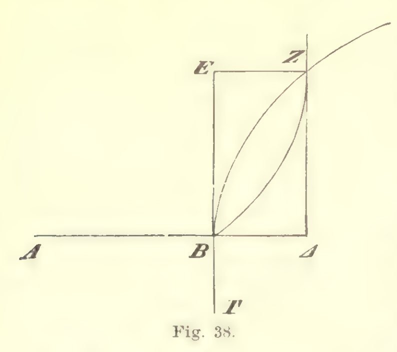


Fig. 38.

[1]) Bretschneider 152 hat versucht, die Analyse des Archytas zu erraten und, wie uns scheint, mit ziemlichem Glück. Vgl. auch Flauti, *Geometria di sito.* Neapel 1821, pag. 173—174.

dessen senkrechter Abstand von AH das gesuchte x ist. Die zweite Methode des Menächmus (Fig. 38) folgert wieder aus $a : x = x : y$, daß der gesuchte Punkt auf einer Parabel liege, ebenso aber aus $x : y = y : b$, daß er auf einer zweiten Parabel liege, deren beiderseitige Achsen sich in dem beiden Parabeln gemeinschaftlichen Scheitelpunkte B senkrecht durchschneiden, was alsdann in der Synthese benutzt wird. Eutokius schließt den Bericht über die Auflösungen des Menächmus mit den Worten: „Die Parabel zeichnet man mittels eines von dem Mechaniker Isidorus von Milet, unserem Lehrer, erfundenen Zirkels, der von ihm in seinem Kommentare zu der Gewölblehre des Heron beschrieben worden ist.“ Daß die von Eutokius angewandte Form nicht die des Menächmus selbst gewesen sein kann, haben wir berührt. Auf die Glaubwürdigkeit des Inhalts fällt dadurch kein Schatten. Menächmus muß also die Kurven gekannt haben, welche eine spätere Zeit Parabel und Hyperbel genannt hat; er muß die Asymptoten der Hyperbel gekannt haben, muß diejenigen Grundeigenschaften beider Kurven gekannt haben, welche die analytische Geometrie durch die Gleichungen $y^2 = ax$ und $xy = c^2$ auszudrücken weiß.

Im Briefe des Eratosthenes ist, wie wir uns erinnern, auch von einer Würfelverdoppelung des Eudoxus mittels der sogenannten Bogenlinien (S. 212) die Rede. Über diese berichtet Eutokius absichtlich gar nicht. Er setzt sich vielmehr in strengsten Gegensatz gegen eine unter diesem Titel überlieferte Arbeit[1]). Er habe, sagt er etwa, die dem Eudoxus zugeschriebene Abhandlung vernachlässigt, weil sie erstlich die Bogenlinien, von deren Benutzung er in der Einleitung rede, beim Beweise gar nicht anwende und zweitens eine unstetige Proportion gleich einer stetigen verwerte, was von jenem Schriftsteller nur zu denken nicht am Orte sei. Man hat hieraus, wie wir glauben berechtigterweise, den Schluß gezogen[2]), es werde dem Eutokius nur ein bis zur Unverständlichkeit verstümmelter Text des Eudoxus vorgelegen haben, da weder dem Eudoxus so grobe Fehler zuzutrauen seien, noch auch Eratosthenes eine durchaus verfehlte Lösung der Erwähnung würdig gefunden haben würde, jedenfalls nicht ohne auf das Irrige derselben hinzuweisen. Fügen wir diesen Schlüssen noch hinzu, daß das Verfahren des Eutokius diesem einen Schriftsteller gegenüber uns die Klarheit und Reinheit der Quellen, welche ihm für die Würfelverdoppelungen der anderen dienten, verbürgt.

---

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 66 lin. 11—17. [2]) Bretschneider 166 und besonders Ambr. Sturm, Das Delische Problem S. 33 Note 4 (Programm des k. k. Gymnasiums zu Seitenstetten 1895).

Wir haben bei dieser Aufzählung von Würfelverdoppelungen nach Eutokius uns allzusehr von unserer Gewohnheit, die Schriftsteller, mit denen wir uns gerade beschäftigen, auch ihrer Persönlichkeit nach wenigstens einigermaßen zu schildern, entfernt, um nicht schon hierdurch zu zeigen, daß wir mit Platon noch nicht abgeschlossen haben. Diese Einschaltungen — mögen wir auch später uns auf dieselben zu beziehen haben — bezwecken an dieser Stelle nur das Urteil bei Besprechung der Streitfrage zu leiten, ob das, was Eutokius als platonische Würfelverdoppelung gibt, wirklich echt sein kann. Stellen wir dazu die Einwendungen, welche man gemacht hat, zusammen.

Wir haben aus dem Briefe des Eratosthenes ersehen, daß, nachdem jene Aufgabe schon geraume Zeit die Geometer vergeblich beschäftigt hatte, nachdem eine Ratlosigkeit an die Stelle einer anderen getreten war, eine neue Veranlassung neue Bemühungen hervorrief, indem die Delier, welche einem Orakelspruche folgend um einer Seuche ein Ziel zu setzen einen Altar verdoppeln sollten, sich an Platon und seine Akademie um Rat wandten. Theon von Smyrna berichtet nach einer uns unbekannten Schrift des Eratosthenes, welche den Titel „Der Platoniker“ geführt zu haben scheint, ganz ähnlich[1]). Platon habe den Deliern, welche der Seuche halber den Altar ihres Gottes verdoppeln sollten und die Ausführung zu betreiben ihn befragten, die Antwort erteilt: Nicht die Verdoppelung des Altars wünsche der Gott, er habe den Ausspruch nur als Tadel gegen die Hellenen verstanden, welche um die Wissenschaften sich nicht kümmerten und die Geometrie gering achteten. Plutarch ist ein dritter Schriftsteller, der in seinen Werken sogar zweimal auf den Gegenstand zu reden kam[2]), ihn auch in einem Nebenumstande etwas abweichend angibt. Er fügt nämlich der Antwort Platons, die Gottheit habe ihre Mißbilligung der allzu geringen Beschäftigung mit Geometrie bezeugen wollen, noch bei: um einen Körper so zu verdoppeln, daß er der ursprünglichen Gestalt durchaus ähnlich bleibe, bedürfe man der Auffindung zweier geometrischer Mittel, und das werde ihnen Eudoxus von Knidos oder Helikon der Kyzikener leisten, der letztere ein Schüler des Eudoxus, der in der Geschichte der Astronomie genannt zu werden pflegt. Johannes Philoponus endlich läßt diese Verweisung auf andere in der Antwort des Platon an die Delier wieder weg, während er der Notwendigkeit zwei geometrische Mittel

---

[1]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 2 *Ἐρατοσθένης μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ Πλατωνικῷ κ. τ. λ.* [2]) Plutarchus, *De genio Socratis* cap. 7 und *De εἰ apud Delphos* cap. 6.

zu finden gedenkt[1]). Aus allen diesen Angaben folgt, daß über die Frage der Würfelverdoppelung ein Meinungsaustausch zwischen Deliern und Platon stattgefunden hat, und daher rührt der Name der delischen Aufgabe, unter welchem die der Würfelverdoppelung vielfach vorkommt. Aber auch einen anderen Umstand kann man mit einigem Erstaunen bemerken. Eratosthenes, der doch von den erfolgreichen Bemühungen zur Auffindung der Seite des verdoppelten Würfels besonders redet, erwähnt den Namen Platon und erwähnt nicht, daß er das Vertrauen, welches die Delier in seine Geschicklichkeit setzten, durch Lösung der Aufgabe rechtfertigte. Diesem Schweigen schließt sich Theon von Smyrna an, der freilich aus Eratosthenes schöpfte, und Johannes Philoponus. Plutarch ergänzt es nun gar dadurch, daß Platon von vornherein die Erwartung, als könne er die Frage lösen, unter Verweisung an andere Geometer von sich abzulenken wußte. Man muß zugeben, daß dieses Schweigen, daß dieser Zusatz sehr eigentümlich, sehr schwer zu verstehen sind, wenn jene Schriftsteller das Verfahren Platons kannten, daß es noch staunenswerter wäre, wenn Platon den Würfel verdoppelt hätte und jene Schriftsteller von seiner Abhandlung, die doch zur Kenntnis des Eutokius gelangt sein muß, nichts gewußt hätten. Es wäre danach möglich, daß die Quelle des Eutokius eine jener gefälschten Abhandlungen gewesen wäre, wie sie zur Zeit des Neuplatonismus zu Dutzenden erschienen und auf Rechnung alter Lehrer gesetzt wurden.

Dazu kommt eine ganz bedenkliche Notiz, welche Plutarch zweimal mitgeteilt hat[2]). Platon, sagt er, tadelte den Eudoxus und Archytas und Menächmus, welche die Verdoppelung des Körperraumes auf instrumentale und mechanische Verfahrungsweisen zurückführen, gleich als ob sie hierdurch zwei mittlere Proportionalen auf unerlaubte Weise zu erhalten versuchten. Denn auf solche Art werde der Vorzug der Geometrie aufgehoben und verdorben, sofern man sie wieder auf den sinnlichen Standpunkt zurückführt, sie, die in die Höhe gehoben werden und sich an ewige und körperlose Gedankenbilder halten sollte, wie dies bei Gott der Fall ist, der deshalb immer Gott ist. So die eine Stelle Plutarchs. Wo er aber an einer zweiten Stelle die gleiche Angabe wiederholt, verbindet er damit die Bemerkung, infolge von Platons Unwillen über die Würfelverdoppelung durch Werkzeuge sei die Mechanik von der Geometrie vollständig getrennt worden und dadurch auf lange Zeit zu einer bloßen Hilfswissenschaft der Kriegskunst herabgesunken. Konnte, sagt man, Platon einen derartigen Tadel gegen Eudoxus, gegen Archytas, gegen

[1]) Johannes Philoponus ad Aristotelis Analyt. post. I, 7. [2]) Plutarchus, *Quaest. conviv.* VIII, 92, 1 und *Vita Marcelli* 14, 5.

Menächmus aussprechen, wenn er selbst ein mechanisches Verfahren zur Würfelverdoppelung erdachte? Ist damit nicht der Beweis geliefert, daß der Bericht des Eutokius soweit irrig sein muß, als ihm Platon für den Erfinder einer Vorrichtung gilt, die von irgend einem anderen herrührte?

Wir gestehen zu, daß diese Einwürfe sehr gefährlicher Natur sind, um so mehr als nicht zu bezweifeln ist, daß die Platon durch Plutarch beigelegte Meinung mit dem ganzen philosophischen Charakter dessen, der die Ideen einführte, im vollsten Einklange steht. Es ist ferner nicht zu bezweifeln, daß langezeit, ob auf Platons Einfluß hin, wie behauptet worden ist[1]), lassen wir dahingestellt, nur die Geometrie des Zirkels und Lineals als eigentliche Geometrie betrachtet worden ist. Die Nachricht in der Form, wie Plutarch sie mitteilt, lautet überdies so bestimmt, daß es doch wohl allzu gewagt wäre, ein Mißverständnis anzunehmen[2]). Es wird demnach nur die Wahl zwischen folgenden Möglichkeiten bleiben. Entweder, und das dürfte dem Vorwurfe der Künstlichkeit ausgesetzt sein, wird man annehmen, Platon habe, indem er jenen Tadel gegen Eudoxus, Archytas, Menächmus aussprach, zugleich beigefügt, es sei ja keine Kunst eine Würfelverdoppelung mechanisch vorzunehmen, dazu genüge eine einfache Vorrichtung, wie wir sie oben nach Eutokius geschildert haben, aber das sei keine Geometrie, denn diese solle und müsse an ewige und körperlose Gedankenbilder sich halten. Oder aber, und das ist entschieden das Bequemste, man hält sich nur an die Notiz des Plutarch, an das Schweigen des Eratosthenes und schiebt die ganze Mitteilung des Eutokius, wie oben bemerkt, vornehm beiseite, soweit sie wenigstens auf Platon Bezug hat. Oder endlich, und das ist wenigstens das Ehrlichste, wenn kein anderer Vorzug noch Vorwurf an dieser Möglichkeit haftet, man gesteht zu, daß hier ein Widerspruch vorliege, den aus dem Wege zu räumen gegenwärtig keine genügenden Mittel zur Hand sind.

11. Kapitel.

Die Akademie. Aristoteles.

Wir folgen weiter dem Mathematikerverzeichnisse, welches im nächsten Satze drei Namen vereinigt, indem es sagt:

---

[1]) Hankel S. 156 spricht mit apodiktischer Gewißheit, aber durch kein Zitat unterstützt den Satz aus: Wir verdanken Platon die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf Zirkel und Lineal.
[2]) So haben wir selbst Zeitschr. Math. Phys XX, histor.-literar. Abteilung 133 den Widerspruch zu beseitigen gesucht.

„In diese Zeit gehört auch Leodamas von Thasos und Archytas von Tarent und Theätet von Athen, durch welche die Theoreme vermehrt wurden und zu einer strengen wissenschaftlichen Darstellung gelangten."

Von Leodamas von Thasos haben wir im vorigen Kapitel erzählt, was allein von ihm bekannt ist, nicht vieles aber ein Großes, daß für ihn (S. 220) Platon die analytische Methode ersann, beziehungsweise sie ihm mitteilte. Nennt, wie man wohl annehmen darf, das Mathematikerverzeichnis die darin vorkommenden Namen ihrer Zeitfolge nach, so war Leodamas etwas älter als Archytas, mithin auch als Platon, was aber einer Beeinflussung durch jenen keinen Abbruch tut[1].

Archytas von Tarent[2] mag etwa 430—365 gelebt haben, fast gleichzeitig mit Platon geboren, an welchen ihn auch, wie wir wissen, während dessen Aufenthalt in Großgriechenland (S. 215) ein enges Freundschaftsverhältnis band. Archytas war seiner Heimat wie seinem Bildungsgange nach Pythagoräer. Er war Staatsmann und Feldherr und versah wiederholt die höchsten Ämter in seiner Vaterstadt. Seinen Tod fand er, wie wir durch Horaz wissen[3], durch Schiffbruch am Vorgebirge Matinum, vielleicht beim Antritt einer Reise nach Griechenland. Das Mathematikerverzeichnis nennt ihn, wie wir soeben gesagt haben, vermutlich aus Gründen der Zeitfolge gerade hier und nicht schon einige Zeilen früher. Möglicherweise aber soll durch seine Stellung mitten unter Männern der Akademie der mittelbare Einfluß bezeugt werden, den er durch seine früheren nahen Beziehungen zu Platon auf diese Schule ausübte. Über die Echtheit oder Unechtheit von Bruchstücken philosophischen, ethischen, musikalischen Inhaltes, welche unter dem Namen des Archytas auf uns gekommen sind, herrschen die entgegengesetztesten uns glücklicherweise nicht kümmernden Meinungen. Während die einen jene Bruchstücke anerkennen, gehen die andern so weit, sie fast insgesamt für Fälschungen eines alexandrinischen Juden um das Jahr 39 n. Chr. zu halten[4]. Fast insgesamt, die mathematischen Bruchstücke nämlich bleiben vom Zweifel unbehelligt. Wir haben

---

[1]) Susemihl in dem Rheinischen Museum für Philologie. Neue Folge LIII, 626 Anmerkung 2 (1898). [2]) Jos. Navarro, *Tentamen de Archytae Tarentini vita atque operibus* (Kopenhagener Doktordissertation 1819). Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoräer (Preisschrift der Berliner Akademie 1840). L. Boeckh, Ueber den Zusammenhang der Schriften, welche der Pythagoräer Archytas hinterlassen haben soll (Karlsruher Lyzeumsprogramm 1841). Chaignet I, 255—331. [3]) Horatius, Lib. I, Ode 28. [4]) So besonders Gruppe, der diese These zuerst aufstellte.

ihrer übrigens schon gedacht. Die Würfelverdoppelung des Archytas und die wichtigen Folgerungen, welche aus ihr für seine stereometrischen Kenntnisse zu ziehen sind, haben uns im vorigen Kapitel, die Leistungen des Archytas auf dem Gebiete der Proportionenlehre schon früher (S. 166) beschäftigt, und auf letztere kommen wir gleich nachher noch einmal bei Gelegenheit des Eudoxus zu reden. Ein letztes, was, wiewohl oben (S. 229) gesagt, hier besonders betont werden mag, ist, daß Archytas die Mechanik zuerst methodisch behandelte, indem er sich dabei geometrischer Grundsätze bediente.

Theätet von Athen, der Platon nahe genug stand, daß dieser ihn zur namengebenden Persönlichkeit eines auch mathematisch lesenswerten Gespräches macht, ist seiner Lebenszeit nach nicht genauer zu bestimmen, als es durch diese eine Angabe geschieht. Seine Arbeiten müssen der Lehre von dem Irrationalen gewidmet gewesen sein. Er teilte sämtliche Zahlen in zwei Klassen, in die der Quadratzahlen, welche durch Vervielfältigung einer Zahl mit einer ihr gleichen entstehen, und in die Rechteckszahlen, bei welchen die zu vervielfältigenden Zahlen ungleich gewählt werden müssen[1]). Das einteilende Unterscheidungsmerkmal ist hier demnach Rationalität, beziehungsweise Irrationalität bei der Ausziehung der Quadratwurzel, und man kann hier eine früher (S. 183) von uns angekündigte Bestätigung derjenigen Vermutung finden, welche Quadrat und Heteromekie in der pythagoräischen Kategorientafel des Aristoteles einfach als Ersatzwörter für Rationalität und Irrationalität erklärt. Wenn Theätet sodann fortfährt „in betreff der festen Körper machten wir es ähnlich“, so ist der Sinn dieses Satzes verschiedener Deutung fähig. Es kann hier auf irrationale Kubikwurzeln angespielt sein[2]), möglicherweise auch auf die Ausziehbarkeit oder Nichtausziehbarkeit von Quadratwurzeln aus Produkten aus je drei Faktoren. Letzteres ist uns namentlich um deswillen wahrscheinlicher, als jede andere Notiz darüber, daß der Begriff der Kubikwurzel damals schon bekannt gewesen sein sollte — die Aufgabe der Würfelverdoppelung schließt ihn noch keineswegs ein — uns fehlt, während von der Einschaltung eines oder zweier geometrischen Mittel zwischen Körperzahlen im platonischen Timäus (S. 163) die Rede war. Eine weitere Bestätigung dieser unserer Ansicht liegt in einer mutmaßlich von Proklus herrührenden Anmerkung zum X. Buche des Euklid. Der 9. Satz des X. Buches dieses Schriftstellers heißt: Quadrate kommen-

---

[1]) Platon, Theaetet pag. 147—148. Vgl. Rothlauf S. 24flgg. [2]) So die Meinung Rothlaufs l. c.

surabler Linien verhalten sich wie Quadratzahlen, inkommensurabler Linien nicht wie Quadratzahlen und umgekehrt. Dazu bemerkt nun der Scholiast: „Dies Theorem ist eine Erfindung des Theätet, und Platon gedenkt desselben in dem Dialoge Theätet; nur wird es dort speziell auseinandergesetzt, hier aber allgemein“[1]). Noch eine letzte Angabe über Theätet liefert uns Suidas, er habe zuerst über die fünf Körper geschrieben[2]). Offenbar ist hier an ein zusammenhängendes Ganzes zu denken, was nicht ausschließt, daß schon vorher Hippasos oder irgend ein anderer über das Dodekaeder besonders geschrieben haben könnte. Ob auch diese Schrift des Theätet, wie man behauptet hat[3]), den Untersuchungen über Irrationales verwandt war, ob insbesondere über das Verhältnis der Kanten dieser Körper zum Halbmesser der umschriebenen Kugel Betrachtungen von der Art, wie sie im XIII. Buche des Euklid vorkommen, angestellt wurden, überlassen wir einzelnem Ermessen. Bestimmtere Angaben gibt es darüber nicht.

Unser Verzeichnis fährt fort: „Jünger als Leodamas ist Neokleides und dessen Schüler Leon, welche zu dem, was vor ihnen geleistet worden war, vieles hinzufügten; es hat auch Leon Elemente geschrieben, die in bezug auf Umfang und das Bedürfnis der Anwendung des Bewiesenen sorgfältiger verfaßt sind. Ebenso erfand er den Diorismus, wann das vorgelegte Problem möglich ist und wann unmöglich.“

Diese Sätze ergänzen früher (S. 208 und 219) von uns Erwähntes. In Platons Akademie entstand die Frage, ob eine Aufgabe, welche gestellt war, überhaupt möglich sei, ob man nicht zuverlässig vergebliche Mühe anwende, wenn man ihre Lösung versuche. Diese Frage mußte gestellt werden, sobald die analytische Methode entstand, die, wie wir gleichfalls sahen, nicht an sich zu jedesmal richtigen Ergebnissen führte, sondern erst einer Bestätigung durch die Synthesis bedurfte. Platon hat im Menon eine derartige Frage gestellt und beantwortet. Leon dürfte die Notwendigkeit der Fragestellung ein für allemal dargetan und vielleicht den Kunstausdruck Diorismus eingeführt haben, dessen lateinische Übersetzung determinatio lautet. Über Neokleides wissen wir den Worten des Mathematikerverzeichnisses nichts hinzuzufügen. Höchstens können wir den Umstand als besonders bemerkenswert erachten, wonach er Leons Lehrer gewesen sei, dieser also nicht als ausschließlicher Schüler Platons unmittelbar betrachtet werden darf.

---

[1]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen. Herford 1865, S. 24—25. [2]) Suidas s. v. Θεαιθήτος. [3]) Bretschneider S. 148.

„Eudoxus von Knidos um wenig jünger als Leon und ein Genosse der Schule Platons war der erste, welcher die Menge der Lehrsätze überhaupt vermehrte und zu den drei Proportionen noch drei hinzufügte; er führte auch weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der Analyse bediente.“

Eudoxus[1]) lebte um 390—337. Man weiß, daß er in Knidos geboren ist, daß er Schüler des Archytas, in seinem 23. Lebensjahre auch während zwei Monaten Schüler Platons in Athen war. Zur Zeit des Königs Nectanabis II um 358 oder 357 verweilte Eudoxus ein Jahr und vier Monate in Ägypten, wo er mit Platon verkehrte, wie Strabon nach ägyptischer Überlieferung uns erzählt. Wenig später stiftete Eudoxus selbst eine Schule in Kyzikus, dem heutigen Panorma am Marmarameere, kam er mit zahlreichen Schülern nach Athen, wo er wieder mit Platon enge verkehrte. Dann aber kehrte er nach Knidos zurück und starb dort im Alter von 53 Jahren. Astronom, Geometer, Arzt, Gesetzgeber nennt ihn Diogenes Laertius, dem die wesentlichsten biographischen Angaben[2]) über Eudoxus entstammen. Wir haben es hier nur mit dem Geometer zu tun und wollen zunächst von den zwei bestimmten Tatsachen reden, welche das Mathematikerverzeichnis hervorhebt.

Eudoxus fügte zu den drei Proportionen drei weitere hinzu. Wir haben (S. 165—166) die Analogien und Mesotäten für die Pythagoräer in Anspruch genommen, wir haben gesehen, daß der Ursprung einer bestimmten Proportion nach Babylon verlegt wird, von wo Pythagoras sie mitgebracht habe, woraus für uns mindestens das folgt, daß man zur Zeit des Jamblichus wie in Griechenland, so in den Euphratländern jener sogenannten musikalischen Proportion Beachtung schenkte. Wir wollen hier über den Unterschied von Analogie und Mesotät einiges einschalten. Die Erklärungen der griechischen Schriftsteller gehen freilich einigermaßen auseinander, aber faßt man die verschiedenen Stellen alle zusammen, so kommt man zu folgender Auffassung[3]). Ursprünglich hieß die geometrische Pro-

[1]) Über Eudoxus vgl. die bahnbrechende Abhandlung von Ludw. Ideler in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1828 (S. 189—212) und 1829 (S. 49—88). Dann hauptsächlich Schiaparelli, Ueber die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallippus und des Aristoteles (Abhandlg. des lombard. Instituts von 1874, deutsch von W. Horn in dem Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXII). Zwei Programmabhandlungen der Realschule Dinkelsbühl für 1888 und 1890 von Hans Künssberg geben eine erschöpfende Übersicht. Zuletzt beschäftigte sich mit Eudoxus Susemihl, Die Lebenszeit des Eudoxos von Knidos (Rheinisches Museum für Philologie. Neue Folge LIII, 626—628. 1898). [2]) Diogenes Laertius VIII, 86—90. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen Seite 210, Anmerkung 49.

portion ἀναλογία, die Proportion im allgemeinen, nämlich die arithmetische, die geometrische, die harmonische und sämtliche noch dazu kommende hießen μεσότητες. Der spätere Sprachgebrauch dagegen verwischte diesen Unterschied und ließ zuletzt unter Mesotät nur irgend etwas verstehen, was zwischen gegebenen Äußersten lag. Diese Darstellung schließt zugleich in sich, daß es ursprünglich nur drei solcher Proportionen gab, für welche wir die von Archytas gegebenen Definitionen kennen gelernt haben. Es war die arithmetische, die geometrische, die entgegengesetzte Proportion, welche diesen ihren Namen, ὑπεναντία, mit dem durch Archytas und Hippasos, wie wir von Jamblichus erfahren, eingeführten Namen der harmonischen vertauschte. Als selbstverständlich ist dabei zu bemerken, daß nur Proportionen, die aus drei Zahlen gebildet wurden, in Betracht kamen und mit jenen Namen belegt wurden, also nur stetige Proportionen sind Mesotäten. Zu den drei alten Mesotäten kamen drei neue. Das Mathematikerverzeichnis sagt uns Eudoxus habe dieselben erfunden. Jamblichus berichtet, Archytas und Hippasos hätten sie eingeführt, Eudoxus und seine Schüler nur die Namen verändert[1]. Endlich traten noch vier Mesotäten hinzu und brachten die Gesamtzahl auf zehn, welche Nicomachus im II. S. n. Chr. gekannt hat. Durch die Einführung der vier letzten machten sich, wieder Jamblichus zufolge, Temnonides und Euphranor verdient, Persönlichkeiten, die wir nur aus diesem einzigen Zitate kennen. An bestimmten Zahlenbeispielen können wir am deutlichsten mit dem Wesen der zehn Proportionen uns bekannt machen. Es bilden die drei Zeilen α, β, γ

die 1. Proportion	$\alpha - \beta = \beta - \gamma$	wenn $\alpha = 3\ \beta = 2\ \gamma = 1$
2.	$\alpha : \beta = \beta : \gamma$	$\alpha = 4\ \beta = 2\ \gamma = 1$
3.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 6\ \beta = 4\ \gamma = 3$
4.	$\alpha : \gamma = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 6\ \beta = 5\ \gamma = 3$
5.	$\beta : \gamma = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 5\ \beta = 4\ \gamma = 2$
6.	$\alpha : \beta = (\beta - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 6\ \beta = 4\ \gamma = 1$
7.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 9\ \beta = 8\ \gamma = 6$
8.	$\alpha : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 9\ \beta = 7\ \gamma = 6$
9.	$\beta : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\beta - \gamma)$	$\alpha = 7\ \beta = 6\ \gamma = 4$
10.	$\beta : \gamma = (\alpha - \gamma) : (\alpha - \beta)$	$\alpha = 8\ \beta = 5\ \gamma = 3$

Beim ersten Anblick vermißt man in dieser Liste, so umfangreich sie ist, zwei Proportionen, welche der 3. gegenüber eine ähn-

[1]) Jamblichus in Nicomachi Arithmeticam ed. Tennulius pag. 141 flgg., 159, 163, ed. Pistelli pag. 101, 113, 116.

liche Berechtigung zu haben scheinen, wie 5. und 6. neben 4., nämlich

$$3a.\quad \beta : \gamma = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma)$$

$$3b.\quad \alpha : \beta = (\alpha - \beta) : (\beta - \gamma).$$

Bei näherem Zusehen ergibt sich aber, weshalb sie fortblieben. Sie werden erfüllt, sofern $\alpha\gamma = \beta^2$, sind also in 2. bereits mit eingeschlossen, beziehungsweise werden durch die gleichen Werte α, β, γ erfüllt, welche 2. befriedigen.

Andererseits erscheint es uns Neueren gar verwunderlich, daß die Griechen alle diese Fälle unterschieden, mit deren sieben letzten im großen und ganzen gar nichts geleistet ist, daß sie in der Erfindung derselben etwas hinlänglich Bedeutendes erkennen, um die Namen derer aufzubewahren, von welchen jene Leistung herrührt. Wir werden in die griechische Stufenleiter der Wertschätzung uns hineinfinden können, wenn wir zweierlei erwägen. Erstens, daß eine große Zahlengewandtheit dazu gehörte sämtliche zehn Verhältnisse ganzzahlig zu erfüllen, zweitens, daß die aus vier voneinander verschiedenen Zahlen gebildete geometrische Proportion mit den aus ihr abzuleitenden für die Griechen bis zu einem gewissen Grade die Gleichungen und deren Umformung ersetzte. Die Folgerung von

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \text{auf} \quad (\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$$

z. B. spielt bei den Griechen fortdauernd die allerbedeutsamste Rolle. Stetige Proportionen hatten zur Kenntnis der arithmetischen, der geometrischen Reihen, jene wieder zur Kenntnis der vieleckigen Zahlen geführt. Was Wunder, daß man weiter experimentierte, daß man immer neue Verbindungen gleicher Verhältnisse zwischen Zahlen aufsuchte, welche selbst aus drei gegebenen Zahlen additiv oder subtraktiv zusammengesetzt waren? Solche neue Proportionen konnten zu neuen wichtigen Entdeckungen Gelegenheit geben, und taten sie es nicht, so boten sie nur ein Beispiel, wie es deren in der Geschichte aller Wissenschaften gibt, daß Untersuchungen mit hochgespannten Hoffnungen und Erwartungen begonnen sich allmählich als unfruchtbar erwiesen.

Eudoxus, sagt uns das Verzeichnis noch, führte weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der analytischen Methode bediente. Der Schnitt, ἡ τομή, über welchen Untersuchungen von Platon begonnen worden waren, muß, wie in richtigem Verständnis dieses lange für unerklärbar dunkel gehaltenen Ausspruches erkannt worden ist[1], ein ganz bestimmter

[1]) Bretschneider S. 167—168.

gewesen sein, ein solcher, dem die damalige Zeit die größte Bedeutung beilegte. Das aber war der Fall mit dem Schnitt der Geraden nach stetiger Proportion, mit dem sogenannten goldenen Schnitt, wie die spätere Zeit ihn genannt hat. Der goldene Schnitt tritt nun gerade in Verbindung mit Anwendung der analytischen Methode in den fünf ersten Sätzen des XIII. Buches der euklidischen Elemente auf, nachdem er schon im II. Buche als Satz 11. gelehrt worden war. Die Annahme, jene fünf Sätze seien Eigentum des Eudoxus und von Euklid in ihrem Zusammenhange pietätsvoll erhalten, hat sonach eine große Wahrscheinlichkeit für sich. Es sei ergänzend nur hinzugefügt, daß Eudoxus bei Untersuchungen über die Proportionenlehre fast mit Notwendigkeit auch zu solchen Verhältnissen geführt werden mußte, für welche Zahlenbeispiele nicht möglich waren, und deren Behandlung nur geometrisch gelang. Wir sagen, er mußte dahin geführt werden, weil, wie wir (S. 163) im Vorbeigehen bemerkt haben, der Grieche die Zahl vorzugsweise in räumlicher Versinnlichung zu betrachten pflegte, und hat Eudoxus sie ebenso betrachtet, dann verstehen wir, warum das Mathematikerverzeichnis die Leistungen des Eudoxus in der Proportionenlehre und um den goldenen Schnitt in einem Atemzuge ausspricht. Auch das Letztgesagte läßt eine weitere Beglaubigung zu. Eudoxus hat die Proportionenlehre geometrisch betrachtet, denn ihm gehört nach der Behauptung eines vermutlich von Proklus verfaßten Scholion das ganze V. Buch des Euklid, das ist eben das der Proportionenlehre gewidmete, in allen seinen wesentlichen Teilen an[1]).

Eine ganz andere Gattung von Untersuchungen des Eudoxus, welche nicht minder gut verbürgt sind, hatte stereometrische Ausmessungen zum Gegenstande. Archimed sagt uns mit ausdrücklicher Bestimmtheit[2]), Eudoxus habe gefunden, daß jede Pyramide der dritte Teil eines Prisma sei, welches mit ihr die gleiche Grundfläche und Höhe habe, ferner, daß jeder Kegel der dritte Teil eines Zylinders von der Grundfläche und Höhe des Kegels sei. Archimed deutet dabei den Weg an, welchen Eudoxus bei den Beweisen einschlug. Die griechischen Philosophen nannten λῆμμα, Einnahme, den Vordersatz, von welchem der Dialektiker bei seinen Schlüssen ausgeht. Dasselbe Wort bedeutete dem Mathematiker einen zum Gebrauche für das Nächstfolgende notwendigen, aber den Zusammenhang einigermaßen unterbrechenden Lehnsatz. Von einem Lemma, welches Eudoxus

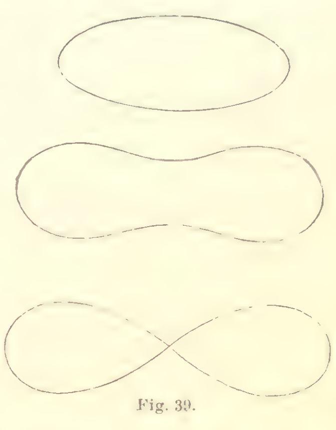
[1]) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus. Herford 1865, S. 10—13. [2]) Archimedes (ed. Heiberg) I, 4 lin. 11—14 und II, 296 lin. 9—20.

hier anwandte, sagt uns auch Archimed. Es lautet wie folgt: „Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem größeren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, daß dadurch jeder gegebene endliche Flächenraum übertroffen wird.“ Archimed setzt hinzu, mit Hilfe des gleichen Lemma hätten auch die Alten die Proportionalität des Kreises zum Quadrat des Durchmessers bewiesen, so daß möglicherweise der Beweis des Hippokrates von Chios schon dieses Lemma voraussetzte. Daran dachten wir (S. 207), als wir die Vermutung preisgaben, Hippokrates könne von rechnenden Betrachtungen Gebrauch gemacht haben, als er jene Proportionalität bewies. Jedenfalls war, wenn auch die erste Kenntnis des Lemma als solchem dem Eudoxus entrückt werden zu müssen scheint, seine Leistung eine sachlich wie methodisch hervorragende, und wir haben ihn als einen der ersten Bearbeiter des Exhaustionsverfahrens unter allen Umständen zu nennen.

Noch eine dritte Gruppe von geometrischen Untersuchungen des Eudoxus darf nicht schweigend übergangen werden. Eudoxus ist Erfinder einer Kurve, welche zwar in der Astronomie ihre wesentliche Anwendung gefunden hat, aber darum nicht weniger der Geometrie angehört[1]). Sie wurde von ihm selbst Hippopede, das heißt Pferdefessel, genannt, und Xenophon beschreibt sie in seinem Buche über die Reitkunst als die Art des Laufes, welche beide Seiten des Pferdes gleichmäßig ausbilde und jegliche Wendung zu machen gestatte. Auch heutigen Tages sucht man durch das sogenannte Achterreiten die gleiche Wirkung hervorzubringen, und so wird sehr wahrscheinlich, daß es eine schleifenartige Kurve war, welche Eudoxus so benannte. Damit stimmen Stellen des Proklus überein, welche die Hippopede eine spirische Linie nennen, und welche bezeugen, daß sie einen Winkel bilde, indem sie sich selbst schneide[2]). Wir werden von dem Erfinder der spirischen Linien noch später zu reden haben. Jetzt dürfen wir aber schon bemerken, daß man unter Spire, *σπεῖρα*, einen sogenannten Wulst versteht, d. h. einen ringförmigen Rotationskörper, welcher durch die Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende aber nicht durch den Mittelpunkt gehende Gerade erzeugt wird[3]), einen Körper, dessen Hälfte in der Würfel-

[1]) Über diese Kurve vgl. den V. Abschnitt des vorher erwähnten Aufsatzes von Schiaparelli, deutsche Übersetzung S. 137—155 und Knoche und Maerker (*Ex Procli successoris in Euclidis elementa commentariis definitionis quartae expositionem quae de recta est linea et sectionibus spiricis commentati sunt Knoche et Maerker*). Herford 1856. [2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 127, 128, 112. [3]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 119. Heron Alexandrinus (ed. Hultsch) pag. 27, Definit. 98.

verdoppelung des Archytas (S. 228) vorkommt, erzeugt durch die Verschiebung eines senkrechten Halbkreises über einem wagrechten. Schneidet man diesen Wulst durch eine der Drehungsachse parallele Ebene, so entsteht eine spirische Linie, deren Gestalt je nach der Entfernung der Schnittebene von der Drehungsachse eine dreifache sein kann (Fig. 39). Ist die schneidende Ebene von der Drehungsachse weiter entfernt als der Kreismittelpunkt, so entsteht eine ovale in sich zurücklaufende Linie, welche Proklus als in der Mitte am breitesten und gegen die Enden sich verengernd schildert. Geht die Ebene von der Achse aus gesehen diesseits des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises, aber immer noch durch den ganzen Wulst, so ist die Kurve nach den Worten desselben Schriftstellers länglich, in der Mitte eingedrückt und breiter an den beiden Enden. Die Schleifenlinie entsteht, wenn die Schnittebene der Achse noch näher rückt, so daß sie den Wulst an einem inneren Punkte berührt, welcher alsdann der Doppelpunkt der Kurve ist. Die genaueren Eigenschaften der Hippopede des Eudoxus auseinanderzusetzen ist hier um so weniger der Ort, als dieselben in den Quellen nicht angegeben sind, man also in vollständiger Ungewißheit sich befindet, wie viel oder wie wenig von dem, was man auseinandersetzt, dem Eudoxus selbst bekannt gewesen sein kann.


Fig. 39.

Das letzte, worüber wir noch zu berichten hätten, wären die Bogenlinien, *καμπύλαι γραμμαί*, mittels deren Eudoxus die Würfelverdoppelung vollzog. Eudoxus den Gottähnlichen nennt ihn Eratosthenes mit Rücksicht auf diese Leistung in einem Epigramm, welches den Schluß seines Briefes an König Ptolemäus über die Würfelverdoppelung bildet. Es muß also gewiß eine hervorragende Arbeit gewesen sein. Welcher Art aber jene Bogenlinien gewesen sein mögen, darüber fehlt auch die dürftigste Angabe, so daß wir keinerlei Vermutung Ausdruck zu geben imstande sind.

Das Mathematikerverzeichnis vereinigt nun wieder drei Namen, von welchen zwei uns schon bekannt geworden sind: „Amyklas von Heraklea, einer von Platons Gefährten, und Menächmus, der Schüler des Eudoxus und auch mit Platon zusammenlebend, und sein Bruder Dinostratus machten die gesamte Geometrie noch vollkommener."

Über Amyklas und seine Verdienste wissen wir gar nichts.

Menächmus[1]) war jener Würfelverdoppler, welcher Parabel und Hyperbel bei der Lösung seiner Aufgabe benutzte. Wir haben seine Auflösungen durch Eutokius kennen gelernt (S. 230) und uns aus denselben klar zu machen gesucht, wieviel Kenntnisse aus der Lehre von den Kegelschnitten Menächmus bereits besessen haben muß. Wir erinnern uns aus demselben Berichte des Eutokius, daß Isidorus von Milet einen Parabelzirkel erfunden hat. Nun kommt allerdings in dem oft benutzten Briefe des Eratosthenes der Satz vor (S. 212), die Zeichnungen der verschiedenen Würfelverdoppler hätten sich nicht leicht mit der Hand ausführen und in Anwendung bringen lassen „außer etwa einigermaßen die des Menächmus, doch auch nur mühsam“. Man hat daraus den Schluß gezogen, Menächmus habe bereits gewisse Vorrichtungen zur Zeichnung seiner Kurven gekannt, und unmöglich ist diese Deutung nicht. Einen eigentlichen Widerspruch gegen die bei Eutokius vorkommende Bemerkung bildet sie gewiß nicht, da erstens die Vorrichtungen des Menächmus keine Zirkel gewesen zu sein brauchen und zweitens Eutokius nicht sagt, daß man vor der Erfindung, die er seinem Lehrer nachrühmt, Parabel und Hyperbel nicht mechanisch habe zeichnen können. Daß die Namen Parabel und Hyperbel jüngeren Datums als Menächmus sind, haben wir betont. Sie gehören dem Apollonius von Pergä an. Die Namen, welche vorher in Übung waren, gehen ebenso wie die Entstehung jener Kurven aus einer durch Eutokius in seinem Kommentare zu Apollonius uns erhaltenen Stelle des Geminus hervor[2]). Die Alten kannten nur gerade Kreiskegel und definierten dieselben als durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um die eine seiner Katheten entstanden. Sie unterschieden aber drei Gattungen solcher Kegel, je nachdem die Umdrehungsachse mit der Hypotenuse des den Kegel erzeugenden Dreiecks einen Winkel machte, der kleiner, gleich oder größer als die Hälfte eines rechten Winkels war. Der Winkel an der Spitze des Kegels wurde natürlich doppelt so groß, also in den drei Fällen spitz, recht oder stumpf. Nun schnitt man jeden Kegel durch eine zur Kegelseite, d. h. zur Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks senkrechte Ebene und erhielt so die dreierlei Kurven, welche ihrer Hervorbringung gemäß Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen und des stumpfwinkligen Kegels genannt wurden. Schon Demokritus von Abdera (S. 193) scheint Kegel durch dem Grundkreise parallele Ebenen durchschnitten

[1]) Max C. P. Schmidt, Die Fragmente des Mathematikers Menächmus in der Zeitschrift „Philologus“ (1882) Bd. 1, 2, S. 72—81. [2]) Apollonii Conica (ed. Heiberg). Leipzig 1891—1893. II, 168.

zu haben. Die bei sonstigen Schnitten auf der Kegeloberfläche hervortretenden Kurven hat er indessen wohl kaum beobachtet, da wieder Geminus in einer anderen durch Proklus uns aufbewahrten Stelle versichert, Menächmus habe die Kegelschnitte erfunden[1]. Eben dasselbe geht auch aus einer Bemerkung des Eratosthenes hervor. In jenem Epigramme nämlich, mit welchem er seinen Brief über die Würfelverdoppelung beschließt, und in welchem er Eudoxus den Göttlichen nennt, wie wir oben sagten, spricht er von den aus dem Kegel geschnittenen Triaden des Menächmus.

Menächmus, der Entdecker der Kegelschnitte und einiger ihrer Haupteigenschaften, scheint aber nicht im Zusammenhange von denselben gehandelt zu haben. Wenigstens sagt uns Pappus, daß ein gewisser Aristäus der Ältere zuerst über die Elemente der Kegelschnitte fünf Bücher herausgab. An einer zweiten Stelle erzählt er uns, daß Euklid dem Aristäus nachgerühmt habe, daß er sich durch die Herausgabe der Kegelschnitte verdient gemacht habe. Eine dritte Stelle des Pappus bestätigt endlich, was wir vorher nach Geminus über die Namen sagten, indem es dort heißt, Aristäus und alle anderen Mathematiker vor Apollonius nannten die drei Kegelschnittlinien den Schnitt des spitzwinkligen, rechtwinkligen und stumpfwinkligen Kegels[2]). Demselben Aristäus rühmt Pappus an der gleichen Stelle auch noch nach, daß er die bis jetzt einzig vorhandenen fünf Bücher körperlicher Örter in Zusammenhang mit den Kegelschnitten verfaßt habe, und Hypsikles weiß im zweiten vorchristlichen Jahrhundert, daß er eine Vergleichung der fünf regelmäßigen Körper verfaßte[3]). Das Zeitalter des Aristäus des Älteren läßt sich aus diesen Angaben ziemlich genau ableiten. Er muß mit seinem Werke über die regelmäßigen Körper später als Theaetet, der zuerst über diesen Gegenstand schrieb, mit seinem Werke über die Kegelschnitte später als Menächmus, der diese Kurven entdeckte, früher als Euklid, der das Werk lobte, aufgetreten sein. Man wird folglich keinenfalls weit fehlgehen, wenn man die schriftstellerische Tätigkeit des Aristäus auf die Jahrzehnte um 320 bestimmt. Das Mathematikerverzeichnis schweigt auffallenderweise über diesen ohne allen Zweifel hervorragenden Mann, und auch die anderen Quellen lassen uns im Stiche, wenn wir die Frage aufwerfen, wer wohl der Aristäus der Jüngere war, in Gegensatz zu welchem Pappus von dem Älteren redet?

Menächmus muß, wie wir soeben begründet haben, vor Aristäus

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 111. [2]) Alle drei Stellen bei Pappus, VII, Praefatio (ed. Hultsch) 672, 676 und wieder 672. [3]) Hypsikles, Buch von den fünf regelmäßigen Körpern, Satz 2.

gesetzt werden. Der Zeit nach könnte er mithin leicht Mathematiklehrer Alexanders des Großen gewesen sein, wie in einem allerdings an sich wenig glaubwürdigen Geschichtchen erzählt wird[1]).

Dinostratus[2]), der Bruder des Menächmus, bediente sich Pappus zufolge zur Quadrierung des Kreises jener krummen Linie, deren Erfindung wir für Hippias von Elis in Anspruch nehmen mußten, und welche mutmaßlich nur von ihrer neuen Anwendung den Namen der Quadratrix erhielt (S. 197). Auch über das dabei eingeschlagene Verfahren gibt Pappus uns erwünschte Auskunft[3]). Es wird nämlich zunächst die Länge des Kreisquadranten gesucht und alsdann der Inhalt des Kreises als Hälfte des Rechtecks berechnet, welches die Kreisperipherie, oder das Vierfache des Quadranten, zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat. Jene Länge des Quadranten aber ist erstes Glied einer stetigen geometrischen Proportion, deren Mittelglied der Halbmesser und deren letztes Glied die Entfernung des Kreismittelpunktes von dem Endpunkte der Quadratrix ist (Fig. 40). Wäre nicht, wie behauptet wird, $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma\Theta$, so wäre etwa $BE\Delta : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma K$ und $\Gamma K > \Gamma\Theta$. Man beschreibe mit Γ als Mittelpunkt und ΓK als Halbmesser einen zweiten Quadranten ZHK, welcher die Quadratrix in H schneidet. Da die Proportionalität der Quadranten und ihrer Halbmesser $BE\Delta : ZHK = \Gamma\Delta : \Gamma K$ zur Folge hat, so verbindet sich dieses Verhältnis mit dem vorhergehenden zu $ZHK = \Gamma\Delta = B\Gamma$. Wegen der Grundeigenschaft der Quadratrix ist auch Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta = B\Gamma : H\Lambda$ und, weil die konzentrischen Quadranten $BE\Delta$, ZHK durch den Halbmesser ΓHE geschnitten sind, ist ferner Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta$ = Bogen ZHK : Bogen $HK = B\Gamma$: Bogen HK. Daraus folgt wieder durch Verbindung zweier Verhältnisse Bogen $HK = H\Lambda$, was unmöglich ist. Die Annahme, daß der Punkt K zwischen Γ und Θ fiele, mithin $\Gamma K < \Gamma\Theta$ wäre (Fig. 41), führt gleichfalls zu Widersprechendem. Man beschreibt wieder mit Γ als Mittelpunkt und ΓK als Halbmesser einen Quadranten, so muß wieder $BE\Delta : ZMK = B\Gamma : \Gamma K$ sich verhalten. Voraussetzungsmäßig ist $BE\Delta : B\Gamma = B\Gamma : \Gamma K$, mithin $ZMK = B\Gamma$.

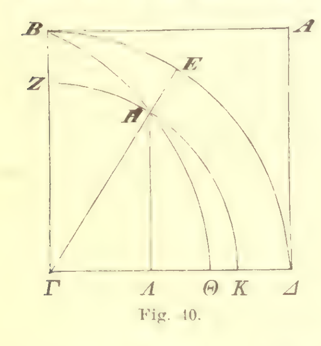


Fig. 40.

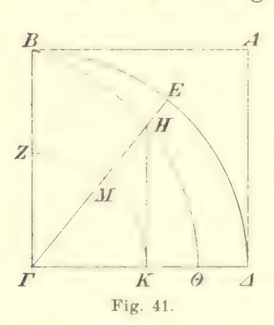


Fig. 41.

[1]) Vgl. Bretschneider 162—163. [2]) Hultsch in Pauly-Wisowa, Encyklopädie IV, 2396—2398. [3]) Pappus IV, 26 (ed. Hultsch) pag. 256.

Ferner findet das Verhältnis statt Bogen ZMK : Bogen MK = Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta$ und, weil $BH\Theta$ Quadratrix ist, auch Bogen $BE\Delta$: Bogen $E\Delta = B\Gamma : HK$, folglich Bogen ZMK : Bogen $MK = B\Gamma : HK$. In dieser Proportion ist, wie oben gezeigt wurde, das erste und dritte Glied übereinstimmend, also muß das Gleiche für das zweite und vierte Glied stattfinden, d. h. es muß Bogen $MK = HK$ sein, und das ist nicht möglich. Der Punkt K, dessen Entfernung vom Mittelpunkte Γ das Schlußglied der Proportion bildet, deren Anfangsglied die Quadrantenlänge und deren Mittelglied der Halbmesser ist, kann also weder rechts noch links von Θ fallen und muß deshalb Θ selbst sein. Warum $arc\ MK = HK$ unmöglich sei, verrät uns der Berichterstatter Pappus nicht. Er sagt nur *ὅπερ ἄτοπον*. Vielleicht ist der Beweis so zu denken, daß die Flächen des Kreisausschnittes ΓMK und des größeren Dreiecks ΓHK sich wie $arc\ MK : HK$ verhalten. Diese Beweisführung setzt freilich voraus, daß Dinostratus die Ausmessung des Kreises in Gestalt eines Rechtecks, welche, wie wir sagten, der Zielpunkt seiner Untersuchung war, schon als bekannt annahm.

Dieser Beweis ist nächst dem (S. 182) angeführten auf Pythagoras zurückgehenden Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ der erste indirekte Beweis, welchem wir begegnet sind, wenn wir auch keineswegs annehmen, hier sei wirklich zuerst die Zurückführung auf Widersprüche vorgenommen worden. Die analytische Methode, das haben wir ja gesehen, mußte den Beweis aus dem Gegenteil bevorzugen, als denjenigen, der eine nachfolgende Synthese entbehrlich machte (S. 221), und so wird auch wohl spätestens mit dieser Methode der apagogische Beweis entstanden sein — spätestens, denn es ist keineswegs unmöglich, daß er zum Zwecke der dem Hippokrates schon nicht fremden Exhaustion erfunden worden wäre. Zu dem bewiesenen Satze selbst wollen wir noch besonders hervorheben, was wir oben gelegentlich gesagt haben. Der Name der Quadratrix darf uns nicht irren, als ob es hier wirklich um eine Quadratur sich handelte. Diese folgt erst in zweiter Linie. Eine Rektifikation des Kreisquadranten ist vielmehr vorgenommen, und zwar dürfte es das erste Mal gewesen sein, daß diese Aufgabe behandelt wurde, um welche von jetzt an die Zahl der großen Probleme der Geometrie vermehrt ist.

„Theydius von Magnesia scheint sowohl in der Mathematik als auch in der übrigen Philosophie bedeutend zu sein; er schrieb auch sehr gute Elemente, wobei er vieles Spezielle verallgemeinerte. Ganz ebenso war Kyzikenus von Athen oder Athenaeus von Kyzikus, denn die griechische Form ὁ *Κυζικηνὸς Ἀθήναιος* kann beide Bedeutungen haben und ist bald so, bald so übersetzt

worden[1]), um die nämliche Zeit lebend, sowohl in den anderen Wissenschaften als ganz besonders auch in der Geometrie berühmt. Alle diese verkehrten in der Akademie miteinander, indem sie ihre Untersuchungen gemeinschaftlich anstellten. Hermotimus von Kolophon führte das früher von Eudoxus und Theaetet Gefundene weiter aus, entdeckte vieles zu den Elementen Gehörige und schrieb einiges über die Örter. Philippus von Mende, des Platon Schüler und von ihm den Wissenschaften zugeführt, stellte nach Platons Anleitung Untersuchungen an und nahm sich das zur Bearbeitung, wovon er glaubte, daß es mit Platons Philosophie zusammenhänge. Die nun die Geschichte geschrieben haben, führten bis zu diesem Punkte die Entwicklung der Wissenschaft fort."

So der Schluß des alten Mathematikerverzeichnisses. Von den vier Männern, welche hier genannt sind, ist einer uns schon bekannt: Philippus von Mende. Es ist kaum einem Zweifel unterworfen, daß er derselbe ist, wie Philippus Opuntius (von Opus)[2]), daß er ein bedeutender Astronom war, zuerst wahrscheinlich mit optischen Untersuchungen sich beschäftigte und insbesondere den Regenbogen als Brechungserscheinung erkannte. Von den Arbeiten über Vieleckszahlen war (S. 169) die Rede. Auch die Literaturgeschichte ist unserem Philippus zu Dank verpflichtet, als demjenigen, der die 12 Bücher Gesetze des Platon herausgab und ein 13. Buch, die sogenannte Epinomis, als Anhang verfaßte. Von den drei übrigen Persönlichkeiten dagegen wissen wir so gut wie nichts. Es ist freilich mit hoher Wahrscheinlichkeit vermutet worden, die elementargeometrischen Sätze, welche bei voreuklidischen Schriftstellern, z. B. bei Aristoteles, vorkommen, müßten dem Elementenwerke des Theydius entnommen sein[3]). Von Hermotimus hieß es, er habe über die Örter geschrieben. Ein geometrischer Ort im allgemeinen ist der Inbegriff von Punkten, welche insgesamt gewisse Bedingungen erfüllen, die hinwiederum durch keinen Punkt außerhalb des geometrischen Ortes erfüllt werden. Pappus sagt uns weiter, daß man verschiedene Arten von Örtern unterschied[4]). Ebene Örter, *τόποι ἐπίπεδοι*, wurden die genannt, welche gerade Linien oder Kreislinien sind; körperliche Örter, *τόποι στερεοὶ*, die, welche Kegelschnitte sind; lineare Örter, *τόποι γραμμικοὶ*, die weder gerade Linien, noch Kreislinien, noch Kegelschnitte sind.

---

[1]) Bretschneider hat die erste, Friedlein die zweite Übersetzung angenommen. [2]) Aug. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten (Berlin 1863) S. 34—40. [3]) Heiberg in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 4 (Leipzig 1904). [4]) Pappus VII, Praefatio (ed. Hultsch) pag. 662 und 672.

Es muß dabei einigermaßen auffallen, daß nach einer Nachricht, die wir ebendemselben Pappus verdanken, Aristäus der Ältere in zwei verschiedenen Schriften über Kegelschnitte und über körperliche Örter geschrieben haben soll. Man muß wohl annehmen, daß das eine Mal sein Zweck dahin ging, Eigenschaften der Kegelschnitte auseinanderzusetzen, das andere Mal Aufgaben zu lösen, bei denen Kegelschnitte als Mittel zur Auflösung dienten.

Wenn von allen zugleich behauptet wird, sie hätten in der Akademie verkehrt, so kann dieser Verkehr auch stattgefunden haben, nachdem der Stifter dieser Schule gestorben war. Platons unmittelbarer Nachfolger war Speusippus, Sohn der Potone, der Schwester Platons. Er schrieb über die pythagoräischen Zahlen, und ein Bruchstück dieses artigen Büchleins — *βιβλίδιον γλαφυρόν* — hat sich nebst dieser lobenden Benennung bei einem späten Schriftsteller erhalten[1]). Es ist darin von linearen Zahlen, von vieleckigen Zahlen, von Dreiecken, von Pyramiden die Rede, so daß dadurch der altpythagoräische Ursprung aller dieser arithmetischen Begriffe immer unzweifelhafter wird. Zweiter Nachfolger Platons war dann Xenokrates (geboren um 397, gestorben um 314), der wahrscheinlich 339 v. Chr. die Leitung der Akademie übernahm. Wir haben (S. 216) dessen bekannten Ausspruch über die Mathematik als Handhabe der Philosophie angeführt. Wir haben (S. 118) erwähnt, daß er möglicherweise eine historische Schrift über die Geometer verfaßt hat, welche, wie wir jetzt nach Diogenes Laertius ergänzen, aus fünf Büchern bestand. Noch andere vielleicht mathematische Schriften von ihm werden uns durch den gleichen Gewährsmann genannt[2]). Leider sind es nur Überschriften, die auf uns gelangt sind, ohne selbst die leiseste Andeutung über den Inhalt. Nur über eine Leistung des Xenokrates ist uns eine kurze Notiz erhalten, welche bedauern läßt, daß sie so kurz ist. Er habe auch gezeigt, sagt Plutarch, daß die Anzahl der aus allen Buchstaben zusammensetzbaren Silben 1002000000000 betrage[3]). Die Frage ist eine wesentlich kombinatorische. Kombinatorisch ist, wenn man will, bis zu einem gewissen Grade die Bemerkung Platons von den 59 Teilern, welche in 5040 enthalten seien (S. 225). Allein dort schien es notwendig zuzugeben, daß eine empirische Zählung zu diesem Ergebnisse ge-

[1]) Theologumena Arithmeticae (ed. Ast). Leipzig 1817, pag. 61—62. Eine mit Erläuterungen versehene Übersetzung der ganzen Stelle bei P. Tannery, Pour l'histoire de la science Hellène, pag. 386—390. [2]) Diogenes Laertius IV, 13. [3]) Plutarchus, *Quaest. Conviv.* VIII, 9, 13: *Ξενοκράτης δὲ τὸν τῶν συλλαβῶν ἀριθμὸν ὃν τὰ στοιχεῖα μιγνύμενα πρὸς ἄλληλα παρέχει μυριάδων ἀπέφηνεν εἰκοσάκις καὶ μυριάκις μυρίων.*

führt haben werde. Bei der Aufgabe des Xenokrates schließt die Größe der Zahl jede Zählung, ihre Abweichung von einer runden Zahl jede allgemein hingeworfene Abschätzung aus. Xenokrates muß gerechnet, nach einer kombinatorischen Formel gerechnet haben, und wenn dieselbe auch offenbar unrichtig gewesen sein muß, so wäre es nicht weniger wissenswert, die Formel und ihre Ableitung zu kennen. Eine Wiederherstellung derselben aus jener Zahl ist uns nicht gelungen.

Suchen wir ganz kurz zusammenfassend unserem Gedächtnisse einzuprägen, welcherlei Bedeutung Platon, seine außerhalb des Pythagoräismus stehenden Vorgänger und seine eigenen Schüler für die Entwicklung der Mathematik besaßen. Die Mathematik gewinnt in dieser Zeit an Umfang in einem zweifachen Sinne dieses Ausdrucks. Der Umfang nimmt zu durch neu entdeckte Sätze und Methoden. Der Umfang nimmt zu durch die Zahl der Persönlichkeiten, die mit Mathematik sich beschäftigen. Die letztere Zunahme begründet sich durch die Notwendigkeit, durch die Mathematik hindurch zur Philosophie zu gelangen. Die Neuentdeckungen gehören zu einem Teile den Elementen an, welche seit Hippokrates in wiederholter Ausarbeitung durch Leon und durch Theydius sich wesentlich vervollkommnen. Die philosophisch begründenden Kapitel der Mathematik bilden sich. Definitionen werden ausgesprochen. Methoden werden erfunden. Fragen nach der Möglichkeit des Geforderten, an die man früher kaum dachte, bilden jetzt eine unbedingte Voraussetzung. Aber diese Methoden, vornehmlich die Analyse und der Diorismus, äußern ihre hauptsächliche Wichtigkeit in der Lehre von den Örtern, in der höheren Mathematik des Altertums, welcher der andere Teil der Neuentdeckungen angehört. Es sind der Hauptsache nach drei Probleme, durch welche die höhere Mathematik, der Zirkel und Lineal nicht genügen, hervorgerufen wird: die Quadratur des Kreises, in der Form, wie Dinostratus sie behandelt, die Rektifikation mit einschließend, die Dreiteilung des Winkels, die Verdoppelung des Würfels. Die beiden letzten Probleme führen zur Erfindung mannigfacher Kurven, unter welchen die Kegelschnitte durch die später gewonnene Ausbildung ihrer Lehre an Wichtigkeit hervorragen. An sich aber sind sie kaum merkwürdiger als jene anderen krummen Linien, von denen eine, durch Archytas zum Zwecke der Würfelverdoppelung ersonnen, sogar eine Linie doppelter Krümmung ist. Die Kreisquadratur hat noch eine besondere Seite, mittels deren die höhere Mathematik des Altertums mit der der Neuzeit sich berührt. Sie erfordert Infinitesimalbetrachtungen. Das Unendlichgroße wie das Unendlichkleine sind dem Altertume keineswegs fremd. Nur wagte man nicht — zunächst

vielleicht aus Scheu vor Angriffen, wie die eleatische Schule sie übte — eine unmittelbare Benutzung des Unendlichen sich zu gestatten. Die mittelbare Methode der Zurückführung auf das Unmögliche, später für diese Gattung von Aufgaben unter dem Namen der Exhaustion bekannt, diente zum Ersatze und zeigte sich als so wirksam, daß von nun an ein anderes Beweisverfahren gar nicht mehr gestattet worden wäre. So bleibt der Form nach die gesamte Mathematik einheitlich gestaltet als Geometrie, ohne daß ein äußerer Unterschied der Beweisführung zwischen niederer und höherer Geometrie obwaltete. Auch die Arithmetik fügt sich diesem einheitlichen Zusammenhange, sie nimmt mehr und mehr ein geometrisches Gewand an, dessen sie auch in dem nun folgenden Jahrhunderte, in der Glanzperiode griechischer Mathematik, sich nicht entkleiden wird.

Mit diesem Überblicke könnten wir füglich dieses Kapitel schließen. Wir sollten es vielleicht. Ganz äußerliche Gründe bestimmen uns einen kurzen Anhang nachzuschicken und in demselben Dinge zur Sprache zu bringen, die zur Bildung eines eigenen Kapitels stofflich nicht ausreichend den einheitlichen Charakter des folgenden Kapitels nur noch viel mehr entstellen würden, wenn wir vorzögen sie dorthin zu verweisen. Wir meinen die mathematische Bedeutung von Aristoteles und seinen nächsten Schülern.

Aristoteles[1]) ist 384 geboren, 322 gestorben. Seine Vaterstadt Stagira lag in der thrakischen, aber größtenteils von Griechen bewohnten Landschaft Chalkidike; sein Vater war Leibarzt des Königs Amyntas von Makedonien. Diese beiden Erbüberlieferungen beeinflußten sein Leben. Griechenland hat ihn gebildet, durch Makedoniens Könige hat er einen wesentlichen Teil seiner großartigen Kulturmission ausgeübt. Aristoteles war im 18. Jahre seines Lebens in die platonische Schule in Athen eingetreten, wo er Mitschüler des Xenokrates war, und verließ diese Stadt, in welcher er übrigens auch selbst eine Rednerschule im Gegensatze zur Akademie eröffnete, im Jahre 347 nach Platons Tode. Von 343 bis 340 etwa war er als Erzieher Alexanders des Großen am makedonischen Hofe, verwandte dann die nächsten Jahre zur Abfassung von für seinen Zögling bestimmten Schriften und eröffnete etwa 334 in Athen bei dem Tempel des Apollo Lykeios seine Vorträge. Lustwandelnd in den Baumgängen des anstoßenden Gartens wurden die Peripatetiker die zahlreichste Philosophenschule. Die Beziehungen des Aristoteles zu Alexander blieben auch aus der Ferne die besten, bis 328 die Leidenschaftlichkeit des aufbrausenden Fürsten einen unheilvollen Riß her-

---

[1]) Vgl. Zeller, Die Philosophie der Griechen. Bd. II, 2, S. 1 flgg.

vorbrachte. Das hinderte freilich nicht, daß die nach Alexanders Tode 322 sich aufraffenden Athener Aristoteles mit ihrem Hasse bedrohten. Er floh nach Chalkis und starb dort innerhalb Jahresfrist.

Wir haben von den Leistungen des großen Stagiriten hier nur einen kleinsten Bruchteil zu besprechen. Seine astronomischen, seine physikalischen, seine naturbeschreibenden Schriften kümmern uns als solche nicht. Seine eigentlich philosophischen Werke haben für uns nur mittelbare Bedeutung. So haben wir dessen, was er in seiner Physik über das Unendlichgroße und das Unendlichkleine sagt, schon früher (S. 204) gedacht, und mit Bewunderung bei ihm eine Auffassung erkannt, welche den Anschauungen unserer eigenen Zeit recht nahe kommt.

Man könnte vielleicht erwarten, daß wir in den Schriften des Aristoteles die zahlreichen Beispiele absuchten, welche der Geometrie und der Arithmetik entnommen sind[1]. Wir werden uns dieser Mühe nicht unterziehen, denn nur verhältnismäßig wenige dieser Stellen besitzen eine geschichtliche Bedeutsamkeit. Auf einiges durften wir hinweisen, als wir mit der Mathematik der Pythagoräer uns beschäftigten, so insbesondere auf die Erklärung des Gnomon (S. 162), auf das Vorkommen des Wortes Dreieckszahl (S. 168), auf den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ (S. 182), welche uns wertvoll waren. Auf anderes wollen wir jetzt die Aufmerksamkeit lenken, an den viel häufigeren uns unwichtig scheinenden Stellen mit Schweigen vorübergehend. Wir erwähnen als aristotelisch den Satz, daß die Außenwinkel eines geradlinigen ebenen Vielecks die Winkelsumme von vier Rechten besitzen, wo die Außenwinkel so gemeint sind, daß jede Vielecksseite einseitig, und an jedem Eckpunkte nur eine Vielecksseite verlängert ist[2]. Aus diesem Satze geht zweifellos hervor, daß über die Winkelsumme des Dreiecks hinaus jetzt auch die Winkelsumme des nach außen konvexen Vielecks von n Seiten bekannt gewesen sein muß. Wir erwähnen ferner, daß, während bei Platon der Gegensatz der Rechenkunst und der Zahlenlehre, Logistik und Arithmetik, scharf und bestimmt vorhanden war, erst bei Aristoteles ein ähnlicher Gegensatz zwischen der Feldmeßkunst und der wissenschaftlichen Raumlehre, Geodäsie und Geometrie, nachweisbar ist[3]. Wir

[1] Eine derartige wenn auch nicht vollständige Zusammenstellung hat ein bologneser, dem Jesuitenorden angehöriger Professor der Mathematik Biancani (Blancanus) unter dem Titel *Aristotelis loca mathematica* 1615 veröffentlicht. Neuen Ursprungs sind Görland, Aristoteles und die Mathematik (Marburg 1899), sowie Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles (Leipzig 1904 in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 1—49). [2] Aristoteles, Analyt. post. γ, 94, 8 und δ, 14, 9. Vgl. Blancanus l. c. pag. 61—62. [3] Ari-

können anführen, daß Aristoteles weiß, daß eine zylindrische Rolle, welche durch eine Ebene parallel oder geneigt zur Endfläche geschnitten wird, im aufgerollten Zustande das eine Mal eine gerade Linie, das andere Mal eine Kurve zeigt[1]), daß ihm somit der Zylinderschnitt neben dem Kegelschnitte schon bis zu einem gewissen Grade merkwürdig war. Wir müssen wohl eines eigentümlichen, vielleicht aus dem Elementenwerke des Theydius (S. 247) stammenden Beweises der Winkelgleichheit an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gedenken[2]). Aus der Spitze K des Dreiecks als Mittelpunkt (Fig. 41a) wird der Kreis $ABA'B'$ beschrieben, der AA' und BB' als Durchmesser besitzt. Nun sind alle Winkel, welche ein Kreisdurchmesser mit der Peripherie bildet, einander gleich, also $\angle KAE = KBE$. Ferner sind die Winkel Γ, Δ (oder BAE, ABE) einander gleich, welche eine Sehne mit dem von ihr bespannten Bogen bilden. Zieht man diese beiden Gleichungen zwischen je zwei gemischtlinigen Winkeln voneinander ab, so bleibt die Gleichung zwischen den beiden geradlinigen Winkeln A, B übrig. Wir können hinweisen auf Aristoteles als vermutlich den ersten, der die so bedeutsame Frage sich vorlegte, warum wohl nahezu alle Menschen nach der Grundzahl 10 zählen, und der in der Fingerzahl unserer Hände den Grund erkannte[3]). Wir finden auch bei Aristoteles den Keim zu einem Gedanken, der der fruchtbarsten einer für die ganze Mathematik geworden ist.

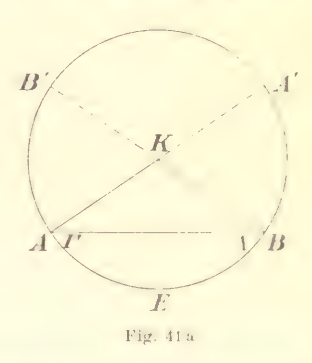


Fig. 41a

Aristoteles bezeichnete nämlich unbekannte Größen, und zwar nicht bloß Längen, durch einfache Buchstaben des Alphabetes[4]). Eine Stelle lautet z. B.: Wenn A das Bewegende, B das Bewegtwerdende, Γ aber die Länge, in welcher es bewegt worden ist, und Δ die Zeit ist, in welcher es bewegt worden ist, so wird die gleiche Kraft wie A in der gleichen Zeit auch die Hälfte des B doppelt so weit als Γ bewegen, oder auch in der Hälfte der Zeit Δ gerade so weit als Γ. Man hat in diesen und ähnlichen Sätzen der Physik des Aristoteles die Ahnung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeit gefunden[5]).

stoteles, Metaphys. II, 2 ἅμα δὲ οὐδὲ τοῦτο ἀληθές, ὡς ἡ γεωδαισία τῶν αἰσθητῶν ἐστι μεγεθῶν καὶ φθαρτῶν.

[1]) Aristoteles Problem. XVI, 6. [2]) Blancanus l. c. pag. 38. Heiberg l. c. S. 25—26. [3]) Aristoteles Problem. XV. [4]) Aristoteles, Physic. VII und VIII passim z. B. Bd. I, pag. 240 bis 250 der Aristoteles-Ausgabe der Berliner Akademie. [5]) Poggendorff, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, S. 242.

Andere mechanische Betrachtungen hat Aristoteles in einem besonderen Werke[1]) niedergelegt, bei welchem wir einen Augenblick verweilen müssen. Die Echtheit der Mechanik des Aristoteles ist allerdings mehrfach geleugnet worden, und unter den Zweiflern befinden sich Männer, die, wenn auch dem Inhalte jenes Werkes gegenüber Laien, jedenfalls mit der Ausdrucksweise des vermuteten Verfassers aufs genaueste bekannt waren[2]). Wir besitzen selbst die sprachlichen Kenntnisse nicht in dem Maße, welches erforderlich wäre um über die Berechtigung oder Nichtberechtigung der Ausscheidung der Mechanik zu entscheiden. Soviel dürfte indessen zu behaupten sein, daß die Mechanik im aristotelischen Geiste verfaßt ist, daß ein innerer Widerspruch gegen andere Schriften des großen Gelehrten nicht nachgewiesen ist[3]). Behaupten darf man auch, daß die Möglichkeit einer aristotelischen Mechanik ebensowenig geleugnet werden kann als die geistige Bedeutsamkeit der unter diesem Titel auf uns gekommenen Schrift.

Eine Mechanik konnte Aristoteles schreiben. Es war zu seiner Zeit schon eine solche von Archytas von Tarent vorhanden (S. 236), der sich bei dieser seiner methodischen Behandlung der Mechanik geometrischer Grundsätze bediente[4]). Es waren auch von der eleatischen Schule aus gegen die ganze Bewegungslehre Angriffe erfolgt (S. 199), die es nicht unwahrscheinlich machen, daß Aristoteles, der seine allgemeinen Abweisungen jener Zenonischen Lehren in einer besonderen Schrift über unteilbare Linien weitläufiger ausführte, ergänzend auf positive Weise zeigen wollte, wie die als möglich und als wirklich behauptete Bewegung vor sich gehe. Dazu kam aber ein anderer Zweck, welcher den mechanischen Problemen des Aristoteles — so lautet der eigentliche Titel der Schrift — eine besondere dialektische Bedeutung gibt und damit deren Echtheit

---

[1]) *Aristotelis Quaestiones mechanicae* ed. J. P. van Cappelle. Amsterdam 1812. Vgl. auch eine Abhandlung von Burja, *Sur les connaissances mathématiques d'Aristote* in den *Mémoires de l'académie de Berlin* für 1790 und 1791 und besonders Fr. Th Poselger: Ueber Aristoteles mechanische Probleme, eine in der Berliner Akademie am 9. April 1829 gelesene Abhandlung (Berlin 1831).
[2]) Vgl. z. B. Brandis, Geschichte der Entwicklungen der griechischen Philosophie und ihrer Nachwirkungen im römischen Reiche. Berlin 1862. I, 396.
[3]) Genau die gleiche Ansicht auch bei P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 5—9 (Paris 1905). Heiberg l. c. S. 31 flg. bezweifelt die Echtheit des aristotelischen Ursprunges aus sprachlichen Gründen, namentlich wegen des Vorkommens des Wortes *τετράπλευρον* für Viereck, welches erst Euklid eingeführt habe. Er gibt aber S. 32 selbst zu, daß diese S. 15 behauptete Einführung durch Euklid „nur eine Vermutung, wenn auch eine sehr wahrscheinliche" sei.
[4]) Diogenes Laertius VIII, 83.

gewährleistet. Es sollten Aporien aufgestellt werden, d. h. Fragen der Mechanik gesammelt werden, welche Widersprüche zu enthalten scheinen, und deren Behandlung erweisen sollte, wie solche scheinbare Widersprüche sich lösen lassen[1]).

Die sogenannte Mechanik des Aristoteles würde, sagen wir, seines Namens nicht unwürdig sein. Ein Schriftsteller des XVIII. S. hat zwar darüber so ziemlich das entgegengesetzte Urteil gefällt[2]), dürfte jedoch damit vermutlich allein stehen. Ein Werk, in welchem die Zusammensetzung rechtwinklig zueinander wirkender Kräfte gelehrt ist[3]), in welchem ausdrücklich die an dem Hebel anzubringenden sich im Gleichgewicht haltenden Lasten den Längen der Hebelarme umgekehrt proportional gefunden werden[4]), in welchem als Grund dafür der größere Kreisbogen genannt ist, durch welchen die vom Stützpunkte des Hebels weiter entfernte Last sich bewegen muß: ein solches Werk ist wahrlich keines antiken Schriftstellers unwürdig, mögen auch einige Fragen in demselben nicht richtig beantwortet sein.

Zu diesen nicht richtig beantworteten Fragen gehört eine, welche schon überhaupt gestellt zu haben einen feinen mathematischen Geist verrät. Es seien (Fig. 42) zwei konzentrische Kreise $\varepsilon\beta\eta$ und $\delta\gamma\zeta$. Rollt der kleinere Kreis allein auf der Geraden $\eta\theta$, so wird $\eta\varkappa$ seinem Quadranten gleich; mithin, wenn β nach $\varkappa$ gekommen ist, wird die $\beta\alpha$ senkrecht auf $\eta\theta$ stehen. Rollt der größere Kreis allein auf der Geraden $\zeta\iota$, so wird $\zeta\iota$ seinem Quadranten gleich; mithin steht die $\gamma\alpha$ senkrecht auf $\zeta\iota$, wenn γ nach ι gekommen ist. Nun seien die beiden konzentrischen Kreise zu einem Rade verbunden. Jetzt stellen $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ eine starre Linie vor, die nicht getrennt werden kann, und es muß folglich

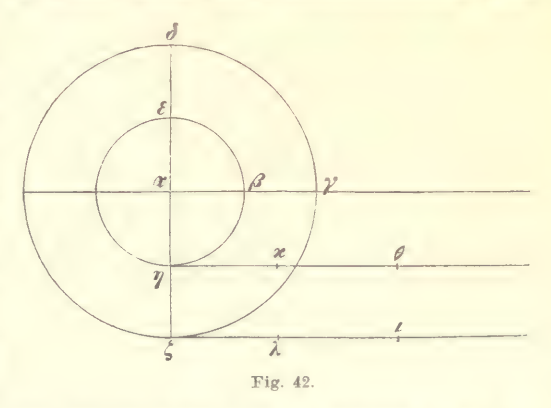


Fig. 42.

[1]) Poselger l. c. S. 6. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* (II. édition) I, 187. [3]) Der Satz von dem Parallelogramm der Kräfte in der hier angegebenen Beschränkung blieb bekannt. So führt ihn beispielsweise Proklus (ed. Friedlein pag. 106 lin. 3—6) an. Vgl. Majer, Programm des Stuttgarter Gymnasiums für 1880—81, S. 13 und 24. [4]) *Quaest. mechan.* cap. IV, pag. 29. Burja hat l. c. diese Stelle mißverstanden, wie van Cappelle in seinen Anmerkungen S. 183 mit Recht bemerkte.

beim Rollen des inneren Radkreises längs $\eta\theta$ schon, wenn β in $\varkappa$ angekommen ist, γ in λ angekommen sein, also der Bogen $\zeta\gamma$ einmal der Strecke $\zeta\iota$, einmal der Strecke $\zeta\lambda$ gleich sein. Dieses Paradoxon wußte allerdings Aristoteles nicht zu lösen, und er hatte darin Nachfolger bis in das XVII. S. n. Chr. Erst rationelle Zerlegung der zusammengesetzten Kreisbewegung konnte zur richtigen Erkenntnis führen, daß in der Tat das Wälzen einer Kurve auf einer Geraden nicht immer die Gleichheit des krummlinigen und des geradlinigen Stückes zur Folge haben müsse, die nacheinander zur Deckung kommen[1]).

Bei Aristoteles sind wir auch wohl berechtigt Kenntnisse jenes Kapitels der allgemeinen Wissenschaftslehre vorauszusetzen, von welchem wir bei Xenokrates die ersten uns zur Kenntnis gekommenen Spuren bemerkten. Wir meinen die Kombinatorik. Aristoteles hat die Dialektik der Sophisten zur eigentlichen Syllogistik ausgebildet, und die verschiedenen Arten von Schlüssen, welche er in Auseinandersetzung dieser Lehre unterscheidet, erschöpfen in der Tat sämtliche Möglichkeiten. Es ist somit hier tatsächlich eine Aufzählung der Kombinationen gewisser Elemente in ihrer Vollständigkeit gegeben. Später zählte man auch die Gebilde logisch möglicher Begriffszusammenstellungen. Der Stoiker Chrysippus, welcher 282—209 lebte, hat die Zahl der aus 10 Grundannahmen möglichen Vereinigungen auf über eine Million veranschlagt. Allerdings setzt Plutarch, der uns die Sache erzählt, hinzu, die Arithmetiker seien mit Chrysippus keineswegs einverstanden, und Hipparch, der zu den Arithmetikern gehöre, habe gezeigt, daß, wenn man die Axiome bejahend ausspreche 103049, wenn man sie verneinend benutze 310952 Verbindungen entstehen[2]). Wir stehen der Bedeutung dieser Zahlen gerade so verständnislos gegenüber, wie früher bei Xenokrates seiner Zahl möglicher Silben. Wir ziehen aber aus den Zahlen selbst die gleiche Folgerung, daß den Griechen kombinatorische Fragen nicht vollständig fremdartig waren, und daß sie auf irgend eine Weise Formeln, mit größter Wahrscheinlichkeit falsche Formeln, zu deren Beantwortung benutzten.

Bei einem Schüler des Aristoteles begegnen wir gleichfalls praktischer Kombinatorik in der Gestalt einer vollständigen Aufzählung aller Möglichkeiten der Vereinigung gewisser Elemente. Wir denken

[1]) Über das Rad des Aristoteles vgl. auch Heron, Mechanik I, 7 (Opera II, 1 S. 16 ed. Nix). Ferner s. Klügel, Mathematisches Wörterbuch (fortgesetzt von Mollweide) Bd. IV, S. 171—174 unter: Rad, aristotelisches.
[2]) Plutarchus, *Quaestion. Convivial.* VIII, 9, 11 und 12 sowie auch *De Stoicorum repugnantiis* XXIX, 3 und 5.

dabei an Aristoxenus von Tarent, den Erfinder der aus Längen und Kürzen zusammengesetzten Versfüße.

Ein anderer Schüler des Aristoteles, Dikaearchus, hat sich möglicherweise schon der Dioptra bedient, einer feldmesserischen Vorrichtung, von welcher im 18. Kapitel ausführlich die Rede sein wird. Die Worte des Theon von Smyrna[1]): „Der Höhenunterschied der höchsten Berge von den tiefsten Orten der Erde beträgt nach der Senkrechten 10 Stadien, wie Eratosthenes und Dikaearch gefunden zu haben behaupten, und so bedeutende Größen werden durch Werkzeuge untersucht mit Hilfe von Diopteru, welche aus den Abständen die Größen messen“[2]), lassen wenigstens die Deutung zu, als ob die Bemerkung der zweiten Hälfte des Satzes auch schon auf die Zeit der genannten Geodäten, und nicht erst auf die Gegenwart des Schriftstellers sich bezöge.

Unter den anderen ältesten Peripatetikern nennen wir Theophrastus von Lesbos und Eudemus von Rhodos, deren ersteren Aristoteles selbst zu seinem Nachfolger ernannte. Beide haben, wie im 4. Kapitel erzählt worden ist, historisch-mathematische Schriften angefertigt, deren Inhalt wir jetzt annähernd schätzen können, da er gerade so weit reichen konnte, als wir in unseren bisherigen auf Griechenland bezüglichen Auseinandersetzungen erörtert haben. Mit der Schätzung dieses Inhaltes steigert sich das Bedauern über den Verlust jener umfangreichen Schriften. Theophrast und Eudemus waren für Jahrhunderte die Letzten, welche der Geschichte der Mathematik eigene Werke zuwandten, oder es haben doch ihre Nachfolger, wenn sie welche hatten, nicht gewagt weiter als sie in der Zeit des Berichteten hinabzusteigen. Das liegt in den Worten, die uns (S. 248) den Schluß des Mathematikerverzeichnisses bildeten: „Die nun die Geschichte geschrieben haben, führten bis zu diesem Punkte die Entwicklung der Wissenschaft fort.“ Mag dieser Ausspruch dem Verfasser jenes Verzeichnisses angehören, mag er ein Zusatz des Proklus sein, jedenfalls nahm dieser ihn unverändert auf und bezeugt damit die Tatsache selbst. Zugleich hat man aber in jenen Worten einen Beweggrund gefunden das Mathematikerverzeichnis als von Eudemus herrührend anzusehen, eine Meinung, zu welcher auch wir uns bekennen.

---

[1]) Theo Smyrnaeus (ed. Hiller, Leipzig 1879) pag. 124—25. Ob die Zahlenangabe „10 Stadien“, welche auf einer Einfügung von Hiller beruht, richtig ist oder nicht, ist für unsere Verwendung des Satzes unerheblich. [2]) καὶ ὀργανικῶς δὲ ταῖς τὰ ἐξ ἀποστημάτων μεγέθη μετρούσαις διόπτραις τηλικαῦτα θεωρεῖται. Auf diese Stelle und die in ihr vielleicht enthaltene frühe Datierung der Dioptra hat P. Tannery aufmerksam gemacht.

12. Kapitel.

Alexandria. Die Elemente des Euklid.

Athen sank von seiner Höhe. Der junge makedonische Fürst, der mit 18 Jahren in der Schlacht bei Chäronea den ersten Sieg erfocht, der mit 33 Jahren aus dem Leben schied den Beinamen des Großen hinterlassend, ein Bezwinger der damals bekannten Welt, hatte auch die Wissenschaft genötigt seinen Befehlen zu gehorchen. In der eigenen Heimat ihr einen Wohnsitz anzuweisen, daran dachte er nicht. Er mochte empfinden, daß die rauhe Natur des Landes und der Menschen nicht dazu angetan waren einen Bildungsmittelpunkt abzugeben. Dafür erwuchs ein solcher in der jungen Stadt, welche Alexander auf der Landzunge gründete, die zwischen dem Mittelmeere und dem mareotischen See bis zum Nilkanal von Kanopus sich erstreckt. Als große ägyptische Hauptstadt sollte sie den Besitz des eben unterworfenen Ägyptens sichern. In Form eines ausgebreiteten makedonischen Reitermantels war der Plan der Stadt entworfen. Den Namen führte sie nach dem, dessen Machtgebot sie entstehen ließ, Alexandria[1]).

Hauptstadt Ägyptens hatte Alexandria alle Anlage das zu werden, als was Alexander selbst sie vielleicht dachte, die Hauptstadt einer Weltmonarchie von kulturbringendem Charakter, einer Monarchie, welche die verschiedenst gearteten Völker einander näher bringen, ihre Gegensätze ausgleichen, ihnen allen den Schliff griechischer Feinheit gemeinsam machen sollte. Wir brauchen gewiß nicht auseinanderzusetzen, wieso gerade in Ägypten der geeignete Ort für die Anlegung einer solchen Hauptstadt sich fand. Haben wir doch in der Wissenschaft, auf deren Geschichte es uns allein ankommt, Ägypten als ein Mutterland, wenn nicht als das Mutterland, erkennen dürfen. Gereift und gekräftigt kehrte die Mathematik nach dem Lande ihres Entstehens zurück, und es war, als ob die Sage von dem Riesen, der die Muttererde berührend aus ihre neue Stärke zieht, zur Wahrheit werden sollte. Hier auf ägyptischem Boden erprobten sich Kräfte, wie sie bisher der Mathematik noch nicht zugewandt worden waren.

---

[1]) Über die alexandrinische Entwicklung vgl. die Abhandlung „Alexandriner" von R. Volkmann in Paulys Realencyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft (II. Auflage) mit reichen Quellenangaben alter und neuer Literatur, und besonders Fr. Susemihl, Geschichte der griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit (Leipzig 1891—92).

Eine in der Weltgeschichte mehr als einmal sich wiederholende Erfahrung lehrt, daß es in der Wissenschaft eine Mode gibt. Sie pflegt nicht ohne Grund aufzutreten, sie entstammt nicht gerade den Launen eines unberechenbaren Geschmackes, aber sie ist vorhanden, und ihrem Gesetze beugen sich die hervorragendsten Geister in dem Sinne, daß sie vorzugsweise der Modewissenschaft sich widmen. So gibt es Zeiten, in welchen theologische Geisteskämpfe die großen Männer beschäftigen, und Zeiten, in welchen der Kriegsruhm nur die Wissenschaft des Krieges des Denkers würdig macht; Zeiten, in welchen vorzugsweise die Rechtsbildung gelingt, Zeiten, die zur Entwicklung des Schönen dem Gedanken und der Ausführung nach führen. Das war in dem Athen des Perikles der Fall gewesen, das hatte in der Schule Platons nachgelebt. Aristoteles und die Peripatetiker verbreiteten ein vielfach gediegeneres, vielfach nüchterneres Wissen, und Nüchternheit um nicht zu sagen Trockenheit ist der Stempel, welcher der ganzen alexandrinischen Literaturperiode aufgedrückt ist, einer Zeit, welche man etwa von den Jahrzehnten nach dem Tode Alexanders des Großen bis kurz vor die Einverleibung Alexandrias in das römische Reich, etwa von 300 bis 50 v. Chr., durch volle 250 Jahre zu rechnen hat.

Ägypten war unter den Feldherren, die das Erbe des verstorbenen Weltbeherrschers untereinander teilten, dem geistig hervorragendsten, Ptolemäus, Sohn des Lagus, zugefallen, und er, der als Ptolemäus Soter 305 den Königstitel annahm, wie seine beiden Nachfolger Ptolemäus Philadelphus (285—247) und Ptolemäus Euergetes (247—222), welcher letztere durch die adulitische Inschrift wie durch das mit ihr in bestimmten Einzelheiten übereinstimmende Edikt von Kanopus (S. 78) als mächtiger Eroberer ebenso wie als Freund der Wissenschaften bezeugt wird, begründeten das Ptolemäerreich. Unter ihnen wurde Alexandria vollends, wozu die Anlage schon gegeben war, zum Sitze der exakten Wissenschaften und der Grammatik, zum Aufbewahrungsorte der großen alexandrinischen Bibliothek, zum Mittelpunkte, wohin alles strömte, wer nur in den Wissenschaften lernend oder lehrend, sich oder andere fördern wollte. Fand er doch dazu in Alexandria das sogenannte Museum, einen Verein gelehrter Männer, denen aus königlichen Mitteln ein ehrenvoller Unterhalt gewährt wurde. Die drei ersten Ptolemäer gaben, wie gesagt, den Anstoß zu dieser wissenschaftlichen Entwicklung. Ptolemäus Euergetes insbesondere vermehrte aufs bedeutsamste die Bibliothek, zu welcher er den ganzen Bücherschatz beifügte, der einst Aristoteles und Theophrastus angehört hatte. Aber auch die späteren Ptolemäer ließen nicht von der Unterstützung der Gelehrten, welche in ihrem Hause

ebenso herkömmlich geworden war, wie Unzucht und Verwandtenmord.

Der erste der großen Mathematiker, welche uns in dem mit der Regierung des Ptolemäus Soter anhebenden Jahrhunderte begegnen, und welche sämtlich in Alexandria blühten oder zu Alexandria in Beziehung traten, war Euklid[1]). Proklus erzählt an das Mathematikerverzeichnis anknüpfend sein Auftreten in der Wissenschaft:

„Nicht viel jünger aber als diese ist Euklides, der die Elemente zusammenstellte, vieles von Eudoxus Herrührende zu einem Ganzen ordnete und vieles von Theaetet Begonnene zu Ende führte, überdies das von den Vorgängern nur leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise stützte. Es lebte aber dieser Mann unter dem ersten Ptolemäer. Archimed nämlich gedenkt beiläufig auch in seinem ersten Buche des Euklid, und man sagt ferner, Ptolemäus habe ihn einmal gefragt, ob es nicht bei geometrischen Dingen einen abgekürzteren Weg als durch die Elemente gebe; er aber erteilte den Bescheid, zur Geometrie hin gebe es keinen geraden Pfad für Könige. Er ist somit jünger als die Schüler Platons, älter als Eratosthenes und Archimed; denn diese sind Zeitgenossen, wie Eratosthenes angibt. Seiner wissenschaftlichen Stellung nach ist er Platoniker und dieser Philosophie angehörig, daher er denn auch als Endziel seines ganzen Elementarwerkes die Konstruktion der sogenannten platonischen Körper hinstellte[2]).

Viel mehr, als in diesen Sätzen ausgesprochen ist, wissen wir nicht über die Lebensumstände des Schriftstellers, dessen Elemente unmittelbar oder mittelbar die Grundlage der gesamten Geometrie bis auf unsere Zeit geworden sind. Nicht einmal das Vaterland des Euklid steht fest, wenn wir nicht der Angabe eines syrischen Berichterstatters, des Abulpharagius, unbedingten Glauben schenken wollten, welcher ihn einen Tyrer nennt; das wird aber niemand mehr einfallen, seit nachgewiesen worden ist[3]), daß jene ganze Nachricht aus einer mißverstandenen Stelle einer Schrift des Hypsikles stammt,

---

[1]) Über Euklid vgl. David Gregorys Vorrede zu seiner großen Euklidausgabe (Oxford 1702). Fabricius, *Bibliotheca Graeca edit. Harless* (Hamburg 1795) IV, 44—82. Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis Arabicis* (Halle 1823). Der von Lacroix verfaßte Artikel *Euclide* in der *Biographie universelle.* M. Cantor, Euklid und sein Jahrhundert im Supplementheft zu Bd. XII der Zeitschr. Math. Phys. (Leipzig 1867). Hankel 381—404. Heiberg, Literargeschichtliche Studien über Euklid (Leipzig 1882). Zur Abkürzung zitieren wir die letztgenannte Schrift künftig als Heiberg, Euklidstudien. Die letzte Ausgabe in sieben Bänden mit lateinischer Übersetzung von J. L. Heiberg und H. Menge (Leipzig 1883—1896). [2]) Proklus (ed. Friedlein) 68. [3]) Heiberg, Euklidstudien S. 4.

welche, wie im 17. Kapitel auseinandergesetzt werden wird, irrigerweise Euklid zugewiesen wurde. Andere wollen Euklid in Ägypten geboren sein lassen. Noch andere, aber sicherlich mit Unrecht, verwechseln ihn mit Euklides von Megara, dem Zeitgenossen Platons, welcher rund 100 Jahre früher lebte. Auffallend genug findet sich dieser Irrtum schon bei einem Schriftsteller aus dem Zeitalter des Tiberius, bei Valerius Maximus. Auch Geburts- und Todesjahr des Euklid sind durchaus unbekannt, und nur die Blütezeit[1]) um 300 etwa wird durch den ersten Ptolemäer, unter welchen sie, wie wir durch Proklus erfahren haben, gefallen sein soll, bezeugt. Von seinem Charakter hat sich bei Pappus eine höchst liebenswürdige Schilderung erhalten. Er sei sanft und bescheiden, voll Wohlwollen gegen jeden, der die Mathematik irgend zu fördern imstande war, gewesen und habe absichtlich an früheren Leistungen so wenig als möglich geändert[2]). Pappus gibt auch ausdrücklich an, daß Euklid in Alexandria gelebt habe.

Schriften des Euklid sind uns mehrfach erhalten. Das Hauptwerk bilden die Elemente, *στοιχεῖα*. Wir müssen annehmen, daß es an Bedeutung allen früheren Elementenwerken weit überlegen war. So schildert es uns Proklus und die Bestätigung des Urteils liegt in der Tatsache, daß alle Bücher seiner Vorgänger in dem Kampfe um das Dasein untergegangen sind, daß von Elementen, die durch einen Griechen nach Euklid verfaßt worden wären, nirgends ein Wort gesagt ist, daß vielmehr er ausschließlich gemeint zu sein scheint, wo griechische Schriftsteller später von dem Elementenschreiber schlechtweg reden, ohne einen Namen zu nennen[3]).

Die in 13 Bücher gegliederten Elemente des Euklid zerfallen in vier Hauptteile. Erstens behandeln sie Raumgebilde, welche auf einer Ebene gezeichnet sind und das Verhältnis ihrer gegenseitigen Größe, die teils gleich, teils ungleich ist. Im ersteren Falle genügt der Nachweis der Identität, im letzteren verlangt man etwas mehr: man will die Ungleichheit messen. Dazu aber dient die Zahl, das Maß einer jeden Größe, und folglich wird es Bedürfnis, Untersuchungen über die Zahl anzustellen. Damit ist der zweite Haupt-

[1]) *Γέγονε* heißt es bei Proklus und dieses bedeutet hier sicherlich „blühte" und nicht „ward geboren". Vgl. E. Rohde „*Γέγονε* in den Biographica des Suidas" Rheinisches Museum für Philologie XXXIII neuer Folge, 161—220 (1878). [2]) Pappus VII, *praefatio* (ed. Hultsch) 676 flgg. [3]) So Archimed, *De sphaera et cylindro* I, 6 (ed. Heiberg I, 24) wahrscheinlich mit Beziehung auf Euklid XII, 2. Diese Stelle dürfte Proklus im Auge gehabt haben, als er zum Beweis, daß Archimed später als Euklid lebte, sagte, daß dieser jenen in seinem ersten Buche erwähne.

teil des Werkes erfüllt. Die vollständig bestimmte Zahl reicht indessen nicht aus, um alle Größen zu messen, welche der geometrischen Betrachtung unterworfen werden. Es gibt vielmehr Raumgebilde, seien es nun Längen oder Flächen, welche mit der Größeneinheit derselben Art kein genau angebbares gemeinsames Maß besitzen, ohne daß sie deshalb aufhören selbst Größen zu sein. Man nennt sie nur im Gegensatze zu dem genau Meßbaren mit der Einheit inkommensurabel. Die Betrachtung solcher Inkommensurabilitäten ist somit unerläßlich, sie bildet den dritten Hauptteil des Ganzen. Endlich im vierten Teile verläßt die Betrachtung das bisher eingehaltene Feld der Zeichnungsebene, die Verhältnisse des allgemeinen Raumes werden untersucht, die gegenseitige Lage und Größe von Flächen und Körpern werden besprochen. Das ist freilich nur der ganz allgemeine Inhalt des Werkes[1]), es dürfte sich empfehlen näher auf die Einzelheiten desselben einzugehen.

Im I. Buche handelt Euklid von den Grundbestandteilen geradliniger Figuren in der Ebene, von geraden Linien, welche sich entweder schneiden und mit einer dritten Linie ein Dreieck bilden, über dessen Bestimmtheit durch gewisse Stücke gesprochen wird — Kongruenz der Dreiecke — oder welche sich nicht treffen, so weit man sie verlängert — Parallellinien. Der 32. Satz beweist mittels Ziehung einer Parallellinie durch einen Dreieckseckpunkt zu der ihm gegenüberliegenden Dreiecksseite die Gleichheit des Außenwinkels eines Dreiecks mit der Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel und läßt so die Summe der Dreieckswinkel erkennen. Von der schon Aristoteles (S. 252) bekannten Weiterführung des Satzes ist keine Rede. Um mit Hilfe der Parallellinien eine Figur zu erzielen bedarf es zweier schneidenden Geraden, und so entsteht das Viereck, insbesondere das Parallelogramm, sofern die Schneidenden selbst unter sich parallel sind. Die Eigenschaften der Parallelogramme vereinigt mit denen der Dreiecke führen zum Begriffe von Figuren, welche aus an und für sich identischen Teilen bestehen, aber nicht in identischer Weise zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können, Gleichheit von nichtkongruenten Flächenräumen. Bei solchen Flächen kommt es also darauf an die identischen Teile abzusondern, in anderer Weise zusammenzufügen, und so lehrt der 44. Satz an eine gegebene gerade Linie unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm anzulegen, *παραβάλλειν*, welches einem gegebenen Dreiecke gleich sei; es lehrt der 45. Satz die Verwandlung

[1]) In diesen klaren Umrissen hat ihn z. B. Gregory in der Vorrede seiner Euklidausgabe entworfen.

jeder geradlinigen Figur in ein Parallelogramm von gegebenen Winkeln, bis im 47. und 48. Satze das Buch mit dem interessantesten Falle einer derartigen Umwandlung, mit dem pythagoräischen Lehrsatze und dessen Umkehrung abschließt.

Das II. Buch ist gewissermaßen ein Zusatz zu dem pythagoräischen Lehrsatze. In ihm wird die Herstellung eines Quadrates aus Quadraten und Rechtecken in den verschiedensten Kombinationen, teils als Summe, teils als Differenz gelehrt, bis auch wieder eine Zusammenfassung in der Aufgabe erfolgt, ein jeder gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu zeichnen. Zugleich läßt aber dieses Buch eine andere Auffassung zu, welche mit der doppelten Bedeutung des pythagoräischen Satzes in Verbindung steht. Wir wissen, daß dieser Satz, sofern er der Arithmetik angehört, besagt, daß es zwei Zahlen bestimmter Art gebe, welche als Summe eine dritte Zahl liefern von gleicher Art wie die beiden Posten. Als Zusatz zu dem pythagoräischen Lehrsatze in diesem Sinne lehrt das II. Buch die Rechnung insbesondere die Multiplikation mit additiv und subtraktiv zusammengesetzten Zahlen. In moderner Schreibweise heißen die 10 ersten Sätze alsdann:

$$1)\ ab + ac + ad + \cdots = a(b + c + d + \cdots) \qquad 2)\ ab + a(a - b) = a^2$$

$$3)\ ab = b(a - b) + b^2 \quad 4)\ a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b)$$

$$5)\ (a - b)b + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad 6)\ (a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$$

$$7)\ a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2 \quad 8)\ 4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

$$9)\ (a - b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$$

$$10)\ (a + b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + b\right)^2.$$

Als 11. Satz erscheint die Aufgabe des goldenen Schnittes. Ihre geometrische Beziehung zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks haben wir früher (S. 178) besprochen. Arithmetisch, oder vielmehr algebraisch aufgefaßt ist die Tragweite der Aufgabe „eine gegebene Strecke so zu schneiden, daß das aus dem Ganzen und einem der beiden Abschnitte gebildete Rechteck dem Quadrate des übrigen Abschnittes gleich sei“ dahin zu bestimmen, daß eine Auflösung der Gleichung $a(a - x) = x^2$, beziehungsweise der Gleichung $x^2 + ax = a^2$ gesucht wird[1]). Euklid findet $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$ und beweist die Richtigkeit dieser Auflösung durch folgende Schlüsse, bei deren Dar-

---

[1]) Diese Auffassung der Aufgabe II, 11 dürfte zuerst bei Arneth, Geschichte der reinen Mathematik (Stuttgart 1852) S. 102 zu finden sein.

stellung wir uns die einzige Änderung gestatten, daß wir die geometrisch klingenden Wörter in algebraische Buchstaben und Zeichen umsetzen. Wegen 6) ist $\left(a + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right) \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)$ $+ \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$ Man zieht auf beiden Seiten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ab, so bleibt $\left(a + \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right)$ $\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right) = a^2$, und zieht man weiter $a\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)$ auf beiden Seiten ab, so bleibt

$$\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)^2 = a\left(a - \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}\right)\right).$$

Das III. Buch wendet sich zu der einzigen krummen Linie, welche der Behandlung unterzogen wird, zum Kreise und zu den Sätzen, welche auf Berührung zweier Kreise, oder eines Kreises und einer Geraden sich beziehen. Alsdann folgen Betrachtungen über die Größe von Winkeln und mit denselben irgendwie in Verbindung stehenden Kreisabschnitten. Insbesondere der 16. Satz ist im III. oder IV. S. schon Gegenstand beiläufiger Erörterung, in späteren Zeiten Ausgangspunkt interessanter Streitigkeiten zwischen Gelehrten des XVI. und XVII. S. geworden und dadurch, aber auch durch seinen Inhalt bemerkenswert. Er behauptet nämlich, vielleicht in Anschluß an Demokrit (S. 192), der Winkel, welchen der Kreisumfang mit einer Berührungslinie bildet, sei kleiner als irgend ein geradliniger spitzer Winkel. Dieser gemischtlinige Winkel heißt bei Proklus[1]) hornförmiger Winkel, *γωνία κερατοειδής*, ein Name, der bei Euklid noch nicht vorkommt. In den Definitionen, welche den einzelnen Büchern vorausgeschickt werden, ist sogar von ihm keine ausdrückliche Rede. Im ersten Buche heißen die 8. und 9. Definition: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegeneinander, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen ohne in einer geraden Linie zu liegen. Sind die Linien, die den Winkel einschließen, gerade, so heißt derselbe ein geradliniger Winkel.“ Dazu ergänzt die 7. Definition des III. Buches: „Der Winkel des Abschnittes ist der vom Umkreise und der Grundlinie eingeschlossene Winkel“, aber den Winkel, wenn man von einem solchen reden darf, auf der konvexen Bogenseite gegen die Berührungslinie hin erläutert der Verfasser nicht. Endlich schließt das III. Buch mit den einzeln betrachteten Fällen zweier Geraden, die sich gegenseitig und

[1]) Proklus (edit. Friedlein) pag. 104 und öfters.

ebenso einen Kreis schneiden, und aus deren Abschnitten gewisse Rechtecke zusammengesetzt werden, welche Flächengleichheit besitzen. Mit Rücksicht darauf, daß im 16. Satze des III. Buches das erste Vorkommen des in späteren Zeiten so wichtigen Tangentenproblems sich zeigt, möge Euklids Betrachtung erörtert werden. Ist (Fig. 42a) EA senkrecht zu BA, so liegt kein Punkt derselben innerhalb des Kreises. Wäre es nicht so, so müßte diese zum Kreisdurchmesser senkrechte Gerade einen zweiten Punkt Γ mit der Kreislinie gemein haben und das Dreieck $A\Gamma\Delta$ gebildet werden können, in welchem $\Delta A = \Delta\Gamma$, also auch die Winkel bei A und Γ einander gleich sein müßten, während ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln unmöglich ist. Ferner ist eine Gerade AZ zwischen AE und dem Kreise unmöglich. Gäbe es eine solche und ΔH wäre senkrecht zu ihr, so müßte im Dreiecke $A\Delta H$ der Winkel bei H der größte sein und demnach $A\Delta = \Delta\Theta > \Delta H$ sein, was unmöglich ist. Ein spitzer Winkel $EAH < EA\Theta$ existiert also nicht.

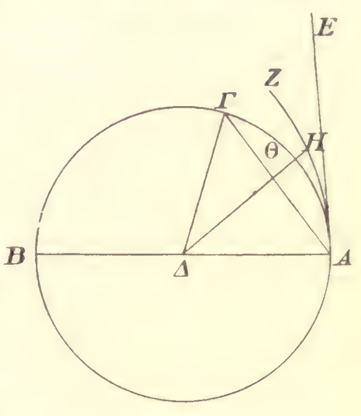


Fig. 42a.

Der Schüler wird nun im IV. Buche weiter mit den Figuren bekannt gemacht, welche entstehen, wenn mehr als zwei Gerade mit dem Kreise in Verbindung treten. Er lernt die dem Kreise ein- und umschriebenen Vielecke insbesondere die regelmäßigen Vielecke kennen. Unter diesen ist das Fünfeck, und dessen Konstruktion macht die erste Anwendung des im II. Buche, wie wir entwickelten, zu anderem Zwecke gelehrten goldenen Schnittes notwendig. Das IV. Buch kommt an den äußersten mit den bisherigen Mitteln erreichbaren Zielpunkten an. Die Gleichheit von Strecken und Flächenräumen ist nach allen Seiten erörtert.

Nun kommt die Ungleichheit in Betracht, insofern sie gemessen werden kann, und zwar ist diese Messung eine zweifache, eine geometrische und eine arithmetische. Beide beruhen auf der Lehre von den Proportionen, welche deshalb in dem V. Buche an dem Sinnbilde gerader Linien in vollständiger Ausführlichkeit dargelegt wird. Die im Verhältnisse aufgefaßten Größen sind als Linien gezeichnet, damit nicht hier schon der Schwierigkeit zu begegnen sei, eine Unterscheidung zu treffen, je nachdem Kommensurables oder Inkommensurables auftritt. Die Linien sind aber nur nebeneinander gezeichnet, ohne Figuren zu bilden, damit man einsehe, wie es sich

hier um allgemeineres handle als um die Vergleichung geometrischer Gebilde.

Erst das VI. Buch zieht die geometrischen Folgerungen aus dem im V. Buche Erlernten. Die Ähnlichkeit von Figuren geht aus der Proportionenlehre hervor und dient selbst wieder dazu Proportionen an geometrischen Figuren zur Anschauung zu bringen. Dabei kommt der Begriff des zusammengesetzten Verhältnisses vor, welcher vermutlich schon Philolaus (S. 161) bekannt war[1]) und welcher später (vgl. 20. Kapitel) von großer Bedeutung wurde. Im 23. Satze des VI. Buches ist von dem Verhältnisse je zweier gleichliegenden Seiten zweier Parallelogramme mit gleichen Winkeln die Rede, und die Flächen der Parallelogramme, heißt es weiter, stehen in einem Verhältnisse, welches aus dem der Seiten zusammengesetzt ist[2]). Auch Archimed, wir wollen das gleich hier erwähnen, hat mehrfach mit zusammengesetzten Verhältnissen zu tun, wenn auch in von der euklidischen Redewendung etwas abweichendem Wortlaute[3]). Einen Satz und zwei Aufgaben dieses Buches, welche die Bezeichnung als Satz 27., 28., 29. führen, müssen wir besonders erwähnen. Satz 27. enthält das erste Maximum, welches in der Geschichte der Mathematik nachgewiesen worden ist, und welches als Funktion geschrieben besagen würde: $x(a-x)$ erhalte seinen größten Wert durch $x = \frac{a}{2}\cdot$ In den beiden darauf folgenden Aufgaben hat man die Auflösungen der beiden Gleichungen $x(a-x) = b^2$ und $x(a+x) = b^2$ erkannt. Der 27. Satz erscheint bei der unmittelbaren Aufeinanderfolge von 27. und 28. unzweifelhaft als der Diorismus des letzteren. Es darf eben b^2 nicht größer sein als $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, wenn die Aufgabe lösbar sein soll[4]). Geometrisch ausgesprochen haben die beiden Aufgaben in Satz 28. und 29. gleichfalls einen, wie spätere Erörterungen uns lehren sollen, hochwichtigen Inhalt. Es handelt sich um die Anlegung eines einem gegebenen Parallelogramme gleichwinkligen Parallelogramms an eine gerade Linie, welches um so viel größer (kleiner) an Fläche als eine gleichfalls gegebene Figur sei, daß wenn so viel abgeschnitten (zugesetzt) wird, als nötig ist um Flächengleichheit zu

---

[1]) Newbold in dem Archiv für Geschichte der Philosophie Bd. XIX Heft 2 (1905). [2]) *λόγος συγκείμενος ἐκ (τῶν) τῶν πλευρῶν (λόγων)*. *Euclidis Elementa* (ed. Heiberg, Leipzig 1883—88) II, 146 lin. 14. [3]) *ὁ λόγος τῆς Α πρὸς τὴν Β συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.* Archimedes (ed. Heiberg) I, 212 lin. 19—21 und häufiger. [4]) Diese Auffassung zuerst vertreten bei Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878, S. 926—931.

erzielen, dieses Stück selbst dem erstgegebenen Parallelogramme ähnlich werde. Euklid drückt diese Forderung durch die Worte aus, der Flächeninhalt Γ solle an der Linie AB etwas übrig lassen, ἐλλείπει, oder darüber hinausfallen, ὑπερβάλλει.

Das VII., VIII. und IX. Buch beschäftigen sich mit der Lehre von den Zahlen. Der nächste Zweck ist das arithmetische Messen der Ungleichheit, also diejenigen Folgerungen aus der Proportionenlehre zu ziehen, welche an Zahlengrößen hervortreten. Allein damit verbindet Euklid, vielleicht weil nirgend eine passendere Gelegenheit sich finden wird, eine Zusammenstellung aller ihm bekannten Eigenschaften der ganzen Zahlen. Rechnungsoperationen mit denselben hat er, wie wir uns erinnern, schon im II. Buche ausführen lassen. Das VII. Buch beginnt mit Definitionen, unter welchen wir die der Primzahl, πρῶτος ἀριθμός, und der zusammengesetzten Zahl, σύνθετος ἀριθμός, hervorheben wollen. Daran knüpft sich die Unterscheidung von teilerfremden Zahlen, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, und von solchen, welche ein gemeinsames Maß besitzen, σύνθετοι πρὸς ἀλλήλους, sowie die Auffindung dieses letzteren. Euklid findet dasselbe vollständig in der heute noch üblichen Weise durch fortgesetzte Teilung des letztmaligen Divisors durch den erhaltenen Rest, mithin, wenn wir es nicht scheuen auch moderne Namen zu gebrauchen, wo moderne Verfahren angewandt sind, durch einen Kettenbruchalgorithmus. Dann ist von Zahlen die Rede, welche dieselben Teile anderer Zahlen sind, wie wieder andere von vierten, und damit ist also die Zahlenproportion eingeführt. Abgesehen von den vielen neuen Proportionen, welche in der mannigfaltigsten Weise aus den erstgegebenen abgeleitet werden, führt der Satz von der Gleichheit der Produkte der inneren und der äußeren Glieder einer Proportion auf die Teilbarkeit eines solchen Produktes durch einen der Faktoren des anderen Produktes und zur Teilbarkeit überhaupt. Der Rückweg zur Untersuchung teilerfremder Zahlen ist damit gewonnen, und den Schluß des Buches bildet die Auffindung des kleinsten gemeinsamen Dividuums gegebener Zahlen.

Das VIII. Buch setzt die Lehre von den Proportionen fort, indem es zu Gliedern der Proportion nur solche Zahlen wählt, welche selbst Produkte sind, und zwar zum Teil Produkte aus gleichen Faktoren. An die früheren geometrischen Lehren erinnern eben noch die Benennungen, welche in diesem Buche zur Anwendung gelangen: Flächenzahlen, ähnliche Flächenzahlen, Quadratzahlen, Körperzahlen, Kubikzahlen, lauter Wörter, deren Erklärung wir in früheren Kapiteln zu geben Gelegenheit hatten. Vieleckszahlen anderer Art als die Quadratzahlen kommen bei Euklid nicht vor.

Das IX. Buch setzt gleichfalls denselben Gegenstand fort. Im 12. Satze findet sich, vermutlich zum ersten Male in der mathematischen Literatur, eine besondere Abart der apagogischen Beweisführung (S. 221). Aus der Annahme der Unwahrheit einer Tatsache wird ihre Wahrheit gefolgert. Der Satz selbst spricht aus, daß wenn 1, A, B, Γ, Δ eine geometrische Reihe bilden und eine Primzahl E in Δ enthalten ist, die gleiche Primzahl auch in A enthalten sein muß. Ist E nicht in A enthalten, so muß, weil E Primzahl ist, E gegen A teilerfremd sein. Nun ist Δ durch E teilbar, etwa $\Delta = E \cdot Z$, andererseits $\Delta = A \cdot \Gamma$, mithin $E \cdot Z = A \cdot \Gamma$ und $E : A = \Gamma : Z$. Danach muß Z ein Vielfaches von A und Γ ein Vielfaches von E sein, etwa $\Gamma = E \cdot H$. Daneben ist $\Gamma = A \cdot B$, also $E \cdot H = A \cdot B$ und $E : A = B : H$. Daraus folgt H als Vielfaches von A, B als Vielfaches von E, etwa $B = E \cdot \Theta$. Daneben ist $B = A \cdot A$, also $E\Theta = A \cdot A$ und $E : A = A : \Theta$. Daraus ergibt sich Θ als Vielfaches von A und A als Vielfaches von E. Etwas später geht das IX. Buch dadurch zu anderweitigen Betrachtungen über, daß es besondere Rücksicht auf etwa in einer Proportion vorkommende Primzahlen nimmt. Bei dieser Gelegenheit wird nämlich ziemlich außer allem Zusammenhange als 20. Satz bewiesen, daß die Menge der Primzahlen größer sei als jede gegebene Menge derselben, wofür wir kürzer sagen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Noch weniger Zusammenhang ist von dem 20. Satze zu den ihm nachfolgenden Sätzen wahrnehmbar. Mancherlei Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen, von deren Summen und deren Produkten werden erörtert, bis der 35. Satz die Summierung der geometrischen Reihe lehrt und auf diejenige geometrische Reihe angewendet, welche von der Einheit beginnend durch Verdoppelung der Glieder weiterschreitet, endlich im 36. Satze wieder zu den Primzahlen zurückführt und so das Bewußtsein erweckt, wie Euklid bei scheinbarem Abspringen von seinem Thema es immer unverrückt im Auge behält. Jener 36. Satz gibt nämlich an, die Summe der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 \cdots$ sei mitunter eine Primzahl. Dieses tritt z. B. ein, wenn die Reihe aus 2, aus 3, aus 5 Gliedern besteht. Werde diese die Summe darstellende Primzahl mit dem letzten in Betracht gezogenen Gliede der Reihe vervielfacht, so entstehe eine vollkommene Zahl (eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Teiler gleich ist).

Im X. Buche ist der dritte Hauptteil des euklidischen Werkes behandelt, die Lehre von den Inkommensurablen, und auf die große Bedeutung, die dem Umstande beizumessen ist, daß diesem Gegenstande ein ganzes Buch gewidmet ist, kommen wir im folgenden Kapitel zurück. An der Spitze des Buches steht der Satz,

welcher bei Euklid die Grundlage der Exhaustionsmethode bildet, der Satz: „Sind zwei ungleiche Größen gegeben, und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Größe." Dieser Satz, wesentlich verschieden von dem, dessen sich (S. 242) Eudoxus und vielleicht schon Hippokrates zu ähnlichen Zwecken bediente, ist in dieser Form vielleicht Euklids Eigentum, vielleicht auch dessen, von welchem das X. Buch der Hauptsache nach herrührt. Fürs erste freilich zieht Euklid keine Folgerung aus ihm, nicht einmal die, welche man vor allen Dingen erwarten sollte, daß wenn zwei Größen inkommensurabel sind, man immer ein der ersten Größe Kommensurables bilden könne, welches von der zweiten Größe sich um beliebig Weniges unterscheide. Statt dessen sind zwar geistvolle aber doch nach unseren Begriffen maßlos weitläufige Untersuchungen[1]) darüber angestellt, unter welchen Voraussetzungen Größen sich wie gegebene Zahlen verhalten, also kommensurabel sind, und unter welchen Voraussetzungen keine solche Zahlen sich finden lassen, die Größen also inkommensurabel sind. Ein besonderes Gewicht legt Euklid auf die Irrationalzahlen, deren er vielfältig unterschiedene Formen aufzählt. Dabei ist zu beachten, daß das Inkommensurable, *ἀσύμμετρον*, des Euklid sich mit unserem Begriffe der Irrationalzahl deckt, während sein Rationales, *ῥητὸν*, und Irrationales, *ἄλογον*, von dem, was wir unter diesen Wörtern verstehen, abweicht. Rational ist ihm das an sich und das in der Potenz Meßbare, d. h. diejenigen Linien sind rational, welche selbst durch die Längeneinheit oder deren Quadratfläche durch die Flächeneinheit genau ausmeßbar sind, also a sowohl als $\sqrt{a}$, während das Wort irrational für jeglichen mit Wurzelgrößen behafteten Ausdruck außer der einfachen Quadratwurzel $\sqrt{a}$ Anwendung findet. Demgemäß ist das Produkt a mal $\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}$ mal $\sqrt{b}$ bei Euklid irrational, weil jedes dieser beiden Produkte als Produkt schon eine Fläche bedeutet, also nicht mehr „in der Potenz meßbar" sein kann. Irrational ist um so mehr die Linie,

---

[1]) Vgl. Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 165—182. Diesem Werke entnehmen wir auch die Übersetzungen der Namen der verschiedenen Formen von Irrationalzahlen. Wie schwer auch geistreiche Mathematiker sich oft in diesem X. Buche zurecht zu finden vermochten, dafür dient als Beispiel ein durch A. Favaro (Galileo Galilei e lo studio di Padova II, 267) veröffentlichter Brief von Benedetto Castelli. Unter dem 1. April 1607 schrieb dieser an Galilei, er sei bei dem 40. Satze des X. Buches stecken geblieben *suffocato dalla moltitudine de vocaboli, profondità delle cose e difficoltà di demonstrationi.*

welche $a \cdot \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ als Quadrat besitzt, d. h. $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt[4]{ab}$ und diese Gattung von Irrationalitäten heißt μέση, die Mediallinie. Addition und Subtraktion zweier Längen, von denen mindestens eine inkommensurabel ist, gibt die Irrationalität von zwei Benennungen, ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, und die durch Abschnitt Entstandene, ἀποτομή, d. h. die Binomialen $a + \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ und die Apotomen $a - \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} - b$ oder $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Wir würden allzu weitschweifig werden müssen, wenn wir alle Verbindungen zwischen diesen Medialen, Binomialen und Apotomen erörtern wollten, welche in dem X. Buche vorkommen. Statt dessen nur die Bemerkung, daß wir hier wieder ein Beispiel praktischer Kombinatorik vor uns haben, indem alle Verschiedenheiten berücksichtigt sind, die überhaupt eintreten können. Eines freilich ist vorausgesetzt, daß nämlich nur Wiederholungen von Quadratwurzelausziehungen vorkommen, daß also sämtliche im X. Buche behandelten Irrationalitäten der Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal unterworfen sind, und solche Irrationalitäten sollen uns von nun an euklidische Irrationalitäten heißen, wie sie tatsächlich in späterer Zeit genannt worden sind. Wir heben zwei Sätze des X. Buches besonders hervor, das erste Lemma, welches auf Satz 29. folgt, und welches zwei Quadratzahlen bilden lehrt, deren Summe wieder Quadratzahl ist, und den letzten Satz des Buches von der gegenseitigen Inkommensurabilität der Seite und der Diagonale eines Quadrates. Letzteren Satz haben wir nebst seinem mutmaßlich altpythagoräischen Beweise daraus, daß sonst Gerades und Ungerades einander gleich wären, schon (S. 182) besprochen. Die Herstellung rationaler rechtwinkliger Dreiecke ist uns auch kein neuer Gegenstand. Methoden des Pythagoras (S. 186) und des Platon (S. 224) sind uns bekannt geworden, jene von ungeraden, diese von geraden Zahlen ausgehend. War nämlich aus $a^2 = b^2 + c^2$ die Folgerung $c^2 = (a + b)(a - b)$ gezogen, und daraus die weitere Folgerung, daß $a + b$ und $a - b$ ähnliche Flächenzahlen sein müssen, so nahmen wir an, daß jene Männer die besonders einfachen Versuche angestellt hätten, einmal $a - b = 1$ und einmal $a - b = 2$ zu setzen. Das Verfahren des Euklid kann als Bestätigung unserer Vermutungen gelten. Nach der besonderen Annahme konnte und mußte man dazu übergehen für $a + b$ und $a - b$ irgend welche ähnliche Flächenzahlen zu wählen, und dieses tat Euklid. Er läßt ähnliche Flächenzahlen, d. h. solche, welche proportionierte Seiten haben (Definition 21. des VII. Buches), und deren Produkt eine Quadratzahl geben muß (Satz 1. des IX. Buches), bilden, etwa $\alpha \cdot \beta^2$ und $\alpha \cdot \gamma^2$, und verlangt dabei, daß beide gerade oder beide ungerade seien, damit ihr Unterschied halbierbar ausfalle. Unter dieser Voraussetzung

wird sodann $\alpha\beta^2 \cdot \alpha\gamma^2 + \left(\frac{\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2}\right)^2$, mithin sind die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, $\frac{\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2}{2}$, $\frac{\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2}{2}$ gefunden.

Wir haben noch den Inhalt des letzten Hauptteiles der euklidischen Elemente anzugeben, der in dem XI., XII. und XIII. Buche enthaltenen Stereometrie. Im XI. Buche beginnt diese Lehre genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt, mit den Sätzen, welche auf parallele und senkrechte gerade Linien und Ebenen sich beziehen, woran Untersuchungen über Ecken sich schließen. Alsdann wendet sich der Verfasser zu einem besonderen Körper, dem Parallelepipedon und geht nur in dem letzten Satze des Buches zu dem allgemeineren Begriffe des Prisma über.

Das XII. Buch enthält die Lehre von dem Maße des körperlichen Inhaltes der Pyramide, des Prima, des Kegels, des Zylinders und endlich der Kugel. Eine wirkliche Berechnung findet sich allerdings bei Euklid nie, weder wo von Flächeninhalten noch wo von Körpermaßen die Rede ist, und namentlich bei solchen Raumgebilden, zu deren Erzeugung Kreise oder Kreisstücke beitragen, ist nirgend angegeben, wie man eigentlich zu rechnen habe. Sollte die Ausrechnung des Kreisinhaltes von den Ägyptern bis zu Euklid verloren gegangen sein? Die Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme der mehrfachen Beschäftigung mit der Quadratur des Kreises bei Anaxagoras, bei Antiphon, bei Bryson, bei Hippokrates gegenüber wird vollends für einen in Alexandria lebenden Mathematiker zur Unmöglichkeit. Ägypten, welches das Althergebrachte mit Zähigkeit festhielt, welches ein Exemplar des Rechenbuches des Ahmes noch mehr als 2000 Jahre später als Euklid uns unversehrt überliefert hat, war nicht das Land, in welchem so unbedingt Notwendiges wie die Kreisrechnung vergessen wurde, und ebensowenig läßt sich annehmen, daß die ägyptische Geometrie den griechischen Gelehrten, welche unter dem Schutze des ägyptischen Königs sich dort aufhielten, unbekannt hätte bleiben können. Wir stehen vielmehr hier vor einer absichtlichen Weglassung, vor einem grundsätzlichen Widerstreite zwischen Geometrie und Geodäsie. Letztere, deren Vorhandensein zur Zeit des Aristoteles wir (S. 252) hervorgehoben haben, war ihrem Wesen nach eine rechnende Geometrie. In der eigentlichen oder theoretischen Geometrie war Rechnung als solche ausgeschlossen. Aristoteles hat ausdrücklich gesagt: „Man kann nicht etwas beweisen, indem man von einem anderen Genus ausgeht, z. B. nichts Geometrisches durch Arithmetik . . . Wo die Gegenstände so verschieden sind, wie Arithmetik und Geometrie, da kann man nicht die arithmetische Beweisart auf das, was den Größen überhaupt zukommt, anwenden,

wenn nicht die Größen Zahlen sind, was nur in gewissen Fällen vorkommen kann“[1]). Der Ausdruck, die Größen seien nur in gewissen Fällen Zahlen, bezieht sich vermutlich auf irrationale Strecken, welche als Nichtzahlen galten, und dieser Ausnahme zuliebe dürfte das V. Buch der Elemente entstanden sein. Was aber von den Beweisen gesagt ist, scheint auch auf Rechnungsoperationen ausgedehnt worden zu sein. So zeigt also Euklid in diesem XII. Buche nur, daß Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten, was Hippokrates von Chios schon wußte; er zeigt, daß, wie die Pyramide der dritte Teil des Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist, ein ganz gleichlautender Satz für Kegel und Zylinder stattfindet, was Eudoxus von Knidos schon erkannt hatte; er schließt mit dem Satze, daß Kugeln im dreifachen Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen. Euklid benutzt zum Beweise dieser Sätze den an der Spitze des X. Buches stehenden Satz von der Möglichkeit durch fortgesetzte Halbierung einen beliebigen Grad der Kleinheit zu erreichen. Geben wir als Beispiel seines Verfahrens den Satz vom Kreise, wobei wir, wie schon öfter, zur bequemeren Übersicht uns moderner Zeichen bedienen, im übrigen aber uns genau an Satz 2. des XII. Buches anschließen. Vorausgeschickt ist der Satz, daß die Flächen ähnlicher in zwei Kreise eingeschriebener Vielecke sich wie die Quadrate der Durchmesser der betreffenden Kreise verhalten. Heißen nun K_1 und K_2 die beiden Kreisflächen, deren Durchmesser δ_1 und δ_2 sind, so sei angenommen, daß $K_1 : K_2$ in kleinerem Verhältnisse stehen wie $\delta_1{}^2 : \delta_2{}^2$. Sicherlich gibt es eine Oberfläche Ω, welche dem Verhältnisse $K_1 : \Omega = \delta_1{}^2 : \delta_2{}^2$ genügt, und weil $K_1 : K_2 < K_1 : \Omega$, so wird $K_2 > \Omega$ sein müssen. Dann ist es aber unmöglich, daß dasselbe Verhältnis $\delta_1{}^2 : \delta_2{}^2$ auch obwalte zwischen einer Fläche, die kleiner ist als K_1 und einer anderen, die größer ist als Ω, und gleichwohl läßt sich das Vorhandensein eines solchen unmöglichen Verhältnisses unter der gemachten Voraussetzung nachweisen und damit die Unzulässigkeit der Voraussetzung selbst. Denn beschreibt man in K_1 und K_2 einander ähnliche Vielecke Φ_1 und Φ_2, so ist jedenfalls $\Phi_1 : \Phi_2 = \delta_1{}^2 : \delta_2{}^2$ und zugleich $\Phi_1 < K_1$. Es genügt also noch zu zeigen, daß es ein Φ_2 gibt, welches größer als Ω und kleiner als K_2 ist, und dazu wird die Exhaustion angewandt. Ein dem Kreis umschriebenes Quadrat ist offenbar größer als der Kreis und zugleich genau doppelt so groß als das dem Kreise eingeschriebene Quadrat. Mithin ist letzteres größer als die halbe Kreisfläche, oder unterscheidet sich von der Kreisfläche um weniger als deren Hälfte. Wird in jedem der vier

---

[1]) Aristoteles, Analyt. post. I, 7. 75, a.

diesen Unterschied bildenden Kreisabschnitte der Bogen halbiert und mit dem Halbierungspunkte und den Endpunkten als Spitzen ein Dreieck gebildet, so ist dieses die Hälfte eines Rechtecks, innerhalb welches der Kreisabschnitt eingeschlossen liegt, also größer als die Hälfte des Abschnittes. Das entstandene Achteck unterscheidet sich somit von dem Kreise um weniger als den vierten Teil desselben. Ebenso wird zu zeigen sein, daß der Unterschied zwischen dem regelmäßigen Vielecke von 16 Seiten und seinem Umkreise geringer als $\frac{1}{8}$ der Kreisfläche ist. Bei jedesmaliger Verdoppelung der Seitenzahl des Vielecks wird der Flächenunterschied desselben gegen den Kreis mehr als nur halbiert, und schon immerwährende Halbierung genügt nach dem Satze der Exhaustion, um jede beliebige Grenze der Kleinheit zu erreichen. Es ist also damit sichergestellt, daß endlich ein Vieleck Φ_2 erscheinen muß, dessen Fläche sich von der des Kreises um weniger als Δ unterscheidet, wenn $\Delta = K_2 - \Omega$ ist, und das ihm ähnliche dem Kreise K_1 eingeschriebene Vieleck ist jenes zugehörige Φ_1, welches den ersten Widerspruch liefert. Der Beweis, daß auch nicht $K_1 : K_2 > \delta_1^2 : \delta_2^2$ sein kann, wird auf den früheren Fall zurückgeführt. Jene Annahme setzt nämlich zugleich voraus, daß $K_2 : K_1 < \delta_2^2 : \delta_1^2$, und die Unmöglichkeit dieser Voraussetzung zu beweisen hat man bereits gelernt. Keine dieser beiden Annahmen findet also statt, sondern nur die zwischen ihnen liegende $K_1 : K_2 = \delta_1^2 : \delta_2^2$. Das ist der von Euklid eingeschlagene Weg, der in jedem einzelnen Falle mit aller Strenge in ermüdender Einförmigkeit eingehalten wird, ohne daß jemals eine Abkürzung des Verfahrens für statthaft angesehen würde.

Das XIII. Buch endlich kehrt zu einem Gegenstande zurück, dem das IV. Buch teilweise gewidmet war. Es handelt von den regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken, insbesondere von den Fünfecken und Dreiecken. Dann aber benutzt es diese Figuren als Seitenflächen von Körpern, welche in eine Kugel eingeschrieben werden und schließt mit der wichtigen Bemerkung, daß es keine weiteren regelmäßigen Körper geben könne als die fünf zuletzt erwähnten, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder, die von Dreiecken begrenzt sind, der Würfel, dessen Seitenflächen Quadrate sind, das Dodekaeder, welches von Fünfecken eingeschlossen ist.

Wir haben von diesem merkwürdigen Werke einen weit ausführlicheren Auszug hier mitgeteilt als von den meisten der bisher besprochenen. Die Wichtigkeit des Werkes rechtfertigt unser Verfahren. Sie rechtfertigt zugleich die Frage nach dem Zwecke, welchen

Euklid bei der Niederschrift im Auge hatte. Proklus sagt uns, wie wir oben (S. 260) erwähnten, Euklid habe als Endziel seines ganzen Elementenwerkes die Konstruktion der sogenannten platonischen Körper hingestellt [1]). Daß dieses unrichtig ist bedarf für den, der auch nur unseren Auszug mit einiger Aufmerksamkeit gelesen hat, keiner Auseinandersetzung. Die künstlerisch vollendete Gliederung des Werkes machte es möglich, daß es in dem einen Gipfelpunkte abschloß, aber der Zweck des Werkes war nur durch dessen ganzen Verlauf gegeben und erfüllt. Die 13 Bücher der Elemente sind sich selbst Zweck. „Elemente werden die Dinge genannt, deren Theorie hindurchdringt zum Verstehen der anderen, und von welchen aus die Lösung ihrer Schwierigkeiten uns gelingt“ [2]). So sagt derselbe Proklus an einer anderen Stelle mit viel treuerer Wiedergabe dessen, was beabsichtigt war. Euklid wollte, wie die übrigen Elementenschreiber vor ihm es schon versucht hatten, eine vollständige Übersicht aller Teile der Mathematik geben, welche in den folgenden Teilen der Wissenschaft zur Anwendung kommen, wollte zugleich die enzyklopädisch zusammengestellten und geordneten Dinge auf strenge Beweise stützen, welche einen Zweifel nicht aufkommen lassen, sondern vielmehr gestatten wie in eine Rüstkammer blindlings dorthin zu greifen mit der Gewißheit stets eine tadellose Waffe zu erfassen.

Wieweit wir Euklid als selbständigen Verfasser seines Werkes zu bezeichnen haben, ist kaum zu sagen. Jeder Verfasser eines Handbuches irgend eines Teiles der Mathematik ist von seinen Vorgängern abhängig, und man muß die Schriften der letzteren kennen, um abzuschätzen, wieweit er von den vorgetretenen Bahnen sich entfernte. Euklid war ohne allen Zweifel ein großer Mathematiker. Dieses Urteil werden die übrigen Schriften, die er verfaßt hat, rechtfertigen. Damit stimmt auch die Bewunderung, welche alle Zeiten seinem vorzugsweise bekannt gewordenen Elementenwerke entgegenbrachten, überein, und der von uns schon hervorgehobene Umstand, daß im Schatten dieses Riesenwerkes die früher vorhandenen ähnlichen Erzeugnisse verkümmerten und zugrunde gingen, spätere nicht entstehen konnten. Auch die wenigen Beweise, deren Ursprung mit Bestimmtheit auf Euklid sich zurückführt — wir erinnern an den Schulbeweis des pythagoräischen Lehrsatzes — lassen in Euklid den feinen geometrischen Kopf erkennen. Ein großer Mathematiker wird auch da, wo er anderen folgt, seine Eigentümlichkeit nicht ganz

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 68 *τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατονικῶν σχημάτων σύστασιν.* [2]) Proklus (ed. Friedlein) 72, 3—6.

verleugnen, und so war es sicherlich auch bei Euklid. Aber wo haben wir diese Eigentümlichkeit zu suchen? Das ist und bleibt wohl eine unbeantwortbare Frage, um so unbeantwortbarer als Pappus, wie wir gleichfalls schon (S. 261) hervorgehaben haben, den Euklid geradezu wegen seiner pietätvollen Anlehnung an ältere Schriftsteller lobt, und wenn Pappus dabei allerdings ein anderes Werk des Euklid im Auge hat, so dürfte sich diese Charaktereigenschaft auch in den Elementen nicht verleugnet haben.

Wir sind sogar tatsächlich imstande einige und nicht unwesentliche Stellen des großen Werkes anzugeben, in welchen, wie wir schon früher sahen, Euklid nicht selbständig gearbeitet hat. Das V. Buch gehört, wie wir (S. 241) einem alten Scholiasten nacherzählt haben, dem Eudoxus an. Von ebendemselben stammen nach aller Wahrscheinlichkeit die fünf ersten Sätze des XIII. Buches. Spuren von Vorarbeiten des Theaetet sind (S. 237) im X. Buche nicht zu verkennen. Das stimmt gleichfalls mit der Aussage des Proklus überein, daß Euklid „vieles von Eudoxus Herrührende zu einem Ganzen ordnete und vieles von Theaetet Begonnene zu Ende führte“ (S. 260). Eben diese alten Spuren geben uns aber Veranlassung zur Untersuchung einer anderen Frage.

Die Form des V., des X., des XIII. Buches ist von der der anderen Bücher nicht im mindesten verschieden. Höchstens könnte man betonen, daß, während sonst überall nur synthetisch verfahren ist, die fünf ersten Sätze des XIII. Buches Analyse und Synthese verbinden. Aber auch bei ihnen ist die Form, welche man euklidische Form zu nennen pflegt, gewahrt. Der Lehrsatz ist ausgesprochen, die Vorschrift was an der Figur vorgenommen werden soll ist erteilt, der Beweis schließt sich an. Und in anderen Fällen ist eine Aufgabe gestellt. Ihr folgt die Auflösung, dieser die zum Beweise der Richtigkeit der Auflösung nötigen Vorbereitungen durch Ziehen von Hilfslinien usw. und endlich der Beweis selbst. „Was zu beweisen war“, ὅπερ ἔδει δεῖξαι (quod erat demonstrandum) ist die Schlußformel des Lehrsatzes oder Theorems, bei welchem es sich um den Nachweis, ἀπόδειξιν, des Behaupteten handelt. Die Aufgabe, das Problem, bei welchem es auf die Ausführung, κατασκευήν, des Geforderten ankommt, hat eine ganz ähnliche Schlußformel: „Was zu machen war,“ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (quod erat faciendum). Euklid habe diese Schlußformeln benutzt, sagt uns Proklus[1]), und der Augenschein bestätigt es. Aber rühren diese Schlußworte, rührt die ganze Form von Euklid her?

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 81.

Wir bezweifeln es aufs allerhöchste. Wir haben in dem Übungsbuche des Ahmes eine Sammlung von Beispielen kennen gelernt, deren griechische Nachbildung in Inhalt und Form, insbesondere in letzterer, uns auf alexandrinischem Boden begegnen wird. „Mache es so“ heißen die regelmäßig wiederkehrenden Worte jener Übungsbücher. Wir haben (S. 80 und 113) davon gesprochen, daß ägyptische Lehrbücher neben den Übungsbüchern vorhanden gewesen sein müssen. Werden sie weniger eine herkömmliche unabänderliche Form besessen haben als alles andere in dem Lande der sich stets gleichbleibenden Überlieferungen? Und sind jene euklidischen Schlußworte für Lehrsätze und Aufgaben nicht von anheimelnder Ähnlichkeit zu dem ägyptischen „Mache es so“? Ist es ferner nicht in hohem Grade wahrscheinlich, daß Eudoxus, von dem, wie wir sagten, das V. Buch, daß Theaetet, von dem Teile des X. und des XIII. Buches teilweise wörtlich übernommen wurden, der gleichen Form sich schon bedienten? Ist endlich wohl anzunehmen, Euklid habe eine für den Unterricht, soweit er Gedächtnissache ist, ungemein zweckmäßige Form neu erfunden, und diese Form sei nur der Geometrie, keiner anderen Wissenschaft zugute gekommen? Diese Gründe werden zwar noch nicht Gewißheit hervorbringen; noch immer wird von manchen behauptet werden, der Name euklidische Form sei durchaus gerechtfertigt, denn Euklid sei der selbständige Erfinder derselben; aber andere werden ebenso sicher mit uns der Überzeugung gewonnen sein, die ägyptische Form eines Lehrbuches der Geometrie, in Griechenland eingedrungen, seit überhaupt Geometrie dort gelehrt wurde, in Alexandria durch die neuerdings ermöglichte Kenntnisnahme ägyptischer Originalwerke aufgefrischt, habe bei Euklid nur ihre vollendete Abrundung erlangt.

Eines haben wir bei Besprechung dieser Ursprungsfrage stillschweigend vorausgesetzt: daß nämlich dasjenige, was uns handschriftlich als die Elemente des Euklid überliefert wurde, in der Tat jenes Werk ist, wie es unter dem Griffel des Verfassers entstand. Zweifel daran wären, trotz der ungemeinen Verbreitung, deren die euklidischen Elemente im Altertum sich erfreuten, oder vielleicht eben wegen dieser Verbreitung nicht unmöglich, denn gerade häufig abgeschriebene Schriftstücke verderben leicht durch sich forterbende und durch bei jeder Abschrift neu hinzutretende Fehler, wenn nicht gar durch allmähliche Einschaltung von Randglossen, welche nach und nach in den Text eindrangen, dem sie als Fremdlinge nur angehören. Euklids Elemente sind in antiken Schriften nicht gar oft erwähnt[1]), aber die Übereinstimmung der genannten Büchernummer mit

[1]) Untersuchungen darüber von Savilius abgedruckt in Gregorys Vor-

der Ziffer, welche sie in den Handschriften führt, ist meistenteils vorhanden. Uns wenigstens ist nur ein Beispiel des Gegenteils bekannt welches auf römischem Boden im 27. Kapitel zu besprechen sein wird. Fremde spätere Zusätze sind in dem, was man die Elemente des Euklid nennt, allerdings vorhanden. Eines solchen machte Theon von Alexandria in seiner Ausgabe, ἔκδοσις, der euklidischen Elemente am Ende des VI. Buches sich schuldig, wie er selbst in seinem Kommentare zum I. Buche des ptolemäischen Almagestes erzählt [1]). Aus dieser ungemein wichtigen Stelle im Zusammenhange mit dem Umstande, daß jener Zusatz des Theon seinem Inhalte nach sich vollständig mit dem Zusatze zu Satz 33. des VI. Buches deckt, geht somit hervor, daß es eine theonische Textausgabe der euklidischen Elemente ist, deren wir uns bedienen, und daß wenn auch nicht gerade zahlreiche, doch einige Änderungen durch jenen Schriftsteller vom Ende des IV. S. stattgefunden haben mögen.

Theon kann es vielleicht gewesen sein, welcher den berüchtigten 11. Grundsatz des I. Buches: „Zwei Gerade, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beiden inneren an einerlei Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen" an diese unpassende Stelle brachte, während es gar kein Grundsatz, sondern die Umkehrung des Satzes 17. des I. Buches ist [2]), und dort als Folgerung ohne Beweis ausgesprochen immer noch frühzeitig genug stehen würde, um bei Satz 29. des I. Buches benutzt zu werden, wie es der Fall ist.

Theon mag auch die Schuld einiger Definitionen des V. und VI. Buches treffen, welche häufig angegriffen worden sind [3]).

Eine Definition des V. Buches, nämlich die 5., hat freilich unschuldigerweise solche Angriffe erlitten, veranlaßt, wie im folgenden Bande besprochen werden muß, durch Übersetzungsirrtümer zweier Sprachen. Diese Definition geht offenbar ursprünglich auf Zeiten zurück, die vor Euklid liegen. Sie will erklären, was es heiße, wenn man von vier Größen sage, daß sie in Proportion stehen. Da von Größen die Rede ist und nicht von Zahlen, so mußte die Definition so weit gefaßt werden, daß auch Inkommensurables hineinpaßte, und dieses erreichte der Verfasser, sei es Eudoxus oder wer sonst gewesen, indem er außer den Größen A, B, Γ, Δ noch irgend zwei ganze Zahlen μ und ν sich dachte und behauptete, es

---

rede zu seiner Euklidausgabe. Die gleichen Untersuchungen mit einigen neuen Zutaten bei Hankel 386—388.

[1]) *Commentaire de Théon sur la composition mathématique de Ptolémée* édit. Halma I, 201. Paris 1821. [2]) Das erkannte schon Savilius. [3]) Ausführliches hierüber bei Hankel 389—401.

sei $A : B = \Gamma : \Delta$, wofern immer wenn $\mu A \gtreqless \nu B$ zugleich auch $\mu \Gamma \gtreqless \nu \Delta$. Der Wortlaut ist folgender: „In einerlei Verhältnis sind Größen A, B, Γ, Δ, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn von beliebigen Gleichvielfachen der ersten und dritten A, Γ und beliebigen Gleichvielfachen der zweiten und vierten B, Δ die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner oder eben so groß oder größer sind als die Vielfachen der zweiten und vierten nach der Ordnung miteinander verglichen."

13. Kapitel.

Die übrigen Schriften des Euklid.

Euklid hat neben und außer den Elementen noch mehrfache andere Schriften verfaßt, die uns leider nicht sämtlich vollständig erhalten sind. So ist uns von einem Werke, welches gewiß höchst interessant war, nur die fast mehr als notdürftige Schilderung übrig geblieben, die Proklus davon mit folgenden Worten gibt: Auch überlieferte er Methoden des durchdringenden Verstandes mit deren Hilfe wir den Anfänger in dieser Lehre in der Aufsuchung der Fehlschlüsse üben und selbst unbetrogen bleiben können. Die Schrift, durch welche er uns diese Ausrüstung verschafft, betitelt er Trugschlüsse, *ψευδάρια*. Er zählt die verschiedenen Arten derselben der Reihe nach auf und übt bezüglich jeder unseren Verstand in allerlei Lehrsätzen, indem er dem Falschen das Wahre gegenüberstellt und den Beweis des Truges mit der Erfahrung zusammenhält[1]).

Verloren sind auch die drei Bücher der Porismen, welche Euklid verfaßte, deren Inhalt jedoch aus Spuren in genügender Weise erkannt werden konnte, um eine vermutlich in der Hauptsache richtige Wiederherstellung zu gestatten[2]). Mit den genannten Spuren hat es folgendes Bewandtnis. Pappus hat in seiner Mathematischen Sammlung, von welcher schon wiederholt die Rede war, neben eigenen Untersuchungen auch vielfach Auszüge aus fremden Schriften gegeben, welche gleichzeitig bis zu einem gewissen Grade erläutert werden.

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 70. [2]) *Les trois livres de Porismes d'Euclide retablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions par* M. Chasles. Paris 1860. Heiberg, Euklidstudien S. 56—79 sucht allerdings die Behauptung zu begründen, die Chaslessche Wiederherstellung der Porismen sei noch keineswegs als endgültig anzusehen.

Unter diesen fremden Schriften befinden sich denn auch die euklidischen Porismen, von welchen im VII. Buche der Sammlung die Rede ist, und zu deren Verständnis Pappus eine Anzahl von Lemmen mitteilt[1]). Freilich wäre der Gebrauch, welchen man von diesen Hilfssätzen allein machen könnte, um aus ihnen den Inhalt des Werkes, zu welchem sie erfunden sind, zu erschließen, kein unbedingter. Wir besitzen nämlich auch noch Lemmen des Pappus zu Werken, deren Urschrift nicht verloren gegangen ist, und an diesen zeigt sich, daß der geometrische Scharfsinn des Verfassers ihn nicht selten weit abseits führte, und daß er sich wohl gerade dadurch verleiten ließ etwas verschwenderisch mit der Benennung Lemma umzugehen. Es kommen Sätze bei Pappus vor, welche so gut wie in gar keiner Beziehung zu den Schriften stehen, als deren Hilfssätze sie bezeichnet werden, und wir haben zum voraus keinerlei Gewähr dafür, daß es sich mit den Hilfssätzen zu den euklidischen Porismen nicht ebenso verhalte. Nachträglich scheint freilich die gelungene Wiederherstellung, von der wir sprachen, und welche für das tiefe Eindringen ihres Verfassers in den geometrischen Geist der Alten ein glänzendes Zeugnis ablegt, jene Gewähr zu liefern. Es ist schwer an einen Zufall zu denken, wo die Ergebnisse vollste Übereinstimmung mit den 38 Lemmen des Pappus, mit der Inhaltsangabe der drei Bücher Porismen, wie sie bei ebendemselben sich findet, mit der Erklärung des Wortes Porisma bei Pappus und mit einer solchen bei Proklus[2]) zutage fördert.

Der sprachliche Zusammenhang des Wortes Porisma, *πόρισμα*, mit *πείρω*, mit Pore, mit parare, mit forschen, mit dem Sanskritworte pri पृ läßt einen Grundbegriff des Vorwärtsbringens wohl erkennen, doch ist damit nur die eine Bedeutung von Porisma als Zusatz, corollarium, gegeben, welche gleichfalls durch das Vorkommen in geometrischen Schriften bestätigt wird. Porisma als Kunstname einer besonderen für sich bestehenden Gattung von Sätzen wird dadurch um nichts klarer. Von diesen sind dagegen ausdrückliche Definitionen vorhanden. Pappus in der Einleitung zu seinem VII. Buche sagt, Porisma sei ein Ausspruch, bei welchem es sich um die Porismierung des Ausgesprochenen handle, und fügt dieser Erklärung durch ein fast gleiches Wort die Erläuterung bei: „Diese Definition des Porisma wurde von den Neueren verändert, welche nicht alles finden können, sondern auf die Elemente gestützt nur zeigen, daß das, was gesucht wird, vorhanden ist, nicht aber dieses selbst finden. So schrieben sie, obschon durch die Definition selbst und das Erlernte widerlegt, mit bezug auf einen Nebenumstand, ein

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 648 sqq. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 301 sqq.

Porisma sei das, was zur Hypothese eines Ortstheorems fehle." Eine weitere Definition, sagten wir oben, gebe Proklus. Sie enthält gleichfalls zweierlei, wenn auch nicht dieselben beiden Unterscheidungen wie Pappus sie trennt. „Einmal nennt man es ein Porisma, wenn ein Satz aus dem Beweise eines anderen Satzes mit erhalten wird, als Fund oder gerade vorhandener Gewinn bei dem Gesuchten, zweitens aber auch, wenn etwas zwar gesucht wird, aber um von der Erfindung Gebrauch zu machen und nicht von der Entstehung oder der einfachen Anschauung .... Man hat es nicht mit der Entstehung des Gesuchten zu tun, sondern mit dessen Erfindung, und auch eine bloße Anschauung genügt nicht. Man muß das Gesuchte in das Gesichtsfeld bringen und vor den Augen ausführen. Von dieser Art sind auch die Porismen, welche Euklid schrieb, als er seine Bücher der Porismen verfaßte." Diese Erklärungen haben gewiß keinen Anspruch auf den Ruhm unbedingter Deutlichkeit, aber eines lassen sie erkennen: daß das Wort Porisma allmählich einen anderen Sinn annahm, als es ursprünglich besaß. Man versteht diese Begriffsverschiebung jetzt gewöhnlich so, daß die verhältnismäßig jüngeren Schriftsteller — jünger im Sinne des Pappus gesagt für diejenigen, welche auftraten, seit es Elemente gab — dabei an einen Nebenumstand sich hielten, der von den Alten nicht berücksichtigt wurde, daß aber jedenfalls zu allen Zeiten das Merkmal untrüglich hervortrat, daß ein Porisma gewissermaßen eine Verbindung von Theorem und Problem war, *ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloß.* Ein sehr allgemeines Beispiel davon bildet auf einem der Mathematik durchaus fremden Gebiete die ärztliche Diagnose. Sie ist ein wahres Porisma. Sie erhärtet als Theorem den gegenwärtigen Zustand des Kranken, wobei sie ebensowohl die bei allen Individuen gemeinsamen Erscheinungen der bestimmten Krankheitsform, als die von einem Menschen zum anderen veränderlichen Naturkundgebungen berücksichtigt. Sie schließt aber auch ein Problem in sich: die weitere Entwicklung des Krankheitsprozesses vorauszusehen und womöglich zu leiten. Sie zeigt sich als unvollständig, so lange nicht eben dieses Problem seiner Lösung entgegengeführt wird. Übersetzen wir nun eben diese Gedankenfolge in die Sprache der Mathematik, so können wir sagen: *Ein Porisma ist jeder unvollständige Satz, welcher Zusammenhänge zwischen nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Dingen so ausspricht, daß eine nähere Erörterung und Auffindung sich noch daran knüpfen.* Ein schon von Proklus angegebenes Beispiel liefert etwa der Satz, daß, wenn ein Kreis gegeben ist, der Mittelpunkt desselben immer gefunden werden könne, denn an ihn knüpft sich die

Aufgabe, die Konstruktion zu ermitteln, durch welche man den Mittelpunkt wirklich erhält, mit Notwendigkeit an. Oder um ein zweites den Griechen noch durchaus unverständliches Beispiel zu wählen, so ist es ein Porisma, wenn man sagt: Jede rationale ganze algebraische Funktion einer Veränderlichen könne immer in einfachste reelle Faktoren zerlegt werden, denn an diesen Satz knüpft sich unmittelbar die weitere Frage, von welchem Grade jene einfachsten Faktoren sein werden, sowie die mit den Mitteln gegenwärtiger Algebra nicht lösbare Aufgabe in jedem einzelnen Falle die betreffenden einfachsten Faktoren selbst aufzufinden. Wenn durch diese Auseinandersetzung der Begriff des Porisma im älteren Sinne des Wortes zu einiger Klarheit gelangt sein dürfte, so können wir jetzt auch die spätere Bedeutung des Wortes ins Auge fassen.

Nachdem man nämlich bemerkt hatte, daß die Veränderlichkeit mitunter in der Ortsveränderung von Punkten bestehe, so klammerte man sich an diesen Nebenumstand fest und setzte als Regel, daß das Veränderliche ausschließlich von der Art sein sollte, daß man es mit einem mangelhaften Ortstheoreme zu tun habe. Eines der berühmtesten Porismen in diesem Sinne, welches bei Pappus sich erhalten hat[1]), lautet in der Sprache heutiger Geometrie etwa so: Schneiden die Linien eines vollständigen Vierseits sich in sechs Punkten, von denen drei in einer Geraden liegende gegeben sind, und sind von den drei übrigen Punkten zwei der Bedingung unterworfen je auf einer gegebenen Geraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geometrischen Orte haben, welche aus den vorhandenen Angaben bestimmt werden kann. Man sieht augenblicklich, erstens daß es sich hier um einen geometrischen Ort handelt, zweitens daß in der Hypothese die Lage der von zwei Punkten beschriebenen Geraden nicht näher bezeichnet ist, daß also an der Hypothese etwas fehlt, drittens daß demgemäß auch die Folgerung an Bestimmtheit zu wünschen übrig läßt, daß aber viertens die Folgerung zu vollständiger Bestimmtheit ergänzt werden kann, indem man die Lage der dritten Geraden zu den gegebenen Raumgebilden in Beziehung setzt, sie als eine darzustellende Funktion derselben betrachtet. Mit anderen Worten: die Ortsveränderung eines Punktes ist in Abhängigkeit gebracht zu den Ortsveränderungen zweier Punkte, so daß sie der Art nach bestimmt ist, der Lage nach aber erst bestimmt wird, wenn jene Ortsveränderungen der beiden anderen Punkte, sowie drei feste Punkte wirklich gegeben sind.

Dieses vollständiger als die übrigen erhaltene Porisma wurde,

[1]) Pappus VII, praefatio (ed. Hultsch) 652 sqq.

wie wir gleichfalls durch Pappus wissen, in zehn einzelnen Fällen behandelt, je nach der Verschiedenheit der Lage der einzelnen Punkte und Geraden. Man erkennt an diesem einen Beispiele, welche gewaltige Ausdehnung eine Sammlung von Porismen gewinnen konnte, wenn die teils als Bedingungen, teils als Ergebnisse in jedem Porisma vorkommenden geometrischen Örter jeder beliebigen Gattung von Raumgebilden angehören durften. Euklid legte sich die freiwillige Beschränkung auf, nur solche Örter zu benutzen, deren Lehre aus seinen Elementen zur Genüge bekannt war. In den beiden ersten Büchern seiner Porismen treten nur Gerade auf, in dem dritten Buche außer solchen auch Kreise. Trotz dieser engen Beschränkung waren 171 Sätze in dem Werke enthalten, welche Pappus je nach den Ergebnissen, also abseits der Bedingungen, in 29 Gattungen abgeteilt hat. Eine Gattung war es z. B., wenn sich herausstellte, daß ein Punkt auf einer der Lage nach bekannten Geraden liegen müsse; eine zweite, wenn man erfuhr, daß eine gewisse Gerade in allen ihren Lagen durch einen bestimmten Punkt gehen müsse; eine dritte, wenn wieder eine bewegliche Gerade auf zwei gegebenen Geraden Abschnitte von bestimmten Produkten bildete, während man bei der Aufstellung jener Gattungen als solcher zunächst davon absah, welcherlei Bedingungen in jener ersten Gattung die Bewegung des Punktes, in den beiden anderen die Bewegung der Geraden regeln. Von dieser Auffassung ist wenigstens die von uns schon gerühmte Wiederherstellung der euklidischen Porismen ausgegangen, auf welche für die genauere Kenntnis des Gegenstandes verwiesen werden muß. Er ist trotz des Scharfsinnes, welchen der neue Bearbeiter als Geometer wie als Historiker an den Tag legte, nicht so weit über allen und jeden Zweifel erhaben, daß wir es verantworten könnten über die Ergebnisse der Wiederherstellung unter dem Verfassernamen des Euklid zu berichten. Nur Eines entnehmen wir ihr noch: die Verwandtschaft, welche Euklids Porismen nach zwei Seiten hin besaßen. Im Hinblicke auf ihren Inhalt, auf die Lehre von der veränderlichen Lage grenzten sie an die sogenannten geometrischen Örter; in ihrer Form näherten sie sich einem anderen euklidischen Werke, den Daten.

Die Daten[1]), δεδόμενα, des Euklid sind vollständig auf uns gekommen, versehen mit einer Vorrede des Marinus von Neapolis in Palästina, eines Schülers des Proklus, in ihrer Echtheit bestätigt

---

[1]) Eine deutsche Übersetzung hat J. F. Wurm (Berlin 1825) herausgegeben, den griechischen Text der ersten 24 Sätze nach einem münchner Kodex Fr. Buchbinder in dem Programm der Landesschule Pforta für 1866: Euklids Porismen und Data. Die letzte Ausgabe ist die von H. Menge als 6. Band der Euklidausgabe (1896).

durch eine Beschreibung des Pappus, welche wenn auch nicht in allen Punkten, doch der Hauptsache nach mit unserem Texte übereinstimmt[1]). Was man unter einem Gegebenen, *δεδόμενον*, zu verstehen habe, sagt Euklid in einer Reihe von Definitionen, welche an der Spitze dieser Schrift stehen. Der Größe nach gegeben heißen Räume, Linien und Winkel, wenn man solche, die ihnen gleich sind, finden kann. Ein Verhältnis heißt gegeben, wenn man ein Verhältnis, welches mit jenem einerlei ist, finden kann. Der Lage nach gegeben heißen Punkte, Linien und Winkel, wenn sie immer an demselben Orte sind usw. Nach diesen Definitionen folgen 95 (Pappus zufolge nur 90) Sätze, in welchen nachgewiesen wird, daß, wenn gewisse Dinge gegeben sind, andere Dinge gleichzeitig mitgegeben sind. Zur besseren Einsicht in den Gegenstand heben wir einige Sätze aus den verschiedensten Teilen der Schrift hervor.

Satz 1. Gegebene Größen haben zueinander ein gegebenes Verhältnis.

Satz 3. Wenn gegebene Größen, wie viele ihrer sein mögen, zusammengesetzt werden, so ist ihre Summe gegeben.

Satz 25. Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien einander schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt gegeben.

Satz 40. Wenn in einem Dreiecke jeder Winkel der Größe nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Satz 41. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel gegeben ist und die um diesen Winkel liegenden Seiten ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, so ist das Dreieck der Art nach gegeben.

Satz 54. Wenn zwei der Art nach gegebene Figuren ein gegebenes Verhältnis zueinander haben, so haben auch ihre Seiten zueinander ein gegebenes Verhältnis.

Satz 58 und 59. Wenn ein gegebener Raum einer gegebenen geraden Linie angefügt, aber um eine der Art nach gegebene Figur zu klein, *ἔλλειπον* (zu groß, *ὑπέρβαλλον*) ist, so sind die Seiten der Ergänzung (des Überschusses) gegeben.

Satz 84 und 85. Wenn zwei Gerade einen gegebenen Raum unter einem gegebenen Winkel einschließen und ihr Unterschied (ihre Summe) gegeben ist, so ist jede derselben gegeben.

Satz 89. Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreise eine der Größe nach gegebene Gerade gegeben ist, so begrenzt sie einen Abschnitt, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

Die Vergleichung dieser Proben mit dem, was über Porismen gesagt wurde, läßt augenblicklich die angekündigte Formverwandt-

[1]) Pappus VII (ed. Hultsch) pag. 638—640.

schaft erkennen. Auch hier schließt das Theorem, in dessen Gewande die Sätze aufzutreten pflegen, ein künftiges Problem ein, und die Beweisführung erfolgt fast regelmäßig so, daß jenes Problem gelöst wird. So ist in dem oben angeführten Satz 3. die Aufgabe mit eingeschlossen, die Summe der gegebenen Größen auch wirklich zu finden, und in der Tat wird der Satz dadurch als richtig erwiesen, daß man zwar nicht die Summe selbst, denn dieses würde nicht in dem Charakter des Buches der Gegebenen liegen, aber eine der Summe gleiche Größe darstellt. Aber auch dafür ist umgekehrt gesorgt, daß man nicht Daten und Porismen ganz verwechseln könne. Dagegen schützt der gewaltige Unterschied des Inhaltes, der sich kurz dahin bezeichnen läßt, daß bei den Daten die Bedingung der veränderlichen Größe wegfällt, welche zum eigentlichen Wesen des Porisma gehört und dessen wissenschaftliche Stellung nach unseren heutigen Begriffen zu einer weit höheren macht als die der Daten, deren eigentliche Berechtigung uns fast zweifelhaft erscheint, weil in ihnen im Grunde nichts steht, was nicht schon in anderer Form und anderer Reihenfolge in den Elementen steht oder wenigstens stehen könnte.

Die Data, kann man sagen, sind Übungssätze zur Wiederauffrischung der Elemente; die Porismen sind Anwendungen derselben von selbständigem Werte. Der Stoff, welcher dem, der die Daten auswendig weiß, zu Gebote steht, führt ihn doch nicht über die Elemente hinaus; der Stoff, welcher in den Porismen dem Gedächtnisse sich einprägt, kommt in der Lehre von den Örtern, in der höheren Mathematik der Griechen, zur Geltung. Daten kann es in frühester Zeit gegeben haben, Porismen im euklidischen Sinne erst seitdem der Ortsbegriff entstand.

Die nahen Beziehungen der Daten zu den Elementen lassen sich auch auf jenem Gebiete verfolgen, welches ein gemischtes ist, insofern dort Arithmetisches und Algebraisches geometrisch eingekleidet erscheinen. Vergleichen wir z. B. Satz 58. und 59. mit den Aufgaben in Satz 28. und 29. des VI. Buches (S. 266), so liegt die Wechselverbindung auf der Hand[1]. Satz 84. und 85. lehren aus $xy = b^2$ und $x \mp y = a$ die Wurzeln der beiden Gleichungen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 \mp b^2 = ax$ zu finden[2]. Wir erinnern dabei an den 11. Satz des II. Buches

[1] Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen S. 928—929 hat darauf hingewiesen. [2] Darauf dürfte Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,* 2. édition. Paris 1875, pag. 11, Note 2 oder deutsche Übersetzung von Sohncke. Halle 1839, S. 9, Anmerkung 11 zuerst aufmerksam gemacht haben. Dieses Werk heißt bei uns künftig Chasles, *Aperçu hist.*

der Elemente (S. 263), in welchem die Gleichung $x^2 + ax = a^2$ erkannt wurde, ein besonderer Fall der Gleichung $x^2 + ax = b^2$ des 29. Satzes des VI. Buches. Wir erinnern an die Gleichung $x^2 + b^2 = ax$ des 28. Satzes des VI. Buches, und haben jetzt hier in den Daten den einzigen noch übrigen Fall $x^2 = ax + b^2$ der quadratischen Gleichung mit lauter positiven Gliedern vor uns. Die Daten sind hier die notwendige Ergänzung der Elemente. Der Schriftsteller, der beide verfaßte, war im Besitz der Mittel eine Wurzel jeder quadratischen Gleichung, welche überhaupt eine reelle Lösung zuläßt, zu finden. Darf aber das Bewußtsein hier eine große Gruppe von Problemen vor sich zu haben, deren Bedeutung nicht nur eine geometrische ist, bei Euklid vorausgesetzt werden? Die geometrische Form, in welcher jene Aufgaben bei Euklid erscheinen und welche man nicht unpassend eine geometrische Algebra[1]) genannt hat, würde nicht genügen, jedes algebraische Bewußtsein zu leugnen, denn jene Form werden wir, als Überbleibsel alter Übung, bei Schriftstellern und in Zeiten noch vorwalten sehen, denen man wohl eher umgekehrt das geometrische Bewußtsein absprechen darf. Ist aber diese kleine Schwierigkeit aus dem Wege geräumt, so nehmen wir keinen Anstand die gestellte Frage voll zu bejahen. Euklid muß mit numerischen quadratischen Gleichungen zu tun gehabt haben, denn nur daraus läßt sich das Entstehen des X. Buches seiner Elemente erklären[2]), und das ist die große Bedeutung, welche wir (S. 268) eben diesem Buche zum voraus beigelegt haben.

Wie verhält es sich aber mit der Fähigkeit des Euklid auch solche Gleichungen zu lösen, welche in durchaus anderem Gewande erscheinen? In einer Sammlung griechischer Epigramme, von welcher im 23. Kapitel die Rede sein wird, kommt als euklidisches Problem eines vor, welches in deutscher Übersetzung folgendermaßen lautet[3]):

Esel und Maultier schritten einher beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Last schwer stöhnt' und seufzte der Esel.
Jenes bemerkt es und sprach zu dem kummerbeladnen Gefährten:
„Alterchen, sprich, was weinst Du und jammerst schier wie ein Mägdlein?
Doppelt so viel als Du grad' trüg' ich, gäbst Du ein Maß mir;
Nähmst Du mir eines, so trügen wir dann erst beide dasselbe."
Geometer, Du Kundiger, sprich, wieviel sie getragen.

---

[1]) Den Namen der geometrischen Algebra hat H. Zeuthen eingeführt.
[2]) Dieser feine und wichtige Gedanke ist zuerst ausgesprochen bei Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthume (deutsche Ausgabe von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886), S. 24—25. S. A. Christensen, Ueber Gleichungen vierten Grades im X. Buch der Elemente Euklids. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Hist.-liter. Abtlg. S. 201—207 geht uns allerdings etwas zu weit.
[3]) Vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 480.

Wie verhält es sich mit der Berechtigung dieser Aufgabe, den ihr beigelegten Namen zu führen? Die meisten Schriftsteller leugnen diese Berechtigung vollständig. Jedenfalls muß man zwei Dinge hier unterscheiden, ob Euklid eine derartige Aufgabe lösen konnte und ob er sie so, wie sie überliefert ist, löste oder gar stellte. An der Möglichkeit der Lösung wird man nicht zweifeln. Schon Thymaridas hatte (S. 158) Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten von einer gewissen Form lösen gelehrt, und Euklid dürfte, seiner Gewohnheit nach alles an Linien versinnlichend, gesagt haben, wenn man die Last des Maulesels durch eine Linie A darstellt, so wird, wenn die Längeneinheit abgeschnitten ist, $A - 1$ als übrige Last der bereits um die Einheit vergrößerten Last des Esels gleich sein; die ursprüngliche Last des Esels war also $A - 2$, oder um 2 geringer als die des Maultiers. Nimmt man zu A noch eine Längeneinheit hinzu, so ist $A + 1$ doppelt so groß wie das um die Einheit verminderte $A - 2$, oder wie $A - 3$, d. h. $A + 1$ und $2A - 6$ sind gleiche Längen; daraus folgt $A + 7 = A + A$ und $A = 7$ nebst $A - 2 = 5$. Solche Schlüsse, sagen wir, waren Euklid vollständig angemessen, und die Durchführung von Satz 11. des II. Buches der Elemente, die wir (S. 264) als Probe vorgenommen haben, dürfte jedem Zweifel in dieser Beziehung begegnen. Ein ganz andres ist es, ob die epigrammatische Form der Rätselfrage von Euklid herstamme. Ähnliche Fragen werden uns wiederholt begegnen, teilweise auch auf alte Quellen zurückgeführt. Jedenfalls dient die eine Aufgabe der anderen zur Bestätigung, oder zur vernichtenden Kritik. Ist die eine echt, dann kann auch die andere echt sein; ist die eine verhältnismäßig späte Unterschiebung unter den Namen eines Verfassers, der weniger als Verfasser, denn als Vertreter mathematischer Wissenschaft gemeint ist, so daß euklidisches Problem nur heißen soll: Problem, wie es Euklid zu lösen imstande war, dann dürfte das gleiche auch für die andere Aufgabe gelten. Wir müssen uns enthalten eine Entscheidung zu treffen, zu welcher dem Mathematiker so gut wie keine bestimmenden Gründe vorliegen. Nur die vollständige Verschiedenheit des Epigrammes von allen sonstigen euklidischen Schriften lassen wir als Gegengrund gegen die Echtheit nicht gelten. Ein Gedichtchen ist nun einmal keine Abhandlung. Beide müssen voneinander abweichen, und daß es dem Ernste des Mathematikers nicht widerspricht, auch einmal an die Scherzform der Poesie sich zu wagen, haben Beispiele aller Zeiten bewiesen. Zudem würde dieser Gegengrund vollends schwinden, wenn man zu der eben durch ein Wort angedeuteten Auffassung sich bekennen wollte, Euklid habe die Aufgabe nicht gestellt, sondern gelöst, und sie sei deshalb unter seinem Namen bekannt geblieben.

Proklus berichtet[1]) noch von einer weiteren geometrischen Aufgabensammlung, welche Euklid verfaßte und welche den Namen des Buches von der Teilung der Figuren, *περὶ διαιρέσεων βιβλίον*, führte[2]). Bis in die zweite Hälfte des XVI. S. war diese Schrift, abgesehen von den Auszügen aus derselben, von denen man nicht wußte, daß sie daher stammten, für das Abendland verschollen. Da fand John Dee um 1563 eine arabische Schrift gleichen Titels, welche er, wiewohl Mohammed Bagdadinus (so lautet der Name in der uns allein bekannten latinisierten Form) als Verfasser genannt war, für euklidisch hielt, und deren lateinische Übersetzung er anfertigte, die zuerst 1570 durch Dee in Gemeinschaft mit Commandino herausgegeben wurde, und die alsdann in die Gregorysche Euklidausgabe von 1702 Aufnahme fand. Dees Vermutung hat an Wahrscheinlichkeit gewonnen, seit Woepcke in Paris ein zweites arabisches Bruchstück auffand, welches mit dem Deeschen Manuskripte wenn auch nicht wörtlich doch dem Wesen nach übereinstimmend, namentlich eine Lücke jenes ersten Textes ergänzte. Proklus erwähnt nämlich ausdrücklich Sätze über die Teilung des Kreises, und diese fehlten in dem Deeschen, fanden sich in dem Woepckeschen Bruchstücke. Nimmt man hinzu, daß in letzterem Euklid als Verfasser geradezu genannt ist, so wird es fast zur Gewißheit, daß hier eine Bearbeitung des euklidischen Textes vorliegt. Eine wörtliche Übersetzung anzunehmen hindern einige vorkommende mathematische Unrichtigkeiten, die einem Euklid nicht wohl entstammen können[3]). Einige Beispiele der uns erhaltenen Aufgaben sind folgende. Das Dreieck wie das Viereck werden durch eine einer gegebenen Geraden parallele Linie nach gegebenem Verhältnisse geteilt. Für das Fünfeck ist die Aufgabe nicht ganz so allgemein gestellt, aber immerhin wird die Teilung desselben nach gegebenem Verhältnisse verlangt, sei es von einem Punkte einer Fünfecksseite aus, sei es durch eine zu einer Fünfecksseite unter gewissen Voraussetzungen parallele Gerade. Endlich schließt die pariser Handschrift, wie bemerkt, die Aufgaben ein, eine von einem Kreisbogen und zwei einen Winkel bildenden Geraden gebildete Figur durch eine Gerade in zwei gleiche Teile zu teilen, und von einem gegebenen Kreise einen bestimmten Teil abzuschneiden, Aufgaben, zu deren Lösung ein ziemlicher Grad geometrischer Gewandtheit

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 69 und 144. [2]) Vgl. Gregory in der Vorrede zu seiner Euklidausgabe. Woepcke im *Journal Asiatique* für September und Oktober 1851 und ganz besonders Ofterdinger, Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklid über die Theilung der Figuren. Ulm 1853.
[3]) Das bemerkte bereits Savilius, *Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis.* Oxford 1621, pag. 17.

erforderlich ist, wenn auch die Grundlage derselben durchaus elementarer Natur bleibt. Die Figur $AB\Gamma\Delta$ z. B. (Fig. 43) wird, wenn E die Mitte der Sehne $B\Delta$ bezeichnet, offenbar durch die gebrochene Linie $AE\Gamma$ halbiert. Wird alsdann EZ parallel zu $A\Gamma$ gezogen, so haben die Dreiecke $AZ\Gamma$ und $AE\Gamma$ gleichen Inhalt, und mithin halbiert auch die Gerade ΓZ unsere Figur.

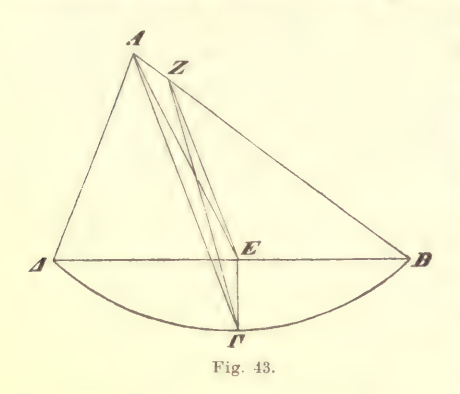


Fig. 43.

Einige andere Schriften des Euklid können als die geistige Fortsetzung seiner Porismen betrachtet werden, indem sie sich zur höheren Mathematik ihrer Zeit ordnen lassen: Vier Bücher über die Kegelschnitte und zwei Bücher über die Örter auf der Oberfläche. Das letztgenannte Werk, die τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν, hat als Spur außer seinem Titel nur vier Lemmen bei Pappus hinterlassen[1]). Wenn man daher gemeint hat, Euklid habe in diesen Örtern auf der Oberfläche Umdrehungsflächen zweiten Grades behandelt[2]), so ist diese Vermutung nur mit äußerster Vorsicht zu wiederholen. Größere Wahrscheinlichkeit hat für uns die Auffassung[3]), jene Örter beträfen Kurven auf Zylinderflächen, vielleicht auch auf Kegelflächen.

Das Werk über die Kegelschnitte ist gleichfalls bei Pappus erwähnt, welcher sogar behauptet, die vier ersten Bücher des Apollonius stützten sich wesentlich auf diese Vorarbeit des Euklid[4]). Man wird dadurch leicht verleitet den Inhalt der Kegelschnitte des Euklid einigermaßen zu überschätzen und insbesondere einen Zusammenhang mit dem 44. Satze des I. Buches, dem 28. und 29. Satze des VI. Buches der Elemente zu vermuten, der doch wohl nicht stattfindet. Wir haben diese Sätze (S. 262 und 266) schon erwähnt, wir haben vorher (S. 171) angekündigt, wir würden bei Gelegenheit der euklidischen Geometrie auf die Wörter Parabel, Ellipse, Hyperbel und deren Bedeutung eingehen, wir müssen jetzt diese Zusage einlösen. Wir nehmen dabei zur größeren Einfachheit der Betrachtung an, daß die Parallelogramme, von welchen in jenen drei Sätzen der Elemente die Rede ist, immer Rechtecke seien; bei schiefwinkligen Parallelogrammen wird die Behandlung jener Aufgaben langwieriger, aber keineswegs wesentlich schwieriger.

[1]) Pappus VII *propos.* 235 sqq. (ed. Hultsch) pag. 1004 sqq. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 273. (Deutsch: 272.) [3]) Heiberg, Euklidstudien S. 81—83. [4]) Pappus VII *Prooemium* (ed. Hultsch) pag. 672.

Es sei (Fig. 44) $AB = p$ eine gegebene Länge senkrecht zu $A\Xi$ aufgetragen; ist nun ferner $A\Gamma$ gegeben, so gibt es immer einen einzigen Punkt Δ, welcher zur Bildung des Rechtecks $ABZ\Delta$ führt, das einen bekannten Flächenraum, nämlich den des Quadrates über $A\Gamma$, oder über der der $A\Gamma$ gleichen ΔE, besitzt. Wählt man umgekehrt bei bekanntem $AB = p$ auf der Geraden $A\Xi$ einen beliebigen Punkt Δ, so gibt es senkrecht über und unter Δ die Punkte E, E', welche das Quadrat von ΔE ($\Delta E'$) dem Rechtecke aus p und $A\Delta$ gleich werden lassen. Werden verschiedene Punkte Δ gewählt, so nimmt auch E verschiedene Lagen an, aber immer ist das an AB angelegte, *παραβαλλόμενον*, Rechteck dem Quadrate über ΔE genau gleich. Nennen wir nach heutigem Brauche $A\Delta = x$, $\Delta E = y$, so spricht sich die letzte Bemerkung symbolisch $y^2 = px$ aus, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Fortrücken von Δ auf $A\Xi$ erzeugt denken, ist eine Parabel. Da bei einer solchen Anlegung (*παραβολή*) das Produkt zweier Faktoren dem zweier anderer gleichgesetzt ist, so kann man dieselbe auch zur Division (*μερισμός*) einer Zahl durch eine andere verwenden, und in der Tat definiert sie ein alter Scholiast zum VI. Buche der Euklidischen Elemente geradezu in dieser Weise[1]).

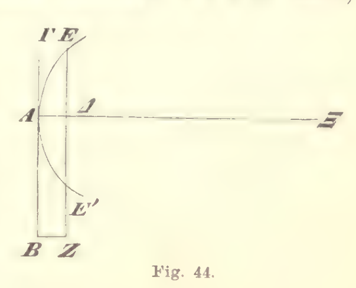


Fig. 44.

Außer dem $AB = p$ sei (Fig. 45) auf der dazu senkrechten $A\Xi$ ein Stück $AA = a$ bekannt, so ist $ABKA$ ein durchaus gegebenes Rechteck, welchem jedes andere Rechteck ähnlich ist, dessen B gegenüberliegende Winkelspitze H auf der Diagonale BA des erstgenannten Rechtecks sich befindet. Ist nun wieder ein Flächenraum — das Quadrat über $A\Gamma$ oder ΔE — gegeben, so wird es einen einzigen Punkt H der BA geben, mit dessen Hilfe das Rechteck $A\Delta H\Theta$ gleich jenem Flächenraum wird, oder mit anderen

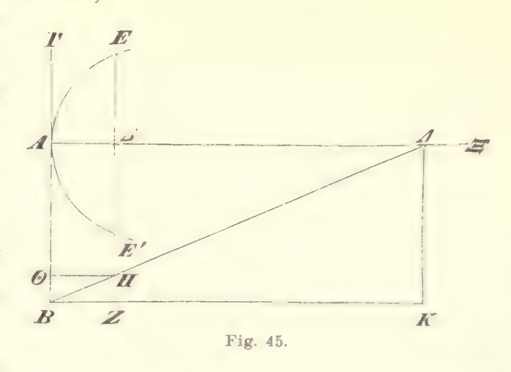


Fig. 45.

[1]) Heibergs Euklidausgabe Bd. V, 347 lin. 20 παραβολὴ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς λέγεται ὁ μερισμός· παραβαλεῖν γὰρ ἀριθμὸν παρὰ ἀριθμόν ἐστι τὸ μερίσαι τὸν μείζονα ἐις τὸν ἐλάττονα ἤτοι δεῖξαι, ποσάκις ὁ ἐλάττων περιέχεται ὑπὸ τοῦ μείζονος.

Worten, welcher es möglich macht, daß das an AB angelegte Rechteck außer dem Teile $A\Theta$ von AB, welchen es mit dem dem Quadrate von $A\Gamma$ gleichen Flächenraume in Anspruch nimmt, noch ein Stückchen ΘB übrig läßt, ἐλλείπει, über welchem das dem Rechtecke $ABKA$ ähnliche kleine Rechteck ΘBZH steht. Denken wir uns auch hier die Aufgabe umgekehrt, so wird zu jedem Punkte Δ ein Punkt E senkrecht über ihm, ein Punkt E' senkrecht unter ihm gefunden werden können, so daß das Quadrat von ΔE dem jetzt bekannten Rechtecke $A\Delta H\Theta$, dessen Eckpunkt H auf der Diagonale BA des vollständig gegebenen Rechtecks $ABKA$ sich befindet, gleich sei. Auch hier ist der symbolische Ausdruck übersichtlicher. Ist nämlich $\Theta B = \alpha \cdot p$, wo α eine Zahl bedeutet, so muß $\Theta H = \alpha \cdot a$ sein, und die Fläche ΘBZH ist $= \alpha^2 \cdot ap$. Mit Hilfe von $A\Delta = x$, $\Delta E = y$ werden wir also schreiben $y^2 = px - \alpha^2 \cdot ap$, d. h. der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch das Wechseln der Lage von Δ erzeugt denken, ist eine Ellipse.

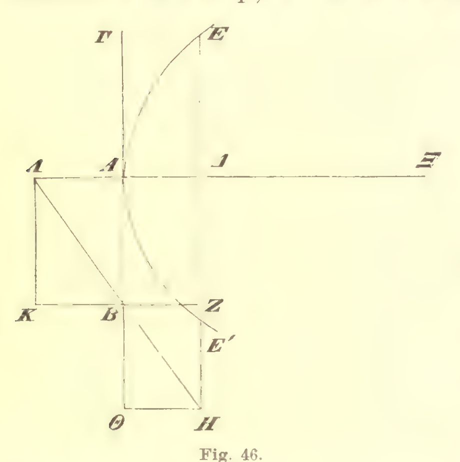


Fig. 46.

Entsprechen (Fig. 46) die griechischen sowohl als die lateinischen Buchstaben denen des vorigen Falles mit dem Unterschiede, daß $AA = a$ jetzt auf der jenseitigen Verlängerung von $A\Xi$ aufgetragen, im übrigen aber der Punkt H wieder so gewählt wird, daß er auf der verlängerten Diagonale AB des Rechtecks $ABKA$ aus den Seiten a und p liegt, daß also die Rechtecke $ABKA$ und ΘBZH einander ähnlich sind, und das Rechteck $A\Delta H\Theta$ denselben Flächenraum besitzt, wie das Quadrat über $A\Gamma$ oder ΔE, so ist dabei die Forderung erfüllt, daß das an AB angelegte Rechteck, um den ihm zugewiesenen Flächenraum zu erlangen, über AB hinausreicht, ὑπερβάλλει, und zwar mit einem dem gegebenen Rechtecke $ABKA$ ähnlichen Rechtecke. Es ist fast überflüssig aufs neue hervorzuheben, daß man auch diese Aufgabe so umzukehren imstande ist, daß nicht mehr H sondern E, beziehungsweise E', gesucht werden und die Gleichung $y^2 = px + \alpha^2 \cdot ap$ sich erfüllen soll. Der geometrische Ort von E, wenn wir einen solchen durch Wechsel der Lage von Δ erzeugt denken, ist eine Hyperbel.

Die Dinge, welche wir hier auseinandergesetzt haben, lassen sich in größter Kürze in die jetzt verständliche Ausdrucksweise zusammen-

fassen, daß es drei geometrische Aufgaben der Flächenanlegung gebe, sämtlich pythagoräischen Ursprunges, sämtlich in Euklids Elementen aufbewahrt, bei deren Ausspruch die drei Zeitwörter vorkommen, welche den Namen der Parabel, Ellipse, Hyperbel zugrunde liegen. Bei Umkehrung dieser Aufgaben, eine Umkehrung aber, welche in den euklidischen Elementen nicht vorkommt, würden als geometrische Örter eben jene Kurven entstehen müssen.

Jetzt sind wir imstande die Fragen genauer zu stellen, um deren Beantwortung willen wir gerade hier auf die Aufgaben pythagoräischer Flächenanlegung näher einzugehen veranlaßt waren. Hat Euklid, von dem wir wissen, daß er über Kegelschnitte schrieb, die Umkehrung jener Aufgaben, für die der Natur der in ihnen vorkommenden Kurven nach in den Elementen kein Platz war, überhaupt gekannt? Haben schon vor Euklid die Pythagoräer das Auftreten dieser Kurven und ihre Eigenschaften bemerkt, die freilich nicht in Form der drei Gleichungen, deren wir uns bedienten, um kürzer sein zu dürfen, aber in einem geometrischen Wortlaute sehr wohl von einem Griechen verstanden werden konnten? Hat Euklid erkannt, daß diese in der Ebene erzeugten Kurven dieselben seien, welche auf dem Mantel geschnittener Kegel entstehen?

Man hat diese Fragen verschiedentlich beantwortet [1]). Uns scheinen sie insgesamt verneint werden zu müssen. Um mit der letzten anzufangen, so hat Euklid die Identifikation der Kurven von den genannten Eigenschaften, die sich auf Flächenanlegung bezogen, mit Kegelschnitten keinesfalls gekannt, weil nach des Pappus ausdrücklichem Zeugnisse Apollonius erst diese doppelte Entstehungsweise entdeckte [2]). Die Bekanntschaft der Pythagoräer mit jenen Kurven werden wir gleichfalls leugnen dürfen, wenn wir nur zu begründen vermögen, daß auch die erste Frage nicht zu bejahen ist, daß vielmehr Euklid, als er die Elemente schrieb, von jener Umkehr, von den dabei entstehenden krummen Linien, ganz abgesehen von ihrer Übereinstimmung mit Kegelschnitten, nichts wußte. Das scheint uns daraus zu schließen gestattet, weil er sonst in den Elementen die drei Aufgaben, welche schon um ihres gemeinsamen Ursprungs bei den Pythagoräern willen bis zu einem gewissen Grade zusammengehörten, wenn sie eine weitere Zusammengehörigkeit dadurch an den Tag gelegt hätten, daß sie alle drei zu eigentümlichen Kurven führten, mutmaßlich nicht getrennt hätte.

[1]) Für die Bejahung Arneth, Geschichte der reinen Mathematik (Stuttgart 1852) S. 92—93, an dessen Darstellung wir uns hier vielfach anlehnten ohne seine Folgerungen zu teilen und ganz besonders Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum. [2]) Pappus, VII *Prooemium* (ed. Hultsch) 674.

Es ist wohl richtig, daß die Sätze 28. und 29. des VI. Buches erst behandelt werden konnten, wo der Begriff der Ähnlichkeit bekannt war; es ist eben so richtig, daß Satz 44. des I. Buches schon vor dem VI. Buche Verwertung fand; aber Euklid war nicht der Mann, dem eine kleine Umformung dieses 44. Satzes des I. Buches sonderliche Mühe verursacht hätte, so daß er den Sinn desselben in anderem Wortlaute im VI. Buche neuerdings neben den verwandten Aufgaben wiederholen konnte, wie er es mit dem goldenen Schnitte gemacht hat, von dem bei der Übersicht der Elemente die Rede war. Euklid lehrte ihn als 11. Satz des II. Buches; er wandte ihn im 10. Satze des IV. Buches an; er brachte ihn um des Zusammenhanges willen im 1. Satze des XIII. Buches in anderer Form noch einmal. Das Gleiche wäre für Satz 44. des I. Buches zu erwarten, wenn der Verfasser der Elemente die Parabel, die Ellipse, die Hyperbel als Kurven in der Ebene gekannt hätte. Daß sie als solche auch in den euklidischen Büchern von den Kegelschnitten nicht vorkommen konnten, ist durch den Titel jener Bücher festgestellt, und so scheint unser nach allen Seiten verneinendes Urteil auf ziemlich sicheren Füßen zu ruhen.

Wenn wir so ausgeschlossen haben, was in den vier Büchern der Kegelschnitte nach unserem Dafürhalten nicht gestanden haben kann, so wissen wir doch von mancherlei Dingen, die dort ihren Platz finden mußten. Vor allem werden dort diejenigen Dinge gestanden haben, welche Menächmus schon kannte, insbesondere werden die Asymptoten vorgekommen sein, mit deren Eigenschaften Menächmus vertraut war. Vorgekommen wird auch sein, was in einer Stelle der Phaenomena wiederholt ist, daß der Schnitt, welcher einen Kegel oder einen Zylinder nicht parallel zur Basis (μὴ παρὰ τὴν βάσιν) treffe, der Schnitt eines spitzwinkligen Kegels (vergl. S. 244) sei, welcher einem länglichen Schilde, Thyreos gleiche. Offenbar ist dieser Satz richtig für den Zylinderschnitt, nur bedingt richtig für den des Kegels, wenn nämlich der Schnitt beide Kegelseiten trifft. Die Vermutung, Thyreos sei der älteste Name der Ellipse gewesen, wiederholen wir mit allem Vorbehalte[1]). Dafür spricht allerdings die wiederholte Anwendung des Namens bei Proklos[2]). Ob Anwendungen der Kegelschnitte auf die Verdoppelung des Würfels bei Euklid gelehrt wurden, ist fraglich. Es wäre auffallend, wenn er an so wich-

[1]) Sie rührt von Heiberg her, welcher auch auf die wichtige Stelle der Phaenomena zuerst aufmerksam machte. Vgl. Heiberg, Euklidstudien S. 88.
[2]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 103 lin. 6, pag. 111 lin. 6 und besonders pag. 126 lin. 19 sqq. Vgl. L. Majer, Proklos über die Definitionen bei Euklid. Stuttgart 1881. S. 12, Note 1.

tigen älteren Dingen vorübergegangen wäre; es wäre auffallender, wenn er sich dabei aufhielt und weder Eratosthenes noch Eutokius in ihrem historischen Berichte über das delische Problem den Namen des Euklid genannt hätten; von der auffallendsten Erscheinung zu schweigen, die darin wieder bestände, wenn Euklid sich keiner einzigen der antiken höheren Aufgaben zugewandt hätte, er der mitten in seiner Zeit lebend wie kaum je ein anderer ihre Gesamtergebnisse in sich vereinigte.

Wir haben eine einzelne Stelle der Phaenomena[1]), einer astronomischen Schrift Euklids, angeführt. Wichtiger ist diese Schrift noch dadurch, daß in ihr Sätze über die Kugellehre, die sogenannte Sphärik, gesammelt sind, welche zeigen, welchen Grad der Entwicklung dieser Teil der Stereometrie damals schon erreicht hatte. Euklid weiß, daß jede Ebene die Kugel in einem Kreise schneidet. Er weiß, was allerdings auch ein kurz vor ihm lebender Astronom, Autolykus von Pitane[2]), schon ähnlich aussprach, daß Kugelkreise, die sich halbieren, größte Kreise sind. Er kennt Eigenschaften von Kreisen, welche durch die Pole von anderen hindurchgehen. Er weiß, daß, wenn ein größter Kugelkreis zwei gleiche Parallelkreise schief schneidet, die Abschnitte der letzteren in umgekehrter Ordnung einander gleich sind usw. Die Frage ist von großem Belang, woher diese Kenntnisse des Autolykus, des Euklid stammen mögen? Man hat die Vermutung gewagt[3]), bedeutende Anfänge einer Sphärik gingen bis auf Eudoxus zurück. Wir wollen keinen Widerspruch erheben, bemerken aber, daß eigentliche Beweisgründe für diese Vermutung nicht vorhanden sind.

Von dem Gegensatze, welcher für die Griechen zwischen Geometrie und Geodäsie obwaltet, war (S. 252 und 271) die Rede. In Dikaearch haben wir (S. 257), mag er von der Dioptra Gebrauch gemacht haben oder nicht, einen wirklichen Geodäten kennen gelernt. Auch von Euklid ist uns Feldmesserisches in einer sogenannten Optik[4]) erhalten, und über die vier Kapitel 19, 20, 21, 22, welche

---

[1]) Die Phaenomena sind griechisch herausgegeben von Gregory in seiner Euklidausgabe, deutsch von A. Nokk in einer Freiburger Programmbeilage von 1850. Über die Echtheit der Phaenomena vgl. insbesondere A. Nokk in seiner Bruchsaler Programmbeilage von 1847 Ueber die Sphärik des Theodosius S. 17 flg. Neueste Untersuchungen in Heibergs Euklidstudien. [2]) Die erhaltenen Schriften des Autolykus hat Fr. Hultsch herausgegeben. Leipzig 1885. [3]) Hultsch in der Vorrede zu Autolykus pag. XII mit Berufung auf Heiberg und P. Tannery. [4]) Der griechische Text abgedruckt in Heibergs Euklidstudien S. 100—102, eine deutsche Überarbeitung bei H. Weissenborn, Gerbert. Berlin 1888. S. 96 bis 98. Eine vollständige Ausgabe mit alter lateinischer Übersetzung, die sicherlich schon im XIV. Jahrh. vorhanden war, hat Heiberg im 7. Bande von Euklids Werken (Leipzig 1895) besorgt.

dadurch von hohem Interesse geworden sind, müssen wir berichten. Im 19. Kapitel ist die Höhemessung mittels des Schattens gelehrt, welche wir (S. 144) als die des Thales beschrieben haben. Im 20. Kapitel wird (Fig. 47) zur Messung der Höhe AB ein Spiegel

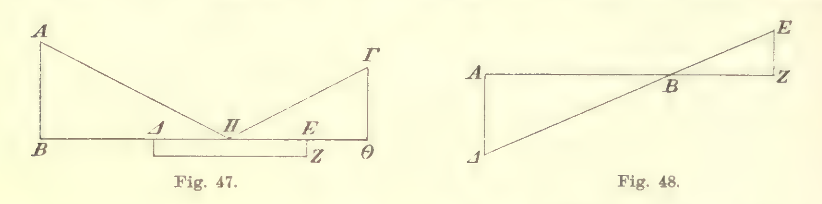


Fig. 47. Fig. 48.

ΔZ benutzt, der auf der Erde liegt. Der Messende sieht, wenn Γ sein Auge ist, den Höhepunkt A in H; wird sodann ΘH, BH, $\Theta\Gamma$ gemessen, so läßt AB vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke ABH und $\Gamma\Theta H$ sich leicht berechnen. Ähnlichkeit von Dreiecken führt im 21. Kapitel zur Messung einer Tiefe $A\Delta$, indem (Fig. 48) der

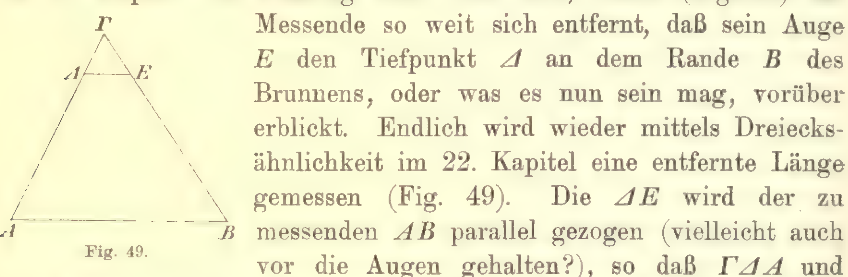


Fig. 49.

Messende so weit sich entfernt, daß sein Auge E den Tiefpunkt Δ an dem Rande B des Brunnens, oder was es nun sein mag, vorüber erblickt. Endlich wird wieder mittels Dreiecksähnlichkeit im 22. Kapitel eine entfernte Länge gemessen (Fig. 49). Die ΔE wird der zu messenden AB parallel gezogen (vielleicht auch vor die Augen gehalten?), so daß $\Gamma\Delta A$ und ΓEB Sehstrahlen sind, welche in A und B eintreffen. Alsdann ist $\Gamma\Delta : \Gamma A = \Delta E : AB$.

Damit sind die hier genauer zu behandelnden Schriften des Euklid erschöpft. Ihm zugeschriebene Bücher über Musik nennen wir nur im vorübergehen; wir haben S. 165 ein Bruchstück derselben erwähnt, welches von einem arithmetischen Satze des Archytas handelte. Überdies sind verschiedene Bruchstücke mechanischen Inhaltes[1]) teils in arabischer Sprache, teils in mittelalterlicher lateinischer Übersetzung erhalten, für deren Echtheit oder Unechtheit wir uns nicht zu entscheiden brauchen, da sie dem Gegenstande unserer Untersuchungen doch nur sehr entfernt verwandt sind. So viel scheint gesichert, daß die Stücke in letzter Linie dem Griechischen entstammen, und daß sie einen tüchtigen Geometer der klassischen Zeit zum Verfasser hatten, der die Lehre vom Hebel beherrschte.

---

[1]) P. Duhem, Les Origines de la Statique I, 62—79.

14. Kapitel.

Archimedes und dessen geometrische Leistungen.

Wir stehen an der Schilderung des Schriftstellers, welcher der Zeit nach unmittelbar auf Euklid folgt, dem Gehalte nach dagegen allen den Vorrang abgewann, die im Altertum mit Mathematik sich beschäftigt haben. Wir brauchen nach dieser in wenigen Worten enthaltenen Würdigung wohl kaum zu sagen, wen wir meinen. Archimedes ist einer der wenigen Mathematiker des Altertums, welchen die Nachwelt zu allen Zeiten nach Gebühr ihre dankbare Erinnerung zuwandte. Er hat sogar einen eigenen Biographen in Heraklides gefunden, einem Schriftsteller von nicht näher zu bestimmender Lebenszeit, als daß er jedenfalls vor das VI. S. zu setzen ist, da Eutokios aus ihm geschöpft hat[1]), es sei denn, man wolle in Heraklides einen Freund des Archimedes wiedererkennen, der diesen Namen führte, und von welchem in dem Buche über Schneckenlinien wiederholt die Rede ist[2]). Sei dem, wie es wolle; das vermutlich wichtige Quellenwerk über das Leben des Archimedes ist uns verloren, und so muß, was über seine persönlichen Verhältnisse zu sagen ist, aus den verschiedensten Schriftstellern zusammengesucht werden[3]). Archimed wurde in Syrakus wahrscheinlich 287 v. Chr. geboren. Eine Stelle aus einer Schrift des Archimedes *Φειδία δὲ τοῦ 'Ακούπατρος*[4]), der man keinen guten Sinn abgewinnen konnte, und die man deshalb für verderbt hält, hat zur Vermutung[5]) geführt, es habe ursprünglich *Φειδία τοῦ ἁμοῦ πατρός* geheißen, und der Name von Archimedes' Vater sei demnach Pheidias gewesen, derselbe habe sich überdies als Astronom verdient gemacht. Allerdings ist damit der Zweifel nicht gehoben, ob Archimed, wie eine Nachricht meldet, dem Könige Hieron verwandt, ob er, nach einer anderen Nachricht, von niederer Geburt war. Sein nahes fast freundschaftliches Verhältnis zu dem Könige steht jedenfalls außer Zweifel. Wer die Lehrer des Archimed gewesen sind, ist nicht bekannt. So viel gibt Diodor an[6]), und ein

---

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) III, 266 zitiert Eutokius: *Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ.* [2]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 2 und 6. [3]) Die Hauptquellen sind Plutarch (vita Marcelli), Livius XXV, Cicero (Tusculan. und Verrin.), Diodor, Silius Italicus, Valerius Maximus, Tzetzes. Die neuesten Zusammenstellungen in Bunte, Ueber Archimedes (Programm der Realschule zu Leer, Ostern 1877) und in der Kopenhagner Doktordissertation von 1879: J. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae. [4]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 248 lin. 8. [5]) F. Blass in den Astronomischen Nachrichten CIV, 255. [6]) Diodor V, 37.

unbekannter arabischer Schriftsteller bestätigt es, daß er in Ägypten war, er wird daher jedenfalls zu den Alexandrinern in Beziehung getreten sein. Auch von einem Aufenthalte Archimeds in Spanien wird erzählt. Nach Syrakus zurückgekehrt lebte er dort der Wissenschaft, deren praktische Anwendung er jedoch so wenig verschmähte, daß gerade seine Leistungen in der Mechanik zu denen gehören, welche ihn am berühmtesten gemacht haben. Vor allem waren die Dienste, die er seiner Vaterstadt Syrakus im Kriege gegen Rom leistete, geeignet, seinem Namen Glanz zu verleihen. Die Bemühungen des Archimed waren es ganz allein, so erzählt Livius, welche die Angriffe des Marcellus auf die belagerte Stadt durch zwei Jahre vereitelten. Nur durch eine Überrumpelung von der Landseite aus gelang es 212 v. Chr. Syrakus zu nehmen, und bei dieser Gelegenheit starb Archimed im Alter von 75 Jahren[1]), ein Opfer der Roheit eines römischen Soldaten, welcher ihn niedermachte, während er des Tumultes nicht achtend seine geometrischen Figuren in den Sand zeichnete. Ob er dabei die Worte aussprach: *παρὰ κεφαλὰν καὶ μὴ παρὰ γραμμὰν*, jener möge lieber den Kopf als die Linien ihm verletzen, oder nur um Schonung seiner Figuren bat, *ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε, τοῦ διαγράμματός μου*, wie ein anderer Berichterstatter in jedenfalls unrichtigem Dialekte ihn ausrufen läßt[2]), ist ziemlich gleichgültig. Marcellus, der römische Feldherr, empfand große Trauer über den Tod des berühmten Gegners und ließ ihm ein Grabmal setzen mit einer mathematischen Figur als Inschrift, wie jener es einst selbst angeordnet hatte. Das Grabmal scheint indessen von Archimeds Landsleuten schmählich vernachlässigt worden zu sein, da Cicero, der es bei seinem Aufenthalte in Syrakus, wo er 75 v. Chr. als Quästor von Sizilien verweilte, aufsuchte, es nur mit Mühe unter dem überwuchernden Gestrüppe entdeckte und an der Inschrift erkannte. Er ließ es darauf aufs neue instand setzen.

Die Schriften Archimeds[3]) sind nur zum Teil auf uns gekommen und zudem nicht alle im reinen unverderbten griechischen Grundtexte. Die besterhaltenen tragen als besonderes Kennzeichen noch an sich, daß sie im dorischen Dialekte abgefaßt sind, wodurch sie auch sprachliche Wichtigkeit besitzen. Durch Vergleichung der Persönlichkeiten, welche in den einzelnen Schriften des Archimed

---

[1]) Nach Tzetzes. Auf dieser Angabe beruht die Berechnung seines Geburtsjahres. [2]) Die erste Redensart nach Zonaras, die zweite nach Tzetzes. [3]) Die beste ältere Ausgabe des Textes und des Kommentars von Eutokius von Askalon, so viel davon vorhanden ist, war die von Torelli. Oxford 1792. Sie wurde weit überholt durch die Ausgabe von Heiberg in 3 Duodezbänden. Leipzig 1880—81. Die beste deutsche Übersetzung von Nizze. Stralsund 1824.

genannt sind, nämlich des Konon, des Zeuxippus, des Dositheus, des Königs Gelon, durch fernere Vergleichung der nicht allzuseltenen Benutzung in späteren Schriften von Sätzen, welche in früheren bewiesen worden waren, ist es gelungen folgende wahrscheinlich zutreffende Anordnung der vorhandenen archimedischen Schriften nach ihrer Entstehungszeit zu erhalten: 1. Zwei Bücher vom Gleichgewichte der Ebenen, zwischen welche eine Abhandlung über die Quadratur der Parabel mitten eingeschoben ist. 2. Zwei Bücher von der Kugel und von dem Zylinder. 3. Die Kreismessung. 4. Die Schneckenlinien oder Spiralen. 5. Das Buch von den Konoiden oder Sphäroiden. 6. Die Sandeszahl. 7. Zwei Bücher von den schwimmenden Körpern. 8. Wahlsätze.

Es will nicht gut angehen wieder, wie wir es bei Euklid getan haben, den Inhalt dieser Schriften einzeln und der Reihe nach durchzusprechen. Daß einer solchen Darstellung notwendigerweise die Übersichtlichkeit abgeht, wird der Leser gerade in den Euklid gewidmeten Kapiteln bemerkt haben. Dort mußten wir aber diese sonst wesentliche Bedingung opfern, weil es darauf ankam zu zeigen, was alles unter dem Namen Elemente der Geometrie einbegriffen wurde. Eine ähnliche Notwendigkeit wird uns im 18. und 19. Kapitel noch zwingen, die für uns vielfach unzusammenhängenden Gegenstände, die Herons großes feldmesserisches Werk behandelte, einzeln zu nennen. Archimed aber hat kein uns erhaltenes Sammelwerk geschrieben. Er verfaßte vorwiegend einzelne Abhandlungen, in denen er zumeist Neues, von ihm selbst Erdachtes mitteilte, und da wird es für die Würdigung der Größe der Entdeckungen sich als zweckmäßiger empfehlen, die Gegenstände aus den einzelnen Abhandlungen herauszureißen und nach ihrem Inhalte zu neuen Gruppen zu vereinigen. Wir werden zu reden haben von den Entdeckungen Archimeds in der Geometrie der Ebene und des Raumes, in der Algebra und Arithmetik, endlich im Zahlenrechnen, wobei wir des griechischen Zahlenrechnens überhaupt gedenken müssen, wir werden auch nicht umhin können, seine mechanischen Leistungen ins Auge zu fassen.

Vielleicht beginnen wir am besten mit einem geometrischen Spielwerke. Ein Metriker aus dem Jahre 500 etwa, Atilius Fortunatianus, erzählt[1]) von dem loculus Archimedius. Ein elfenbeinernes Quadrat war in 14 Stücke von verschiedener vieleckiger Gestalt zerschnitten, und es handelte sich darum aus diesen Stücken das ursprüngliche Quadrat, aber auch sonst beliebige Figuren zusammenzulegen. Es bleibe dahingestellt, ob Archimed wirklich selbst

[1]) Veteres Grammatici (ed. Putschius) pag. 2684.

dieses Spiel erdachte, oder ob man nur als archimedisch, d. h. als sehr schwierig bezeichnen wollte, die einzelnen Gestaltungen herzustellen.

Als archimedisch wird auch häufig die Definition genannt, die Gerade sei die kürzeste Entfernung zweier Punkte. Diese Behauptung ist richtig und unrichtig, je nachdem man den Nachdruck auf den Wortlaut des Satzes oder auf seine Eigenschaft als Definition legt. Archimed benutzt den Satz allerdings in seinen Büchern über Kugel und Zylinder, aber er beabsichtigt keineswegs durch ihn die Gerade zu erklären. Er nehme an, sagt er vielmehr ausdrücklich[1]), von den Linien, welche einerlei Endpunkte haben, sei die gerade Linie die kürzeste; er nehme ferner an, von Linien in einer Ebene, die mit einerlei Endpunkten versehen nach einer Seite hin hohl seien, müsse die umschlossene die kürzere sein.

Als geometrisch interessant bieten sich uns ferner einige Wahlsätze. Das unter diesem Titel bekannte, aus 15 Sätzen der ebenen Geometrie bestehende Buch ist aus dem Arabischen ins Lateinische übertragen worden[2]). Daß es in der Form, wie wir es besitzen, keinenfalls von Archimed selbst herrühren kann, dessen Name im 4. und 14. Satze genannt ist, während in anderen Sätzen andere Unzuträglichkeiten nicht zu verkennen sind, ist mit Recht bemerkt worden[3]). Einige Sätze scheinen uns gleichwohl archimedischen Ursprunges zu sein, unter welchen namentlich der 4., 5., 6., der 11., der 14., der 8. hier genannt seien. Satz 4.—6. beschäftigen sich mit dem Arbelos (Fig. 50), einer in Gestalt eines Schusterkneifes gekrümmten Figur, bestehend aus einem Halbkreise, über dessen Durchmesser in zwei aneinanderstoßenden Abteilungen kleinere Halbkreise in das Innere des umschließenden Halbkreises sich erstrecken. Daß Archimed sich

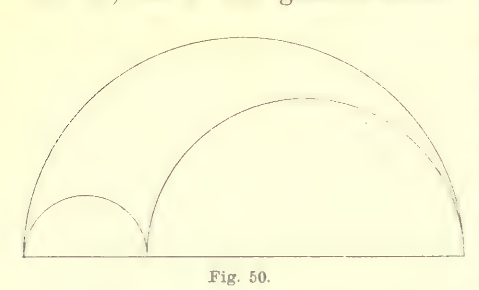


Fig. 50.

mit dieser Figur beschäftigt habe, ist einer Stelle des Pappus[4]) zu entnehmen, in welcher wenigstens von alten Untersuchungen über sie die Rede ist. Im 5. und im 6. Satze ist von dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der drei Höhen eines Dreiecks die Rede[5]). Der 11. Satz besagt,

---

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 8—10, (ed. Nizze) 44. [2]) Liber assumptorum. Archimed (ed. Heiberg) II, 428—446, (ed. Nizze) 254—262. [3]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*, 24. [4]) Pappus Buch IV, 19 (ed. Hultsch) Bd. I, pag. 208. [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 434 und 436.

daß wenn in einem Kreise zwei Sehnen sich senkrecht durchschneiden, die Quadrate der vier so gebildeten Abschnitte zusammen dem Quadrate des Durchmessers gleich sein müssen. Der 14. Satz lehrt den Flächeninhalt des Salinon messen, der Wogengestalt, wie man den ausdrücklich als von Archimed herstammend bezeugten Namen vielleicht übersetzen darf[1]). Diese Figur entsteht (Fig. 51), wenn über und unter derselben Geraden als Richtung des Durchmessers von demselben Mittelpunkte aus aber mit verschiedenen in beliebigem Verhältnisse zueinander stehenden Halbmessern Halbkreise beschrieben werden,

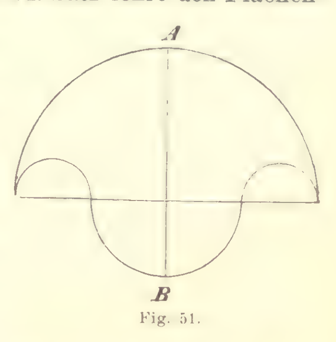


Fig. 51.

zu welchen noch zwei Halbkreischen nach der Seite des großen Halbkreises hin gerichtet über dem durch den nach der Jenseite sich wölbenden kleineren Halbkreis freigelassenen Stückchen des Durchmessers treten. Wird durch den Mittelpunkt der beiden erstgezeichneten Halbkreise und senkrecht zu deren Durchmesser die Strecke AB gezeichnet, so ist der um dieselbe als Durchmesser beschriebene Kreis dem Salinon flächengleich. Der 8. Satz hat folgenden Inhalt. Wenn (Fig. 52) eine willkürliche Sehne AB eines Kreises verlängert und die Verlängerung $B\Gamma$ dem Halbmesser des Kreises gleich gemacht wird, wenn

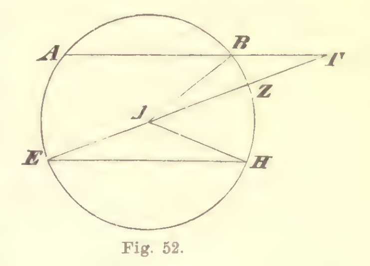


Fig. 52.

hiernächst Γ mit dem Mittelpunkte Δ des Kreises verbunden und diese Verbindungslinie bis zum abermaligen Durchschnitte des Kreises nach E verlängert wird, so ist der Bogen AE das Dreifache des

[1]) Von σάλος = das Schwanken des hohen Meeres? Heiberg in seiner Archimedausgabe II, 443 gibt die Ableitung σέλινον = Eppich, mit dessen Blatt er in der Figur eine Ähnlichkeit erkennen will. Für diese Meinung führt P. Tannery (Bibliotheca Mathematica 3 Folge I, 266. 1900) an, daß auf den Münzen von Selinunt Eppichblätter abgebildet seien, welche der archimedischen Figur ähneln. T. L. Heath (The works of Archimedes. Cambridge 1897. Introduction pag. XXXIII) nimmt an, das Wort σάλινον sei erst in nacharchimedischer Zeit entstanden, als durch die römische Herrschaft lateinische Wörter in die Sprache Siziliens Eingang fanden, wie z. B. *libra* zu λίτρα wurde, *mutuum* zu μοῖτον, *carcer* zu κάρκαρον, *arvina* zu ἀρβίνη, *patina* zu πατάνη. Entsprechend sei σάλινον aus *salinum*, das Salzfäßchen, entstanden. Silberne Salzfäßchen waren als Familienerbstück schon zur Zeit der römischen Republik in jedem Haushalt vorhanden (Horaz Carmina II, 16, 13 und Livius XXVI, 36); die Salzfäßchen hatten aber einen der archimedischen Figur ähnlichen Durchschnitt, wenn man nach einem im British Museum vorhandenen Exemplare urteilen darf.

Bogens BZ. Man ziehe EH parallel zu AB und die Halbmesser ΔB und ΔH. Der Parallelismus von AB und EH bringt $\sphericalangle \Gamma = E$ hervor; Gleichschenkligkeit von Dreiecken zeigt, daß $\sphericalangle \Gamma = B\Delta\Gamma$ und $\sphericalangle E = H$. Ferner $\sphericalangle \Gamma\Delta H = 2E = 2\Gamma = 2B\Delta\Gamma$ und $\sphericalangle B\Delta H = 3B\Delta\Gamma$, also arc. $BH = AE = 3BZ$.

Die beiden letzterwähnten Sätze haben, wie uns scheint, eine besondere Tragweite durch die Ziele, auf welche Archimed mit ihrer Hilfe hinsteuerte. Bei dem 8. Satze, glauben wir, dachte er an die zu vollziehende Dreiteilung des Bogens AE. Sie war vermöge seines Satzes gelungen, sobald man eine Sehne AB versuchsweise mittels Bewegungsgeometrie fand, deren Verlängerung bis zur Verbindungsgeraden von E mit dem Kreismittelpunkte Δ die Länge des Kreishalbmessers besaß. Die vorerwähnte Quadratur des Salinon im 14. Satze wird wohl nicht minder richtig dahin aufzufassen sein, daß Archimed im Anschlusse an die Arbeiten des Hippokrates von Chios geometrisch versuchte, den Flächeninhalt des Kreises mit dem anderer Figuren in Gleichheit zu setzen. Nur war vielleicht die Absicht beider die entgegengesetzte. Hippokrates wollte zuverlässig aus den dem Kreise gleichen Figuren die Fläche des Kreises ermitteln. Archimed beabsichtigte möglicherweise anderweitige krummlinig begrenzte Figuren auf den als bekannt vorausgesetzten Kreis zurückzuführen.

Bekannt war ihm nämlich allerdings der Kreis durch seine Kreismessung. Diese merkwürdige Abhandlung ist nach ihrem geometrischen Gehalte wie mit Hinsicht auf die Geschichte des Zahlenrechnens der höchsten Beachtung wert. Wir haben es fürs erste nur mit dem Geometrischen zu tun. Archimed geht davon aus, daß er beweist, der Kreis sei einem rechtwinkligen Dreiecke gleich, dessen eine Kathete die Länge des Halbmessers, die andere die des Kreisumfangs besitzt. Wäre dieses Dreieck kleiner als der Kreis, so müßte irgend ein angebbarer Unterschied vorhanden sein, und es wäre möglich durch Einzeichnung eines Quadrates in den Kreis und fortgesetzte Halbierung der Bogen ein Vieleck zu erlangen, welches den Kreis bis auf gewisse kleine Abschnitte erfüllte, deren Summe endlich kleiner als jener Überschuß des Kreises über das Dreieck wäre. Nennt man etwa K, V, D die Inhalte des Kreises, des Vielecks, des Dreiecks, so wäre mithin $K > V > D$, zugleich aber $U < P$ sofern U den Umfang des Vielecks, P die Kreisperipherie bedeutet, und zwar begründet sich diese letztere Ungleichung aus jener Annahme über die Gerade als kürzeste Entfernung zweier Punkte, von der oben die Rede war. Nun ist V gleich einem rechtwinkligen Dreiecke, welches als größere Kathete U, als kleinere die Senkrechte h besitzt, die vom

Kreismittelpunkte aus auf irgend eine Seite des Vielecks gefällt war, und die selbst kleiner als der Kreishalbmesser r sein muß. Mit anderen Worten $V = \frac{U \cdot h}{2}$, $D = \frac{P \cdot r}{2}$ und wegen $V > D$ auch $U \cdot h > P \cdot r$, während jeder Faktor des größeren Produktes kleiner ist als ein ihm entsprechender Faktor des kleineren Produktes, und darin liegt ein Widerspruch. Zu einem ferneren Widerspruch führt auch die Annahme $K < D$. Ausgehend von dem dem Kreise umschriebenen Quadrate wird durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl ein umschriebenes Vieleck gefunden werden können, dessen Inhalt V' der Ungleichung $K < V' < D$ genügen muß, während sein Umfang $U' > P$ ist, und die Senkrechte h' vom Kreismittelpunkte auf die Seiten dieses Vielecks notwendig $h' = r$ sein muß. Trotzdem müßte hier $\frac{U' \cdot h'}{2} < \frac{P \cdot r}{2}$ sein oder $U' < P$ und doch auch $U' > P$. Es bleibt also nur die Annahme $K = D = \frac{r \cdot P}{2}$ übrig. Freilich hat man die an die Spitze gestellte Voraussetzung, es gebe eine Gerade von der Länge P, welche als Seite eines rechtwinkligen Dreiecks auftreten könne, bemängelt. Wir erinnern daran, daß Dinostratus die gleiche Annahme schon sich gestattet hatte (S. 247). Auch Eutokius nimmt Archimed gegen den angeführten Vorwurf, welcher ihm damals schon gemacht worden war, in Schutz. Er habe nichts Unziemliches ausgesprochen. Die Kreislinie sei eine Größe von bestimmter Abmessung, der irgend eine Gerade gleich sein müsse und es sei keineswegs unstatthaft, das Vorhandensein jener Geraden in einem Satze vorweg zu benutzen, noch bevor man sie finden gelehrt habe. Allerdings ist nun diese Auffindung das nächste Problem und ihm geht jetzt Archimed rechnend zuleibe, nach einer Methode also, welche Euklid, wie wir (S. 271) besprochen haben, sich wahrscheinlich untersagt hätte, nicht geometrisch, sondern geodätisch. Archimed sucht zwei Grenzen, zwischen welche er das Verhältnis der Kreisperipherie P zum Durchmesser d einschließen will und findet

$$P : d < 3\tfrac{1}{7} : 1 \quad \text{und} \quad P : d > 3\tfrac{10}{71} : 1.$$

Wir bemerken, daß Archimed bei seinem früheren Beweise $K = \frac{r \cdot P}{2}$ von den Quadraten ausging, welche dem Kreise ein- und umgeschrieben werden können, wie es (S. 272) Euklid im 12. Buche der Elemente getan hat um die Proportionalität von Kreisinhalt und Durchmesserquadrat festzustellen, wie es (S. 202) schon viel früher Antiphon getan hatte. Bei der Aufsuchung der Zahlengrenzen für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser ging Archimed

dagegen von einem ganz anderen Versuche aus, welcher die größere Grenze ihm verschaffen sollte. Er benutzte dasjenige gleichseitige Dreieck, welches seine Spitze im Kreismittelpunkte besitzt, während die dritte dieser Spitze gegenüberliegende Seite Berührungslinie an den Kreis ist. Heißt die Seite dieses Dreiecks a, der Kreishalbmesser r, so ist leicht ersichtlich $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1$. Archimed behauptet ohne weitere Begründung, es sei $r : \frac{a}{2} > 265 : 153$ und wirklich ist $\left(\frac{265}{153}\right)^2 = \frac{70225}{23409} = 3 - \frac{2}{23409}$ also $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$. Ferner ist $a : \frac{a}{2} = 306 : 153$. Die beiden Verhältnisse vereinigt geben folglich $(r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153$. Nun kommt eine kleine geometrische Betrachtung. Wenn (Fig. 53) die $A\varDelta$ den Winkel $BA\Gamma$ halbiert, so ist $AB : A\Gamma = B\varDelta : \varDelta\Gamma$, $(AB + A\Gamma) : A\Gamma$ $= (B\varDelta + \varDelta\Gamma) : \varDelta\Gamma$ oder $(a + r) : r = \frac{a}{2} : \varDelta\Gamma$. Aus dieser Proportion folgt weiter $r : \varDelta\Gamma =$ $(r + a) : \frac{a}{2} > 571 : 153$. Dieses Ergebnis zu nachheriger Benutzung aufsparend folgert Archimed weiter $r^2 : \varDelta\Gamma^2 > 571^2 : 153^2$ und $(r^2 + \varDelta\Gamma^2)$ $: \varDelta\Gamma^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2$ oder $A\varDelta^2 : \varDelta\Gamma^2 >$ $349450 : 153^2$ und $A\varDelta : \varDelta\Gamma > 591\frac{1}{8} : 153$. Auch diese Zahlen sind richtig gewählt, denn $\left(591\frac{1}{8}\right)^2 = 349428\frac{49}{64} < 349450$. Der Winkel $\varDelta A\Gamma$ wird durch die AE halbiert. Dadurch gewinnt man neue Proportionen $A\varDelta : A\Gamma = \varDelta E : E\Gamma$, dann $(A\varDelta + A\Gamma) : A\Gamma =$ $(\varDelta E + E\Gamma) : E\Gamma$ und $(A\varDelta + A\Gamma) : (\varDelta E + E\Gamma) = A\Gamma : E\Gamma$, d. h. $(r + A\varDelta) : \varDelta\Gamma = r : E\Gamma$. Nun erinnern wir uns an

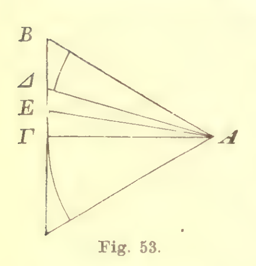


Fig. 53.

$$r : \varDelta\Gamma > 571 : 153$$

nebst

$$A\varDelta : \varDelta\Gamma > 591\tfrac{1}{8} : 153.$$

Die Vereinigung beider Verhältnisse gibt $(r + A\varDelta) : \varDelta\Gamma > 1162\frac{1}{8} : 153$ oder auch

$$r : E\Gamma > 1162\tfrac{1}{8} : 153.$$

Die gewonnenen Ergebnisse stellen wir übersichtlicher zusammen:

$$r : B\Gamma > 265 : 153$$

$$r : \varDelta\Gamma > 571 : 153$$

$$r : E\Gamma > 1162\tfrac{1}{8} : 153.$$

$B\Gamma$ ist die halbe Sechsecksseite, $\Delta\Gamma$ die halbe Zwölfecksseite, $E\Gamma$ die halbe Vierundzwanzigecksseite, wenn immer die regelmäßigen dem Kreise umschriebenen Vielecke gemeint sind. Die Umfänge U'_6, U'_{12}, U'_{24} dieser Vielecke sind

$$U'_6 = 12B\Gamma,\quad U'_{12} = 24B\Gamma,\quad U'_{24} = 48B\Gamma$$

und somit

$$r : U'_6 > 265 : 1836$$
$$r : U'_{12} > 571 : 3672$$
$$r : U'_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 7344.$$

Archimed setzt nun das Verfahren mit Winkelhalbierung, Verbindung von Verhältnissen, Einsetzen von nahezu richtigen, aber immer etwas zu kleinen Quadratwurzelwerten fort bis zu

$$r : U'_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 29376$$

und schließt daraus umgekehrt

$$U'_{96} : d < 14688 : 4673\tfrac{1}{2} < 3\tfrac{1}{7} : 1,$$

da aber $P < U'_{96}$ ist, so muß um so sicherer

$$P : d < 3\tfrac{1}{7} : 1$$

sein.

Nun kommt die entgegengesetzte Aufgabe, eine untere Grenze für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser zu finden an die Reihe, und hierzu nimmt Archimed die dem Kreise eingeschriebenen Vielecke zu Hilfe, indem er, wie Antiphon bei einem seiner Versuche, das eingeschriebene gleichseitige Dreieck zum Ausgange wählt, dessen Seite sich zum Halbmesser verhält wie $\sqrt{3} : 1$, d. h. $< 1351 : 780$. Winkelhalbierungen usw. führen hier zu

$$U'_{96} : d > 6336 : 2017\tfrac{1}{4} > 3\tfrac{10}{71} : 1$$

und um so gewisser zu

$$P : d > 3\tfrac{10}{71} : 1.$$

Nächst dem Kreise beschäftigte sich Archimed bei seinen geometrischen Untersuchungen mit den Kegelschnitten. Man hat wohl angenommen, Archimed habe eine uns verloren gegangene Schrift Elemente der Kegelschnitte, στοιχεῖα κωνικά, verfaßt. Man hat sich dabei auf zwei Stellen gestützt, die eine in der Abhandlung über die Quadratur der Parabel Satz 3.[1]), die andere in dem Buch von

[1]) Archimed (ed. Heiberg) II, 300, (ed. Nizze) 13.

den Konoiden und Sphäroiden Satz 4.[1]), in welchen Archimed auf ein solches Werk verweist, ohne einen Verfasser zu nennen. Das tat, sagt man, Archimed nur, wo er auf eigene Arbeiten zurückgriff. So richtig diese Behauptung im allgemeinen ist, so erinnern wir uns doch einer Ausnahme. Archimed beruft sich, wie wir (S. 261) hervorgehoben haben, im 6. Satze des ersten Buches über Kugel und Zylinder[2]) auf die Elemente und meint damit den Elementenschriftsteller, der vorzugsweise diesen Namen geführt hat, Euklid. Möglich, daß er denselben im Sinne hatte, als er von Elementen der Kegelschnitte sprach, da Euklid bekanntlich auch über diesen Gegenstand ein Werk verfaßt hat[3]). Vielleicht ist eine kleine Bestätigung dieser Vermutung folgendem Umstande zu entnehmen. Pappus gibt nämlich an, die vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius, mit welchen wir uns bald zu beschäftigen haben, stützten sich wesentlich auf die Vorarbeiten Euklids. Bei Apollonius finden wir aber I, 20, 35, 46; II, 5; III, 17, 18, die Lehrsätze, welche Archimed als in den Elementen der Kegelschnitte enthalten benutzt.

Mag dem sein, wie da wolle, jedenfalls rühren wertvolle Einzeluntersuchungen über Kegelschnitte von Archimed her. Wir legen nicht gerade großes Gewicht darauf, daß Archimed dem früher erwähnten Satz von der Entstehung des Schnittes des spitzwinkligen Kegels den dort fehlenden Zusatz gab[4]), die gleiche Kurve könne auf dem Mantel eines jeden Kegels erzeugt werden, aber um so höher steht seine Quadratur der Parabel. Wir haben schon gesagt, daß diese Abhandlung zwischen die beiden Bücher vom Schwerpunkte und dem Gleichgewichte der Ebene eingeschaltet erscheint. Die Methode, deren Archimed sich bedient, um zu seinem Ziele zu gelangen, ist ihren Hauptzügen nach folgende[5]). Wird ein Parabelabschnitt durch eine durch die Mitte der denselben bildenden Sehne der Achse parallel gezogene Gerade geschnitten, so ist die Berührungslinie an die Parabel in dem Schnittpunkte der Sehne selbst parallel. Somit ist die Senkrechte aus diesem Schnittpunkte auf die Sehne die größte Senkrechte, welche überhaupt aus einem Punkte innerhalb des gegebenen Parabelbogens auf die Sehne gefällt werden kann, oder dieser Punkt ist als höchster Punkt des Parabelabschnittes über seiner Sehne zu bezeichnen. Daraus folgt weiter, daß der Parabelabschnitt durch-

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 302, (ed. Nizze) 158. [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 24, (ed. Nizze) 48. [3]) Diese Ansicht ist auch durch Heiberg, Die Kenntnisse des Archimedes über Kegelschnitte (Zeitschr Math. Phys. XXV, Histor.-literar. Abtlg. S. 42) ausgesprochen und teilweise anders begründet worden. [4]) Archimed (ed. Heiberg) I, 288, (ed. Nizze) 154. [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 294—353, (ed. Nizze) 22—25.

aus eingeschlossen ist in dem Rechtecke, welches jene Senkrechte als Höhe, die Sehne nebst der ihr parallelen Berührungslinie als Grundlinie besitzt. Bildet man nun das Dreieck, welches die Sehne zur Grundlinie, den genannten Höhepunkt als Spitze besitzt, und welches folglich von dem ersten Parabelabschnitte um zwei neue kleinere Abschnitte sich unterscheidet, so muß dasselbe als Hälfte des Rechtecks und als eingeschrieben in den Parabelabschnitt größer sein als die Hälfte des Abschnittes, kleiner als sein Ganzes. Man kann aber auch die umgekehrte Folgerung ziehen und die Fläche des Abschnittes größer als das betreffende Dreieck, kleiner als das Doppelte desselben nennen. In jeden der beiden neuen kleineren Abschnitte wird nach ähnlicher Regel wieder ein Dreieck beschrieben, deren jedes mehr als die Hälfte des ihn enthaltenden Abschnittes einnimmt und genau den achten Teil des ersten Dreiecks als Flächeninhalt besitzt. Es ist das ein Verfahren, bei welchem dasjenige als Muster gedient haben mag, dessen Euklid sich bediente (S. 272), um zu beweisen, daß Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Der Parabelabschnitt wird dadurch in zweiter Annäherung größer als $1\frac{1}{4}$, kleiner als $1\frac{1}{2}$ des ersten Dreiecks, welches ihm eingezeichnet worden war. Nun werden in die neuen immer kleineren Parabelabschnitte wieder neue Dreiecke beschrieben und dem eben Behaupteten ähnliche Folgerungen gezogen. Nach heutiger Schreibweise kommt die Reihenfolge der so zu gewinnenden Sätze auf die Summierung der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$ hinaus, deren Anfangsglied 1 den Flächeninhalt des ersten Dreiecks, deren Summe den Flächeninhalt des ganzen Parabelabschnittes darstellt. Archimed, freilich das Unendliche nur mittelbar in seine Betrachtungen einbegreifend, begnügt sich mit der Summierung der endlichen geometrischen Reihe, deren letztes Glied wir $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ nennen wollen. Deren Summe sei, sagt er, nur um den dritten Teil des niedersten Gliedes kleiner als $\frac{4}{3}$, d. h. also $= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Daran schließt sich der apagogische Teil des Beweises, welchen wir wiederholt als Ersatz für Unendlichkeitsbetrachtungen haben eintreten sehen. Aus der Möglichkeit den Unterschied zwischen dem Parabelabschnitte und $\frac{4}{3}$ des ersteingezeichneten Dreiecks kleiner als irgend eine angegebene Größe werden zu lassen, folgt die doppelte Unmöglichkeit, daß der eine oder der andere Flächenraum der größere sei.

Was die beiden anderen Kegelschnitte, die Hyperbel und die

Ellipse betrifft, so scheint Archimed der ersteren besondere Aufmerksamkeit nicht zugewandt zu haben. Dagegen hat er die Quadratur der Ellipse gefunden und zwischen den Untersuchungen über Konoide und Sphäroide als Satz 5. und 6. eingeschaltet[1]).

Die merkwürdigste uns erhaltene Schrift des Archimed über einen Gegenstand der ebenen Geometrie ist das Buch von den Schneckenlinien, *περὶ ἑλίκων*. Die Schneckenlinie ist die erste krumme Linie, welche durch eine doppelte Gattung von Bewegungen und von bewegten Elementen zugleich erzeugt worden ist. Die Quadratrix des Hippias benutzte freilich auch eine drehende und eine fortschreitende Bewegung zu ihrer Entstehung, aber die bewegten Elemente sind doch zwei gerade Linien, deren Durchschnittspunkt die genannte Kurve zum Orte hat. Wir halten es durchaus nicht für unmöglich, daß Archimed, der bei seinen Studien mit der Quadratrix und deren Anwendungen bekannt geworden sein muß, gerade durch die Abhandlungen des Hippias und des Dinostratus über ihre Kurve mehrfache Anregung gewann, die bei einem Archimed zu einem Fortschritte für die Wissenschaft werden mußte. Ein Fortschritt war es, wenn Archimed nicht mehr wie Dinostratus einfach annahm, daß die Kreisfläche einem rechtwinkligen Dreiecke von den Katheten r und P gleich sei, sondern diese Gleichheit streng bewies. Eine nicht geringere Bereicherung der Wissenschaft war es, als er, anstatt die fortschreitende Bewegung einer Geraden mit der Drehung einer zweiten Geraden zu verbinden, wie Hippias es getan hatte, darauf verfiel jene fortschreitende Bewegung einem Punkte beizulegen. Die archimedische Definition sagt ausdrücklich[2]): „Wenn eine gerade Linie in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte, welcher unbeweglich bleibt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt, bis sie wieder dahin gelangt, von wo die Bewegung ausging, und wenn zugleich in der bewegten Linie ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit von dem unbewegten Endpunkte anfangend sich bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Schneckenlinie in der Ebene."

Gehört diese Schneckenlinie, die archimedische Spirale, wie man sie gegenwärtig zu nennen pflegt, wirklich Archimed als Erfinder an? Man hat mit sich forterbendem Irrtume lange behauptet, nicht Archimed, sondern sein Freund Konon habe die Spirale erfunden und die sich auf dieselben beziehenden Sätze entdeckt. Letzteres ist durchaus unrichtig[3]) und folglich ersteres nicht hinlänglich begründet.

---

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 312—316, (ed. Nizze) 160—161. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 10, (ed. Nizze) 118. [3]) Das hat Nizze S. 281 in seinen kritischen Anmerkungen nachgewiesen.

Archimed hatte vielmehr jene Sätze an Konon zum Beweise geschickt, eine Sitte, welche in den allerverschiedensten Jahrhunderten, aber stets in Zeiten reger mathematischer Arbeit uns wieder begegnen wird, und hatte auch nach Konons Tode noch viele Jahre gewartet „ohne daß irgend jemand sich mit einer dieser Aufgaben beschäftigt hätte"[1]). Alsdann erst setzte er die Beweise in der Schrift über die Schneckenlinien auseinander. Wir können die Gedrungenheit der Beweise in keinem wiederholt abkürzenden Berichte deutlich machen. Wir verweisen auf die Abhandlung selbst, in welcher gerade der moderne Leser, der gewohnt ist Kurven von der Natur der Spirallinien nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung zu untersuchen, während er in der Lehre von den Kegelschnitten noch heute häufiger von synthetisch geometrischen Anschauungsbeweisen Gebrauch macht, die bewunderungswürdige Gewandtheit des Archimed in der Handhabung einfachster Hilfsmittel staunend erkennen wird. Einige wenige leicht abzuleitende Proportionen und Ungleichheiten, letztere wieder unerläßlich für das apagogische Verfahren der altertümlichen Exhaustion, die Zerlegung des Raumes der Schneckenlinie in Ausschnitte, deren jeder kleiner als ein äußerer, größer als ein innerer Kreisausschnitt ist, das ist der ganze wissenschaftliche Vorrat, mittels dessen die Quadratur der Schneckenlinie gefunden, die Berührungslinie an irgend einen Punkt derselben gezogen wird.

Manche andere Schriften des Archimed würden an dieser Stelle noch zu besprechen sein, wenn sie nicht verloren gegangen wären. Kaum daß die Überschriften uns durch arabische Berichterstatter erhalten blieben[2]). Ihnen zufolge verfaßte Archimed ein Buch über das Siebeneck im Kreise; ein anderes beschäftigte sich mit der gegenseitigen Berührung von Kreisen; ein drittes war den Parallellinien, ein viertes den Dreiecken gewidmet, letzteres möglicherweise auch unter anderem Titel noch genannt. Auch Daten und Definitionen soll Archimed in einem Buche vereinigt haben.

Unter dem, was der Verfasser für die Geometrie des Raumes leistete, ist zunächst eine Untersuchung zu erwähnen, von der wir nicht einmal wissen, bei welcher Gelegenheit und in welchem Zusammenhange er sie angestellt hat. Die Untersuchung selbst dagegen ist von Pappus, dem einzigen Schriftsteller, der von ihr spricht, mit genügender Deutlichkeit geschildert[3]), daß man nach ihm darüber berichten kann. Euklid hatte die Lehre von den fünf einzigen regelmäßigen Körpern erschöpfend behandelt. Archimed erfand zu ihnen

---

[1]) Archimed (ed. Heiberg) II, 2, (ed. Nizze) 116. [2]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 29—30. [3]) Pappus V (ed. Hultsch) 350 sqq.

13 halbregelmäßige Körper, welche durch regelmäßige Vielecke von mehr als nur einer Gattung begrenzt werden. Der Anzahl nach können 8, 14, 26, 32, 38, 62 oder 92 Grenzflächen vorhanden sein. Der Art nach sind es Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke und Zwölfecke, welche auftreten. Bei zehn von den archimedischen Körpern sind nur Flächen zweierlei Art, bei den drei übrigen dreierlei Flächen vorhanden. Kein geringerer Mathematiker als Kepler[1]) hat zuerst nach Archimed seine Aufmerksamkeit diesem Gegenstande wieder zugewandt, worauf aufs neue eine zweihundertjährige Pause eintrat, bis seit Anfang des XIX. S. die halbregelmäßigen Vielflächner Eigentum der elementaren Stereometrie geworden sind.

Archimed selbst stellte von allen seinen Entdeckungen diejenigen am höchsten, welche er in den zwei Büchern von der Kugel und dem Zylinder niedergelegt hat. Es handelt sich darin um den Beweis von drei neuen Sätzen[2]): 1. daß die Oberfläche einer Kugel dem Vierfachen ihres größten Kreises gleich sei; 2. daß die Oberfläche eines Kugelabschnittes (die Kugelkalotte) so groß sei als ein Kreis, dessen Halbmesser einer geraden Linie vom Scheitel des Abschnittes bis an den Umfang des Grundkreises gleich sei; 3. daß der Zylinder, welcher zur Grundfläche einen größten Kreis der Kugel habe, zur Höhe aber den Durchmesser der Kugel, mit anderen Worten der der Kugel umschriebene Zylinder, anderthalbmal so groß sei als die Kugel, und daß auch seine Oberfläche das Anderthalbfache der Kugeloberfläche sei. Ein gewisser Nikon hat in Pergamum eine Inschrift, welche diesen Sätzen galt, in Stein hauen lassen[3]). Daß Archimed gerade auf diese Sätze einen wohlberechtigten Stolz empfand, geht daraus hervor, daß er die Kugel mit dem sie umgebenden Zylinder auf seinen Grabstein eingemeißelt wünschte, und daß es gerade diese Figur war, an welcher Cicero die Begräbnisstätte des großen Mannes erkannte[4]).

Archimed hat in demselben Werke über Kugel und Zylinder, im 4. und 5. Satze des II. Buches[5]), noch zwei andere die Kugel betreffende Aufgaben gestellt, welche ihn geraume Zeit beschäftigten. Eine Kugel soll durch eine Ebene derart geschnitten

---

[1]) In der *Harmonice mundi.* [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 2—4, (ed. Nizze) 42. [3]) Vgl. Ideler in v. Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XXIII, 257 und Buzengeiger ebenda XXIV, 572. [4]) Wir haben früher (wir wissen nicht mehr nach welchem Gewährsmanne) hier eingeschaltet, die Figur habe sich auf Münzen der Stadt Syrakus erhalten. H. Junge teilt uns mit, daß nach Erkundigungen, welche er im Münzkabinette des Berliner Museums einzog, solche Münzen nicht bekannt sind. [5]) Archimed (ed. Heiberg) I, 210 sqq., (ed. Nizze) 91 flgg.

werden, daß Oberflächen und Körperinhalte der beiden so gebildeten Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnisse stehen. Die erstere Aufgabe hat, sofern die Berechnung der Kugelkalotte vorher bekannt ist, wie es der Fall war, keine Schwierigkeit; sie führt alsdann auf eine rein quadratische Gleichung. Anders verhält es sich mit der zweiten Aufgabe. Sie ist nur dann lösbar, wenn, wie Archimed ausdrücklich sagt, eine Länge gefunden werden kann, welche in die Proportion sich einfügt, die in Buchstaben $(a-x):b = c^2:x^2$ lauten würde, wenn also eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - ax^2 + bc^2 = 0$ gefunden werden kann. Archimed geht nun noch einen großen Schritt weiter, er gibt den Diorismus der Aufgabe. Sie sei, sagt er, nicht allgemein möglich, sondern unter der Voraussetzung $c = 2(a-c)$ nur bei Anwendung eines $a-c$, welches selbst größer als b ist. Mit anderen Worten: er nennt die Gleichung $x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2b = 0$ lösbar, d. h. mit einer positiven Wurzel versehen, so lange $b < \frac{a}{3}$. Beides, so fährt Archimed fort, d. h. die Notwendigkeit des Diorismus und zugleich die Konstruktion der Aufgabe unter der Annahme, daß jene Bedingung erfüllt sei, solle am Ende seine Analyse und Synthese finden. Es ist undenkbar, daß Archimed eine so bestimmte Zusage gegeben haben sollte, wenn er nicht der gestellten Aufgabe in jeder Beziehung Herr gewesen wäre. Aber wo sind die versprochenen Ergänzungen? Schon sehr bald nach Archimed zur Zeit des Diokles waren sie verloren, wie wir im 17. Kapitel sehen werden. Ob eine von Eutokius im VI. S. aufgefundene alte Handschrift in dorischer Mundart wirklich, wie er vermutete, der Originalarbeit des Archimed nachgebildet war, ist mit Bestimmtheit nicht zu behaupten noch zu leugnen. An Wahrscheinlichkeit fehlt es übrigens der Vermutung des Eutokius um so weniger, als jene Auflösung sich zur Konstruktion nur einer Parabel und einer Hyperbel bedient, mithin Kurven benutzt, welche zur Auflösung einer anderen räumlichen Aufgabe, der Würfelverdoppelung, ziemlich lange vor Archimed, wie wir wissen, bereits in Anwendung waren.

Mit der Geometrie des Raumes hat es ferner das Buch von den Konoiden und Sphäroiden zu tun. Archimed kennt unter diesen Namen die Körper, welche durch die Umdrehung einer Parabel, einer Ellipse, einer Hyperbel entstehen. Er teilt diese Umdrehungskörper durch einander parallele gleich weit voneinander entfernte ebene Schnittflächen und erhält so zwischen je zwei Schnittebenen ein Körperelement, das von einem Zylinder eingeschlossen einen anderen Zylinder in sich enthält. Die Summierung sämtlicher größerer Zy-

linder nebst der der sämtlichen kleineren Zylinder wird somit zwei Grenzen bilden, zwischen welchen der Körperinhalt des gegebenen Umdrehungskörpers enthalten ist, und welche bei gegenseitiger Annäherung der Schnittflächen selbst beliebig wenig voneinander unterschieden sind. Einige auf Widersprüche führende Vergleichungen vollenden wieder die Exhaustion, und so wird die Kubatur der genannten Körper gefunden.

Gelegentlich zeigt dabei Archimed im 8., 9. und 10. Satze[1]), wie zu jeder Ellipse unendlich viele Kegel und Zylinder gefunden werden können, auf deren Mantel sie sich befindet, offenbar ein Anfang dessen, was man perspektivische Eigenschaften krummer Linien zu nennen pflegt. Wir bemerken ferner, daß, wo von den Asymptoten der Hyperbel die Rede ist, diese den Namen der engstanschließenden Geraden, *αι ἔγγιστα ευϑέιαι*, führen[2]).

Wir können die Entdeckungen Archimeds im Gebiete der Raumgeometrie nicht verlassen ohne zweier falscher Sätze zu gedenken, welche er absichtlich, wie er ausdrücklich sagt[3]), seinerzeit beweislos in die Öffentlichkeit gab „um eben solche Leute, die da alles zu finden behaupten, und doch nie einen Beweis vorbringen, zu überführen, daß sie auch einmal etwas Unmögliches zu finden verheißen hätten". Es waren Sätze, die sich auf den Körperinhalt von Kugelabschnitten bezogen und damit unsere Bemerkung bestätigen, daß Archimed sich geraume Zeit mit Fragen, welche auf die Durchschneidung einer Kugel durch eine Ebene sich bezogen, beschäftigte.

15. Kapitel.

Die übrigen Leistungen des Archimedes.

Wir gehen zu Dingen über, welche einen algebraischen Charakter tragen. In erster Linie haben wir einer Gesellschaftsrechnung zu gedenken, welche Archimed anstellte, und welche nicht etwa der Methode des Rechnens halber, die schon den alten Ägyptern (S. 77) geläufig war, aber wegen des Verfahrens, durch welches Archimed die zur Rechnung notwendigen Zahlen sich verschaffte, zu großer Berühmtheit gelangt ist. Wir meinen die sogenannte Kronenrechnung. Richtiger wäre vielleicht die Übersetzung Kranzrechnung,

[1]) Archimed (ed. Heiberg) I, 318—338 unter Bezeichnung der betreffenden Sätze als 7. 8. 9., (ed. Nizze) 162—168. [2]) Archimed (ed. Heiberg) I, 278 lin. 1—2 und I, 436 lin. 1. [3]) Archimed (ed. Heiberg) II, 2—4, (ed. Nizze) 116.

da *corona* dem *στέφανος* entspricht, einem aus Zweigen gewundenen Kranze, während die Fürstenkrone erst späteren Ursprunges ist[1]. Vitruvius, der Schriftsteller über Architektur im augusteischen Zeitalter, erzählt die Sache folgendermaßen[2]. König Hiero habe von einem Goldarbeiter eine Krone aus Gold anfertigen lassen und dieselbe alsdann dem Archimed übergeben, um zu ermitteln, ob nicht, wie man zu vermuten Grund hatte, der Künstler nur Gold in Rechnung gebracht, in Wirklichkeit aber teilweise Silber zur Masse hinzugetan hatte. Zufällig sei nun Archimed in ein Badhaus getreten und habe beim Einsteigen in eine mit Wasser ganz angefüllte Wanne bemerkt, daß ebensoviel Wasser auslief, als sein Körper verdrängte. Nun schloß Archimed so: die Menge des verdrängten Wassers hängt nur von der Ausdehnung, nicht von dem Gewichte des eingetauchten Körpers ab, das Gewicht dagegen verändert sich bei gleicher Ausdehnung nach der Natur des Stoffes. Andere Stoffe werden bei gleicher Ausdehnung verschiedenes Gewicht, bei gleichem Gewichte verschiedene Ausdehnungen haben. Bildet man sonach eine reine Goldmasse und eine reine Silbermasse, beide von genau gleichem Gewichte mit der Krone, so wird das Silber am meisten Flüssigkeit aus einem bis zum Rande gefüllten Gefäße verdrängen, nächstdem die aus beiden Metallen gemischte Krone, das Gold endlich am wenigsten. Die Schlüsse, wenn auch noch nicht in der hier ausgeführten Deutlichkeit, scheinen dem Geiste Archimeds sich plötzlich dargeboten zu haben. Die drei Wassermengen σ, $\varkappa$, γ, welche durch das Silber, die Krone, das Gold verdrängt wurden, boten das Mittel die Mischungsverhältnisse der Krone zu berechnen. Wog nämlich die Krone k Gewichtsteile, worunter s Gewichtsteile Silber und g Gewichtsteile Gold, so mußte erstlich $s + g = k$ sein. Zweitens verdrängte aber das Silber nur $\frac{s}{k} \times \sigma$ Raumteile Wasser und das Gold $\frac{g}{k} \times \gamma$ Raumteile derselben Flüssigkeit, die ganze Krone also $\frac{s\sigma + g\gamma}{k}$ Raumteile, oder $\varkappa$ Raumteile, demnach war auch $s\sigma + g\gamma = k\varkappa$. Die beiden Angaben führten dann vereint in Betracht gezogen zu $s = \frac{\varkappa - \gamma}{\sigma - \gamma} \times k$. In der Freude über diese Entdeckung sei Archimed unbekleidet ins Freie und nach seiner Wohnung gelaufen mit dem Rufe: ich habe es gefunden, *εὕρηκα εὕρηκα*. Eine zweite Auffassung findet sich in einem Lehrgedichte „Ueber die Gewichte und Maasse“, welches man wohl dem Grammatiker Priscianus zuschrieb, eine Meinung, von welcher man aber allgemein zurückgekommen ist, um die Entstehung des Ge-

[1]) Briefliche Mitteilung von H. Junge. [2]) Vitruvius IX, 3.

dichtes etwa auf das Jahr 500 zu verlegen[1]). Dort ist nämlich die Auffindung des spezifischen Gewichtes eines Stoffes, auf welche allein es ankommt, an eine doppelte Abwägung geknüpft. Wird die zu prüfende Substanz einmal im Freien und das zweite Mal in Wasser eingetaucht gewogen, so wird sie das zweite Mal so viel von ihrer Gewichtswirkung auf den Wagebalken, an welchem sie hängt, einbüßen, als das Gewicht der durch sie verdrängten Flüssigkeitsmenge beträgt. Man wird folglich in dem Verhältnisse des ursprünglichen Gewichtes zu dem Gewichtsverluste das spezifische Gewicht des Stoffes besitzen, und man findet $s = \frac{k' - g'}{s' - g'} \times k$, wenn s', k', g' die Gewichtsverluste im Wasser der an Gewicht außerhalb des Wassers gleichen Mengen Silber, Kronenmetall und Gold bedeuten. Welche von den beiden Methoden also Archimed auch anwandte, und die Wahrscheinlichkeit für die eine wie für die andere zu erörtern gehört der Geschichte der Physik an, die Rechnung als solche war immer die gleiche, war, wie wir zum voraus bemerkten, eine Gesellschaftsrechnung, dergleichen ähnliche wenn auch nicht völlig übereinstimmende im Übungsbuche des Ahmes erledigt sind.

Dem Archimed wird ferner eine unbestimmte Aufgabe zugeschrieben, welche in Distichen abgefaßt unter dem Namen des Rinderproblems bekannt ist[2]). Es handelt sich um die Auffindung von vier Unbekannten in ganzen Zahlen mittels dreier zwischen ihnen gegebenen Gleichungen vom ersten Grade. Zu dieser ursprünglichen Form des Problems sind alsdann in späterer Überarbeitung, wie es scheint, noch anderweitige Zusätze getreten, welche zu ihrer Berücksichtigung Kenntnisse in der Lehre von den Quadratzahlen und von den Dreieckszahlen voraussetzen, welche wir wohl berechtigt sind, einem Archimed als zugänglich anzunehmen, wenn schon Philippus Opuntius (S. 169) über vieleckige Zahlen schreiben konnte. Bezüglich der Echtheit dieses Problems sind die Ansichten geteilt. Der letzte Schriftsteller, der in eingehender Weise mathematisch wie philologisch mit Archimed sich beschäftigt hat, steht nicht an, das Gedicht, wie

[1]) *Scriptores metrologici Romani* (ed. Hultsch) pag. 88 sqq. Die auf die Kronenrechnung bezügliche Stelle v. 124—208. Über die Datierung vgl. Hultschs Prolegomena § 118. [2]) Ältere Ansichten über das Rinderproblem bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 481—491 wissen einen nur halbwegs erträglichen Sinn nicht herauszubringen. Dieses gelang Vincent in dem als Anhang zu den *Nouvelles annales de mathématiques* T. XV (Paris 1856) erschienenen *Bulletin de bibliographie etc.* I, 39 flgg. Einen anderen Sinn haben die Verfasser der neuesten Abhandlung Krumbiegel und Amthor „das *Problema bovinum* des Archimed" ermittelt. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV. Histor.-literar. Abteilung (1880).

es erhalten ist, als archimedisch anzuerkennen[1]). Wir selbst enthalten uns eines bestimmten Urteils, wie wir (S. 286) uns entschieden, die Frage nach der Echtheit des sogenannten euklidischen Problems als eine offene zu betrachten. Zu einem Ergebnisse kommen wir allerdings auch hier: daß nämlich ein Grund das Rinderproblem darum für untergeschoben zu erklären, weil Archimed es nicht habe lösen können, in keiner Weise vorliegt.

Eine Beschäftigung mit Quadratzahlen ist Archimed jedenfalls nachzurühmen. Er hat jedenfalls in dem Buche von den Schneckenlinien die Summierung der aufeinander folgenden Quadratzahlen von 1 anfangend gelehrt und bewiesen. Er kleidet die Summenformel in folgenden Satz: „Wenn man eine willkürliche Anzahl von Linien annimmt, die nacheinander gleiche Unterschiede haben, so daß die kleinste dem Unterschiede selbst gleich ist, und wenn eine eben so große Anzahl anderer Linien angenommen wird, welche einzeln der größten von jenen gleich sind, so wird die Summe aller Quadrate von denen, welche der größten gleich sind, nebst dem Quadrate der größten selbst und dem Rechtecke unter der kleinsten und einer Linie, welche so groß ist als die Summe aller um gleiche Unterschiede verschiedener, dreimal so viel betragen als die Summe aller Quadrate der um gleiche Unterschiede verschiedenen Linien“[2]). In Zeichen geschrieben heißt das $3[a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2] = (n+1)(na)^2 + a(a + 2a + 3a + \cdots + na)$. Da Archimed, wie aus dem Beweise sich ergeben wird, die Summenformel der arithmetischen Reihe anzuwenden wußte, so ist es einigermaßen auffallend, daß er nicht $a + 2a + 3a + \cdots + na$ zu $\frac{n(n+1)a}{2}$ vereinigte, um schließlich $a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6}$ zu erhalten. Wir erkennen daraus, daß ein so lautender Satz bei Archimed nicht vorkommt, wie sehr man sich hüten muß den Schluß, dieser oder jener Schriftsteller konnte so oder so schließen, hat es also getan, anzuwenden, wenn nicht besondere anderweitige Gründe für jenen Schluß vorhanden sind. Noch eine Bemerkung drängt sich auf. Wir sagten Archimed habe die Summierung der Quadratzahlen vollzogen, und in dem Wortlaute seines Satzes, wie seines Beweises, kommen nur Linien vor. Allein es sind unzusammenhängende Linien, wie sie im V. Buche der euklidischen Elemente zur Versinnlichung von Zahlen dienen, und haben hier gleichfalls keine andere Bedeutung. Wir lassen nun den Beweis folgen, an welchem wir keine andere Veränderung vornehmen,

[1]) Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 26. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 34—40, (ed. Nizze) 125—128

als daß wir Archimeds Worte in Zeichen übersetzen. Es ist $na = (n-1)a + 1a = (n-2)a + 2a = (n-3)a + 3a = \cdots = 1a + (n-1)a$. Quadriert man alle diese unter sich gleichwertigen Formen von na, so erhält man ebensoviele verschiedene Formen von $(na)^2$, nämlich $(na)^2 = ((n-1)a)^2 + (1a)^2 + 2\cdot(n-1)a\cdot 1a = ((n-2)a)^2 + (2a)^2 + 2(n-2)a\cdot 2a = ((n-3)a)^2 + (3a)^2 + 2\cdot(n-3)a\cdot 3a = \cdots = (1a)^2 + ((n-1)a)^2 + 2\cdot 1a\cdot(n-1)a$. Jede solche Form besteht aus zwei quadratischen Gliedern und einem doppelten Produkte. Addiert man die sämtlichen Formen nebst $2(na)^2 = (na)^2 + (na)^2$ und ordnet die quadratischen Glieder erst fallend dann steigend, und die doppelten Produkte nach fallendem erstem Faktor, so entsteht $(n+1)(na)^2 = (na)^2 + ((n-1)a)^2 + ((n-2)a)^2 + \cdots + (1a)^2 + (1a)^2 + \cdots + ((n-2)a)^2 + ((n-1)a)^2 + (na)^2 + 2[(n-1)a\cdot 1a + (n-2)a \cdot 2a + \cdots + 1a(n-1)a]$. Addiert man ferner auf beiden Seiten $a(a + 2a + \cdots + na)$, so erhält man $(n+1)(na)^2 + a(a + 2a + \cdots + na) = 2[a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2] + 2[(n-1)a\cdot 1a + (n-2)a\cdot 2a + \cdots + 1a\cdot(n-1)a] + a[a + 2a + \cdots + na]$. Damit der zu Anfang ausgesprochene Satz bewiesen sei, bedarf es also nur noch Eines: es muß gezeigt werden, daß $a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2 = 2[(n-1)a\cdot 1a + (n-2)a\cdot 2a + \cdots + 1a\cdot(n-1)a] + a[a + 2a + \cdots + na]$ sei. Die beiden Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen sind aber $a \cdot A$ und $a\cdot B$ oder vereinigt $a(A+B)$, wobei

$$A = 2(n-1)a + 4(n-2)a + \cdots + (2n-2)\cdot 1a$$
$$B = na + (n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a$$
$$A + B = 1\cdot na + 3\cdot(n-1)a + 5\cdot(n-2)a + \cdots + (2n-1)\cdot 1a$$
$$(A+B)\cdot a = a[1\cdot na + 3\cdot(n-1)a + 5\cdot(n-2)a + \cdots + (2n-1)\cdot 1a] = R.$$

Von den n Quadraten, als deren Summe R zu beweisen ist, wird nun das höchste $(na)^2$ umgeformt in $a(1\cdot na + (n-1)na)$. Aber die arithmetische Reihe $(n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a$ hat als Summe $\frac{(n-1)\cdot n\cdot a}{2}$, eine Formel, welche demnach, wie oben angekündigt, von Archimed benutzt wird. Demnach ist $(n-1)na = 2[(n-1)a + (n-2)a + \cdots + 1a]$ und $(na)^2 = a[1\cdot na + 2(n-1)a + 2(n-2)a + \cdots + 2\cdot 1a]$. Ziehen wir diesen Wert von R ab, so bleibt ein Rest R_1 ähnlicher Form wie R, nämlich $a[1\cdot(n-1)a + 3(n-2)a + \cdots + (2n-3)\cdot 1a] = R_1$. Nun könnte $((n-1)a)^2$ umgeformt und von R_1 abgezogen werden, wodurch ein Rest R_2 entstünde, dem gegenüber das Verfahren fortzusetzen ist. Schließlich bleibt nichts übrig, es ist also $a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2 = R$, wie zu beweisen war.

Wir haben vorher bei der archimedischen Aufgabe von der durch eine Ebene geschnittenen Kugel die kubische Gleichung $x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2b = 0$ angeschrieben (S. 309), zu welcher diese Aufgabe führt.

Wir haben dieses zur deutlicheren Einsicht in die Frage für unsere an die Gleichungsform gewohnten Leser getan. Man muß sich jedoch wohl hüten das, was wir dort taten, als den gleichen Gesichtspunkten entsprechend zu betrachten, wie das, was uns bei unserer letzten Darstellung der Summierung aufeinanderfolgender Quadratzahlen leitete. Wir haben hier nur Zeichen statt der Worte gesetzt, den archimedischen Gedanken in keiner Weise verändernd. Wir haben dort eine Gleichung aus einer Proportion entwickelt. Archimed hätte eine solche Entwicklung dem ganzen Zustande der damaligen Wissenschaft gemäß, welche Körperzahlen kannte, vornehmen können, aber er hat es nicht getan. Er blieb bei der Proportion $(a - x) : b = \frac{4}{9} a^2 : x^2$ stehen, und wir würden in ihn hineinlesen, was er nicht gewußt zu haben scheint, wenn wir auch nur annähmen, Archimed habe eine wesentliche Ähnlichkeit zwischen seiner Aufgabe und der Aufgabe der Würfelverdoppelung, geschweige denn zwischen ihr und der Aufgabe der Winkeldreiteilung bemerkt. Die Würfelverdoppelung verlangte die Einschaltung zweier geometrischer Mittelglieder zwischen gegebenen Größen; von einer derartigen Einschaltung ist bei der archimedischen Kugelteilung nicht die Rede, mag man auch, um die Unbekannte nach innen zu bringen, die Proportion in der Form $b : (a - x) = x^2 : \frac{4a^2}{9}$ oder in der Form $b : x^2 = (a - x) : \frac{4a^2}{9}$ schreiben.

Wir müssen hier vielleicht einem Vorwurfe begegnen, den man uns darüber machen könnte, daß wir, als wir es mit Euklid und dessen durch quadratische Gleichungen darstellbaren Aufgaben zu tun hatten, nicht auch so streng an den Wortlaut des griechischen Schriftstellers uns halten zu müssen glaubten. Wahr ist es, es wäre vorsichtiger gewesen auch dort nicht als Gleichung zu schreiben, was nur eine Proportion war, allein wir können doch einiges hervorheben, welches einen grundsätzlichen Unterschied zwischen der euklidischen und der archimedischen Aufgabe bedingt und dadurch auch eine formelle Verschiedenheit der Darstellung gestattet, ganz abgesehen davon, daß wir wenigstens nicht versäumt haben (S. 285), unsern Zweifel darüber zu äußern, ob Euklid eine Ahnung von dem algebraischen Inhalte seiner Aufgaben gehabt habe. Quadratische und kubische Aufgaben — man gestatte uns diese leicht verständlichen, wenn auch sonst nicht gerade üblichen Benennungen — sind geometrisch gewaltig verschieden. Die quadratische Aufgabe gehört den Elementen in dem geometrischen Sinne des Wortes an. Sie läßt sich, sofern Nichtbeachtung des Diorismus nicht Größen als ge-

geben wählen ließ, welche jede reelle positive Lösung ausschließen, jedesmal durch Zirkel und Lineal bewältigen. Die kubische Aufgabe ist durch die Elemente nicht lösbar. Sie bedarf besonderer Kurven, deren Eigenschaften in besonderen Schriften erörtert zur Zeit, als Archimed lebte, überhaupt erst anfingen, genau studiert zu werden und die höhere Geometrie bildeten. Man darf daher wohl einen Unterschied machen zwischen der Tiefe, bis zu welcher Euklid und Archimed in das eigentliche Wesen quadratischer und kubischer Aufgaben einzudringen vermochten. Daneben ist auch für rechnendes Verfahren ein nicht minder gewaltiger Unterschied zwischen quadratischen und kubischen Aufgaben, die einem Griechen gestellt waren. Die Ausziehung der Kubikwurzel durch Umkehrung des Verfahrens, welches zur Erhebung auf die dritte Potenz führt, also von der Formel $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ ausgehend, hat, wie wir vorgreifend bemerken dürfen, kein griechischer Schriftsteller des Altertums oder des Mittelalters jemals gelehrt; ob ein anderes Rechnungsverfahren zu dem gleichen Zwecke angewandt wurde, müssen wir hier noch dahingestellt sein lassen. Eine Ausziehung von Quadratwurzeln dagegen durch Rechnung, und zwar auch bei solchen Zahlen, welche nur eine Annäherung an den wahren Wert gestatten, hat die griechische Mathematik vielleicht, wie wir (S. 223) sahen, schon seit Platon besessen, jedenfalls hat Archimed in seiner Kreismessung den Beweis geliefert, daß er im Besitze sehr vollkommener Methoden zur Auffindung solcher Wurzelwerte gewesen sein muß. Damit ist aber, wie zum Schlusse dieser Ausführungen hingeworfen werden mag, zugleich auch die (S. 285) schon begründete Behauptung vollends gesichert, daß man in sehr früher Zeit bei den Griechen quadratische Aufgaben rechnend löste, d. h. tatsächlich mit quadratischen Gleichungen sich beschäftigte, denn wie wäre man sonst zu Methoden der Quadratwurzelausziehung gelangt, die das leisteten, was z. B. von Archimed, zu dessen Arbeiten wir so zurückkehren, geleistet worden ist?

Archimed hat in seiner Kreismessung eine ganze Anzahl von angenäherten Quadratwurzeln berechnen müssen. Er hat dabei erkannt, daß $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$, daß $\sqrt{349450} > 591\frac{1}{8}$, daß $\sqrt{1373943\frac{33}{64}} > 1172\frac{1}{8}$, daß $\sqrt{5472132\frac{1}{16}} > 2339\frac{1}{4}$. Wie hat er diese Zahlen gefunden? Die Frage ist vielfach aufgeworfen, verschiedentlich beantwortet worden[1]). Man kann wohl sagen, daß

[1]) Zusammenstellungen der auf diesem Gebiete ausgesprochenen Meinungen bei S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik

sämtliche Versuche in einem Punkte zusammentreffen, nämlich in dem Bestreben, ein mehr oder weniger bewußtes Zusammentreffen der Methode des Archimedes mit dem modernen Kettenbruchverfahren nachzuweisen, d. h. mit den Formeln

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

und

$$\sqrt{a^2-b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cdots}}}$$

Nun ist von vornherein zuzugeben, daß der Näherungswert

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

bei griechischen Schriftstellern mit aller Bestimmtheit auftritt, wie wir bei der näheren Betrachtung des Werkes des Theon von Smyrna im 21. Kapitel erkennen werden. Es ist ferner (S. 267) darauf hingewiesen worden, daß die Art und Weise, in welcher Euklid den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier ganzer Zahlen aufsucht, einen vollständigen Kettenbruchalgorithmus darstellt, und dennoch können wir die Frage, wie eigentlich Archimed verfuhr, noch nicht als vollständig beantwortet erachten. Die Werte, welche Archimed als angenäherte Quadratwurzeln benutzt, andere Werte, die bei späteren griechischen Schriftstellern auftreten, entstehen nämlich, mit Ausnahme der von uns schon betonten $\sqrt{2}$ und einer weiteren Ausnahme, nicht aus den obigen Kettenbruchformeln, es sei denn, daß man sie auf ein Prokrustesbett spannte, wie wir es nicht ver-

(in den Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften VI. Folge, 9. Band, Prag 1878) und bei Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 60 bis 66. Bei letzterem auch das bei dem ersteren fehlende Referat über Abhandlungen von Mollweide (1808) und Oppermann (1875). Über die Abhandlung Mollweides vgl. auch einen Bericht von Gauß in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 9. Januar 1808. Spätere Arbeiten von Hunrath, Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Dezimalbrüche (Kiel 1884) unter anderen haben unserer Ansicht nach die Frage immer noch nicht geklärt. Auch Hultsch, Über Archimeds Quadratwurzeln (Göttinger Gelehrte Anzeigen 1893) und Ebenderselbe, Zur Kreismessung des Archimedes (Zeitschrift für Mathematik und Physik XXXIX, Historisch-literarische Abteilg. 1894) lassen noch zu manchem Zweifel Raum.

antworten zu können glauben. Die erwähnten archimedischen Werte von $\sqrt{3}$ z. B. entstehen nicht aus $\sqrt{4-1} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}$, sondern die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind $2, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \ldots$, unter welchen wir $\frac{7}{4}$ und $\frac{26}{15}$ hervorheben als die weitere Ausnahme, von welcher soeben die Rede war, da diese Werte für $\sqrt{3}$ in der Tat geschichtlich nachweisbar bei Griechen vorkommen, wie das 18. und 19. Kapitel uns lehren werden. Wir lassen also die Frage nach der Art und Weise, in welcher Archimed seine Quadratwurzeln fand, offen, soviel zugestehend, daß bestimmte Beispiele auf Anwendung von Kettenbruchformeln bei anderen Schriftstellern hinweisen, die somit jener Formeln sich bedient haben werden, wenn auch natürlich nicht als Kettenbrüche, an deren Vorhandensein nicht zu denken ist, bevor eine Schreibweise der Brüche durch räumlich unterscheidbare Zähler und Nenner sich verbreitet hatte.

Es ist nur ein unglücklicher Zufall, daß wir über die Wurzelausziehungsmethoden Archimeds im dunkeln tappen. Eutokius, der einen Kommentar zur archimedischen Kreismessung geschrieben hat, sagt, wo er an die Quadratwurzelwerte kommt: „Wie man aber die Quadratwurzel, die einer gegebenen Zahl sehr nahe kommt, finden könne, ist von Heron in seinem metrischen Werke gezeigt worden, ebenso von Pappus, Theon und mehreren anderen Exegeten der großen Zusammenstellung des Klaudius Ptolemäus. Es ist daher nicht nötig Untersuchungen über diesen Gegenstand anzustellen, da Freunde der Mathematik bei jenen darüber nachlesen können“ [1]). Was wir diesen Schriftstellern, soweit sie erhalten sind, entnehmen, müssen wir später im Zusammenhang mit ihren sonstigen Leistungen besprechen.

Versagt uns der Kommentar des Eutokius den Dienst, wo wir seiner am dringendsten bedürfen, so läßt er uns doch nicht ganz ohne Ausbeute. Er vollzieht aufs ausführlichste mehrere Multiplikationen, und diese Stellen gehören zu den bedeutsamsten für die Kenntnis griechischer Rechenkunst. Der Gebrauch der Stammbrüche (S. 128) beim wirklichen Rechnen geht daraus aufs unzweideutigste hervor, dann aber auch, daß die Griechen bei ihren Multiplikationen im wesentlichen der gleichen Methode sich bedienten, der wir noch heute folgen, nur daß sie bezüglich der Anordnung

[1]) Archimed (ed. Heiberg) III, 270.

der Teilmultiplikationen den entgegengesetzten Weg einschlugen. Sie fingen nämlich mit dem, was wir die Ziffer höchsten Ranges im Multiplikator nennen, an und stiegen dann zu den niedrigeren Stellen herab, sie beobachteten die gleiche Reihenfolge innerhalb der Teile des Multiplikandus. So wird z. B. $2016\frac{1}{6}$ folgendermaßen quadriert. Es ist $2000 \cdot 2000 = 4000000$, $2000 \cdot 10 = 20000$, $2000 \cdot 6 = 12000$, $2000 \cdot \frac{1}{6} = 333\frac{1}{3}$; $10 \cdot 2000 = 20000$, $10 \cdot 10 = 100$, $10 \cdot 6 = 60$, $10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$; $6 \cdot 2000 = 12000$, $6 \cdot 10 = 60$, $6 \cdot 6 = 36$, $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$; $\frac{1}{6} \cdot 2000 = 333\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} \cdot 10 = 1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ und alle diese Teilprodukte vereinigt geben $4064928\frac{1}{36}$.

Man könnte bei diesem Fortschreiten von den größeren Teilen der Zahlen zu immer kleineren an die mehrerwähnte Stelle des Herodot[1]) denken, daß die Hellenen beim Rechnen die Hand von links nach rechts bewegen. Links befand sich (S. 133) auf der Rechentafel mit gegen den Rechner senkrechten Kolumnen die höchste Rangstelle. Man dürfte auch die Vermutung aussprechen, die Vereinigung der Teilprodukte, welche als vollzogen gedacht wird, ohne zu erklären, wie man dabei verfuhr, sei auf der Rechentafel erfolgt, deren Gebrauch zur Zeit des Polybius, mithin nur ein halbes Jahrhundert nach Archimed (S. 132) wir uns ins Gedächtnis zurückrufen. Jedenfalls ist dieses griechische Rechnen innerhalb und mit Benutzung des Zehnerzahlensystems ein ungeheurer Fortschritt gegenüber dem ägyptischen Verfahren der Multiplikation und Division, welches fast nur fortgesetzte Verdoppelungen und Halbierungen nebst additiver Vereinigung so gewonnener Ergebnisse benutzte. In Griechenland selbst wurden übrigens nach Aussage eines Scholiasten zum Charmides des Platon beide Methoden gelehrt, denn anders sind die Ausdrücke *hellenische und ägyptische Methoden der Multiplikation und Division* nicht zu verstehen[2]). Ihr Nebeneinanderbestehen läßt vermuten, daß bereits die Griechen die Erfahrung machten, die ägyptische Methode lasse sich im Handelsverkehre leichter als die hellenische anwenden, eine Erfahrung, welche italienische Kaufleute um Jahrhunderte später erneuerten.

Wir nannten die hier erwähnten Stellen des Eutokius als zu den bedeutsamsten für die Kenntnis griechischer Rechenkunst gehörend. Vieles ist leider verloren gegangen. Unter den Schriften des

---

[1]) Herodot II, 36. [2]) P. Tannery, La géométrie grecque etc. pag. 49 hat zuerst auf diese wichtige Stelle hingewiesen.

Xenokrates, welche wir nur dem Titel nach kennen[1]) (S. 249), soll eine Logistik gewesen sein. Ein Rechenmeister Apollodorus wird uns genannt (S. 180). Von der Logistik des Magnus erwähnt Eutokius Rühmendes am Schlusse seines Kommentars zur archimedischen Kreismessung[2]). Eine Schrift, welche in griechischer Sprache von dem Rechnen auf dem Rechenbrette handelte, war im XVIII. Jahrh. noch in der S. Marcusbibliothek in Venedig vorhanden, ist aber inzwischen abhanden gekommen oder verlegt, so daß sie in den Handschriftenverzeichnissen der genannten Bibliothek nicht mehr vorkommt[3]). Aber was läßt mit so dürftigen Angaben sich machen? Sogar die Lebenszeit dieser Schriftsteller mit Ausnahme des Xenokrates ist in tiefstes Dunkel gehüllt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Archimed selbst ein Buch verfaßt hat, welches mit der Rechenkunst sich beschäftigte. Zu dieser Vermutung geben wenigstens einige Bruchstücke und deren Titel Veranlassung. Die Schrift hieß die Grundzüge, *ἀρχαί*, und war dem Zeuxippus zugeeignet[4]). Archimed lehrte darin unter anderen das dekadische Zahlensystem in übersichtlicher Gliederung weit über die Grenzen derjenigen Zahlen ausdehnen, mit welchen man insgemein zu tun hat. Archimed faßt nämlich acht aufeinander folgende Rangordnungen in eine Oktade zusammen[5]). Die erste Oktade geht also von der Einheit bis zur Myriade der Myriaden, d. h. bis zu 100000000, welche Zahl die Einheit der zweiten Oktade bildet. Die Einheit der dritten Oktade ist ihm folglich die Zahl, welche wir durch Eins mit 2 mal 8 oder mit 16 Nullen schreiben. Die Einheit der 26. Oktade ist in unserer Schreibweise 1 mit 25 mal 8, d. h. mit 200 Nullen. Diese Oktaden setzt Archimed fort bis zur 10000 mal 10000sten und sämtliche Zahlen bis zur höchsten dieser letzten Oktade bilden die erste Periode. An sie schließt sich aber eine neue zweite Periode, deren Einheit folglich nach unserer Zahlenschreibweise eine 1 mit 800 Millionen Nullen ist! Es schwindelt einem bei dem Gedanken, auch mit dieser zweiten Periode von 10000 mal 10000 Oktaden die Zahlenreihe nicht abgeschlossen zu finden, sondern vielmehr die Möglichkeit zugeben zu müssen, noch höhere Perioden oder gar höhere Gruppenordnungen als die Perioden selbst zu bilden.

Für die Richtigkeit dieses Auszuges bürgt, daß er von Archimed

[1]) Diogenes Laertius VIII, 12. [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 302. [3]) Privatmitteilung des Grafen Soranzo in Venedig auf die Anfrage des Verfassers nach dem *Abacus in Graeco*, von welchem Bern. de Montfaucon, Bibliotheca bibliothecarum manuscriptarum I, 468 D spricht. [4]) Archimed (ed. Heiberg) II, 242, 246, (ed. Nizze) 209, 212. [5]) Archimed (ed. Heiberg) II, 266 sqq., (ed. Nizze) 217.

in eigener Person herrührt. Er gibt ihn uns in einer vollständig erhaltenen Abhandlung, der Sandrechnung, ψαμμίτης (lateinisch: *arenarius*). In ihr ist die Aufgabe gestellt eine Zahl anzugeben, welche größer sei als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel fassen würde, deren Halbmesser die Entfernung des Erdmittelpunktes von dem Fixsternhimmel wäre. Vorausgesetzt nun, daß 10000 Sandkörner hinreichen ein Körnchen von der Größe eines Mohnkornes zu liefern, und daß der Durchmesser eines Mohnkornes nicht kleiner als der 40. Teil einer Fingerbreite sei, vorausgesetzt ferner, daß der Weltdurchmesser kleiner als 10000 Erddurchmesser, der Erddurchmesser endlich kleiner als eine Million Stadien sei, findet Archimed eine Zahl, welche die Sandkörnerzahl einer der Weltkugel gleich gedachten Sandkugel überschreitet in 1000 Einheiten der 7. Oktade der 1. Periode. Ja Archimed geht noch weiter. Er nimmt nach astronomischen Anschauungen des Aristarchus von Samos[1]) die Weltkugel, die er alsdann Fixsternkugel nennt, noch größer an und erkennt, daß Sandkörner 1000 Myriaden der 8. Oktade an Zahl mehr als nur ausreichen würden, selbst diese Fixsternkugel zu bilden[2]).

Was ist die Bedeutung dieser eigentümlichen Aufgabe? Mannigfache Vermutungen sind darüber ausgesprochen worden. Man hat vielleicht nicht ganz unglücklich versucht den Zweck der Schrift in jenem Bruchstücke der Grundzüge zu finden. Mit anderen Worten: man hat es als einzigen Zweck der Sandrechnung bezeichnet, ein Beispiel davon zu liefern, wie man die Aussprache der Zahlen von einer gewissen Höhe an bedeutend vereinfachen und dabei eine Einsicht in die Art ihres Wachstums gewähren könne. Neben diesem Zwecke hat man einen anderen wichtigeren zu erkennen geglaubt, die Sandrechnung sei dazu bestimmt, die arithmetische Ergänzung der geometrischen Exhaustionsmethode zu bilden. Dem Unendlichkleinen gegenüber ist das Unendlichgroße der zweite Pol des Unendlichkeitsbegriffes, wenn wir so sagen dürfen; um beide dreht sich die ganze Infinitesimalrechnung. Will man aber beide Gegensätze deutlicher hervortreten lassen, so eignen sich geometrische Betrachtungen nahezu zusammenfallender Raumgebilde vorzugsweise dazu, das Unendlichkleine zu versinnlichen, während das Unendlichgroße unmöglich an Figuren zu begreifen ist, welche dem Auge innerhalb des Raumes begrenzt erscheinen. Nur durch die Zahl wird es dem Verständnisse näher gebracht. Man kann zeigen, daß jede noch so

---

[1]) Vgl. über diesen Wolf, Geschichte der Astronomie 35—37. [2]) Archimed (ed. Heiberg) II, 290, (ed. Nizze) 223.

große, aber gegebene Zahl durch eine im übrigen nicht näher bestimmte Zahl überstiegen werden kann, man kann über jede noch so ferne Grenze dabei als zu nahe gelegen hinausgehen. Das gerade hat Archimed in seiner Sandrechnung geleistet.

Ist die Frage nach dem Zwecke der Sandrechnung schon eine schwierige, so ist die Frage nach ihrer Heimat womöglich noch weniger sicher zu beantworten. Auf der einen Seite ist unzweifelhaft die philosophische wie die mathematische Erkenntnis des Unendlichen ein Gegenstand griechischer Forschung schon in einer Zeit gewesen, die um reichlich ein Jahrhundert vor Archimed liegt. Auf der anderen Seite ist die griechische Denkart im ganzen so übertrieben großer Zahlen nicht gewohnt. Nicht vor, nicht nach Archimed finden wir ähnliches in griechischer Sprache. Man könnte erwidern, nicht vor, nicht nach Archimed finde man unter den griechischen Schriftstellern einen Archimed! Allein auch eine andere Auskunft ist nicht unmöglich. Es könnte hier ein auswärtiges Problem vorliegen, welches Archimed irgendwie, irgendwo einmal zu Ohren gekommen wäre, welches er mit seinem allumfassenden Geiste aufnahm und im Sinne seiner Absicht, die vielleicht von der des ursprünglichen Stellers der Aufgabe himmelweit verschieden war, behandelte. Man möchte fast für diese Auffassung auf die einleitenden Sätze der Sandrechnung verweisen: „Manche Leute glauben, König Gelon, die Zahl des Sandes sei von unbegrenzter Größe. Ich meine nicht des um Syrakus und sonst noch in Sizilien befindlichen, sondern auch dessen auf dem ganzen festen Lande, dem bewohnten und unbewohnten. Andere gibt es wieder, welche diese Zahl zwar nicht für unbegrenzt annehmen; sondern nur daß noch keine so große Zahl jemals genannt sei, welche seine Menge übertrifft. Wenn sich nun eben diese einen so großen Sandhaufen dächten, wie die Masse der ganzen Erde; dabei sämtliche Meere ausgefüllt und alle Vertiefungen der Erde so hoch wie die höchsten Berge, so würden sie gewiß um so mehr glauben, daß keine Zahl zur Hand sei, die Menge derselben noch zu überbieten. Ich aber will mittels geometrischer Beweise, denen Du beipflichten wirst, zu zeigen versuchen, daß unter den von mir benannten Zahlen, welche sich in meiner Schrift an den Zeuxippus befinden, einige nicht nur die Zahl eines Sandhaufens übertreffen, dessen Größe der Erde gleichkommt, wenn sie nach meiner Erklärung ausgefüllt ist, sondern auch die eines solchen, dessen Größe dem Weltalle gleich ist.“ So der Anfang der Abhandlung, und man wird zugeben müssen, daß Archimed in ihm die eigentümliche Gruppierung und Benennung der großen Zahlen für sich in Anspruch nimmt, aber keineswegs den Gedanken eines der Erdkugel gleichen

Sandhaufens selbst als einen neuen bezeichnet, welchen noch niemand vor ihm geäußert habe.

Wir haben (S. 297) zugesagt, auch die Kenntnisse Archimeds im Gebiete der Mechanik in das Bereich unserer Darstellung zu begreifen. Bei Archimed war mehr als bei irgend früheren Schriftstellern die Mechanik der Geometrie eng verschwistert. Geometrische Betrachtungen feinster Art standen ihm im Dienste der Mechanik, mechanische Lehren wurden aber auch zur Beweisführung geometrischer Sätze von ihm angewandt. Wir haben wiederholt von der Stellung der Abhandlung über die Quadratur der Parabel mitten zwischen den beiden Büchern vom Gleichgewicht der Ebenen gesprochen, und diese Stellung ist kennzeichnend nach beiden Seiten hin. Eine Stetigkeit des Inhaltes vom I. Buche zur Zwischenabhandlung, von dieser zum II. Buche ist unverkennbar, so unverkennbar, daß es schwer wird zu sagen, welcher einzelne Satz für Archimed mit der Geltung eines mechanischen, welcher mit der eines geometrischen Satzes versehen ist. Es handelt sich in der ganzen Schrift um Schwerpunktsbestimmungen, welche auf Grund des Satzes [1]) gefunden werden, daß der Schwerpunkt einer aus zwei gleich schweren nicht denselben Schwerpunkt besitzenden Größen zusammengesetzten Größe in der Mitte derjenigen geraden Linie liegen muß, welche die Schwerpunkte der beiden Teile verbindet, zu welchem der andere bereits in der aristotelischen Mechanik (S. 255) enthaltene Satz [2]) kommt, daß kommensurable wie inkommensurable Größen im Gleichgewicht stehen, sobald sie ihren Entfernungen von dem Stützpunkte des Hebels, an welchem sie wirkend gedacht sind, umgekehrt proportioniert sind. So findet Archimed den Schwerpunkt eines Parallelogrammes, eines Dreiecks, eines Paralleltrapezes und hat damit das nötige Material, um nun endlich bis zum 17. Satze der Zwischenabhandlung mechanisch die Quadratur der Parabel abzuleiten [3]), von deren sich alsdann noch anknüpfender geometrischen Begründung wir im vorigen Kapitel gesprochen haben. Der Gang ist in aller Kürze folgender. Zuerst (Fig. 54) wird an dem gleicharmigen in B gestützten Hebel $AB\Gamma$ ein Dreieck $\Gamma\Delta H$ mit

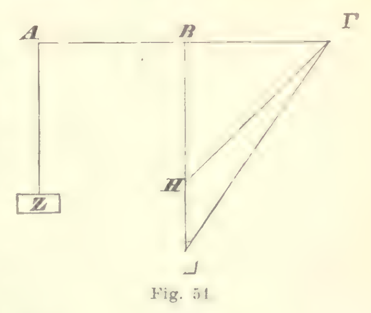


Fig. 54

[1]) Gleichgewicht der Ebenen Buch I, Satz 4 (ed. Heiberg) II, 146, (ed. Nizze) 2. [2]) Gleichgewicht der Ebenen Buch I, Satz 6 und 7 (ed. Heiberg) II, 152—160, (ed. Nizze) 3—5. [3]) Archimed (ed. Heiberg) II, 308—336, (ed. Nizze) 12—22.

den Befestigungspunkten B und Γ an dem Wagbalken $B\Gamma$ aufgehängt gedacht. Es wird gezeigt, daß dieses Dreieck mit einer in A aufgehängten Figur Z in Gleichgewicht ist, wenn Z der dritte Teil des Dreiecks $\Gamma\Delta H$ ist. Des weiteren wird (Fig. 55) ein Paralleltrapez aufgehängt gedacht, dessen nicht parallele Seiten sich in Γ schneiden, während die parallelen Seiten senkrecht gegen den Wagbalken sind. Für die diesem Trapeze ΔKPT bei A das Gleichgewicht haltende Figur Z wird bewiesen, daß sie zwischen zwei Grenzen, dem $\frac{BE}{B\Gamma}$- und dem $\frac{BH}{B\Gamma}$fachen des Trapezes enthalten ist.

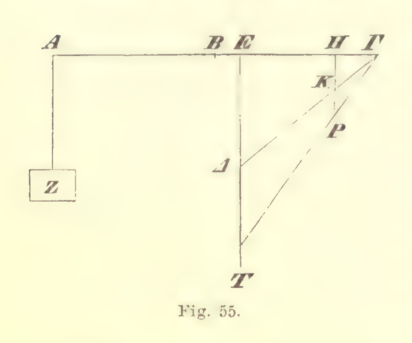


Fig. 55.

Jetzt geht Archimed (Fig. 56) zur Aufhängung eines Parabelabschnittes über. Er hat schon im Eingange der Abhandlung einige Eigenschaften dieser Kurve erwähnt. Er zeigt nun, daß wenn die den Abschnitt bildende Sehne $B\Gamma$ in beliebig viele gleiche Teile geteilt wird, wenn aus jedem Teilpunkte eine Parallele zu $K\Delta$ und aus den Schnittpunkten dieser Parallelen mit der Parabel Verbindungslinien nach Γ gezogen werden, welche man noch jenseits des Parabelpunktes bis zur nächsten Parallelen verlängert, der Parabelabschnitt alsdann als zwischen zwei Summen von trapezartigen Stücken enthalten sich kundgibt. Durch Aufsuchen der jedem Trapezchen in A das Gleichgewicht haltenden Figur, sowie durch Verbindung der beiden genannten Gleichgewichtssätze für das Dreieck und das Trapez ergibt sich endlich der Parabelabschnitt als Drittel des großen Dreiecks $B\Gamma\Delta$.

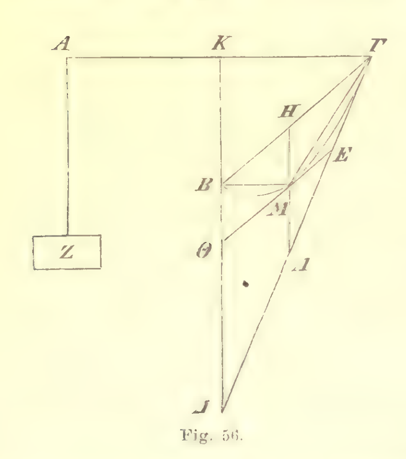


Fig. 56.

Andrerseits ist unter der Voraussetzung, es sei $EM\Theta$ die der $B\Gamma$ parallele Berührungslinie an die Parabel, M die Mitte von $H\Lambda$, H die Mitte von $B\Gamma$ und Λ die Mitte von $\Gamma\Delta$, folglich $HM = \frac{B\Delta}{4}$. Daraus ergibt sich, daß der Parabelabschnitt $\frac{4}{3}$ des kleinen Dreiecks $BM\Gamma$ ist, wie erwiesen werden sollte. Im II. Buche des Gleichgewichts der Ebenen geht dann Archimed dazu über, den Schwerpunkt des parabolischen Abschnittes zu finden.

Noch gewaltiger förderte Archimed die Erkenntnis der Gesetze gegenseitigen Druckes flüssiger und fester Körper. Er entdeckte das nach ihm benannte hydrostatische Prinzip[1]), welches als Lehrsatz gekleidet von ihm folgendermaßen ausgesprochen wurde: Jeder feste Körper, welcher, leichter als eine Flüssigkeit, in diese eingetaucht wird, sinkt so tief, daß die Masse der Flüssigkeit, welche so groß ist als der eingesunkene Teil, ebensoviel wiegt, wie der ganze Körper[2]). Daraus folgt ein weiterer Satz: Wenn ein Körper, leichter als eine Flüssigkeit, in diese getaucht wird, so verhält sich sein Gewicht zu dem einer gleich großen Masse Flüssigkeit, wie der eingesunkene Teil des Körpers zum ganzen Körper[3]). Dieser Satz bildet selbst die wissenschaftliche Definition des spezifischen Gewichtes für solche Stoffe, die leichter als die zur Dichtigkeitseinheit gewählte Flüssigkeit sind.

Das spezifische Gewicht dichterer Körper hatte Archimed, wie wir (S. 310—312) besprochen haben, bei seiner Kronenrechnung zu benutzen verstanden. Wir lehnten es dort ab, zu entscheiden, welcher von den beiden berichteten Methoden Archimed sich tatsächlich bediente. Auch jetzt, wo der Zusammenhang mit den Büchern von den schwimmenden Körpern uns nahe legen würde, von jener unparteiischen Zwischenstellung uns zu entfernen, sprechen wir nur mit besonderem Vorbehalte unsere persönliche Meinung über jene Frage aus. Die Methode mehrfacher Abwägungen ließ jedenfalls ein genaueres Ergebnis finden als die Methode der Abmessung der auslaufenden Flüssigkeit, und gerade deshalb scheint uns, da nun einmal beide Methoden berichtet werden, beide also mindestens zur Zeit, als der Berichterstatter lebte, wahrscheinlich aber viel früher, bekannt gewesen sein müssen, die letztgenannte Methode die ersterfundene gewesen zu sein[4]). Der Gedankengang ist doch wohl der natürlichere, daß dem Archimed zuerst unmittelbare Messung des verdrängten Wassers vorschwebte, und daß erst später, sei es durch ihn selbst, sei es durch Nachfolger, das mittelbare Verfahren erfunden wurde, nachdem die praktische Unausführbarkeit erkannt war, das verdrängte Wasser vollständig und genau aufzufangen und zu messen. Sei dem nun, wie da wolle, jedenfalls hat, wie wir schon andeuteten,

---

[1]) Über das hydrostatische Prinzip vgl Ch. Thurot, *Recherches historiques sur le principe d'Archimède* in der *Revue Archéologique* 1869. [2]) Archimed, Von schwimmenden Körpern Buch I, Satz 5 (ed. Heiberg) IV, 367, (ed. Nizze) 227. [3]) Archimed, Von schwimmenden Körpern Buch II, Satz 1 (ed. Heiberg) II, 375, (ed. Nizze) 232. [4] Montucla, *Histoire des Mathématiques* I, 229 vertritt die entgegengesetzte Ansicht und Thurot scheint ihm zu folgen, wenn er sich auch nicht so bestimmt ausspricht.

die Kronenrechnung frühzeitig ein verdientes und ungewöhnliches Aufsehen verursacht. Vitruvius nennt sie neben der Inkommensurabilität der Diagonale eines Quadrates und neben dem pythagoräischen Dreiecke aus den Seiten 3, 4, 5 in gleicher Linie. Sie stellen ihm gemeinschaftlich die drei größten mathematischen Entdeckungen dar[1]. Proklus erzählt, König Gelon habe im Hinblick auf die Kronenrechnung gesagt, er werde hinfort nichts bezweifeln, was Archimed behaupte[2].

Dasselbe geflügelte Wort, erzählt Proklus weiter, werde auch auf König Hiero zurückgeführt, und knüpfe sich an eine andere mechanische Leistung, welche dem Laien noch wunderbarer vorkommen mußte, weil ihm selbst eine unbegreifliche Handlung ermöglicht wurde. Archimed habe nämlich mit Hilfe von eigentümlich zusammengesetzten Herrichtungen es fertig gebracht, daß König Hiero ganz allein ein schweres Schiff von Stapel lassen konnte. Ob die Herrichtung der Hauptsache nach ein Flaschenzug[3], *τρισπάστος*, war, ob eine Spirale[4], *ἕλιξ*, sie darstellte, ist ziemlich gleichgültig. Jedenfalls ist der Name des Archimed für alle Zeiten mit dem einer dritten Gattung von Vorrichtungen, mit der Schraube[5], *κοχλία*, verbunden geblieben, welche er als Wasserhebewerk benutzte, und das ihm innewohnende Bewußtsein der großen Leistungsfähigkeit seiner Maschinen spiegelt sich in dem stolzen Worte: Gib mir wohin ich gehen kann, und ich setze die ganze Erde in Bewegung[6], *πᾶ βῶ καὶ χαριστίωνι τὰν γᾶν κινήσω πᾶσαν*, oder gib mir wo ich stehe und ich bewege die Erde[7] *δός μοὶ ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν*.

Wir übergehen das, was von einem vielleicht durch eine Art Gebläse oder durch Wasserkraft in Bewegung gesetzten Himmelsglobus[8] des Archimed erzählt wird, was sich auf ein für König Hiero erbautes großes Schiff mit 20 Ruderbänken[9], was sich auf die Brennspiegel bezieht, mittels deren Archimed bei der Römerbelagerung die feindlichen Schiffe in Brand gesetzt haben soll[10]. Das sind Gegenstände, die noch weniger als die zuletzt besprochenen der Geschichte der Mathematik angehören, und die, mag an ihnen wahr sein, was da wolle, die Verdienste Archimeds für unsere Zwecke weder erhöhen, noch beeinträchtigen.

[1] Vitruvius IX, 1—3. [2] Proklus (ed. Friedlein) 63. [3] Tzetzes II, 35. [4] Athenaeus V, p. 217. [5] Diodor I, 34 und V, 37. [6] Tzetzes II, 130. [7] Pappus VIII, 11 (ed. Hultsch) 1060. [8] Bunte, Leerer Gymnasialprogramm von 1877, S. 15—18 und Hultsch, Ueber den Himmelsglobus des Archimedes. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-literar. Abteilung 106 (1877). [9] Athenaeus V, pag. 207. [10] Heiberg, *Quaestiones Archimedeae* 39—41.

16. Kapitel.

Eratosthenes. Apollonius von Pergä.

Etwa 11 Jahre nach der Geburt des Archimedes, im Jahre 276 oder 275 wurde in Kyrene, der therischen Kolonie an der Nordküste Afrikas, Eratosthenes, Sohn des Eglaos geboren[1]. Er verbrachte den größten Teil seines Lebens in Alexandria. Dort ward er erzogen unter der Leitung seines Landsmannes Kallimachus, des gelehrten Vorstehers der großen Bibliothek, sowie eines anderen sonst unbekannten Philosophen Lysanias. Dann wandte er sich nach Athen, wo er der Schule der Platoniker sich näherte, so daß er selbst als Platoniker bezeichnet wird, und wo er wahrscheinlich auch zuerst in das Studium der Mathematik eindrang. Ptolemaeus Euergetes — der dritte Ptolemäer, wie Suidas erzählt, dem die Notizen für das Leben des Eratosthenes fast ausschließlich zu verdanken sind — berief Eratosthenes wieder nach Alexandria zurück als Nachfolger seines Lehrers Kallimachus in der Vorstandsstellung bei der Bibliothek, und von da an scheint sein Verhältnis zu diesem Fürsten wie zur Fürstin Arsinoe ein besonders freundschaftliches geworden zu sein. Es ist folglich keinerlei Grund vorhanden anzunehmen, Eratosthenes sei in späteren Jahren von der Bibliothek entfernt ins Elend geraten, wenn auch andrerseits die Nachrichten allzu übereinstimmend sind um sie zu verwerfen, daß Eratosthenes augenleidend, vielleicht sogar erblindet, seinem Leben ungefähr 194 v. Chr. durch freiwilligen Hungertod ein Ende machte.

Die wissenschaftliche Bedeutung des Eratosthenes war eine mannigfaltige. Das Hauptgewicht scheint er selbst auf seine literarische und grammatische Tätigkeit gelegt zu haben, wenigstens gab er sich den Beinamen des Philologen. Allein auch in den meisten anderen Lehrgegenständen trat Eratosthenes als Schriftsteller auf, wie die erhaltenen Überschriften seiner Werke bezeugen, und sicherlich nicht mit Unrecht nannten ihn deshalb die Schüler des Museums Pentathlon, den Kämpfer in allen fünf Fechtweisen, welche bei den Kampfspielen in Gebrauch waren. Um diese Vielseitigkeit zu kennzeichnen mag nur der Schrift über das Gute und Böse neben der Erdmessung, des Werkes über die Komödie neben der Geo-

[1]) Vgl. Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harless) IV, 120—127. *Eratosthenis geographicorum fragmenta* (ed. Seidel) Göttingen 1789. G. Bernhardy, *Eratosthenica*. Berlin 1822 und desselben Verfassers Artikel Eratosthenes in Ersch und Grubers Encyklopädie. *Eratosthenis Carminum reliquiae* (ed. Hiller) Leipzig 1872.

graphie, der Chronologie neben dem Buche über die Würfelverdoppelung gedacht sein.

In der Erdmessung, mit welcher eine besondere Schrift *Περὶ τῆς ἀναμετρήσεως τῆς γῆς* sich beschäftigte, war zum ersten Male von einem Griechen der Versuch gemacht die Größe der Erde genau zu bestimmen. Er fand den Grad zu 126 000 Meter, während die wahre Länge des Breitengrades in Ägypten 110 802,6 Meter beträgt, so daß also Eratosthenes bei seiner Schätzung um fast $13^3/_4$ Prozent irrte, ein Irrtum, den man aber nicht so beträchtlich finden wird, wenn man erwägt, daß dem Eratosthenes dabei höchstens bis zur zweiten Katarakte wirkliche Landesvermessungsergebnisse zu Gebote standen, während er für das obere Land bis zu den Nilkrümmungen und nach Meroe von den ganz unbestimmten Angaben der wenigen Reisenden abhängig war, welche die Hauptstationen und ihre Entfernungen in Tagesmärschen aufgezeichnet hatten[1]).

Den erhaltenen Bruchstücken der Geographie hat man entnommen, daß Eratosthenes nicht nur eine klare Beschreibung des Vorhandenen lieferte, sondern auch allgemeine Betrachtungen über das Werden und die Ursachen der Veränderungen der Erdoberfläche mit Glück gewagt hat[2]).

Für die Chronologie ist seit Auffindung des Ediktes von Kanopus ein Inhalt bekannt geworden, an welchen niemand früher dachte, niemand denken konnte. Wir haben gelegentlich (S. 78) von dieser Verordnung gesprochen. Die in Kanopus, nur wenige Wegstunden von Alexandria entfernt, versammelte Priesterschaft verkündete unter dem Datum des 19. Tybi des 9. Regierungsjahres Ptolemaeus III., Euergetes I. d. i. am 7. März 238 v. Chr. den Befehl[3]), daß „damit auch die Jahreszeiten fortwährend nach der jetzigen Ordnung der Welt ihre Schuldigkeit tun und es nicht vorkomme, daß einige der öffentlichen Feste, welche im Winter gefeiert werden, einstens im Sommer gefeiert werden, indem der Stern um einen Tag alle vier Jahre weiterschreitet, andere aber, die im Sommer gefeiert werden, in späterer Zeit im Winter gefeiert werden, wie das sowohl früher geschah, als auch jetzt wieder geschehen würde, wenn die Zusammensetzung des Jahres aus den 360 Tagen und den 5 Tagen, welche später noch hinzuzufügen gebräuchlich wurde, so fortdauert, von

---

[1]) Lepsius, Das Stadium und die Gradmessung des Eratosthenes auf Grundlage der ägyptischen Maße (in der Zeitschr. f. ägypt. Sprache und Alterthumskunde 1877, 1. Heft). [2]) Alex. v. Humboldt, Kosmos II, 208 und zugehörige Anmerkung S. 435. Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes neu gesammelt, geordnet und besprochen. Leipzig 1880. [3]) Lepsius, Das bilingue Dekret von Kanopus. Berlin 1866. Bd. I.

jetzt an 1 Tag als Fest der Götter Euergeten alle 4 Jahre gefeiert werde hinter den 5 Epagomenen und vor dem Neuen Jahre, damit jedermann wisse, daß das, was früher in bezug auf die Einrichtung der Jahreszeiten und des Jahres und das hinsichtlich der ganzen Himmelsordnung Angenommene fehlte, durch die Götter Euergeten glücklich berichtigt und ergänzt worden ist.“ Ob Eratosthenes selbst diese wichtige chronologische Neuerung veranlaßte, ist unsicher. Kallimachus soll nämlich um die CXXXV. oder CXXXVI. Olympiade gestorben sein. Der Anfang der ersteren war 240, der der zweiten 236. Zwischen beide Anfänge fällt das Edikt von Kanopus. Da nun Eratosthenes erst nach dem Tode des Kallimachus wieder nach Alexandria zurückkehrte, so hängt es wesentlich von der genauen Bestimmung dieses Todesjahres ab, ob Eratosthenes bei Erlaß des Ediktes zur Stelle war oder nicht. Aber sei dem, wie da wolle, irgend eine Beziehung zwischen der Schaltjahreinrichtung und der Chronologie des Eratosthenes wird nicht wohl von der Hand zu weisen sein. Wir machen zugleich darauf aufmerksam, daß von dieser merkwürdigen Tatsache des Vorhandenseins eines ägyptischen Schaltjahres in der frühen Ptolemäerzeit der Altertumsforschung vor Auffindung des Ediktes selbst nicht eine Silbe bekannt war. Nicht die leiseste Anspielung auf diese jetzt durchaus feststehende bedeutsame Reform kommt in uns erhaltenen alexandrinischen Schriften vor, ein Wink, nicht gar zu viel auf das negative Zeugnis fehlender Belege für eine an sich wahrscheinliche Vermutung zu vertrauen.

Über alle diese Schriften müssen kurze Andeutungen hier genügen. Bevor wir zum Briefe über die Würfelverdoppelung und damit zur mathematischen Seite der Tätigkeit des Eratosthenes übergehen, wollen wir nur eines weiteren Beinamens noch gedenken, unter welchem er mitunter vorkommt. Man nannte ihn nämlich Beta. Die Bedeutung dieses Beinamens ist sehr zweifelhaft. Die einen wollen, er habe ihn deshalb erhalten, weil er der zweite Vorsteher der großen Bibliothek gewesen sei. Allein dieses ist einesteils unrichtig, wenn, wie sonst angenommen wird, Zenodotus der erste, Kallimachus der zweite, Eratosthenes also erst der dritte Vorsteher war, andernteils ist nirgends eine Spur zu finden, daß Zenodotus oder auch Kallimachus etwa Alpha, oder einer der Nachfolger des Eratosthenes Gamma oder Delta genannt worden wäre. Wahrscheinlicher ist die andere Ableitung, wonach das Wort Beta ihn als zweiten Platon kennzeichnen sollte, oder allgemeiner als denjenigen, der überall den zweiten Rang wenigstens sich zu erobern wußte, wenn der erste Rang auch ehrfurchtsvoll den Altvordern eingeräumt werden muß. Endlich kommt noch in Betracht, daß Buchstaben als

Beinamen, und zwar unter den seltsamsten Begründungen, auch anderweitig bei den Griechen um das Jahr 200 v. Chr. vorkommen. So wird ein Astronom Apollonius, der zur Zeit des Königs Ptolemaeus Philopator sich mit Untersuchungen über den Mond beschäftigte und dadurch sich weithin bekannt machte, als Epsilon bezeichnet; denn der Buchstabe ϵ sehe der Gestalt des Mondes gleich[1]).

Der Brief über die Würfelverdoppelung ist von uns bereits mehrfach benutzt worden. Dem Anfange desselben entnahmen wir (S. 211) die Geschichte der Entstehung jenes Problems. Als wir von Eudoxus und Menächmus und ihren Würfelverdoppelungen redeten (S. 231 und 229), bezogen wir uns auf ein Epigramm[2]), welches den Schluß des Briefes bildet. Der Hauptteil des Briefes lehrt selbst eine Verdoppelung des Würfels unter Anwendung eines eigens dazu erfundenen Apparates, des Mesolabium, wie es genannt wurde, weil es dabei auf die Auffindung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Größen und zwar durch Bewegungsgeometrie (S. 209) ankam[3]). Das Mesolabium bestand aus drei einander gleichen rechtwinkligen Täfelchen von Holz, Elfenbein oder Metall, welche zwischen zwei mit je drei Rinnen versehenen Linealen eingeklemmt in diesen Rinnen übereinander weg verschoben werden konnten. Die Anfangslage ist in der Figur, welche Eutokius in seinem Kommentare zu Archimeds Büchern von der Kugel und dem Zylinder, wo der ganze Brief des Eratosthenes eingeschaltet sich findet, beigibt, mit den Buchstaben (Fig. 57) $AEZA$, $AZHI$, $IH\Theta\Delta$ versehen, wobei, wie wir im vorübergehen bemerken, der Buchstabe I auffallen mag. Auch in der in dem gleichen Kommentare erhaltenen Figur zur Würfelverdoppelung des Archytas (S. 228 Fig. 36) kommt ein I vor, während Euklid diesen Buchstaben grundsätzlich vermieden hat, viel-

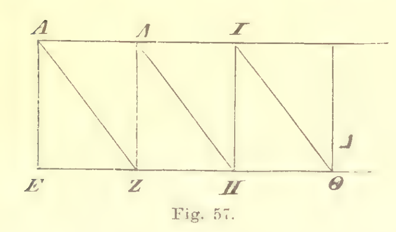


Fig. 57.

[1]) Ptolemaeus Hephaestio bei Photius cod. CXC. [2]) Hiller in seiner Ausgabe der poetischen Fragmente des Eratosthenes hält aus sprachlichen Gründen das Schlußepigramm sowie vielleicht den ganzen Brief für unecht. Die sprachliche Form geben wir deshalb preis, da wir uns nicht berechtigt glauben auf diesem Gebiete zu widersprechen, den Inhalt aber halten wir der wesentlichen Übereinstimmung wegen mit allem, was wir wissen, nach wie vor für echt. [3]) Den Namen des Mesolabium kennen wir aus Vitruvius IX, 3 und aus Pappus III, 4 (ed. Hultsch) 54. Die Beschreibung des Apparates bei Pappus III, 5 (ed. Hultsch) 56 sq. weicht in Einzelheiten, aber nicht in dem Hauptgedanken von dem eratosthenischen Briefe ab und bestätigt so unsere in der vorigen Anmerkung ausgesprochene Meinung.

mehr nach Θ sofort zu K überging. Offenbar wollte man dadurch der leicht möglichen Verwechslung des Buchstaben I mit einem einfachen Vertikalstriche vorbeugen. Aristoteles freilich und wohl alle ihm vorhergehenden Schriftsteller vermieden das I noch nicht bei Figurenbezeichnungen[1]). Wohl möglich, daß diese Sitte auch zur Zeit des Eudemus, dessen Aufzeichnungen Eutokius das Verfahren des Archytas entnimmt, noch nicht aufgekommen war. Für das Vorkommen des I in einer Figur des Eratosthenes wissen wir keine andere Erklärung, als daß an dem ursprünglichen Texte mancherlei, wenn auch den Inhalt wenig berührende Änderungen vorgenommen worden sein müssen, von denen unter anderen die Buchstaben der einen Figur betroffen wurden. War nun AE die größere, $\Delta\Theta$ die kleinere Linie, zwischen welche die beiden mittleren Proportionalen einzuschalten waren, so mußte man (Fig. 58) die Rechteckchen so verschieben, daß das erste einen Teil des zweiten, dieses einen Teil des dritten verbarg und zwar derart, daß die von A nach Δ gezogene Grade durch die Punkte B, Γ hindurchging, von welchen an die Diagonalen des zweiten und dritten Rechteckchens sichtbar waren; die BZ und ΓH sind alsdann, wie leicht zu beweisen ist, die beiden gesuchten mittleren Proportionallinien. Eratosthenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, daß er zum ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihgeschenk in einem Tempel aufhängen ließ. Die von ihm selbst entworfene Inschrift, welche die Gebrauchsanweisung enthielt, soll das mehrgenannte Schlußepigramm des eratosthenischen Briefes sein.

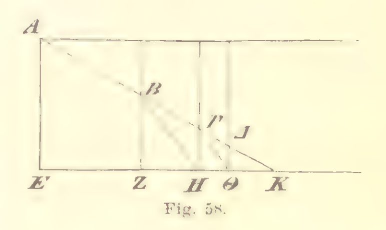


Fig. 58.

Ob ein von Pappus an zwei Stellen[2]) erwähntes Werk des Eratosthenes über Mittelgrößen, περὶ μεσοτήτων oder τόποι πρὸς μεσότητας, sich gleichfalls auf die Würfelverdoppelung bezog, ist ungewiß. Wäre dem so, so würde daselbst möglicherweise eine geometrische Lösung gelehrt worden sein, da Pappus das eine Mal bemerkt, diese Schrift stehe mit den lineären Örtern ihrer ganzen Voraussetzung nach in Zusammenhang.

Noch geringfügiger sind die Spuren eines weiteren Werkes des Eratosthenes, welche auf wenige unbedeutende Zitate bei Theon von Smyrna[3]) sich beschränken. Wenn auch der Schluß gerechtfertigt

[1]) Heiberg in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 18.
[2]) Pappus VII, *Prooemium* (ed. Hultsch) 636 und 662. [3]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 82, 107, 111.

sein mag, in jenem Werke sei von den Proportionen und sonstigen arithmetischen Fragen die Rede gewesen, so schwebt doch die Behauptung[1]) ganz in der Luft, sie habe den Titel Arithmetik geführt.

Vielleicht gehört ebendahin ein Bruchstück, welches bei Nikomachus von Gerasa und in dem Kommentare zu dessen Arithmetik von Jamblichus sich vorfindet[2]). Vielleicht aber bildet auch dieses Bruchstück einen Teil einer besonderen Schrift, welche den Titel des Siebes führte. Das Sieb, *κόσκινον* (lateinisch: *cribrum Eratosthenis*) ist eine Methode zur Entdeckung sämtlicher Primzahlen. Man schreibt, so lautet die Regel, alle ungeraden Zahlen von der 3 an der Reihe nach auf. Man streicht nun jede dritte Zahl hinter der 3 durch, so sind die Vielfachen der 3 entfernt. Dann geht man zur nächsten Zahl 5 über und streicht jede fünfte Zahl hinter ihr durch ohne Rücksicht darauf, ob sie schon durch einen früheren Strich vernichtet ist oder nicht, so sind die Vielfachen der 5 entfernt. Fährt man weiter so fort, indem man beim Abzählen und Durchstreichen die bereits durchstrichenen Zahlen den unberührten gleichachtet und nur den Unterschied macht, daß man keine durchstrichene Zahl als Ausgangspunkt einer neuen Aussiebung benutzt, so bleiben schließlich nur die Primzahlen übrig. Sämtliche zusammengesetzte Zahlen dagegen sind vernichtet, und am Anfange fehlt auch noch die Primzahl 2, welche Jamblichus, weil sie gerad sei, nicht unter die Primzahlen gerechnet wissen will, trotzdem Euklid sie fehlerhafterweise dorthin verwiesen habe[3]).

Die Siebmethode des Eratosthenes ist gerade keine solche, zu deren Ersinnung ein übermäßiger Scharfsinn gehörte. Trotz dessen glauben wir sie ihrer geschichtlichen Stellung wegen für einen ziemlich bedeutenden Fortschritt in der Zahlentheorie halten zu müssen. Man erwäge nur, wie die Sache der Zeitfolge nach liegt. Zuerst unterschied man Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen und leitete wohl manche Eigenschaften der letzteren aus den ersteren ab. Der zweite Schritt war der, daß Euklid zeigte, wie die Anzahl der Primzahlen unendlich sei, wie es folglich nicht möglich sei, alle Primzahlen zu untersuchen. Jetzt erst gewinnt es als dritter Schritt Bedeutung, wenn Eratosthenes zeigt, wie man wenigstens imstande sei, die Primzahlen, soweit man in der Zahlenreihe gehen will, zu entdecken, und somit der Unausführbarkeit der Darstellung sämtlicher Primzahlen eine von der Willkür des Rechners abhängende untere

[1]) Fabricius, *Bibliotheca graeca* (ed. Harless) IV, 121. [2]) Nicomachus (ed. Hoche) 29 flgg. *Jamblichus in Nicomachi arithmeticam* (ed. Tennulius) 41, 42, (ed. Pistelli) 29 sqq. [3]) *Jamblichus in Nicomachi arithmeticam* (ed. Tennulius) 42, (ed. Pistelli) 30, 31.

Grenze zu setzen. An und für sich hätte die Erfindung des Eratosthenes ebensogut vor als nach Euklid gemacht werden können; nur, meinen wir, wäre ihr wissenschaftlicher Wert geringfügiger gewesen, wenn sie älter war. Damals hätte das Sieb ein verunglückter Versuch sein können die genaue Anzahl der Primzahlen zu ermitteln. Jetzt dagegen, nach Euklid, konnte es nur eine Methode sein, bei deren Aussinnung man von Anfang an gerade das beabsichtigte, was sie zu leisten imstande ist. Darin aber schon liegt ein Zeugnis höherer Vollkommenheit, wenn Methoden zu bestimmten Zwecken gesucht und auch wirklich gefunden werden.

Das Jahrhundert von 300 bis 200 v. Chr., welches, weil am Anfang desselben Euklid blühte, das Jahrhundert des Euklid genannt werden kann, schloß würdig ab mit Apollonius von Pergä[1]. Den Beinamen, der ihn von außerordentlich vielen bekannten Männern, welche gleichfalls Apollonius heißen, unterscheiden soll, führt er nach seinem Heimatsorte, einer Stadt in Pamphilien. Ob er mit dem früher erwähnten Astronomen, dem der Beiname Epsilon beigelegt wurde, zusammenfällt oder nicht, steht in Zweifel. Die Lebenszeit der beiden ist allerdings übereinstimmend. Apollonius von Pergä wurde während der Regierung des Ptolemaeus Euergetes geboren und hatte seine Blütezeit, gleich jenem Astronomen, während der bis 205 dauernden Regierung des Ptolemaeus Philopator. Eine fernere Übereinstimmung könnte man darin finden, daß auch von Apollonius von Pergä bekannt ist, daß er mit Sternkunde sich beschäftigte. Wenigstens geht die beste Lesart einer Stelle des 1. Kapitels des XII. Buches des ptolemäischen Almagestes dahin, daß Apollonius von Pergä über den Stillstand und die rückläufige Bewegung der Planeten geschrieben habe, und sie mit Hilfe der Epizyklen zu erklären suchte. Ein freilich nur negativer Gegengrund liegt darin, daß Ptolemäus von den Untersuchungen über den Mond gar nichts sagt, welche doch gerade die vorzüglichste Leistung des Apollonius Epsilon gebildet haben müssen.

---

[1]) Das Material für die Biographie des Apollonius von Pergä ist zusammengestellt in der Vorrede von Halleys Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius (Oxford 1710). Vgl. auch Fabricius, *Biblioth. Graeca* (ed. Harless) IV, 192 bis 203. Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 245—253. Terquem, *Notice bibliographique sur Apollonius* in den *Nouvelles annales des mathématiques* (1844) III, 350- 352 und 474—488, endlich die Vorrede von H. Balsam zu seiner deutschen Bearbeitung (nicht Übersetzung) der Kegelschnitte des Apollonius von Pergä. Berlin 1861. Die neueste Ausgabe der vier ersten griechisch erhaltenen Bücher der Kegelschnitte des Apollonius nebst ihren Kommentatoren ist die von Heiberg in 2 Duodezbänden. Leipzig 1891—93. W. Crönert (Sitzungsber. der Berliner Akad. 1900, S. 942—950) gibt das Jahr 170 als Todesjahr des Apollonius.

Von den Lebensverhältnissen des Apollonius von Pergä ist nichts weiter bekannt, als daß er schon als Jüngling nach Alexandria kam, wo er seine mathematische Bildung von den Nachfolgern des Euklid erhielt. Ein bestimmter Lehrer wird nicht genannt. Später ist ein Aufenthalt in Pergamum gesichert, wo Apollonius einem gewissen Eudemus befreundet war, welchem er mit Wachrufung der Erinnerung an jenes Zusammenleben sein Hauptwerk, die acht Bücher der Kegelschnitte, *κωνικά*, widmete.

Zeitgenossen und Nachkommen bewunderten dieses Werk und ehrten dessen Verfasser durch den Beinamen des großen Mathematikers. So erzählt ausdrücklich Geminus, dessen Bericht Eutokius in seinem Kommentare zu den vier ersten Büchern der Kegelschnitte des Apollonius uns aufbewahrt hat[1]). Eutokius will damit den Ungrund des Vorwurfes darlegen, welchen Heraklides, der Biograph des Archimed (S. 295) gegen Apollonius ausspricht, als habe derselbe nur einen literarischen Raub an noch unveröffentlicht gebliebenen Schriften des Archimed begangen. Mit gleichem Rechte läßt der Bericht des Geminus sich gegen die früher (S. 288) erwähnte Behauptung des Pappus verwerten, als stützten sich die vier ersten Bücher des Apollonius wesentlich auf die Kegelschnitte des Euklid[2]). Apollonius wird gewiß so wenig wie ein Schriftsteller irgend einer Zeit und irgend eines Volksstammes versäumt haben die Vorarbeiten auf dem Gebiete, welches er zu behandeln wünschte, kennen zu lernen. Er wird sicherlich von den Vorarbeiten, insbesondere wenn sie von einem Euklid, einem Archimed herrührten, Vorteil gezogen haben; er sagt auch nirgends in seinen Schriften, daß das Ganze seiner Kegelschnitte sein ausschließliches Eigentum sei. Aber von der Benutzung fremder Vorarbeiten als Grundlage, als untere Voraussetzung eines Werkes zu unrechtmäßiger Aneignung fremder Entdeckungen ist doch eine unermeßliche Kluft, und es fällt schwer einem Manne von der sonst allseitig anerkannten Bedeutung des Apollonius letztere Handlung zuzutrauen. Zwei ganz grundlegende Neuerungen haben wir überdies unter allen Umständen dem Apollonius zuzuschreiben.

Geminus sagt ausdrücklich, wie uns Eutokius an der oben erwähnten Stelle berichtet, die Alten hätten nur gerade Kegel geschnitten und die Schnitte stets senkrecht zur Seite des Kegels geführt, worauf sie je nach dem Winkel an der Spitze des Kegels den Schnitt des spitzwinkligen, des rechtwinkligen, des stumpfwinkligen Kegels unterschieden (S. 244). Apollonius dagegen habe ge-

[1]) Apollonius, Conica (ed. Heiberg) II, 170. [2]) Pappus, VII *Prooemium* (ed. Hultsch) 672.

zeigt, daß alle diese Schnitte an einem einzigen Kegel hervorgebracht werden können, und daß man zu diesem Schnitte ebenso wie den geraden Kegel auch den schiefstehenden verwenden könne. Wir sehen also, daß Apollonius das vervollständigte, was Euklid (S. 292), was Archimed (S. 304) nur von der Ellipse wußten, daß sie auf jedem — jetzt nachdem wir den Bericht des Geminus kennen, müssen wir mit einer weiteren Einschränkung sagen: auf jedem geraden — Kegel herausgeschnitten werden kann. Gegen Geminus anzunehmen, daß auch jene schon alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorzubringen imstande gewesen seien, ist eine Behauptung, welche auf keinerlei alten Bericht sich stützt.

Von der anderen Neuerung wissen wir durch Pappus[1]), der gleichzeitig auch das von Geminus Mitgeteilte bestätigt. Apollonius habe, wie er die Herstellbarkeit jedes Kegelschnittes auf der Oberfläche eines jeden Kegels erkannte, für dieselben neue Namen eingeführt, und zwar die Namen Ellipse, Parabel, Hyperbel mit Rücksicht auf gewisse Eigenschaften der Flächenanlegung.

Wir haben auf diese mit äußerster Bestimmtheit ausgesprochene Angabe uns gestützt, um (S. 291) Euklid die Kenntnis abzusprechen, daß die pythagoräischen Sätze von Flächenanlegungen zu Kegelschnitten als geometrischen Örtern führen konnten. Mit Rücksicht auf die gleiche Stelle hat man gewiß mit Recht die Zuverlässigkeit einiger archimedischen Handschriften in Zweifel gezogen[2]), in welchen die Wörter Parabel und Ellipse statt des Schnittes des rechtwinkligen und spitzwinkligen Kegels vorkommen. Der Name der Parabel insbesondere erscheint nur in der Überschrift der Abhandlung über die Quadratur dieser Kurven, und auch wo der Name der Ellipse im fortlaufenden Texte der Abhandlung von den Konoiden und Sphäroiden dreimal sich vorfindet, dürfte eine späte Einschiebung durch Abschreiber, welche den Wortlaut ganz unbeschadet des Sinnes abkürzen zu dürfen meinten, anzunehmen sein.

Hat aber Apollonius zuerst die Entstehung aller Kegelschnitte an jedem Kegel, zuerst die Eigenschaften derselben erkannt, die wir heutigentages aus den Scheitelgleichungen der drei Kegelschnitte herauszulesen gewohnt sind, dann ist seine Bearbeitung der Kegelschnitte unzweifelhaft ein Originalwerk, mögen auch noch so viele Lehrsätze in den vier ersten Büchern vorkommen, die von Euklid, wenn nicht schon von Menächmus und Aristäus dem Älteren ge-

---

[1]) Pappus VII, *Prooemium* (ed. Hultsch) 674. [2]) Archimed (ed. Nizze) 285. Die entgegengesetzte Meinung bei Chasles, *Aperçu hist.* 17 in der Anmerkung (Deutsch 15).

kannt waren. Zwei andere Vorgänger nennt übrigens Apollonius selbst in der Vorrede zum IV. Buche[1]): Konon von Samos und Nikoteles von Kyrene, deren ersterer uns schon als geistreicher Freund des Archimed bekannt geworden ist, wenn auch der Umstand, daß seine Schriften uns sämtlich verloren sind, uns abhielt, ihm eine besondere Stelle ausführlicher Beachtung zu gewähren. Hätten wir doch nur berichten können, daß er in Samos geboren, in Alexandrien lebte, aber auch in Italien und Sizilien astronomische Beobachtungen anstellte, daß er um 246 das Haupthaar der Berenike, der Gemahlin des Ptolemaeus Euergetes, unter die Sterne versetzte[2]).

Gehen wir nun mit raschen Schritten an dem Inhalte der Kegelschnitte des Apollonius vorüber[3]). Im I. Buche wird nach der allgemeinen Definition des Kegels als der Oberfläche, die durch eine Gerade sich erzeugt, welche um eine Kreisperipherie herumgeführt wird, während sie zugleich durch einen festen, außerhalb der Ebene der Kreisperipherie liegenden Punkt geht, die so erhaltene Fläche durch Ebenen geschnitten. Jeder Schnitt durch den festen Punkt, d. h. durch die Spitze des Kegels, erzeugt ein Dreieck, und liegt in dieser Schnittebene auch die Achse des Kegels, die Verbindungsgerade der Spitze zum Mittelpunkte des bei der Erzeugung des Kegels mitwirkenden Kreises, so entsteht das Achsendreieck. Nun wird vorgeschrieben, neue Schnittebenen zu führen, deren Spuren in der Grundfläche senkrecht auf der Spur des Achsendreiecks stehen, und Apollonius zeigt, wie je nach der Richtung dieser Schnitte zur Seite des Achsendreiecks die verschiedenen Kegelschnittskurven auf der Kegeloberfläche erscheinen. Die Durchschnittslinie der Schnittebene mit dem Achsendreiecke ist jedesmal ein Durchmesser des Kegelschnittes, d. h. sie halbiert alle Sehnen des Kegelschnittes, welche unter sich und einer jedesmal bestimmten Geraden parallel gezogen werden. Der Punkt, in welchem der Durchmesser die Oberfläche des Kegels trifft, ist der Scheitel des Kegelschnittes. Durch diesen Scheitel wird nun in der Schnittebene, also senkrecht zum Achsendreiecke und parallel zu dem durch den Durchmesser halbierten Sehnensysteme eine Gerade errichtet, deren Länge durch gewisse Methoden geometrisch bestimmt wird, und welche jenes p darstellt, jene Länge, an welche nach unseren früheren Auseinandersetzungen (S. 289) ein gewisser Flächenraum in Gestalt eines Parallelogrammes angelegt werden soll. Diese Linie, welche man in moderner Sprache den Parameter des Kegelschnittes

[1]) Apollonius, Conica (ed. Heiberg) II, 2. [2]) A. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten S. 28—29. [3]) Eine sehr hübsche Zusammenstellung von Housel in Liouvilles *Journal des Mathématiques* (1858) XXIII, 153—192.

nennt, heißt bei Apollonius schlechtweg die Errichtete, ὀρθία, ein Name, der alsdann in den lateinischen Übersetzungen zum *latus rectum* geworden ist. Man sieht leicht ein, daß Apollonius mittels dieser Vorschriften genau die gleichen Linien ziehen läßt, deren man noch heute bei Anwendung der Methoden der analytischen Geometrie sich bedient. Es ist ein förmliches Koordinatensystem gezeichnet, dessen Anfangspunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegt, dessen Abszissenachse ein Durchmesser des Kegelschnittes, und dessen Ordinatenachse die jenem Durchmesser konjugierte Berührungslinie im Koordinatenanfangspunkte ist. Die dabei gebrauchten Benennungen lauten τεταγμένως κατηγμέναι d. h. geordnet gezogen[1]) und ἀποτεμνόμεναι d. h. abgeschnitten[2]). Von wirklichen Koordinaten sind diese Geraden dadurch wesentlich verschieden, daß sie nicht ein Liniensystem für sich bilden, sondern nur gleich anderen geometrischen Hilfslinien in Verbindung mit dem Kegelschnitte und hervorgerufen durch den jeweil zu beweisenden Lehrsatz auftreten. Diese gegebenen Elemente handhabt nun Apollonius in griechischer Weise. Er rechnet natürlich nicht mit Formeln und Gleichungen, wie wir es tun, aber er verknüpft und verbindet Proportionen von Längen und von Flächenräumen, welche nur einen anderen Ausdruck des in den Gleichungen der Kegelschnitte enthaltenen Gedankens darstellen, um zu den gleichen Folgerungen zu gelangen. Läuft der Schnitt der Seite des Kegels parallel, so kann nur von einem Scheitel der Parabel die Rede sein. Im entgegengesetzten Falle wird außer dem einen Schenkel des Achsendreiecks auch der zweite entweder selbst oder in seiner Verlängerung über die Spitze des Kegels hinaus durch den Schnitt getroffen, und so entsteht ein zweiter Scheitel der Kurve bei der Ellipse, ein Scheitel der Gegenkurve bei der Hyperbel. Die Entfernung der beiden Scheitel begrenzt die Länge des Durchmessers. In der Mitte zwischen beiden ist der Mittelpunkt der Kurve, d. h. ein Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbiert sind. Mit dem Mittelpunkte tritt auch der Begriff des dem ersten Durchmesser konjugierten Durchmessers auf, der eine gleichfalls begrenzte Länge besitzt, wenn auch bei der Hyperbel die Begrenzung nicht äußerlich sichtbar ist. Zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser werden Achsen genannt. Apollonius knüpft daran ferner Betrachtungen über die Berührungslinie an irgend einen Punkt eines Kegelschnittes und über die Vielheit von Paaren konjugierter Durchmesser, welche möglich sind.

In dem II. Buche sind zunächst Eigenschaften der Asymptoten

---

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 70 lin. 15. [2]) Ebenda I, 72 lin. 10—11.

der Hyperbel auseinandergesetzt, d. h. der Linien, welche den Hyperbelarmen sich mehr und mehr nähern, ohne mit denselben zusammenzutreffen. Die geometrische Definition ist folgende: Man ziehe an einen Hyperbelpunkt eine Berührungslinie, trage auf derselben die Länge des ihr parallelen Durchmessers auf und verbinde den so gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel geradlinig, diese Gerade wird eine Asymptote sein[1]). Aus den übrigen Sätzen des II. Buches mag noch hervorgehoben werden, daß die Gerade, welche den Durchschnittspunkt zweier Berührungslinien mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, ein Durchmesser des Kegelschnittes ist, sowie der andere, daß in jedem Kegelschnitte nur ein einziges senkrechtes Achsenpaar existiert.

In dem III. Buche bilden die ersten 44 Sätze einen besonderen Abschnitt, dessen Charakter schon in dem 1. Satze sich dahin ausweist, daß hier Verhältnisse von Produkten aus Tangenten und Sekanten der Kegelschnitte auftreten. Jener erste Satz heißt etwa folgendermaßen: Es seien M_1 und M_2 zwei Punkte eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt in O liegt (bei der Parabel wäre O unendlich entfernt, und somit die OM_1 mit OM_2 und mit der Achse der Parabel parallel); die Berührungslinien in beiden Punkten seien M_1T_1 und M_2T_2, indem T_1 den Durchschnitt der Berührungslinie an M_1 mit der OM_2 bezeichnet, und eine ähnliche Definition für T_2 gilt; die M_1T_1 und die M_2T_2 schneiden einander in R. Alsdann sind die Dreiecke M_1T_2R und M_2T_1R flächengleich. Die folgenden Sätze stützen sich auf diesen ersten, und lassen sich, in so vielfältiger Teilung sie auch im Originale ausgesprochen sind, in zwei Hauptsätze zusammenfassen. Der eine Satz, daß, wenn von einem Punkte zwei Sekanten gezogen werden, das Produkt der Entfernungen des Ausgangspunktes nach den beiden Schnittpunkten der einen Sekante dividiert durch dasselbe Produkt in bezug auf die zweite Sekante einen Quotienten gibt, der sich nicht verändert, wenn man von irgend einem anderen Ausgangspunkte ein den ersten Sekanten paralleles Sekantenpaar konstruiert. Der zweite Satz, daß eine Sekante, aus deren einem Punkte man zwei Berührungslinien zieht, durch diesen Ausgangspunkt, den Durchschnitt mit der Berührungssehne und die beiden Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte eine harmonische Teilung darbietet[2]). Noch einige auf Flächen bezügliche Wahrheiten schließen sich ziemlich naturgemäß an, wie z. B. daß die Dreiecke, welche durch die Asymptoten und irgend eine Berührungs-

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 194 lin. 15 das erste Vorkommen des Namens ἀσύμπτωται. [2]) Apollonius benutzt dabei allerdings noch nicht das Wort: harmonische Teilung, sondern schreibt den Satz als Proportion.

linie der Hyperbel gebildet werden, einen konstanten Flächeninhalt haben, da derselbe Satz, anders ausgesprochen, dahin gehen würde, daß jede Berührungslinie der Hyperbel auf den Asymptoten Stücke von konstantem Produkte abschneide. Alsdann kommt der Verfasser in dem 45. Satze zu den Punkten, welche er *σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς* nennt, eine Bezeichnung, welche schwierig zu verdeutschen ist, da Punkte, die bei der Anlegung entstehen, kaum den Anspruch erheben können, nur einigermaßen einen Begriff davon zu gewähren, welche Punkte gemeint sind; es sind aber die Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel, während der Brennpunkt der Parabel in dieser Zeitperiode noch nicht vorkommt. Die Definition der Brennpunkte bei Apollonius und die Eigenschaften, welche er besonders hervorhebt, sind folgende: ein Brennpunkt ist ein Punkt, der die große Achse in zwei Teile teilt, deren Rechteck einem Viertel der Figur gleich ist; unter Figur aber ist das Rechteck des Parameters mit der großen Achse zu verstehen, oder, was dem Werte nach gleichbedeutend ist, das Quadrat der kleinen Achse. Wenn man das Stück einer Berührungslinie, welches zwischen den beiden Senkrechten zur großen Achse in den Endpunkten derselben abgegrenzt ist, zum Durchmesser eines Kreises nimmt, so schneidet dieser Kreis die große Achse in den Brennpunkten. Die 4 Punkte, welche derart bestimmt sind, nämlich 2 Brennpunkte und 2 Punkte einer Berührungslinie werden paarweise verbunden, je ein Punkt der Berührungslinie mit dem einen, der andere mit dem anderen Brennpunkte. Diese Verbindungsgeraden nennt man konjugierte Linien. Sie schneiden einander auf der Normallinie, d. h. auf der Senkrechten, welche zur Berührungslinie im Berührungspunkte errichtet ist. Nun folgt der Satz über Winkelgleichheit für die Winkel, welche die Normallinie mit den beiden Brennstrahlen des Berührungspunktes bildet; ferner der Satz, daß die Fußpunkte der Senkrechten von den Brennpunkten auf Berührungslinien sämtlich in einer um die große Achse als Durchmesser beschriebenen Kreisperipherie liegen; endlich der Satz von der konstanten Summe, beziehungsweise Differenz der Brennstrahlen. Alle diese Wahrheiten entwickelt Apollonius der Reihe nach in dem III. Buche, welches dadurch fast für sich allein den Charakter einer elementaren Kegelschnittslehre gewinnt. Man ist allerdings in der Wertschätzung dieses III. Buches viel weiter gegangen, als wir es taten. Apollonius sagt in der Vorrede zum I. Buche seiner Kegelschnitte, von Euklid sei die Synthesis des Ortes zu drei und vier Geraden nicht gegeben, sondern nur ein Teil derselben, und dieser überdies nicht glücklich; es sei auch nicht möglich gewesen, diese Synthesis richtig zu vollenden ohne das, was er, Apollonius, eben in

dem III. Buche neu gefunden habe[1]). Pappus tadelt diese Ruhmredigkeit, indem er gleichzeitig hervorhebt, daß Apollonius seinen Vorgängern hätte dankbar sein müssen, ohne deren Vorarbeiten es ihm unmöglich gewesen wäre, das Neue hinzuzuentdecken. Der Ort zu drei oder vier Geraden sei aber folgender: Sind drei (vier) Gerade der Lage nach gegeben, und zieht man nach ihnen hin von einem gegebenen Punkte aus Gerade unter gegebenen Winkeln, ist alsdann das Verhältnis zwischen dem Rechtecke aus zwei der Verbindungsgeraden zu dem Quadrate der dritten (dem Rechtecke aus den beiden anderen) ein für allemal dasselbe, so liegt der Ausgangspunkt der Verbindungsgeraden auf einem Kegelschnitte[2]). Das ist alles, was aus alten Quellen bekannt ist. Wenn man nun versucht hat[3]), jenes Ortsproblem unter Zugrundelegung des III. Buches des Apollonius vollständig zu erledigen, so kann man in diesem Wiederherstellungsversuche die ganze geometrische Begabung seines Verfassers bewundern, aber ein geschichtliches Ergebnis ist es darum keineswegs.

Waren die drei ersten Bücher dem Eudemus gewidmet, so beginnt das IV. Buch mit einem Sendschreiben an Attalus, in welchem der Tod jenes Freundes beklagt, nebenbei aber auch der Inhalt des beigefügten Buches kurz dahin bezeichnet wird, es beschäftige sich mit der Frage, wieviele Punkte Kegelschnitte mit Kreisperipherien und mit anderen Kegelschnitten gemein haben können, ohne ganz und gar zusammenzufallen. Apollonius weiß dabei sehr wohl eine Berührung von einer Durchschneidung zu unterscheiden. Er hebt z. B. hervor, daß 2 Kegelschnitte 4 Durchschnittspunkte haben können, oder 2 Durchschnittspunkte und 1 Berührungspunkt oder 2 Berührungspunkte; ferner daß 2 Parabeln nur 1 Berührungspunkt haben können, ebenso Parabel und Hyperbel, wenn die Parabel die äußere Kurve ist, ebenso Parabel und Ellipse, wenn die Ellipse die äußere Kurve ist usw.

Es ist einleuchtend, daß die Sätze dieses IV. Buches für die Griechen eine viel höhere Bedeutung hatten als für neuere Mathematiker. Waren es doch gerade die Durchschnittspunkte der Kurven, deren zum Zwecke der Würfelverdoppelung notwendige Ermittelung die Kurven selbst hatten untersuchen oder gar erfinden lassen. Die Methode, nach welcher Apollonius die Punkte bestimmt, welche zwei Kurven gemeinsam sind, kommt auf eine apagogische Beweisführung hinaus, die sich großenteils auf das Lemma des III. Buches bezüg-

[1]) Apollonius (ed. Heiberg) I, 4 lin. 13—17. [2]) Pappus (ed. Hultsch) II, 676—678. [3]) Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthume, siebenter und achter Abschnitt.

lich der harmonischen Teilung stützt. So mußte das IV. Buch der Form und dem ganzen Inhalte nach gleichmäßige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluß es gewissermaßen für solche Mathematikstudierende bildete, welche von der damaligen höheren Mathematik gerade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, notwendig war. Ja diese innere Zusammengehörigkeit engerer Art der 4 ersten Bücher bewährte sich geschichtlich auch dadurch, daß nur sie im griechischen Texte sich erhielten, während das V., VI. und VII. Buch erst in der Mitte des XVII. S. aus einer arabischen Übersetzung bekannt wurden, das VIII. Buch sogar als ganz verloren wird betrachtet werden müssen.

Das V. Buch läßt die vorhergehenden weit hinter sich. Apollonius erhebt sich bewußtermaßen hoch über seine Zeit, indem er Sätze über die längsten und kürzesten Linien, die von einem Punkte an den Umfang eines Kegelschnittes gezogen werden können, hier vereinigt. Es hätten, so erklärt Apollonius in einleitenden an Attalus gerichteten Worten, Mathematiker, welche vor ihm und zu seiner Zeit lebten, die Lehre von den kürzesten Linien gleichfalls behandelt, aber ihre Behandlungsweise muß nach Inhalt und Zweck eine andere als die des V. Buches der Kegelschnitte gewesen sein. Dem Inhalte nach begnügten sie sich mit einer geringeren Anzahl von Sätzen, und ihren Zweck fanden sie in dem Diorismus zu gestellten Aufgaben. Wir haben bei Euklid, bei Archimed Beispiele solcher Maximal- und Minimalwerte auftreten sehen, und die geringste Überlegung führt zum Bewußtsein, daß fast jeder Diorismus neben die Bedingung, unter welcher eine Aufgabe gelöst werden kann, den Grenzwert stellen wird, bis zu welchem eine in der Aufgabe vorkommende Größe wachsen oder abnehmen darf, ohne die Ausführbarkeit zu gefährden. Aufgaben größter und kleinster Werte mußten also vorkommen und wurden gelöst, ohne daß man darüber sich klar gewesen wäre, daß man hier eine eigenartige, auch außer ihrer zum Diorismus führenden Wirkung bedeutsame Gattung von Fragen behandelte. Apollonius dagegen schließt jene Einleitung zum V. Buche mit den Worten: „Das so Behandelte ist für die dieser Wissenschaft Beflissenen besonders notwendig, sowohl zur Einteilung und zum Diorismus, als zur Konstruktion der Aufgaben, abgesehen davon, daß dieser Gegenstand zu den Dingen gehört, welche würdig sind, um ihrer selbst willen betrachtet zu werden.“ Die Art vollends, in welcher Apollonius Einzelfälle dieses Gebietes unterscheidet und durch deren Zusammenfassung die Gesamtheit der Möglichkeiten erschöpft, die merkwürdige Verschlungenheit, man kann fast sagen Unnatürlich-

keit der Beweise sind bewunderungswürdig nicht minder als wunderlich. Man kann kaum umhin zu argwohnen, was zu glauben man doch nicht wagen darf, daß Apollonius irgend geheime Methoden besaß, um diejenigen Sätze zu entdecken, deren künstliche Beweise er erst nachträglich aufsuchte. Was Apollonius aus der Lehre vom Größten und Kleinsten kennt, das sind, wie gesagt, insbesondere die längsten und kürzesten Linien, welche aus irgend einem Punkte der Ebene nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, Linien, welche Apollonius zuerst für die Fälle bestimmt, in denen der gegebene Punkt auf der Achse liegt, und die Konstruktion durch Abschnitte erfolgen kann, die selbst auf der Achse des Kegelschnittes auftreten. Dann folgt eine Reihe von Sätzen, die etwa mit dem modernen Begriffe der Subnormalen sich beschäftigen. Die Konstanz dieser Strecke bei der Parabel wird bewiesen. Später gelangt Apollonius zu dem Nachweise, daß die am Anfange des Buches besprochenen größten und kleinsten Linien Normallinien zum Kegelschnitte sind, daß also auch die Aufgabe im Früheren zur Lösung vorbereitet ist: von irgend einem Punkte einer Ebene Normalen zu einem in der Ebene befindlichen Kegelschnitte zu zeichnen. Er geht an die Aufgabe selbst heran und findet eine Konstruktion, bei welcher von Durchschnitten mit Hyperbeln Gebrauch gemacht ist. Indem er nun sich bewußt wird, daß in der Zahl der Senkrechten, welche von einem Punkte aus nach einem Kegelschnitte gezogen werden können, keine Willkür herrscht, daß dieselbe vielmehr einesteils von der Art des Kegelschnittes, andernteils von der Lage des gegebenen Ausgangspunktes abhängt, findet er, daß in dieser Beziehung gewisse Punkte eine Ausnahmestellung einnehmen. Diese Punkte, aus welchen man nach dem gegenüberliegenden Teil des Kegelschnittes nur eine Normale ziehen kann, sind die Krümmungsmittelpunkte, deren Vorhandensein somit Apollonius bekannt war, so fremd ihm der Begriff der Krümmung geblieben ist. Möglicherweise ist es sogar nicht zu weit gegangen, wenn man annimmt, Apollonius habe die stetige Aufeinanderfolge der Krümmungsmittelpunkte geahnt, d. h. jene Kurve geahnt, wenn auch nicht untersucht, welche wegen anderer Eigenschaften den Namen der Evolute erhalten hat.

Das VI. Buch handelt von gleichen und ähnlichen Kegelschnitten, sofern dieselben auf geraden einander ähnlichen Kegeln auftreten. Am Schlusse wird sogar die Aufgabe behandelt, durch einen gegebenen Kegel eine Schnittfläche zu legen, welche eine gleichfalls gegebene Ellipse erzeugen soll.

Zwischen dem VII. und dem VIII. Buche scheint wieder ein engerer Zusammenhang stattgefunden zu haben, wie uns Apollonius

selbst versichert. In seiner Zuschrift sagt er, das VII. Buch beschäftige sich mit Sätzen, welche zu Bestimmungen führen, das VIII. Buch enthalte wirklich bestimmte Aufgaben über Kegelschnitte. Auch aus Pappus läßt sich eine solche Zusammengehörigkeit der beiden Bücher folgern. Derselbe teilt nämlich eine ziemlich beträchtliche Zahl von Lemmen zu den Kegelschnitten des Apollonius mit. Die Lemmen zu allen übrigen Büchern sind nach den Büchern gesondert; nur die Lemmen zum VII. und VIII. Buche sind vereinigt[1]). Auf diese Grundlage hin hat man sogar eine Wiederherstellung des verlorenen VIII. Buches versucht[2]), welche indessen doch zu unsicher scheint, um näher besprochen zu werden. Wir begnügen uns mit der Bezeichnung einiger interessanten Theorien aus dem erhaltenen VII. Buche. In ihm finden sich die Sätze über komplementäre Sehnen, welche konjugierten Durchmessern parallel laufen, in ihm die Sätze über die konstante Summe der Quadrate konjugierter Durchmesser, in ihm die Entwicklung des Flächenraumes jener Parallelogramme, deren zwei aneinanderstoßende Seiten die Hälften zweier konjugierter Durchmesser sind. Auch diese Sätze, begreiflicherweise geometrisch und nicht durch Rechnung abgeleitet, erfordern bei Apollonius die Unterscheidung zahlreicher Einzelfälle, bei welcher er wiederholt die Gewandtheit an den Tag legt, welche man schon in den früheren Büchern bewunderte.

Dieses in Kürze der Inhalt des merkwürdigen Werkes, wobei wir uns gegen die verlockende Versuchung, noch mehr hineinzulesen als Apollonius gesagt hat, zu wappnen gesucht haben. Auch der von uns angegebene nackte Inhalt ist sehr wohl geeignet, unsere Neugier anzuregen, inwieweit derselbe Mathematiker seinen erfinderischen Geist auch noch anderen Gebieten unserer Wissenschaft zuwandte. Leider können wir diese Neugier nicht vollauf befriedigen. Wir wissen von solchen anderen Arbeiten nur eben genug, um die Vielseitigkeit des Apollonius zu ahnen, aber bei weitem nicht so viel, um den Wert der Untersuchungen abschätzen zu können, deren Titel nur bei Pappus[3]) mehrenteils sich erhalten haben, und die Vermutung zu einer wahrscheinlichen machen, daß Anwendungen der Kegelschnitte auf bestimmte geometrische Aufgaben in denselben behandelt wurden. Die Titel dieser verloren gegangenen Schriften sind: Berührungen, *περὶ ἐπαφῶν (de tactionibus)*; ebene Örter, *ἐπίπεδοι τόποι (loci plani)*; Neigungen, *περὶ νεύσεων (de inclinationibus)*; Raumschnitt, *περὶ*

[1]) Pappus VII, 298—311, (ed. Hultsch) 990—1004. [2]) Halley S. 137 bis 169 der zweiten, mit dem V. Buche anfangenden, Abteilung seiner Ausgabe der Kegelschnitte. [3]) Pappus VII, *Prooemium*.

χωρίου ἀποτομῆς (sectio spatii); bestimmter Schnitt, *περὶ διωρισμένης τομῆς (sectio determinata)*. Hypsikles führt außerdem, wie wir im nächsten Kapitel zu besprechen haben, eine Schrift des Apollonius über die in dieselbe Kugel eingeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder an, Proklus eine *περὶ τοῦ κοχλίου*[1]) von gänzlich unbekanntem Inhalte und ein Schriftsteller, den wir im 24. Kapitel als Verfasser einer Schrift über Brennspiegel kennen lernen werden, nennt eine Abhandlung des Apollonius gleichen Titels[2]): Über Brennspiegel, *περὶ πυρίων*. Die Bedeutung einer solchen Schrift für die Geschichte der Geometrie ist nicht zu unterschätzen. Wir sahen (S. 339), daß Apollonius nur von den Brennpunkten derjenigen Kurven handelte, welche solche paarweise besitzen. Daß auch die Parabel einen Brennpunkt habe, konnte nicht wohl früher bemerkt werden, als bis man einer halben Ellipse, einer halben Hyperbel mit ihrem Brennpunkte ein gewisses Interesse abgewonnen hatte, und das war vielleicht bei Gelegenheit optischer Untersuchungen, d. h. eben in Abhandlungen über Brennspiegel. Damit soll freilich weder ausgesprochen, noch schlechtweg geleugnet werden, daß Apollonius bereits diesen Fortschritt vollzog. Gewiß ist vielmehr fürs erste nur, daß Pappus[3]) gegen Ende des III. nachchristlichen Jahrhunderts den Brennpunkt der Parabel kannte.

Nur eine einzige Schrift, die zwei Bücher vom Verhältnisschnitt, *περὶ λόγου ἀποτομῆς (de sectione rationis)* ist in arabischer Sprache der Neuzeit überblieben und aus dieser übersetzt worden[4]). Die Aufgabe des Verhältnisschnittes ist folgende: Es sind zwei unbegrenzte Gerade in derselben Ebene der Lage nach gegeben, entweder gegenseitig parallel oder einander schneidend, und in jeder derselben ist ein Punkt gegeben, auch ist ein Verhältnis und überdies ein Punkt außerhalb der Linien gegeben; man soll durch den gegebenen Punkt eine Gerade ziehen, welche von den der Lage nach gegebenen Geraden Stücke abschneide, deren Verhältnis dem gegebenen gleich sei. Man erkennt leicht, daß diese Aufgabe durch einen großen Reichtum an Fällen sich auszeichnet, je nach der Lage des Punktes außerhalb der beiden Geraden zu diesen Geraden selbst und zu der

[1]) Proklus (ed Friedlein) 105. [2]) Vgl. die Zeitschrift Hermes, Bd. XVI, S. 271—72. [3]) Pappus VII, 318 (ed. Hultsch pag. 1012, lin. 24 sqq.). [4]) Edw. Bernard fand die ziemlich verderbte Handschrift am Ende des XVII. S. und begann dieselbe ins Lateinische zu übersetzen. Als er kaum den zehnten Teil bewältigt hatte, gab er die Arbeit auf. Nun vollendete der des Arabischen vorher unkundige Halley die Übersetzung, des von Bernard hinterlassenen Bruchstückes als Grammatik und Wörterbuch sich bedienend. Halleys Ausgabe von 1706; eine deutsche Ausgabe von Aug. Richter. Elbing 1836.

durch die beiden auf den Geraden gegebenen Punkten gezogenen Transversalen, und ferner je nach der Richtung, in welcher jene in Verhältnis tretenden Stücke von den gegebenen Punkten aus liegen sollen. Das ist dem geometrischen Charakter des Apollonius so recht angemessen.

Wir nannten oben eine ganze Reihe von Schriften als verloren, ohne daß man erheblich mehr als deren Titel kenne. Bei dem Raumschnitte war die Aufgabe dahin gestellt, daß während eben dieselben Geraden und derselbe Punkt wie beim Verhältnisschnitte gegeben waren, die zu ziehende Gerade Stücke abschneiden mußte, welche ein der Fläche nach gegebenes Rechteck bildeten[1]. Die allgemeinste Aufgabe der Neigungen[2], von welcher Apollonius die leichteren Fälle behandelte, bestand darin: zwischen zwei der Art und der Lage nach gegebenen Linien eine gegebene Strecke so einzuzeichnen, daß sie verlängert durch einen gegebenen Punkt ging. Eine geometrische Auflösung dieser Aufgabe ist mittels Anwendung von Kegelschnitten möglich. Ihr Vorkommen bei Aristoteles, dem die Kegelschnittlehre sicherlich noch fremd war, führt zur Vermutung, man habe die Aufgabe ursprünglich versuchsweise durch Bewegungsgeometrie gelöst[3]. In den Berührungen war die sogenannte Berührungsaufgabe des Apollonius behandelt, d. h. die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei Bedingungen genüge, deren jede darin bestehen kann, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, oder eine gegebene Gerade, oder einen gegebenen Kreis zu berühren[4]. Aus der Schrift von den Berührungen kennen wir ferner möglicherweise eine Tatsache, welche interessant genug ist, da sie das, was wir früher (S. 249 und 256) von Spuren kombinatorischer Betrachtungen bei griechischen Schriftstellern anmerken durften, zu ergänzen geeignet ist. Bei der über den eigentlichen Urheber herrschenden Unsicherheit ziehen wir indessen vor, den Gegenstand im 22. Kapitel bei Pappus zur Rede zu bringen.

Auch dem rechnenden Teile der Mathematik hat Apollonius, wie wir durch Eutokius wissen, seine Aufmerksamkeit zugewandt. Eutokius sagt uns nämlich in dem mehrfach bereits benutzten Kommentare zur archimedischen Kreismessung: Soviel in meinen Kräften stand, habe ich nun die von Archimedes angegebenen Zahlen einigermaßen erläutert. Wissenswert ist aber noch, daß auch Apollonius von Pergä in seinem Okytokion dasselbe durch andere Zahlen be-

[1]) Pappus VII ed. Hultsch p. 640. [2]) Ebenda p. 670. [3]) So die scharfsinnige Vermutung von Oppermann. Vgl. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum S. 252 Note 1 und Heiberg in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XVIII, 16. [4]) Pappus VII ed. Hultsch p. 611.

wiesen hat, wodurch er sich der Sache noch mehr näherte"[1]. Wir haben hier die Lesart ὠκυτόκιον aufgenommen, welche durch zwei Pariser Handschriften verbürgt auffallend genug lange Zeit durch das sprachlich ganz rätselhafte Wort ὠκυτόβοον verdrängt war. Vollständigen Einblick in die Art, wie Apollonius seine Kreismessung vollzog, die noch genauer als die des Archimed gewesen sein muß, erhalten wir freilich auch durch den Namen Okytokion keineswegs. Dem Wortlaute nach übersetzt sich dieser Titel als Mittel zur Schnellgeburt, es handelte sich also höchst wahrscheinlich um raschere Rechnungsverfahren, aber wie dieselben zu dem oben genannten Ziele führten, darüber sind wir doch nicht besser aufgeklärt. Die Mutmaßung[2], Apollonius habe den Näherungswert $\pi = 3{,}1416$ herausgerechnet, der, wie wir im 30. Kapitel sehen werden, in Indien bekannt war, schwebt ziemlich in der Luft.

Eine dem gewöhnlichen griechischen Verfahren gegenüber einfachere und dadurch abgekürzte Multiplikation des Apollonius, welche daher möglicherweise einen Abschnitt des Okytokion bildete, kennen wir aus Pappus. In dem auf uns gekommenen Bruchstücke des zweiten Buches seiner Sammlung[3] berichtet Pappus von zwei zusammenhängenden, aber doch begrifflich zu trennenden Gegenständen.

Erstens entnehmen wir seinem Berichte, daß Apollonius in ähnlicher Weise wie Archimed die Zahlen in Gruppen zu teilen wußte, welche eine leichtere Aussprache und zugleich eine größere Übersichtlichkeit gewährten, als sie ohne Gruppierung zu erreichen gewesen wäre. Es ist derselbe Gedanke, der beiden Schriftstellern gleichmäßig vorschwebte, ja es ist eigentlich dieselbe Gruppierung, welche wir von beiden gelehrt finden. Denn wenn auch Archimed (S. 320) Oktaden bildete, während Apollonius sich mit Tetraden begnügte, so ist doch die Gleichheit des Prinzips dadurch hergestellt, daß zwei Tetraden des Apollonius nebeneinander geschrieben nach moderner Bezeichnung der Zahlen einer Oktade des Archimed gleichkommen, daß Archimed also nur eine höhere Gruppeneinheit annahm als Apollonius, aber eine Einheit, aus welcher die des Apollonius, als in jener enthalten, sich leicht ableiten ließ, ebenso wie es denkbar ist, daß beide Gruppierungen unabhängig voneinander aus dem

[1] Archimedes (ed. Torelli) 216 und 452, die Varianten der Pariser Handschriften. Torelli benutzte sie in seiner Übersetzung. Neuerdings wurde dann durch Knoche und Maerker im Herforder Gymnasialprogramm für 1854 auf diese Lesart hingewiesen, sowie von M. Schmidt in Mützells Zeitschrift für die Gymnasialwissensch. 1855, S. 805. Vgl. auch Archimedes (ed. Heiberg) III, 300. [2] Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne par Paul Tannery. Paris 1893, pag. 67—68. [3] Pappus II (ed. Hultsch) 2—29.

griechischen Sprachgebrauche hervorgehen konnten, welchem die Myriade das letzte unzusammengesetzte Zahlwort, die Myriade der Myriaden das letzte einfach zusammengesetzte Zahlwort war. Die Namen, welche Apollonius für seine Tetraden benutzt, sind für die erste Tetrade, welche von 1 bis 9999 sich erstreckt, der Name der Einheiten; dann folgt die Tetrade der Myriaden; auf diese die der doppelten Myriaden, der dreifachen, vierfachen usw. Myriaden, bis zur $\varkappa$ten Myriade als allgemeine Bezeichnung einer beliebigen Höhe[1]), wobei wir freilich dahingestellt sein lassen müssen, ob diese an sich hochbedeutsame Allgemeinheit Apollonius oder dem Berichte des Pappus eigentümlich ist.

Mit diesen Zahlen werden nun zweitens Multiplikationen ausgeführt, und dabei ist die Vorschrift gegeben, die Multiplikation irgend welcher Zahlen auf die ihrer Wurzelzahlen, *πυθμένες*, zurückzuführen. Das Wort Pythmen findet sich in einer arithmetischen Bedeutung schon bei Platon[2]), ob aber genau in derselben wie bei Apollonius, ist bei dem vielbestrittenen Sinne der platonischen Stelle nicht zu erhärten. Bei Pappus[3]) bedeuten Pythmenes die kleinsten Zahlen, in welchen ein Verhältnis angegeben ist. Apollonius verstand unter der Wurzelzahl die Anzahl der Zehner oder der Hunderter, die in einer nur aus Zehnern, beziehungsweise nur aus Hundertern bestehenden Zahl enthalten sind. So ist 5 der Pythmen von 50 wie von 500, 7 der Pythmen von 70 wie von 700 usw. Wurzelzahlen von Tausendern, Zehntausendern usw. kommen wenigstens unter den miteinander zu vervielfachenden Zahlen nicht vor. Der Grund dafür, wie für das Hervorheben der anderen Pythmenes liegt in der uns bekannten griechischen alphabetischen Bezeichnung der Zahlen (S. 127). Die moderne Ziffernschrift läßt sofort 3 als die Wurzelzahl von 30, von 300, von 3000 erkennen. Ebenso war dem Griechen ein leicht ersichtlicher Zusammenhang zwischen γ und ${}_{,}\gamma$, nicht aber zwischen γ und λ, zwischen γ und τ geboten, letzterer mußte erst gezeigt werden. Vielleicht haben wir unseren Lesern durch die Wahl des Wortes zeigen einen Hinweis gegeben, wie der Gedanke an die Pythmenes bei einem Griechen entstehen konnte: nicht wenn er die schriftliche Aufzeichnung der Zahlen vor sich sah, wohl aber wenn er ihren Wortlaut hörte. Der Ähnlichklang von *τρεῖς, τριάκοντα, τριακόσιοι* sagte ihm, was an γ, λ, τ erst gezeigt werden mußte, und so glauben wir nicht irre zu gehen, wenn wir

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 4. *διπλῆ μυρίας*; 6. *τριπλῆ μυρίας*; 20. *ἐνναπλῆ μυρίας*; 18. *μυριάδες ὁμώνυμοι τῷ κ*, für die $\varkappa$fache (nicht die 20fache) Myriade oder für 10000 auf die $\varkappa$te Potenz. [2]) Platon, Staat VIII, 546 C *ὧν ἐπίτριτος πυθμήν*. [3]) Pappus III (ed. Hultsch) pag. 80.

in den Pythmenes eine Frucht des mündlichen Rechenunterrichtes, nicht schriftlicher Erörterung erblicken. Sei dem, wie da wolle, jedenfalls vollzog Apollonius die Multiplikation nunmehr an den Pythmenes, und die Ordnung des jedesmaligen Produktes wird aus der Anzahl der Faktoren unter besonderer Berücksichtigung, wie viele derselben Zehner, wie viele Hunderter waren, abgeleitet. Eine Unterscheidung von zahlreichen Einzelfällen, die dabei vorkommen, kann uns bei Apollonius am wenigsten überraschen; wir bemerken sie auch nur mit der ausgesprochenen Absicht gelegentlich wieder daran zu erinnern.

Endlich müssen wir noch einer Arbeit des Apollonius über Irrationalgrößen gedenken, von welcher schwache Spuren in einer arabischen Handschrift entdeckt worden sind[1]). Wir haben (S. 268—270) über das X. Buch der euklidischen Elemente und über die dort unterschiedenen Irrationalitäten, die Medialen, die Binomialen und die Apotomen berichtet. Zu diesem X. Buche hat ein griechischer Schriftsteller Erläuterungen geschrieben, deren Übersetzung in das Arabische aufgefunden worden ist. Wer der Verfasser war, darüber ist volle Bestimmtheit nicht vorhanden, wenngleich die Wahrscheinlichkeit dafür spricht, man habe es hier mit dem überliefertermaßen gleich dieser Übersetzung aus zwei Büchern bestehenden Kommentare zum X. Buche der Elemente von Vettius Valens, einem byzantinischen Astronomen aus dem II. S. n. Chr., zu tun. Dieser Kommentator erzählt, die Irrationalgrößen hätten ihren Ursprung in der Schule des Pythagoras gehabt. Theaetet habe, nach den Mitteilungen des Eudemus, die Lehre vervollkommnet, indem er Irrationalgrößen unterschied, die durch Multiplikation, durch Addition und durch Subtraktion untereinander verbunden eine verwickeltere Form besaßen. Euklid habe vollends Ordnung in den Gegenstand gebracht durch genaue Bestimmung und Scheidung der verschiedenen Gattungen der Irrationalitäten. Dieser Bericht stimmt soweit durchaus mit unseren aus anderen Quellen geschöpften Mitteilungen überein und bestätigt dieselben, wie andererseits ihm selbst dadurch eine um so größere Glaubwürdigkeit erwächst. Der Kommentator fährt fort: „Apollonius war es, welcher neben den geordneten (*τεταγμένος* des Proklus) Irrationalgrößen das Vorhandensein der ungeordneten (*ἄτακτος*) nachwies und durch genaue Methoden

---

[1]) Woepcke, *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe* in den *Mémoires présentés à l'académie des sciences* XIV, 658—720. Paris 1856. Vgl. auch den Bericht von Chasles über diese Abhandlung in den Compt. Rend. XXXVII, 553—568 (17. Oktober 1853).

eine große Anzahl derselben herstellte.“ Jetzt folgt der eigentliche Kommentar, dem freilich die Klarheit, welche man von einem derartigen Werke zu fordern berechtigt ist, gar sehr abgeht. Selbst der Versuch aus ihm herauszulesen, worin die bedeutende Erweiterung bestand, welche Apollonius zu verdanken ist, mit anderen Worten, was man unter ungeordneten Irrationalgrößen zu verstehen habe, ist trotz allen aufgewandten Scharfsinnes nur Versuch geblieben und hat eine bloße Vermutung zutage gefördert. Eine Erweiterung meint man demgemäß, könne nach zwei Richtungen hin stattgefunden haben; es könne statt der aus zwei Teilen bestehenden Binomialen oder Apotomen eine additive, beziehungsweise subtraktive Verbindung von mehr als zwei Quadratwurzeln in Untersuchung genommen worden sein; es könne auch um Ausziehung von Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten als 2 sich gehandelt haben, oder anders ausgesprochen, um die Einschaltung von 2, 3, . . . n mittleren geometrischen Proportionalen zwischen zwei gegebenen Größen, d. h. um Aufgaben, von welchen das delische Problem den einfachsten Fall darstellt.

17. Kapitel.

Die Epigonen der großen Mathematiker.

In den fünf letzten Kapiteln haben wir uns mit den großen Mathematikern, welche das Jahrhundert von 300 bis 200 etwa durch ihre Tätigkeit erfüllten, bekannt zu machen gesucht. Zusammenfassende Übersichten, wie wir sie anderen Kapiteln wohl als Schluß dienen ließen, waren hier nicht zu geben Haben wir doch überhaupt auf das Notwendigste und Wichtigste uns beschränken müssen, so daß unsere ganze Darstellung gewissermaßen als die vielleicht vermißte Zusammenfassung zu gelten hat. Nur das sei noch besonders hervorgehoben, daß Euklid, Archimed, Eratosthenes und Apollonius die Mathematik auf eine Stufe förderten, von welcher aus mit den alten Hilfsmitteln, insbesondere ohne Erweiterung der Infinitesimalbetrachtungen zu einer allgemeinen Methode, was die Exhaustion nicht war, wenn sie es auch hätte sein können, ein Hohersteigen nicht möglich war. Zur Infinitesimalmethode, wie zur mathematischen Allgemeinheit überhaupt war der griechische Geist mit vereinzelten Ausnahmen, zu welchen vermutlich Apollonius gerechnet werden darf, nicht angetan. Das ist ein Erfahrungssatz, welcher wesentlich auf dem Fehlen allgemeiner Methoden beruht. War aber ohne sie ein weiteres Steigen nicht möglich, so war der erreichte

Gipfel nach allen Richtungen hin gar bald durchforscht. Es blieb nur ein Abwärtsgehen und bei dem Abwärtsgehen ein Anhalten da und dort, ein Umsichschauen nach Einzelheiten übrig, an welchen man beim jähen Aufwärtsklimmen vorher vorübergeeilt war. Damit ist die Zeit gekennzeichnet, zu deren Betrachtung wir in diesem Kapitel übergehen.

Die Elemente der Planimetrie waren erschöpft. Sie blieben, was Euklid aus ihnen gemacht hatte, abgesehen von Zutaten, die der Lehre von den größten und kleinsten Werten entstammten. Auch die Lehre von den Kegelschnitten konnte nach Apollonius eine wesentliche Ergänzung nicht finden. In der Stereometrie blieb dagegen nach Euklid und selbst nach Archimed noch manches zu tun. Am meisten war von theoretisch Neuem in der Lehre von den von Kegelschnitten verschiedenen Kurven zu finden, einem Gebiete, zu dessen Bearbeitung Archimeds Spiralen entschieden aneifern mußten. Und endlich war die rechnende Geometrie ein Gegenstand, an welchem Archimeds Kreisrechnung auch verwöhnten Geistern Geschmack beigebracht haben mochte. Das sind die Felder, auf denen die Epigonen sich tummelten, deren Bewegungen wir uns zu vergegenwärtigen haben.

Die meisten Schriftsteller freilich, die wir hier nennen werden, sind ihrer Lebenszeit nach höchst unbestimmt. Von einigen ist es, wie wir selbst erklären, zweifelhaft, ob sie mit Recht gerade in diesem Kapitel zur Rede kommen. Am sichersten ist dieses wohl für Nikomedes und Diokles anzunehmen, die Erfinder der Konchoide und der Cissoide, mithin zweier Kurven, deren Namen Geminus um das Jahr 70 v. Chr. kannte[1]), die also zu dieser Zeit jedenfalls vorhanden waren, während andererseits Nikomedes nach dem Berichte des Eutokius[2]) sich im Vergleiche zu Eratosthenes mit seiner Erfindung brüstete, also sicherlich auch nicht früher als um das Jahr 200 etwa gelebt haben kann.

Die Konchoide oder Muschellinie des Nikomedes ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen geradlinige Verbindung mit einem gegebenen Punkte durch eine gleichfalls gegebene Gerade so geschnitten wird, daß das Stück zwischen der Schneidenden und dem Orte eine gegebene Länge besitzt. Je nach dem Größenverhältnisse des Abstandes des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden und der Konchoide besitzt letztere drei verschiedene Formen, doch ist kaum anzunehmen, daß die Griechen diese Formen kannten, deren wesentlichste Verschiedenheit auf dem Zweige der Kurve beruht, welcher von der festen Schneidenden aus gesehen auf derselben Seite

---

1) Proklus (ed. Friedlein) 177. 2) Archimedes (ed. Heiberg) III, 114.

wie der feste Punkt liegt, und von diesem Zweige ist überhaupt nicht die Rede. Allerdings wird, falls diese Meinung als richtig gilt, vollends unverständlich, was Pappus in seinem IV. Buche die zweite, dritte und vierte Konchoide genannt haben mag, die zu anderen Zwecken als die erste benutzt worden seien[1]). Nikomedes nannte, wie wir durch Eutokius und Pappus wissen, den festen Punkt Pol, πόλον. Er erfand auch, wie beide Berichterstatter uns melden, eine Vorrichtung zur Zeichnung der Konchoide, die aus der Figur sofort verständlich ist (Fig. 59). Sie bestand aus drei miteinander verbundenen Linealen. Zwei derselben waren senkrecht zueinander fest vereinigt, und während das eine fast seiner ganzen Länge nach durch eine Ritze durchbrochen war, trug das andere ein kleines rundes Zäpfchen. Das durchbrochene Lineal stellte die feste Gerade, das Zäpfchen auf dem anderen stellte den Pol der Muschellinie vor. Das dritte Lineal trug unweit des spitzen Endes ein Zäpfchen ähnlich dem Pole, etwas weiter davon entfernt eine Ritze ähnlich der auf der festen Geraden; die Entfernung des Zäpfchens von der Spitze stellte den gleichbleibenden Abstand vor. Offenbar mußte nun die Spitze dieses dritten Lineals eine Muschellinie beschreiben, wenn das Lineal selbst alle möglichen Lagen annahm, deren es fähig war, während sein Zäpfchen in der Ritze der festen Geraden sich befand und seine Ritze das als Pol dienende Zäpfchen einschloß.

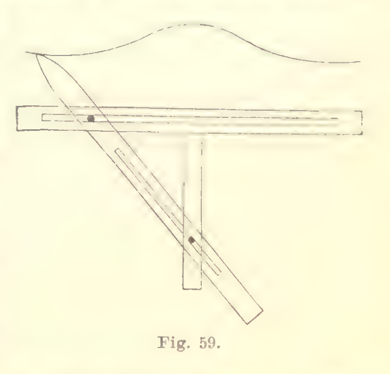


Fig. 59.

Nikomedes hat gezeigt: 1. daß die Muschellinie der festen Geraden sich mehr und mehr nähert[2]); 2. daß jede zwischen der festen Geraden und der Muschellinie gezogene Gerade die Muschellinie schneiden muß; 3. daß mittels der Muschellinie die Aufgabe der Würfelverdoppelung gelöst werden kann.

Den Ideengang seiner Auflösung und seines Beweises lassen wir hier folgen, wobei wir nur diejenigen geringfügigen Abänderungen vornehmen, welche notwendig sind, um statt eines Rechnens mit Proportionen das uns geläufigere Rechnen mit Gleichungen einzuführen. Aus den Strecken $\alpha\lambda = 2a$ und $\alpha\beta = 2b$ wird (Fig. 60) das Rechteck $\alpha\beta\gamma\lambda$ gebildet und $\beta\gamma$ um weitere $2a$ nach η verlängert. Außerdem wird in der Mitte ε von $\beta\gamma$ die $\varepsilon\zeta$ senkrecht zu $\beta\gamma$ errichtet und

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 244. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 177 ist geradezu von der Asymptote der Konchoide die Rede.

deren Endpunkt ζ durch $\gamma\zeta = \beta\delta = b$ bestimmt. Somit ist auch $\eta\zeta$ gegeben, und ihr parallel wird durch γ die $\gamma\theta$ gezogen. Diese letztere wird als feste Gerade, ζ als Pol, b als Abstand benutzt und die Muschellinie konstruiert, welche die Verlängerung von $\beta\gamma$ in $\varkappa$ schneidet, d. h. welche $\theta\varkappa = b$ werden läßt. Verbindet man nun endlich $\varkappa$ mit λ und verlängert $\varkappa\lambda$ bis zum Durchschnitte μ mit der verlängerten $\alpha\beta$, setzt man dabei

$$\alpha\mu = x,\ \gamma\varkappa = y,$$

so ist

$$2a : x = x : y = y : 2b,$$

und die Aufgabe, zwischen $2a$ und $2b$ zwei mittlere Proportionalen einzuschalten, ist gelöst. Aus den Dreiecken $\alpha\lambda\mu$, $\gamma\varkappa\lambda$ folgt nämlich $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{y}$ und $x = \frac{4a \cdot b}{y} = \frac{\eta\gamma \cdot \theta\varkappa}{\gamma\varkappa}$. Daraus erkennt man $\zeta\theta = x$ und folglich $\zeta\varkappa = x + b$. Nun ist $\varepsilon\zeta$ Kathete zweier rechtwinkliger Dreiecke $\gamma\zeta\varepsilon$ und $\varkappa\zeta\varepsilon$. Das erstere hat $\gamma\zeta = b$ als Hypotenuse, $\gamma\varepsilon = a$ als zweite Kathete. Das zweite hat $\varkappa\zeta = x + b$ als Hypotenuse, $\varkappa\varepsilon = y + a$ als zweite Kathete. Mithin ist $b^2 - a^2 = (x+b)^2 - (y+a)^2$ oder $x(x+2b) = y(y+2a)$ und $\frac{x}{y} = \frac{y+2a}{x+2b}$. Man kennt ferner denselben Bruch $\frac{y+2a}{x+2b} = \frac{\beta\varkappa}{\beta\mu} = \frac{\gamma\varkappa}{\gamma\lambda} = \frac{y}{2b}$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\varkappa\mu$ und $\gamma\varkappa\lambda$. Man weiß also auch $\frac{x}{y} = \frac{y}{2b}$, $2bx = y^2$. Diese Gleichung abgezogen von dem vorher gefundenen $x(x+2b) = y(y+2a)$ läßt $x^2 = 2ay$ zum Reste, und die Umstellung der beiden Gleichungen $x^2 = 2ay$, $y^2 = 2bx$ in Proportionen liefert das verlangte $2a : x = x : y = y : 2b$. Auflösung und Beweis sind gleichmäßige Zeugnisse für den Scharfsinn des Erfinders, der schon um des oben beschriebenen Konchoidenzeichners willen einen rühmlichen Platz in der Geschichte der Mathematik verdient.

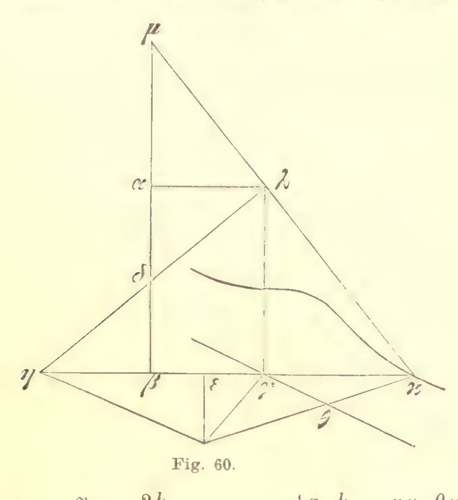


Fig. 60.

Der Zirkel, als Hilfsmittel geometrischen Zeichnens wurde von den Alten auf den Neffen des Dädalus zurückgeführt[1], wohl denselben Talus, auf welchen schon (S. 163) für andere Erfindungen verwiesen worden ist, d. h. auf einen mythischen Ursprung. Die

[1]) Ovid, Metam. VIII, 247—49: Primus et ex uno duo ferrea brachia nodo Vinxit, ut, aequali spatio distantibus illis, Altera pars staret, pars altera duceret orbem.

Vorrichtungen des Platon und des Eratosthenes zur Würfelverdoppelung beruhen auf Geschicklichkeit des Benutzers, der versuchsweise gewisse Lagenverhältnisse der Teile der Apparate hervorbringen mußte. Etwaige Mittel die Kegelschnitte zu zeichnen sind, wenn Menächmus wirklich dergleichen besaß (S. 244), nicht zu unserer Kenntnis gelangt. Die Quadratrix, die Hippopede, die Spirale mechanisch zu zeichnen gab es kein Mittel. So ist die Muschellinie des Nikomedes neben der Geraden und dem Kreise die älteste Linie, von deren mechanischer Konstruktion in einem fortlaufenden Zuge wir genügenden Bericht besitzen.

Dieselbe Muschellinie hat auch zur Auflösung einer anderen Aufgabe, nämlich zur Dreiteilung des Winkels Anwendung gefunden. Soll man den Worten des Pappus Glauben schenken, so hätte dieser sich jene Anwendung zuzuschreiben[1]). Dagegen sagt Proklus ausdrücklich, Nikomedes habe mit Hilfe der Muschellinie jeden Winkel in drei gleiche Teile zerlegt[2]), und so glauben wir es gerechtfertigt hier von dieser Anwendung zu reden.

Wir wissen, daß Archimed (S. 300) die Dreiteilung des Winkels auf die Zeichnung einer Geraden von einem gegebenen Punkte aus zurückführte, welche einen Kreis und eine Gerade so schneiden sollte, daß die zwischen beiden Schnittpunkten liegende Strecke einer gegebenen gleich werde. Konnte man hier den Kreis durch noch eine Gerade ersetzen, so war die Aufgabe nur noch: von einem Punkte aus durch eine gegebene Gerade hindurch bis zum Durchschnitte mit einer zweiten gegebenen Geraden eine Gerade zu zeichnen, welche zwischen beiden Durchschnittspunkten einen bekannten Abstand zeige, und das gelingt mit Hilfe der Muschellinie, deren Pol der gegebene Punkt, deren feste Gerade die erste gegebene Gerade, deren gleichbleibender Abstand die gegebene Strecke ist. Pappus hat uns eine derartige Umformung überliefert[3]). Es sei (Fig. 61) $\alpha\beta\gamma$ der in drei gleiche Teile zu teilende spitze Winkel. Von α aus wird $\alpha\gamma$ senkrecht zu $\beta\gamma$ gezogen und das Rechteck $\alpha\gamma\beta\zeta$ vollendet. Die $\beta\varepsilon$ dritteilt nun den gegebenen Winkel, wenn die Strecke $\delta\varepsilon$ zwischen ihren Durchschnitten mit der $\alpha\gamma$ und der Verlängerung der $\zeta\alpha$ doppelt so groß ist wie $\alpha\beta$. Weil nämlich $\alpha\delta\varepsilon$ ein rechtwinkliges Dreieck, so wird,

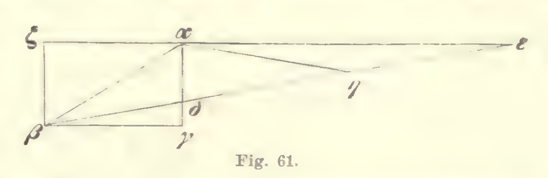


Fig. 61.

---

[1]) Pappus IV, 27, (ed. Hultsch) 246. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 272.
[3]) Pappus IV, 38, (ed. Hultsch) 274.

wenn η der Mittelpunkt der Hypotenuse $\delta\varepsilon$ ist, $\frac{\delta\varepsilon}{2} = \delta\eta = \eta\varepsilon = \eta\alpha$ sein. Folglich sind zwei gleichschenklige Dreiecke $\alpha\beta\eta$ und $\alpha\eta\varepsilon$ in der Figur vorhanden. Da überdies $\sphericalangle\,\alpha\eta\beta$ Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\eta\varepsilon$ ist, und $\beta\varepsilon$ als Transversale mit den Parallelen $\zeta\varepsilon$, $\beta\gamma$ gleiche Wechselwinkel bildet, so ist $\sphericalangle\,\alpha\beta\varepsilon = \alpha\eta\beta = \eta\varepsilon\alpha + \eta\alpha\varepsilon = 2\eta\varepsilon\alpha = 2\varepsilon\beta\gamma$, d. h. $\varepsilon\beta\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}$.

Ist die Annahme wirklich gerechtfertigt, daß diese Auflösung, oder eine ihr alsdann jedenfalls sehr ähnliche, bereits dem Nikomedes zuzuschreiben sei, so bietet es ein eigentümliches Interesse, daß hier die Aufgabe der Würfelverdoppelung und die der Dreiteilung des Winkels mit Hilfe derselben Kurve bewältigt werden, wie sie, modern ausgedrückt, beide auf Gleichungen dritten Grades sich zurückführen lassen. Sollte ein dunkles Gefühl der Zusammengehörigkeit beider Probleme bei den griechischen Mathematikern nach Archimed zu den Möglichkeiten gehören? Müssen wir doch auch eine ideelle Zusammengehörigkeit zwischen der allgemeinen Teilung des Kreisbogens und seiner Rektifikation zugestehen, welche beide, wie wir wissen, mittels der Quadratrix vollzogen wurden.

Der Zeit nach nur wenig von Nikomedes entfernt dürfen wir Diokles setzen, den gleichfalls oben genannten Erfinder der Cissoide oder Efeulinie. Er muß früher gelebt haben als Geminus, der diese seine Kurve neben der Muschellinie nennt; er muß aber auch später als Archimed angesetzt werden, mit dessen Aufgabe von der Durchschneidung einer Kugel durch eine Ebene zu gegebenem Verhältnisse der beiden Kugelabschnitte er sich beschäftigte in der Annahme, Archimed selbst habe sein auf diese Aufgabe bezügliches Versprechen nicht eingelöst[1]) (S. 309). Er hat die Aufgabe mit Hilfe zweier Kegelschnitte in seinem Werke *περὶ πυρείων* gelöst, aus welchem Eutokius sie entnahm[2]) und aus demselben Werke teilt der gleiche Berichterstatter die Definition der Cissoide und deren Anwendung zur Würfelverdoppelung uns mit[3]). Der Name jenes Werkes läßt den Inhalt erkennen. Das Wort *πύριον* bedeutet, wie wir (S. 344) gesehen haben, Brennspiegel, und in einem Buche über Brennspiegel konnte es auf die Größe sphärischer Abschnitte, sowie auf deren Vergrößerung unter Beibehaltung der Gestalt ankommen. Was über eine arabische Übersetzung des Werkes des Diokles in einer Handschrift des Escorial angegeben ist[4]), dürfte auf den Bericht des Eutokius sich beschränken[5]).

[1]) Archimed (ed. Heiberg) III, 152. [2]) Ebenda III, 188. [3]) Ebenda III, 78—80. [4]) Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armenicis, Persicisque.* Leipzig 1842, pag. 197. [5]) Heiberg

Diokles läßt seine Cissoide in durchaus anderer Weise entstehen, als es gegenwärtig gebräuchlich ist. Man soll (Fig. 62) in einem Kreise zwei zueinander senkrechte Durchmesser $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ ziehen. Werden symmetrisch zu $\alpha\beta$ zwei Gerade $\eta\zeta$, $\varkappa\varepsilon$ senkrecht auf $\gamma\delta$ errichtet und δ mit dem Endpunkte ε der einen Senkrechten verbunden, so liegt der Durchschnittspunkt θ dieser Verbindungslinie mit der anderen Senkrechten, gleichwie der ähnlich ermittelte Punkt o usw. auf der Cissoide. Zugleich findet die fortlaufende Proportion statt $\gamma\eta : \eta\zeta = \eta\zeta : \eta\delta = \eta\delta : \eta\theta$.

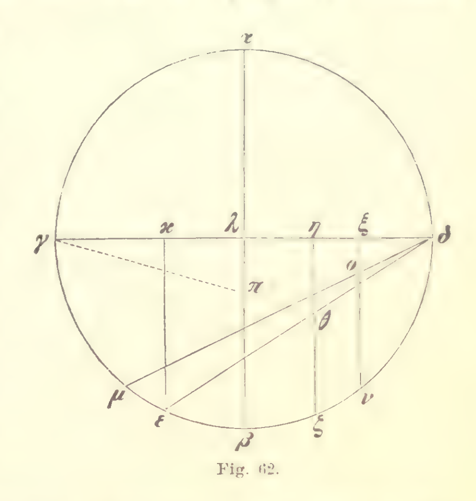


Fig. 62.

Der erste Teil dieser Proportion ist augenscheinlich richtig, weil $\eta\zeta$ als Senkrechte von einem Peripheriepunkt auf den Durchmesser das geometrische Mittel der Teile, in welche sie den Durchmesser teilt, ist. Weil auch $\varkappa\varepsilon$ eine solche Senkrechte ist, muß ebenso $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon = \varkappa\varepsilon : \varkappa\delta$ sein. Ferner sind die Dreiecke $\varkappa\varepsilon\delta$, $\eta\theta\delta$ ähnlich und darum $\varkappa\varepsilon : \varkappa\delta = \eta\theta : \eta\delta$, folglich auch $\gamma\varkappa : \varkappa\varepsilon = \eta\theta : \eta\delta$ und nicht minder $\varkappa\varepsilon : \varkappa\gamma = \eta\delta : \eta\theta$. Berücksichtigt man endlich $\varkappa\varepsilon = \eta\zeta$, $\gamma\varkappa = \eta\delta$, so nimmt die letztgeschriebene Proportion die Form $\eta\zeta : \eta\delta = \eta\delta : \eta\theta$ an, und die zu Anfang behauptete fortlaufende Proportion ist nachgewiesen, d. h. zwischen $\gamma\eta$ und $\eta\theta$, die in der Figur senkrecht zueinander gezogen erscheinen, sind die $\eta\zeta$ und $\eta\delta$ als die beiden mittleren Proportionalen eingeschaltet.

Nun kann man auch zwischen irgend zwei Strecken a, b zwei mittlere Proportionalen einschalten. Man zeichnet einen beliebigen Kreis mit zugehöriger Cissoide. Man sucht auf dem vertikalen Durchmesser $\alpha\beta$ den Punkt π nach Maßgabe der Proportion $\gamma\lambda : \lambda\pi = a : b$ und zieht die $\gamma\pi$, welche bis zum Durchschnitte θ mit der Cissoide verlängert wird. Sofort zeigt sich, daß auch $\gamma\eta : \eta\theta = a : b$ ist. Es brauchen daher nur die Strecken $\eta\zeta$ und $\eta\delta$, welche zwischen $\gamma\eta$, $\eta\theta$ als mittlere Proportionalen bekannt geworden sind, in dem Verhältnisse $\gamma\eta : a$ verändert zu werden, um die Lösung der Aufgabe zu erhalten.

in Zeitschrift Math. Phys. XXVIII, Historisch-literarische Abteilung S. 128, Note.

Ein dritter Geometer der gleichen Zeit etwa dürfte Perseus gewesen sein. Wir werden ihn nicht leicht für älter als die alexandrinische Schule halten, weil Proklus, der seiner gedenkt, dieses wohl irgend bemerkt haben würde, um die Lücke in dem alten Mathematikerverzeichnisse, in welchem sein Name nicht vorkommt, auszufüllen. Später als zwischen 200 und 100 kann er aber auch nicht gelebt haben, wie wir aus folgendem Umstande entnehmen. Eine Spire war, wie wir (S. 242) besprochen haben, eine wulstartige Oberfläche. Heron von Alexandria definiert sie, wie wir damals sahen, als Umdrehungsfläche erzeugt durch Drehung eines Kreises um eine nicht durch seinen Mittelpunkt hindurchgehende Achse[1]) und setzt hinzu: „Aus den Schnitten derselben entstehen gewisse eigentümliche Kurven." Daraus geht hervor, daß zu Herons Zeit Schnitte jener Oberflächen bereits vorgenommen worden waren, und Geminus ergänzt diese Mitteilung zur Brauchbarkeit für unseren gegenwärtigen Zweck durch die Angabe[2]), die spirischen Schnitte seien von Perseus erdacht. Es ist bis zu einem gewissen Grade wahrscheinlich, daß damit jene Schnitte gemeint sind, die wir an der oben angeführten Stelle im Zusammenhange mit der Hippopede des Eudoxus beschrieben haben, Schnitte also, welche auf dem Wulste durch eine der Durchgangsachse parallele Ebene hervorgebracht wurden, wobei die Entfernungen des Schnittes und des Mittelpunktes des die Spire erzeugenden Kreises von der Drehungsachse die unterscheidenden Merkmale für die einzelnen spirischen Kurven lieferten. Bemerken wir noch, daß eine Untersuchung solcher Kurven der Zeit, in welche wir Perseus setzen, angemessen erscheint, so ist damit das Wenige erschöpft, was wir über diesen Schriftsteller sagen können, dessen Heimat und sonstige persönliche Verhältnisse uns genau ebenso unbekannt sind, wie die des Nikomedes, des Diokles.

Ebenso verhält es sich mit Zenodorus[3]), dem Verfasser eines höchst interessanten Buches über Figuren gleichen Umfanges. Die Grenzen, in welche sein Leben eingeschlossen werden kann, sind als feststehende obere Grenze die Zeit des Archimed, dessen Name

[1]) Heron, Definit. 98 (ed. Hultsch) 27, bestätigt durch Proklus (ed. Friedlein) 119. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 111—112. [3]) Vgl. Nokk, Programm des Freiburger Lyceums von 1860 und unsere Besprechung des II. Bandes des Pappus (ed. Hultsch) in der Zeitschr. Math. Phys. XXII (1877), Histor.-literar. Abtlg. 173—174. Eine Verwechslung des Zenodorus mit einem bei Proklus genannten Zenodotus, welche, so lange die Friedleinsche Proklusausgabe noch nicht vorhanden war, zu entschuldigen gewesen sein dürfte, veranlaßte uns früher zu gegenwärtig ganz unhaltbaren Zeitbestimmungen für Zenodorus.

bei ihm vorkommt, als mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit anzugebende untere Grenze die Zeit des Quintilian, der von den Dingen redet, welche in der Abhandlung des Zenodorus vorkommen, wenn auch ohne ihn selbst zu nennen. Quintilian, mit welchem wir es im 26. Kapitel zu tun haben werden, lebte 35—95 n. Chr. Demgemäß würde die Tätigkeit des Zenodorus etwa zwischen 200 v. Chr. und 90 n. Chr. fallen. Man hat aber wohl mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß seine etwas breite Schreibart ihn als nicht allzuweit nach Euklid lebend betrachten lasse[1]), und demzufolge nehmen wir keinen Anstand ihn hier zu behandeln. Die Abhandlung des Zenodorus ist uns in mehrfacher Überlieferung erhalten. Einmal finden sich die Sätze über Figuren gleichen Umfanges ohne Angabe ihres Erfinders bei Pappus im V. Buche seiner mathematischen Sammlung[2]), zweitens stehen dieselben in dem Kommentare des Theon von Alexandria[3]) zum I. Buche des ptolemäischen Almagestes. Bei Theon ist ausdrücklich Zenodorus als Verfasser der auszugsweise mitgeteilten Abhandlung genannt, und Proklus bestätigt mittelbar diese Namensnennung. Er sagt uns nämlich, das Viereck mit einspringendem Winkel heiße hohlwinklig, *κοιλογώνιον*, nach Zenodorus[4]), und dieses Wort in der angegebenen Bedeutung kommt wirklich in Theons Auszuge vor. Wir können drittens auf eine Abhandlung in griechischer Sprache über die Figuren gleichen Umfanges hinweisen, welche den Namen keines Verfassers als Überschrift trägt und in wesentlicher Übereinstimmung mit, wahrscheinlich in einem Abhängigkeitsverhältnisse zu Zenodorus steht[5]), von Nachbildungen in anderen Sprachen zu schweigen. Von den vierzehn Sätzen des Zenodorus, welche fast gleichlautend bei Pappus und bei Theon sich erhalten haben, mögen der 1., 2., 6., 7. und 14. hier einen Platz finden: 1. Unter regelmäßigen Vielecken von gleichem Umfange hat dasjenige den größeren Inhalt, welches mehr Winkel hat. 2. Der Kreis hat einen größeren Inhalt als jedes ihm isoperimetrische regelmäßige Vieleck. 6. Zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke auf ungleichen Grundlinien sind zusammen größer als zwei auf den nämlichen Grundlinien gleichschenklige Dreiecke zusammen, welche unter sich unähnlich sind, aber mit jenen ähnlichen gleichen Gesamtumfang haben. 7. Unter den isoperimetrischen n-Ecken hat das regelmäßige den größten Inhalt. 14. Unter den Kreisabschnitten, welche gleich große

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) 1190. [2]) Pappus V, pars 1 (ed. Hultsch), 308 sqq. [3]) *Théon d'Alexandrie* (ed. Halma. Paris 1821) 33 sqq. Zum besseren Vergleich mit der Wiedergabe durch Pappus auch abgedruckt bei Pappus (ed. Hultsch) 1190—1211. [4]) Proklus (ed. Friedlein) 165. [5]) Pappus (ed. Hultsch) 1138—1165.

Bogen haben, ist der Halbkreis der größte. Im Raume hat die Kugel bei gleicher Oberfläche den größten Inhalt. Die theoretische Bedeutsamkeit dieser Sätze, welche einen durchaus neuen geometrischen Gegenstand behandeln, der nach rückwärts nur an die Vielecke wachsender Seitenzahl in der Kreisrechnung des Archimed und an die Lehre von den größten und kleinsten Werten bei Apollonius anknüpft, liegt auf der Hand, und es ist nur um so mehr zu bedauern, daß unser Wissen von ihrem Erfinder so dürftig ist.

Wir nennen weiter immer noch auf bloße Wahrscheinlichkeitsgründe uns stützend im Jahrhunderte zwischen 200 und 100: Hypsikles von Alexandria[1]). Seine Leistungen liegen auf verschiedenen Gebieten. Die Handschriften des Euklid enthalten mehrfach nach den 13 Büchern der Elemente noch zwei Bücher stereometrischen Inhaltes, welche als XIV. und XV. Buch der Elemente, oder als die beiden Bücher des Hypsikles von den regelmäßigen Körpern benannt zu werden pflegen. Neuere Untersuchungen[2]) haben einen solchen Gegensatz im Wert und Inhalt der beiden Bücher aufgedeckt, daß sie notwendig verschiedenen Verfassern überwiesen werden müssen, und zwar das erste dem Hypsikles, das zweite einem mehrere Jahrhunderte n. Chr. lebenden Schriftsteller. Wir haben es demgemäß hier mit dem ersten Buch allein zu tun, welches aus folgenden sechs Sätzen über die regelmäßigen Körper[3]) besteht: 1. Die vom Mittelpunkt eines Kreises auf die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks gefällte Senkrechte ist die halbe Summe des Halbmessers und der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks. 2. Einerlei Kreis faßt des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaeders fünfseitige und Ikosaeders dreiseitige Grenzfläche. 3. Die Oberfläche des Dodekaeders sowie des Ikosaeders sind beide dem 30fachen Rechtecke gleich, welches aus der Seite des Körpers und der aus dem Mittelpunkte einer Grenzfläche auf die Seite gefällten Senkrechten gebildet wird. 4. Die Oberfläche des Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche des Ikosaeders, wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. 5. Die Seite des Würfels verhält sich zur Seite des Ikosaeders, wie sich die Hypotenusen zweier

[1]) W. Crönert (Sitzungsber. der Berliner Akad. 1900 S. 942—950) setzt die Lebenszeit des Hypsikles auf 150 bis 120. [2]) Der Erste, welcher die Verschiedenheit beider Bücher erörternd sie zwei verschiedenen Autoren beilegte, war Friedlein im Bulletino Boncompagni 1873, 493—529. Ihm folgte Th. H. Martin ebenda 1874, 263—266. [3]) Gewöhnlich werden 7 Sätze angenommen, aber der 7. Satz (Zwei nach stetiger Proportion geschnittene Gerade verhalten sich wie ihre größeren Abschnitte) ist offenbar kein Satz für sich, sondern nur Teil des Beweises des 6. Satzes.

rechtwinkligen Dreiecke verhalten, welche eine Kathete gemeinschaftlich und als andere Kathete den größeren beziehungsweise den kleineren Abschnitt besitzen, der entsteht, indem die gemeinschaftliche Kathete nach stetiger Proportion geschnitten ist. 6. Der Körper des Dodekaeders verhält sich zum Körper des Ikosaeders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. Diese Sätze, deren Wortlaut wir bei dem 1., 3., 5. Satze etwas mundgerechter zu fassen uns erlaubt haben als in den gewöhnlichen Übersetzungen, bilden ein einheitliches Ganzes, welches seinem Verfasser wohl Ehre macht, und lassen nicht zu, daß man jenes andere früher gleichfalls Hypsikles zugeschriebene Buch damit in Verbindung setze, welches aus sieben Aufgaben besteht, die Konstruktion eines Tetraeders in einen Würfel, eines Oktaeders in ein Tetraeder, eines Oktaeders in einen Würfel, eines Würfels in ein Oktaeder, eines Dodekaeders in ein Ikosaeder zu vollziehen, die Zahl der Ecken und der Seiten, endlich die gegenseitigen Neigungen der Grenzflächen in den fünf regelmäßigen Körpern zu finden. Über den Verfasser des ersten Buches gibt dessen Einleitung einige Auskunft. Ihr Wortlaut ist[1]):

Basylides von Tyrus, mein lieber Protarch, kam einst nach Alexandria, war an meinen Vater wegen beider gemeinschaftlicher Liebe zur Mathematik empfohlen, und brachte die meiste Zeit seines Aufenthaltes in dem Umgange mit ihm zu. Als sie eines Tages des Apollonius Schrift über Vergleichung des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaeders und Ikosaeders und deren Verhältnisse zueinander durchgingen, so schien ihnen der Vortrag des Apollonius nicht ganz richtig zu sein, und sie schrieben, wie mir mein Vater gesagt hat, ihre Verbesserungen nieder. Nach der Zeit fiel mir jedoch eine andere von Apollonius herausgegebene Schrift in die Hände, welche eine richtige Auflösung der erwähnten Aufgabe enthält, deren Untersuchung mir ein ausnehmendes Vergnügen gewährt hat. Das von Apollonius herausgegebene Werk kann jeder selbst nachsehen, da es überall zu haben ist, weil man es für eine sorgsame Arbeit hielt. Dasjenige aber, was ich nachher aufgesetzt habe, glaube ich Dir wegen Deiner vorzüglichen Einsicht in allen Wissenschaften, besonders aber in der Geometrie, als einem kundigen Beurteiler meines Vortrags zuerst vorlegen zu müssen: in der gewissen Erwartung, daß Du sowohl aus Freundschaft für meinen Vater, als aus Wohlwollen gegen mich, geneigt sein wirst meinem Versuche Deine Aufmerksamkeit zu schenken. Doch es ist Zeit, daß ich meine Vorrede schließe und zur Sache selbst komme.

[1]) Vgl. z. B. Euklids Elemente fünfzehn Bücher aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Halle. S. 425—426.

Es war offenbar eine Jugendarbeit, welche Hypsikles mit diesen Worten dem noch lebenden Freunde seines Vaters widmete. Seine Mitteilungen geben uns Auskunft über eine sonst unbekannte Schrift des Apollonius und wurden in diesem Sinne von uns (S. 344) benutzt. Araber haben, so lange das Buch noch als von Euklid herrührend betrachtet wurde, aus den Anfangsworten herausgelesen, Euklid stamme aus Tyrus (S. 260). Man hat aber aus derselben Vorrede auch, wie uns scheint, richtige Folgerungen auf die Lebenszeit des Hypsikles gezogen[1]). Der Vater des Hypsikles, welcher eine Abhandlung des Apollonius noch nicht kannte, welche dem Sohne nachher bekannt war und zu dessen Lebzeiten „überall zu haben" war, muß ein älterer Zeitgenosse des Apollonius gewesen und gestorben sein, bevor dessen verbesserte zweite Abhandlung zur Veröffentlichung gelangte. Da nun Apollonius etwa 170 gestorben ist, so mag Hypsikles nicht vor dieser Zeit seine Abhandlung geschrieben haben, eine Zeitbestimmung, zu welcher uns gleich nachher noch eine kleine Bestätigung zugut kommen wird.

Eine zweite Abhandlung des Hypsikles, welche sich erhalten hat, ist das Buch von den Aufgängen der Gestirne, *ἀναφορικός*[2]). Auf den astronomischen Inhalt dieses äußerst dürftigen Werkchens von nur sechs Sätzen, auf dessen etwaige Verschlimmbesserung durch einen Astrologen haben wir nicht einzugehen, es sei denn um zu bemerken, daß die Methode desselben Berechtigung nur zu einer Zeit hatte, zu welcher trigonometrische Betrachtungsweisen noch nicht erdacht waren, und daß andererseits als wichtige Neuerung in den Aufgängen des Hypsikles die Einteilung des Kreisumfanges in 360 Grade benutzt ist. Autolykus, ein astronomischer Schriftsteller kurz vor Euklid (S. 293), hat diese Gradeinteilung noch nicht. Ebensowenig scheint sie Eratosthenes gekannt zu haben, wenn es richtig ist[3]), daß er sich eines so unbequemen Ausdruckes wie „$\frac{11}{83}$ des Kreisumfanges" bediente, während andererseits die Tatsache seiner vollzogenen Gradmessung (S. 328) uns wieder stutzig machen kann. Starb nun Eratosthenes um 194 und ist seine Benutzung jener unbequemen $\frac{11}{83}$ richtig auf das Jahr 220 bestimmt,

[1]) Vossius, *De scientiis mathematicis* pag. 328 (Amsterdam 1650). Bretschneider 182. Falsche Ansichten bei Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (edit. Harless) IV, 20, bei Montucla, *Histoire de mathématiques* I, 315, bei Nesselmann, Algebra der Griechen 246 flgg. [2]) Des Hypsikles Schrift Anaphorikos ist im Osterprogramm 1888 des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden von K. Manitius herausgegeben worden. [3]) Montucla, *Histoire de mathématiques* I, 304. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 130.

schrieb dann Hypsikles um 170, so ist die Zeit der Einführung der Gradeinteilung des Kreises, also mutmaßlich auch des davon untrennbaren babylonischen Sexagesimalsystems in Alexandria in sehr enge Grenzen gebracht. Von den sechs Sätzen des Anaphorikos sind die drei ersten arithmetischen Inhalts und rechtfertigen unser auch nur beiläufiges Verweilen bei dem Schriftchen. In moderner Aussprache sagen sie, daß in einer arithmetischen Reihe von gerader Gliederzahl die Summe der zweiten Hälfte der Glieder die der ersten Hälfte um ein Vielfaches des Quadrates der halben Gliederzahl übertreffe[1]), daß die Summe einer arithmetischen Reihe bei ungerader Gliederzahl gleich dem Produkte der Gliederzahl in das mittlere Glied, bei gerader Gliederzahl gleich dem Produkte der halben Gliederzahl in die Summe der beiden mittleren Glieder sei.

Bei so elementaren Kenntnissen blieb aber Hypsikles nicht stehen. Vielmehr war ihm die allgemeine Definition der Vieleckszahlen bekannt, welche er in die Worte kleidete: „Wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterschiede sind, und dieser Unterschied 1 ist, so ist die Summe eine dreieckige Zahl; ist der Unterschied 2, so ist die Summe eine viereckige Zahl, für 3 eine fünfeckige; die Anzahl ihrer Winkel ist um 2 größer als der Unterschied, und ihre Seiten sind der Anzahl der vorgelegten Zahlen gleich." So berichtet Diophant im 8. Satze seiner Schrift über die Polygonalzahlen, von welcher im 23. Kapitel die Rede sein wird. Diophant nennt als seine Quelle: Hypsikles ἐν ὅρῳ. Die Übersetzer dürften mit Recht diesen Ausdruck deutsch durch „in einer Definition" übertragen haben, da ὅρος neben der Bedeutung Grenze (lateinisch: *terminus* oder *limes*) oder Reihenglied unzweifelhaft auch die Bedeutung der Begrenzung eines Begriffes, d. h. einer Definition besitzt; so bei Euklid z. B. und schon vor diesem bei Platon heißen die Definitionen regelmäßig ὅροι, wobei vielleicht, wie bemerkt, an eine „Begrenzung der Begriffe" zu denken ist. Bei welcher Gelegenheit Hypsikles sich jener Definition der Vieleckszahlen bedient haben mag, wissen wir durchaus nicht.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Nennung des einzigen Schriftstellers, für dessen Leben etwas genauere Angaben bekannt sind. Wir meinen Hipparch, der zwischen 161 und 126 v. Chr. astronomische Beobachtungen anstellte[2]). Er ist in Nicäa in Bithynien

---

[1]) Ist a das erste Glied, d die Differenz, $2n$ die Gliederzahl, so sind die beiden Summen $na + \frac{(3n-1)nd}{2}$ und $na + \frac{(n-1)nd}{2}$, deren Unterschied dn^2 ist. [2]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 45, Anmerkung 1. Das Werk

geboren. Er beobachtete auf der Insel Rhodos, vielleicht auch in Alexandria. Seine hervorragendsten Verdienste rühmt die Geschichte der Astronomie, welcher er als Schöpfer einer wissenschaftlichen Sternkunde gilt. Er war aber auch der Urheber eines Teiles der Wissenschaft, welche das Grenzgebiet zwischen Astronomie und Geometrie bildet, der Trigonometrie, und berechnete eine Sehnentafel[1]). Leider wissen wir von dieser Leistung nur durch Zitate des Heron von Alexandria, in welchen das Werk *περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*, über die Geraden im Kreise, nicht aber dessen Verfasser genannt ist, und durch ein berichtigendes Wort eines späten Schriftstellers, des Theon von Alexandria, der um 365 schrieb, und können also dieses Kapitel griechischer Mathematik nicht in seinen Ursprüngen verfolgen. Wenn Hipparch in seinen erhaltenen Erläuterungen zu den Sternbeschreibungen des Eudoxus und Aratus erklärt, er habe sich graphischer Methoden bedient — *διὰ τῶν γραμμῶν* — so bot dieser Ausdruck zwar Anlaß zu geistreichen Vermutungen über die betreffenden Methoden[2]), welche aber gesicherter Stützen entbehrend später Vorhandenes zurückdatieren. Was dagegen Hipparch mittels seiner Sehnentafel leistete, ist besser verbürgt, da uns von einer Art von Triangulation berichtet wird, die er zur Berechnung der Oberfläche der bewohnten Erde anwandte, und da Polybius (203 bis 121), ein Zeitgenosse des Hipparch, die Möglichkeit erwähnt, die Höhe einer Mauer aus der Ferne zu messen[3]). Jedenfalls stimmt die Erfindung trigonometrischer Betrachtungen etwa 150 v. Chr. mit der Notwendigkeit überein, zu welcher wir weiter oben aus anderen Gründen gelangt waren, dem Anaphorikos des Hypsikles kein späteres Datum als das von 180 beilegen zu dürfen. Von Hipparchs Verdiensten um Einführung der geographischen Länge und Breite[4]) reden wir im nächsten Kapitel[5]).

Wir sind einem Hipparch „der zu den Arithmetikern gehörte" begegnet (S. 256), von welchem kombinatorische Berechnungen uns mitgeteilt wurden. Wir haben keinen Grund in diesem Schriftsteller, der nach Chrysippus (282—209) lebte, einen anderen als den Astronomen zu vermuten. Wir glauben ebenso auch an die Richtigkeit arabischer Angaben, denen zufolge Hipparch als Schriftsteller

---

des Hipparch: *In Arati Phaenomena Commentaria* hat K. Manitius mit deutscher Übersetzung herausgegeben (Leipzig 1894).

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 111. [2]) Ad. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 10—14 (1900). [3]) G. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen 3. Abteilg. S. 135 flgg. und 4. Abteilg. S. 29—31. [4]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 153. [5]) G. Berger, Die geographischen Fragmente des Hipparch. Leipzig 1870.

über quadratische Gleichungen aufgetreten wäre[1]). Eine Sehnentafel setzt zu ihrer Berechnung arithmetische wie algebraische Gewandtheit geradezu voraus.

Wir haben dieses Kapitel mit Nennung der Gebiete begonnen, auf welchen wir die Tätigkeit der Schriftsteller im Jahrhunderte von 200 bis 100 ungefähr entfaltet sehen würden. Unsere Darstellung ist mit unserer Ankündigung in Einklang geblieben. Nikomedes, Diokles, Perseus waren für uns die Männer, welche der Kurvenlehre sich widmeten. Zenodorus widmete den planimetrischen Lehren vom Größten und Kleinsten seine Kräfte. Hypsikles vervollkommnete die Stereometrie und führte durch das, was wir aus der Arithmetik von ihm wissen, den Beweis, daß auch dieser Teil der Mathematik in dem Jahrhunderte, welches auf das des Euklid folgte, nicht vernachlässigt wurde. Hipparch bestätigte uns in dieser letzten Überzeugung, der rechnende Astronom, welcher den naturgemäßen Übergang zu dem rechnenden Feldmesser bildet, der nunmehr unsere Aufmerksamkeit auf sich zieht.

18. Kapitel.

Heron von Alexandria.

In das erste vorchristliche Jahrhundert setzen wir Heron von Alexandria[2]). Die Form unserer Aussage läßt erkennen, daß wir in ihr keine allgemein als wahr angenommene Tatsache behaupten.

---

[1]) Vgl. *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî* (ed. Woepcke) Paris 1851, *Préface* XI und *Journal Asiatique série* 5, T. V, pag. 251—253. Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VI, 54 (1892) und X, 71 und 213 Anmerkung 36 (1900) hält allerdings das Zitat für unrichtig und durch falsche Lesung entstanden. [2]) Über Heron vgl. Venturi, *Commentari sopra la storia e le teorie dell' ottica*, tomo I. Bologna 1814. Th. H. Martin, *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie etc.* im IV. Bande der *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des inscriptions et belles-lettres*. Série I. *Sujets divers d'érudition*. Paris 1854. W. Schmidt, Heron von Alexandria (in den Neuen Jahrbüchern f. d. klass. Altertum, Geschichte und deutsche Literatur. Leipzig 1899). K. Tittel, Heron und seine Fachgenossen (in Rhein. Museum für Philologie. Bd. LVI S. 404—415). Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien. Programmbeilage Nr. 815. Hamburg 1902. Rudolf Meier, *De Heronis aetate*. Leipzig 1905. Die geometrischen griechischen Texte herausgegeben von Hultsch (Berlin 1864), teilweise auch von Vincent in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale*. Tome XIX. Partie 2. (Paris 1858). Gesamtausgabe der Werke des Heron von W. Schmidt, L. Nix, Herm. Schöne in der Bibliotheca Teubneriana seit 1899 mit deutschen Übersetzungen.

Die Meinungen weichen vielmehr sehr erheblich voneinander ab, und man müßte, um allen gerecht zu werden, sich damit begnügen als mögliche Grenzen von Herons Wirksamkeit die Jahre 200 vor und 200 nach dem Beginne der christlichen Zeitrechnung anzugeben. Die Heimat des berühmten Mathematikers und Physikers wird von niemand angezweifelt. Sie geht aus der Überschrift mehrerer seiner uns erhaltenen Abhandlungen hervor, wird auch durch Pappus und durch einen Anonymus, der um das Jahr 938 in Byzanz lebte, bestätigt, welche beide von einem Heron von Alexandria zu reden wissen. Herons Lehrer war nach dem Berichte jenes Anonymus von Byzanz Ktesibius. Man hat eine Stütze dieses Berichtes darin gefunden, daß Proklus den Heron zugleich mit Ktesibius als Erfinder wunderbarer auf Luftdruck beruhender Vorrichtungen rühmt und auch darin, daß die beste Pariser Handschrift eines Buches des Heron die Überschrift führt „Über Anfertigung von Geschützen des Heron des Ktesibius“ (Ἥρωνος Κτησιβίου Βελοποιϊκά). Aber hier setzen schon Zweifel ein, ob bei fehlendem Artikel τοῦ vor Κτησιβίου die Übersetzung „Schüler des Ktesibius“ berechtigt sei, ob der Vermutung, jenes τοῦ sei bei Herstellung der Handschrift weggefallen, nicht das Bedenken im Wege stehe, dann könne irgend ein anderes Wort z. B. ἢ = oder weggefallen sein, wofür man sich auf eine jüngere Wiener Handschrift beruft, welche diesen Wortlaut aufzeigt. Endlich behauptet man, selbst wenn man Heron Schüler des Ktesibius nenne, sei damit nicht viel geholfen, weil das Zeitalter jenes Ktesibius keineswegs feststehe. Mit Gewißheit steht nur fest, daß Heron in einer seiner Schriften sich auf Philon von Byzanz beruft, während dieser Ktesibius nennt, so daß die Zeitfolge: Ktesibius, Philon, Heron gesichert ist, ohne damit den Zeitraum festzulegen, der zwischen den Trägern dieser Namen liegt[1]). Man hat also andere bei Heron auftretende Zitate zu suchen, welche seine Lebenszeit zu bestimmen sich eignen, und wir glauben dazu vorzugsweise eine mathematische Schrift „Die Vermessungslehre“ (*Μετρικά*) benutzen zu sollen[2]). In ihr kommt Archimed vor, in ihr der Verfasser des Raumschnittes, in ihr der Verfasser der Geraden im Kreise, beide letztere ohne Namensnennung, mithin als durch diese Bezeichnung für den Leser hinlänglich deutlich gemacht. Der Raumschnitt rührt (S. 345) von Apollonius her, die Geraden im Kreise (S. 362) von Hipparch; folglich muß Heron nach der Mitte des II. vorchristlichen Jahrhunderts gelebt

[1]) Wilh. Schmidt in der Einleitung zum I. Bande der Gesamtausgabe des Heron (Leipzig 1899). [2]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. III. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1903).

haben. Nun werden wir aber im 20. Kapitel erfahren, daß auch Menelaus von Alexandria um das Jahr 100 nachchristlicher Zeit Bücher unter dem Titel die Geraden im Kreise verfaßt hat. Wäre dieses vor Heron gewesen, so hätte die Nennung des Titels allein Mißverständnis erzeugen können, und darauf gestützt halten wir zunächst für erwiesen, daß Heron zwischen Hipparch und Menelaus fällt. Zur näheren Einschränkung der Zeitgrenzen führt ein anderes Werk des Heron, seine Mechanik, welche in arabischer Übersetzung des Kustâ ibn Lûkâ (um 900) auf uns gekommen ist[1]). In dieser Mechanik kommt ein Posidonius vor, welchem eine physikalische Definition entnommen ist. Derselbe gehöre der Stoa an. Es ist nicht anzunehmen, daß Posidonius von Alexandria (S. 198) ein Werk verfaßt habe, in welchem jene Definition vorkommen konnte, dagegen ist dieses wohl möglich, wenn Heron den Stoiker Posidonius von Rhodos meinte, den Lehrer Ciceros, den Freund des Pompejus, der frühestens um das Jahr 90 als Schriftsteller auftrat. Zu noch weiterer Einschränkung der Grenzen, welche jetzt 90 vor und 100 nach Christus heißen, hat man sich einer anderen Stelle der Mechanik bedient[2]). Gegen Schluß des dritten Buches der Mechanik steht die Beschreibung einer kleinen einschraubigen Olivenpresse, und eben diese soll nach Plinius seit dem Jahre 55 n. Chr. die früher gebräuchlichen großen Pressen mit langen Hebeln verdrängt haben. Damit im Einklange stehe[3]), daß bei römischen Schriftstellern, insbesondere bei Vitruvius im Jahre 14 v. Chr., keine Einwirkung Herons nachweisbar sei. Heron müßte demzufolge zwischen 50 und 100 nachchristlicher Zeitrechnung angesetzt werden. Das wäre nun sehr schön, wenn es sich so, wie angegeben, verhielte. Aber der entgegengesetzte Nachweis ist geliefert worden[4]). Die von dem an und für sich durch vielfach mangelnde Sachkenntnis unzuverlässigen Plinius geschilderte kleine Olivenpresse ist keineswegs die von Heron beschriebene, dagegen hat Vitruvius Heron benutzt, wie aus zwei fehlerhaften Angaben hervorgeht, die jener von diesem, natürlich ohne ihn zu nennen, entlehnt. Wir werden im 26. Kapitel hierauf zurückzukommen haben.

Jetzt sehen wir Heron, wie wir am Anfange des Kapitels sagten,

---

[1]) Curra de Vaux, *Les mécaniques de Héron d'Alexandrie*. Paris 1894 und L. Nix, Herons von Alexandria Mechanik. II. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1901). [2]) Wilh. Schmidt pag. XIX—XX der Einleitung zu Bd. I der Gesamtausgabe (Leipzig 1899). [3]) Wilh. Schmidt, Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft? Bibliotheca Mathematica 3. Folge, I, 297—318 (1900). [4]) Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandrien (Hamburg 1902).

auf das erste vorchristliche Jahrhundert beschränkt, und nun gewinnt eine vereinzelt dastehende späte Angabe erhöhten Wert. Wir werden im 26. Kapitel von einer Vermessung des Römischen Reiches erfahren, welche wahrscheinlich in den Jahren 37—20 v. Chr. stattfand. Um das Jahr 500 n. Chr. erzählt Cassiodorius von dieser Vermessung und sagt dabei[1]), ein Schriftsteller Heron metricus habe sich an ihrer Redaktion beteiligt. Nun ist allerdings richtig, daß die Handschriften nicht Heron, sondern Iron oder Yron überliefern, es ist auch richtig, daß Heron nirgend als metricus bezeichnet wird, wenn er auch, wie wir oben (S. 364) sagten, ein Werk μετρικά verfaßt hat, aber auffallend und, was wir besonders zu bedenken geben, zu der von uns vorher erschlossenen Lebenszeit Herons nicht in Widerspruch stehend bleibt jene Stelle immerhin. Auf eine letzte Stelle möchten wir noch hinweisen, welche zur Festlegung von Herons Lebenszeit benutzt worden ist[2]). Sie steht in der Schrift über die Dioptra[3]). Dort sind Beobachtungen an zwei weit voneinander entlegenen ihrer geographischen Länge nach sehr verschiedenen Standorten zu einem geodätischen Beispiele vereinigt, und als diese Standorte sind nicht etwa Alexandria und Athen, sondern Alexandria und Rom gewählt. Nun war aber Ptolemaeus XIII. Neos Dionysius der erste ägyptische König, welcher im Jahre 81 v. Chr. durch die Römer eingesetzt wurde. Von da an waren alle Augen in Alexandria nach Rom weit mehr als nach Athen gerichtet, und man darf die Entstehung der Abhandlung auf später als das Jahr 81 ansetzen. Dann werden auch die zahlreichen Latinismen erklärlich, welche das Griechisch des Heron entstellen. Wir wiederholen also, wir setzen Heron von Alexandria in das erste vorchristliche Jahrhundert, vielleicht sogar, wenn die Stelle des Cassiodorius für beweiskräftig gehalten werden sollte, in dessen letztes Drittel. Ein Grund läßt sich freilich für eine frühere Lebenszeit Herons beibringen, daß er nämlich, wenn von der Größe von Winkeln die Rede ist, sich niemals der Gradeinteilung (S. 360) bedient, sondern stets ausschließlich von Bruchteilen eines rechten Winkels spricht. Möglicherweise ist diesem Einwande damit zu begegnen, daß die Sexagesimalbrüche bei den Griechen dem gewöhnlichen Leben fremd blieben, daß sie von Anfang an waren, als was man sie später noch benannte, astronomische Brüche, daß überhaupt die Trigonometrie zunächst ein Kapitel der Astronomie bildete und keineswegs dazu diente, auch auf der Erde Dreiecke oder

[1]) Wilh. Schmidt pag. XVII—XVIII der Einleitung zu Bd. I der Gesamtausgabe (Leipzig 1899). [2]) Martin, *Recherches sur la vie etc.* pag. 91. [3]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. III. Band der Gesamtausgabe (Leipzig 1903).

aus Dreiecken zusammengesetzte Figuren einer Berechnung zu unterwerfen. Wir wollen schließlich nicht unterlassen zu bemerken, daß der Verfasser der letzten über Herons Zeitalter geführten Untersuchung[1]) nahezu zu der gleichen Zeitbestimmung des ersten vorchristlichen Jahrhunderts wie wir gelangt ist. Er teilt unsere Überzeugung, die in den Metrica erwähnte Sehnentafel sei die des Hipparch, und die ähnliche Tafel des Menelaus sei damals noch nicht vorhanden gewesen.

Ferner behauptet er Vitruvius habe später als Heron gelebt und stützt diese Behauptung darauf, daß die von Vitruvius beschriebene Wasserorgel wesentlich vollkommener als eine von Heron geschilderte sei; den von uns betonten Stellen der Mechanik legt er dagegen kein Gewicht bei. Ein weiter bei ihm verwerteter Umstand ist der, daß eine bei Proklus vorkommende Stelle, in welcher Archimed, Ktesibius, Heron als drei große Mechaniker genannt werden, für einen Auszug aus Geminus gilt, der, wie wir im 20. Kapitel sehen werden, etwa im Jahre 70 vorchristlicher Zeitrechnung lebte. Beiläufig erwähnen wir noch, daß die sogenannte Definitionen Herons, von welchen weiter unten die Rede sein wird, in der von uns hier erwähnten Abhandlung für unecht gehalten werden[2]), ebenso wie zahlreiche andere Fragmente.

Dieser Heron war allem Anscheine nach der einzige seines Namens, welcher in der Geschichte der Mathematik einen Platz verdient. Pappus, der an verschiedenen Stellen von Heron redet, nennt ihn Heron schlechtweg oder Heron von Alexandria. Proklus, pedantisch genau in Vermeidung der Verwechslungen von Schriftstellern, wo dieselben möglich wären, wie wir (S. 194) gesehen haben, redet zweimal von dem Mechaniker Heron, viermal vorher und nachher von Heron schlechtweg, und unter diesen vier Stellen ist gerade diejenige, in welcher Heron mit Ktesibius zusammen genannt ist, so daß Heron ohne Beinamen bei Proklus jedenfalls derselbe ist wie Heron der Mechaniker oder der dessen Leistungen sich mit Ktesibius begegnen. Eutokius in seinen Erläuterungen zur archimedischen Kreismessung (S. 318) redet gleichfalls nur von Heron, als wenn es eben nur einen solchen allbekannten mathematischen Schriftsteller gäbe.

Dazu kommt die Unmöglichkeit einen anderweitigen Mathematiker oder Mechaniker Heron irgendwie geschichtlich unterzubringen. Der Schriftsteller, welchen man ehedem als Heron den Jüngeren zu bezeichnen pflegte, ist der vorerwähnte Byzantiner des X. S., welcher selbst Heron von Alexandria zitiert, und dem den gleichen Namen

[1]) Rudolf Meier, *De Heronis aetate.* Leipzig 1905. [2]) Rud. Meier, *De Pseudo-Heronianis.* Rhein. Mus. f. Philol. Neue Folge LXI, 178—184.

beizulegen auch nicht der geringste Grund vorliegt. Heron, der Lehrer des Proklus, welcher in dem zweiten Viertel des V. S. lebte, hat überhaupt keine bekannt gewordene mathematische Schrift verfaßt; ihn hat Proklus insbesondere sicherlich bei keiner seiner Anführungen im Sinne gehabt, sonst würde der überaus pietätvolle Schüler für ihn eine andere Bezeichnung als das einfache Heron, oder Heron der Mechaniker gewählt haben. Heronas, der, wie Eutokius erzählt, einen Kommentar zu Nikomachus schrieb, mithin zwischen den von ihm erläuterten Schriftsteller und den, der seiner erwähnt, zwischen das II. und VI. S., fällt, ist eine im übrigen durchaus unbekannte Persönlichkeit, so daß es eine leichtfertige Vermutung wäre in ihm den Verfasser solcher Schriften erkennen zu wollen, welche als von Heron verfaßt bezeichnet sind.

So einfach sich demnach die sogenannte heronische Frage, d. h. die Frage nach dem Verfasser der mathematischen und physikalischen Schriften, welche einem Heron beigelegt werden, zu lösen scheint, so sind doch noch Schwierigkeiten vorhanden, wie nicht anders zu vermuten, da ja sonst wundernehmen dürfte, daß überhaupt jemals eine heronische Frage entstand. Die Handschriften der als heronisch bekannten Bücher sind ziemlich späten Ursprungs und verschiedenen Inhaltes. Kaum eine ist mit einer anderen zur vollen Deckung zu bringen. Bald fehlt eine, bald eine andere Abhandlung, und zum Ersatze findet sich wieder in der zweiten Handschrift, was man in der ersten vergeblich suchte. Schon dadurch ist vollgültige Gewißheit über die Echtheit aller Stücke erheblich erschwert. Dazu kommt die sichere Unechtheit mancher Stücke. Ein alle Spuren des Verfalles der Literatur an sich tragendes Griechisch, Maße eines späten Zeitalters, Erwähnungen von Schriftstellern, die wie Modestus und Patrikius am Ende des IV. S. n. Chr. gelebt haben, können unmöglich dem Heron von Alexandria aus dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte angehören.

Wir möchten trotz mehrfachen Widerspruchs die Lösung der Schwierigkeit darin finden, daß wir die Schriften des Heron im großen und ganzen als echt in unserm Sinne, d. h. als dem früher sogenannten älteren Heron aus dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte angehörig erkennen, daß wir aber annehmen, diese Schriften seien wesentlich verderbt worden. Sie seien, behaupten wir, ungemein verbreitet, in zahllosen Abschriften und Auszügen vorhanden gewesen. Nun habe bald dieser, bald jener Anfertiger später Exemplare Randbemerkungen der mannigfachsten Art, wie sie seiner Lebenszeit angemessen schienen, beigefügt und noch spätere unwissende Abschreiber haben bald solche Randbemerkungen in den Text her-

übergezogen, bald ihnen unverständlich gewordene Stellen weggelassen. So sei die gegenwärtige Gestalt der Schriften Herons entstanden. Man sei berechtigt alle als echt, wie alle als unecht zu bezeichnen, als echt dem Ursprunge nach, als unecht vermöge ihrer keineswegs unbedeutenden Verschlimmbesserungen.

Die Schriften Herons sind teils physikalischen, teils mathematischen Inhaltes. Wenn wir uns auch bei Erörterung jener ersten Gruppe, soweit nicht Mathematisches in ihnen zur Rede kommt, hier grundsätzlich enthalten, so können wir doch nicht umhin auf eine schriftstellerische Eigentümlichkeit Herons hinzuweisen, welche in ihnen vorzüglich zutage tritt, und auch in den Schriften, welche unsere Auseinandersetzung fordern, sich nicht verleugnet. Heron begnügt sich niemals mit bloß theoretischen Erörterungen. Er schreitet von der wissenschaftlichen Grundlage aus zur Anwendung, und zwar meistens zu einer doppelten Anwendung: neben dem Nutzen für die menschliche Gesellschaft erscheint auch das Vergnügen des einzelnen ihm wert die Fürsorge des Gelehrten in Anspruch zu nehmen.

An der Grenze zwischen Physik und Mathematik liegen die drei mechanischen Bücher, welche Heron verfaßt hat, und welche, wie wir (S. 365) sahen, in arabischer Übersetzung erhalten sind. Pappus nennt in umfangreichen Auszügen, welche er davon gibt, jene Bücher bald Mechanik, bald Gewichtezieher, doch kann jetzt kein Zweifel mehr darüber herrschen, daß beide Namen nur das eine aus drei Büchern bestehende Werk bezeichnen. Das erste Buch ist vorzugsweise allgemein mechanischen Lehren gewidmet, und in ihm findet sich eine geometrische Aufgabe mit ihrer Lösung[1]). Ebendieselbe Aufgabe mit der gleichen Lösung hat aber Heron noch an einer anderen Stelle mitgeteilt, in einem Buche über angewandte Mechanik, welches den Titel führt: Von der Anfertigung von Geschützen[2]). Er lehrt, daß, wenn eine dreifach stärkere Kraft erzielt werden will, die den Geschossen ihre Bewegung erteilende Sehne dreifach stärkere Spannung erleiden muß. Diese ihr zu verschaffen, während die ganze Gestalt des Geschützes sich ähnlich bleibt, muß ein gewisser zylindrischer Teil desselben unter der gleichen geometrischen Bedingung, die für das Ganze gilt, dreimal größer werden. Nun verhalten sich ähnliche Zylinder wie die Kuben einer Abmessung, z. B. des Durchmessers, also muß sich hier verhalten $d_1^3 : d_2^3 = 1 : 3$ (allgemeiner wie $1 : n$). Das ist die delische Aufgabe der Würfelverdoppelung in verallgemeinerter Form. Heron löst deshalb hier in einem Buche prak-

[1]) L. Nix, Herons von Alexandria Mechanik im II. Bande der Gesamtausgabe S. 24. [2]) Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποιικά abgedruckt in dem von Thevenot herausgegebenen Bande: *Veteres mathematici*. Paris 1693.

tischen Inhaltes die theoretische Aufgabe, zwischen zwei gegebene Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten. Seine Auflösung ist eine vollkommen gesicherte, indem sie ausdrücklich als heronisch benannt und dessen Mechanik, wie wir jetzt wissen, entnommen, auch von Pappus aufbewahrt worden ist und an beiden Orten so genau zusammentrifft, daß sogar die Figur bei Pappus durchaus mit der in der heronischen Mechanik übereinstimmt, während unsere Zeichnung (Fig. 63) der Anfertigung von Geschützen entnommen ist[1]). Der einzige Unterschied besteht darin, daß bei Pappus die Gerade $\theta\eta$ fehlt und demzufolge der Punkt η gar nicht und Herons Punkt θ durch η als den im Alphabete auf ζ folgenden Buchstaben bezeichnet ist. In der Mechanik fehlt gleichfalls die Gerade $\theta\eta$, nur sind andere Buchstaben vorhanden, vielleicht infolge des Durchgangs durch eine arabische Übersetzung. Die zwei mittleren geometrischen Proportionalen sollen zwischen die beiden Strecken $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ eingeschaltet werden. Man bildet aus den gegebenen Strecken das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen beide gleichen einander in θ halbierenden Diagonalen gezogen werden. Ein um die Ecke β sich drehendes Lineal wird alsdann empirisch in die Lage gebracht, daß seine Durchschnitte mit den Verlängerungen von $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$, nämlich ζ und ε, gleichweit von θ abstehen, so ist $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \gamma\beta$. Die Zeichnung der Hilfslinien $\theta\varepsilon$, $\theta\zeta$, $\theta\eta$ (letztere senkrecht auf $\alpha\delta$) läßt erkennen $\theta\zeta^2 = \theta\eta^2 + (\eta\alpha + \alpha\zeta)^2 = \theta\eta^2 + \eta\alpha^2 + \alpha\zeta(2\eta\alpha + \alpha\zeta) = \theta\alpha^2 + \alpha\zeta \cdot \delta\zeta$. Entsprechend dieser ersten Gleichung $\theta\zeta^2 = \theta\alpha^2 + \alpha\zeta \cdot \delta\zeta$ muß zweitens $\theta\varepsilon^2 = \theta\gamma^2 + \gamma\varepsilon \cdot \delta\varepsilon$ sein. Nun ist $\theta\zeta = \theta\varepsilon$ vorausgesetzt, es ist ferner $\theta\alpha = \theta\gamma$, folglich muß auch $\alpha\zeta \cdot \delta\zeta = \gamma\varepsilon \cdot \delta\varepsilon$ sein und $\alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \delta\varepsilon : \delta\zeta$. Nun ist weiter $\alpha\beta : \alpha\zeta = \delta\varepsilon : \delta\zeta$ und $\delta\varepsilon : \delta\zeta = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$, also endlich $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$, was zu beweisen war.

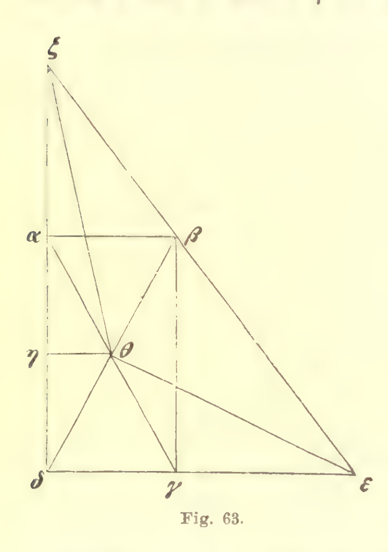


Fig. 63.

Wir gehen zu den eigentlich mathematischen Schriften des Heron über. An ihrer Spitze steht die Vermessungslehre, μετρικά, in 3 Büchern, welche Jahrhunderte lang verschollen waren, bis man eine dem XI. Jahrhunderte entstammende sehr schöne Handschrift des

[1]) Vgl. *Veteres mathematici* pag. 142 mit Nix pag. 24 und mit Pappus (ed. Hultsch) 63.

Werkes in Konstantinopel entdeckte, und nach ihr den Abdruck vollzog[1]). An der wir möchten sagen fleckenlosen Reinheit der Überlieferung kann kein Zweifel sein. Die unendlich klare Ausdrucksweise Herons, welche jeden Leser seiner physikalischen Schriften entzückt, verleugnet sich keinen Augenblick, und selbst die Überschrift, *μετρικά*, ist durch Eutokius[2]) beglaubigt. Bei der großen Wichtigkeit der Vermessungslehre fühlen wir uns gedrungen, deren Inhalt etwas genauer anzugeben.

Die Vermessungslehre gibt in ihrem 1. Buche Anweisungen, wie man ebene aber auch wie man gekrümmte Oberflächen ausmessen solle. Das 2. Buch lehrt die Ausmessung von Körpern, das 3. Buch Teilung von Flächen und Körpern. Das Maß der Fläche ist ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, im gleichen Sinne ist das Körpermaß ein Würfel, dessen Kante die Längeneinheit ist, mag man als solche eine Elle oder einen Fuß wählen.

Zuerst wird im 1. Buche ein Rechteck ausgemessen, dann ein rechtwinkliges Dreieck als Hälfte eines Rechtecks, und bei dieser Gelegenheit wird der Pythagoräische Lehrsatz an dem Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$ erläutert. Das gleichschenklige Dreieck mit den Seiten 10, 10, 12 wird gleichfalls als Hälfte eines Rechtecks behandelt, dessen Höhe 8 aus $10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 8^2$ gefolgert ist. Das sich anschließende ungleichschenklige Dreieck gibt Gelegenheit den Satz zu benutzen, daß ein Winkel bei A spitz, recht oder stumpf sei, je nachdem $B\Gamma^2 \lesseqgtr AB^2 + A\Gamma^2$ (S. 209), und nun folgt die Berechnung der Höhe aus den Seiten bald unter Benutzung der Abschnitte, welche sie auf der Grundlinie hervorbringt, bald unter Benutzung der Verlängerung, welche die Grundlinie bis zum Eintreffen der Höhe erleidet. Aber auch ohne die Höhe läßt die Dreiecksfläche sich unmittelbar aus den Seiten herleiten, und nun folgt die heute als heronische Dreiecksformel bekannte Rechnung

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}.$$

Da hierbei Quadratwurzelausziehungen vorkommen, z. B. für das Dreieck 7, 8, 9 die Quadratwurzel $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} = 26\frac{5}{6}$, so lehrt Heron einschaltungsweise die Ausziehung angenäherter Quadrat-

[1]) Herm. Schöne, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. Bd. III der Gesamtausgabe (Leipzig 1903). [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 270 lin. 2—3: *εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς*.

wurzeln[1]), und das ist die Stelle, auf welche Eutokius (S. 318) hingewiesen hat. Das durch Heron gelehrte Verfahren besteht in folgendem. Sei a eine schon nahe Quadratwurzel der Zahl $a^2 \pm b$, so ist näherungsweise

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 \pm b}{a}\right).$$

Man sieht sofort, daß dieser Wert der gleiche ist, welchen wir

$$\sqrt{a^2 \pm b} \sim a \pm \frac{b}{2a}$$

schreiben, und daß, wenn $a \pm \frac{b}{2a} = a_1$ mithin $a^2 \pm b = a_1{}^2 \pm b_1$ gesetzt wird, eine bessere Annäherung erzielt werden kann, was Heron auch ausdrücklich sagt. In seinem Beispiele ist $720 = 27^2 - 9$, also $\sqrt{720} \sim \frac{1}{2}\left(27 + \frac{720}{27}\right) = \frac{1}{2}\left(27 + 26\frac{2}{3}\right) = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ mit $\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2 = 720\frac{1}{36}$, und will man, sagt Heron, daß der Unterschied noch kleiner werde, so ersetze man das vorige $729 = 27^2$ durch $720\frac{1}{36} = \left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)^2$. Man erhielte alsdann, was Heron allerdings nicht ausrechnet:

$$\sqrt{720} \sim \frac{1}{2}\left(26\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{720}{26\frac{1}{2}\frac{1}{3}}\right) = 26\frac{1609}{1932}.$$

Wir bemerken beiläufig, daß die in Archimeds Kreismessung vorkommenden angenäherten Quadratwurzeln entgegen dem, was Eutokius zu verstehen gibt, nicht alle nach Herons Vorschrift gefunden werden. Es gelingt z. B. nicht die Grenzwerte $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ (S. 316) zu finden. Da ist nun ein sehr geistreicher Versuch gemacht worden, auf $\sqrt{3}$ eine Methode anzuwenden, welche allerdings in viel späterer Zeit den Namen der Methode des doppelten falschen Ansatzes erhalten hat[2]). Wir werden im 33. Kapitel das Auftreten der Methode bei solchen Aufgaben kennen lernen, welche zu Gleichungen ersten Grades führen. Hier handelt es sich um eine quadratische Aufgabe, und Zweifel daran, ob bereits Archimed dieses Verfahren ersonnen haben kann, sind vollauf gerechtfertigt. Eine Stütze findet die Vermutung lediglich in der Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ erhalten werden.

Sei $\sqrt{a} = x$, und seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerte von der Art, daß $x_1 < x < x_2$. Sei ferner $x^2 - x_1{}^2 = d_1$, $x_2{}^2 - x^2 = d_2$. Augen-

---

[1]) Heron III, 18—20. Vgl. P. Tannery, Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, Hist.-liter. Abtlg. pag. 13—15 und Curtze, Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist.-liter. Abtlg. pag. 113—120. [2]) G. Wertheim in Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Hist.-liter. Abtlg. pag. 1—3.

scheinlich ist $d_1 + d_2 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ und $d_1 x_2 + d_2 x_1 = x^2 x_2 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x^2 x_1 = (x_2 - x_1)(x^2 + x_1 x_2)$. Daraus folgt $\frac{d_1 x_2 + d_2 x_1}{d_1 + d_2} = \frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$, ein Ausdruck, der sich wegen $x_1^2 < x^2 < x_2^2$ als $> x_1$ und $< x_2$ erweist, welcher also als neuer Näherungswert für $\sqrt{a}$ benutzt werden kann.

Beispielsweise ist bei $a = 3$ leicht ersichtlich $x_1 = 1$, $d_1 = 2$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$ und der daraus folgende neue Näherungswert: $\frac{d_1 x_2 + d_2 x_1}{d_1 + d_2} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}$. Zweitens sei $x_1 = \frac{5}{3}$, $d_1 = \frac{2}{9}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$. Der neue Näherungswert wird $\frac{\frac{2}{9} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{2}{9} + 1} = \frac{19}{11}$. Drittens sei $x_1 = \frac{19}{11}$, $d_1 = \frac{2}{121}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$. Der neue Näherungswert ist $\frac{\frac{2}{121} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{19}{11}}{\frac{2}{121} + 1} = \frac{71}{41}$. Viertens endlich führt $x_1 = \frac{71}{41}$, $d_1 = \frac{2}{1681}$; $x_2 = 2$, $d_2 = 1$ zu dem archimedischen Näherungswerte $\frac{\frac{2}{1681} \cdot 2 + 1 \cdot \frac{71}{41}}{\frac{2}{1681} + 1} = \frac{245}{153}$.

Ist dagegen $\sqrt{a} = x < x_1 < x_2$, so kann unter der Annahme $x_1^2 - x^2 = d_1$, $x_2^2 - x^2 = d_2$ ein neuer Näherungswert für $\sqrt{a}$ als $\frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2} < \frac{x_1^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ d. h. $< x_1 < x_2$ ermittelt werden, von welchem man auch noch behaupten kann, er sei $> x$. Es ist nämlich $\frac{x^2 + x_1 x_2}{x_1 + x_2} > x$ insofern $x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x + x^2 = (x_1 - x)(x_2 - x) > 0$, wovon die Wahrheit einleuchtet. Ist neuerdings $a = 3$, $x_2 = 2$, aber $x_1 = \frac{7}{4}$, so berechnen sich die vier aufeinanderfolgenden Näherungswerte folgendermaßen:

$$x_1 = \frac{7}{4},\ d_1 = \frac{1}{16};\quad x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{16} \cdot 2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{26}{15}$$

$$x_1 = \frac{26}{15},\ d_1 = \frac{1}{225};\quad x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{26}{15} - \frac{1}{225} \cdot 2}{1 - \frac{1}{225}} = \frac{97}{56}$$

$$x_1 = \frac{97}{56},\ d_1 = \frac{1}{3136};\quad x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{97}{56} - \frac{1}{3136} \cdot 2}{1 - \frac{1}{3136}} = \frac{362}{209}$$

$$x_1 = \frac{362}{209},\ d_1 = \frac{1}{43681};\ x_2 = 2,\ d_2 = 1;\ \frac{d_2 x_1 - d_1 x_2}{d_2 - d_1} = \frac{1 \cdot \frac{362}{209} - \frac{1}{43681} \cdot 2}{1 - \frac{1}{43681}} = \frac{1351}{780}$$

Der obere archimedische Näherungswert ist damit gleichfalls gefunden.

Nun wird aber eine ähnliche Benutzung zweier falschen Ansätze angewandt, um eine angenäherte Kubikwurzel zu finden. Sei $\sqrt[3]{a} = x$ und seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerte von der Eigenschaft $x_1 < x < x_2$. Hier nennen wir $x^3 - x_1^3 = d_1$, $x_2^3 - x^3 = d_2$. Alsdann ist $\frac{x_2^2 d_1 + x_1^2 d_2}{x_2 d_1 + x_1 d_2}$ ein neuer Näherungswert. Soll $\sqrt[3]{100}$ ermittelt werden, so ist $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, weil $64 < 100 < 125$ und zugleich ist $100 - 64 = 36 = d_1$, $125 - 100 = 25 = d_2$. Da hier $x_2 = x_1 + 1$ angenommen ist, so wird der Näherungswert in die Gestalt $x_1 + \frac{x_2 d_1}{x_2 d_1 + x_1 d_2}$ gebracht werden können, in Zahlen also $4 + \frac{5 \cdot 36}{5 \cdot 36 + 4 \cdot 25} = 4 + \frac{180}{280} = 4 + \frac{9}{14}$ und das Merkwürdige ist nun, daß genau dieser Wert genau nach der angegebenen Formel $4 + \frac{5 \cdot 36}{180 + 100}$ ausgerechnet im 3. Buche der Metrika vorkömmt[1]). Da kann kaum mehr gezweifelt werden, Heron habe sich die gleichen Zahlen auch als Übersetzung der gleichen Buchstabenformel, welche hier vermutet worden ist, verschafft.

Wir kehren nach dieser Zwischenbemerkung, welche dadurch veranlaßt wurde, daß wir die Ausziehung der Kubikwurzel bei Heron von der der Quadratwurzel nicht trennen wollten, zum 1. Buche der Vermessungslehre, und zwar zur heronischen Dreiecksformel zurück. Heron, sagten wir, wendet sie auf das Dreieck mit den Seiten 7, 8, 9 an. Er läßt dem Zahlenbeispiele den Beweis der Formel folgen[2]). Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ erweist sich (Fig. 64) bei Einbeschreibung des Kreises mit dem Halbmesser $\eta\varepsilon$ als gleich dem Doppelten eines Dreiecks mit diesem Halbmesser als Höhe und dem halben Umfang von $\alpha\beta\gamma$ oder mit $\gamma\theta$ als Grundlinie (sofern $\beta\theta = \alpha\delta$ genommen ist). Nun wird die Hilfskonstruktion $\eta\lambda$ senkrecht zu $\eta\gamma$, $\beta\lambda$ senkrecht zu $\beta\gamma$ und $\gamma\lambda$ von dem Durchschnittspunkte λ jener beiden Senkrechten nach γ vollzogen, nebst den Halbmessern $\eta\delta$, $\eta\varepsilon$, $\eta\zeta$ des eingeschriebenen Kreises und den Verbindungsgeraden $\eta\alpha$, $\eta\beta$, $\eta\gamma$ seines Mittelpunktes mit den Endpunkten des Dreiecks. Weil $\sphericalangle\, \gamma\eta\lambda = \gamma\beta\lambda = 90^0$, muß $\gamma\lambda$ der Durchmesser des umschriebenen Kreises für die beiden Dreiecke $\gamma\eta\lambda$ und $\gamma\beta\lambda$ sein, d. h. $\gamma\eta\beta\lambda$ ist ein Sehnenviereck und $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta + \gamma\lambda\beta = 180^0$. Aber $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta = \gamma\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\beta = \frac{\zeta\eta\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\eta\delta}{2}$ und

[1]) Heron III, 178. [2]) Ebenda III, 20—25.

addiert man dann noch $\alpha\eta\delta = \frac{\delta\eta\zeta}{2}$ und berücksichtigt $\zeta\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\delta + \delta\eta\zeta = 360^0$, so zeigt sich auch $\sphericalangle\, \gamma\eta\beta + \alpha\eta\delta = 180^0$, folglich $\sphericalangle\, \gamma\lambda\beta = \alpha\eta\delta$; ferner ist

$$\sphericalangle\, \gamma\beta\lambda = 90^0 = \alpha\delta\eta,$$

folglich sind die Dreiecke $\beta\gamma\lambda$, $\delta\alpha\eta$ ähnlich und $\beta\gamma : \beta\lambda = \delta\alpha : \delta\eta$ oder, was dasselbe ist, $= \beta\theta : \eta\varepsilon$, somit

$$\frac{\gamma\beta}{\beta\theta} = \frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon}.$$

Aus der leicht ersichtlichen Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\lambda\varkappa$, $\varepsilon\eta\varkappa$ folgt auch

$$\frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}, \text{ mithin } \frac{\gamma\beta}{\beta\theta} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}.$$

Durch Addition der Einheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens entsteht

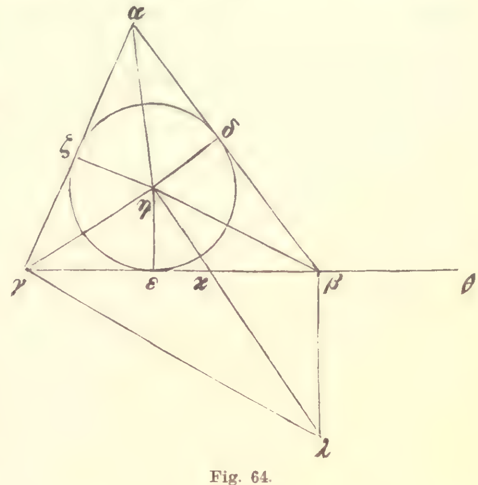


Fig. 64.

$\frac{\gamma\theta}{\beta\theta} = \frac{\varepsilon\beta}{\varepsilon\varkappa}$, und daraus folgt $\frac{\gamma\theta^2}{\gamma\theta \cdot \beta\theta} = \frac{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta}{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\varkappa}$ oder $\frac{\gamma\theta^2}{\gamma\theta \cdot \beta\theta} = \frac{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta}{\eta\varepsilon^2}$, und daraus $(\gamma\theta \cdot \eta\varepsilon)^2 = \gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta \cdot \beta\theta \cdot \gamma\theta$. Nun war der Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ (als des Doppelten des Dreiecks $\gamma\eta\theta) = 2 \cdot \frac{\gamma\theta \cdot \eta\varepsilon}{2} = \gamma\theta \cdot \eta\varepsilon$, und somit ist, wenn man die Fläche des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch Δ bezeichnet, $\Delta = \sqrt{\gamma\varepsilon \cdot \varepsilon\beta \cdot \beta\theta \cdot \gamma\theta}$. Setzt man endlich $\alpha\beta = c$, $\alpha\gamma = b$, $\beta\gamma = a$, so lassen die Faktoren unter dem Wurzelzeichen sich leicht anders ordnen und schreiben, so daß

$$\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}$$

entsteht, eben die Formel, die Herons Namen führt. Nach geliefertem Beweise erprobt Heron die Formel nochmals an dem Dreiecke mit den Seiten 13, 14, 15 und erhält $\Delta = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$. Noch ein weiteres Dreieck ist das aus den Seiten 8, 10, 12. Um dessen Fläche zu erhalten[1]) wird die Höhe auf die Seite $\beta\gamma = 10$ von α aus gezogen und der an die kleinere Seite $\alpha\beta = 8$ angrenzende Abschnitt $\beta\delta$ der Grundlinie dadurch gefunden, daß man von $2\beta\gamma \cdot \beta\delta = 20$ ausgeht. Es ist nämlich $\alpha\gamma^2 + 2\beta\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2$, also $2\beta\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 - \alpha\gamma^2 = 64 + 100 - 144 = 20$, was allerdings nicht besonders ausgerechnet ist. Vermöge $\beta\gamma = 10$ zeigt sich $\beta\delta = 1$, $\beta\delta^2 = 1$

[1]) Heron III, 26.

und $\alpha\delta^2 = \alpha\beta^2 - \beta\delta^2 = 64 - 1 = 63$, $\alpha\delta = \sqrt{63} = 7\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, was offenbar mittels $\sqrt{64-1} = 8 - \frac{1}{16}$ gefunden ist. Die Fläche ist aber $\frac{\alpha\delta \cdot \beta\gamma}{2} = 5\sqrt{63} = 39\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$. Wir können unseren Bericht unmöglich in gleicher Ausführlichkeit fortsetzen. Nach dem Dreiecke kommt das Viereck an die Reihe und zwar, da das Rechteck gleich am Anfange des Buches besprochen war, das rechtwinklige Paralleltrapez, dann das gleichschenklige, das spitzwinklige und das stumpfwinklige. Unter den letzteren beiden Namen wird verstanden, daß, wenn eine der beiden parallelen Seiten als Grundlinie dient, beide Winkel an der Grundlinie spitz, oder einer spitz und einer stumpf sein sollen. Als Rhombus wird das gleichseitige, als Rhomboïd das ungleichseitige Parallelogramm bezeichnet. Zu ihrer Berechnung ist die Kenntnis der Diagonale erforderlich, welche aber hier als Diameter benannt ist (S. 218), während nur wenig später das Wort Diagonale gebraucht ist[1]). Zuletzt erscheinen Vierecke, in welchen keine Seite einer anderen parallel läuft. Der nächste Gegenstand der Untersuchung ist der Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke vom Dreieck bis zum Zwölfeck, welches letztere sich dem Kreise nähert[2]). Heißt a_n die Seite, F_n die Fläche des regelmäßigen Vielecks und c_n eine von einem Vieleck zum anderen sich ändernde Zahl, so findet Heron $F_n = c_n a_n^2$ und insbesondere:

$$F_5 = \frac{5}{3} a_5^2 \qquad F_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a_3^2.$$

Der Fünfecksinhalt stammt, wie Heron sagt, daher, daß

$$\sqrt{5} \sim \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$

gesetzt wurde. Ein genauerer Wert sei auffindbar, wenn ein genauerer Wert von $\sqrt{5}$ in Rechnung gezogen werde.

$$F_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a_6^2,$$

weil das Sechseck das Sechsfache eines über a_6 beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist.

Zur Auffindung der Siebenecksseite führt der ausgesprochene aber unbewiesene Hilfssatz, sie sei nahezu gleich der Senkrechten vom Kreismittelpunkt auf die Sechsecksseite. Das entspricht rechnungsmäßig der Gleichung $a_7^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$, $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Man könnte auch $r\sqrt{3} = a_3$

[1]) Vgl. Heron III, 36 lin. 12 mit 46 lin. 10. [2]) Heron III, 46 ἑξῆς δὲ περὶ τῶν ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων εὐθυγράμμων γράψομεν ἄχρι τοῦ δωδεκαγώνου, ἐπειδὴ τοῦτο συνεγγίζει μᾶλλον τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ.

benutzen und $a_7 = \frac{1}{2} a_3$ schreiben, eine, wie wir im 34. Kapitel sehen werden, den Arabern geläufige Ausdrucksweise, deren sich Heron jedoch nicht bedient. Da Heron die Näherungsformel $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ nicht begründet, so muß sie vor ihm zur Genüge bekannt gewesen sein. Wir weisen nur mit einiger Schüchternheit auf Archimeds Siebeneck im Kreise (S. 307) als mögliche Quelle hin. Rechnungsmäßig kleidet sich der Satz, die a_7 sei die Senkrechte aus dem Kreismittelpunkte auf a_6, wie wir schon sagten, in die Gleichung $a_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Heron schreibt dafür $a_7 = \frac{7}{8} r$, und dieses entspricht der Annahme $\sqrt{3} \sim 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{49}{16}}$. Dann wird weiter $\sqrt{207} = 14\frac{1}{3}$ angenommen und daraus schließlich gefolgert

$$F_7 = \frac{43}{12} a_7^2.$$

Zur Auffindung von F_8 bedient sich Heron der Fig. 64a. K ist der Mittelpunkt des Umkreises, $K\Lambda$ ist senkrecht zu ΔE gezogen und ΔM bildet mit ΔK einen Winkel von der Größe $\frac{1}{4}$ Rechter. Ebenso groß ist $\angle \Delta K \Lambda$ und mithin $\angle M \Delta \Lambda = \frac{1}{2}$ Rechter nebst $\angle M \Lambda \Delta = 1$ Rechter, woraus $\angle \Delta M \Lambda = M \Delta \Lambda$ und $\Delta \Lambda = \Lambda M$, $\Delta M^2 = 2 M \Lambda^2$, $\Delta M = M\Lambda \sqrt{2}$ folgt, wofür $\frac{17}{12} M\Lambda$ gesetzt wird. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\Delta M K$ hat man also $\frac{KM}{M\Lambda} = \frac{17}{12}$, $\frac{KM + M\Lambda}{M\Lambda} = \frac{K\Lambda}{M\Lambda} = \frac{K\Lambda}{\Delta\Lambda} = \frac{17+12}{12} = \frac{29}{12}$ und $K\Lambda = \frac{29}{12}\Delta\Lambda = \frac{29}{24}\Delta E$. Ferner sieht man $\frac{K\Lambda \cdot \Delta E}{2} = \frac{29}{48}\Delta E^2$ als Fläche des Dreiecks $\Delta E K$, welches $\frac{F_8}{8}$ ist. Somit zeigt sich

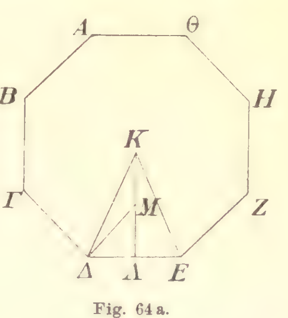


Fig. 64a.

$$F_8 = \frac{29}{6} a_8^2.$$

Die Berechnung von F_9 geht von der der Schrift über die Geraden im Kreise, also Hipparch, entnommenen Formel aus, $3a_9$ sei annähernd der Durchmesser des Umkreises. Daraus folgt unter abermaliger Anwendung von $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$, daß

$$F_9 = \frac{51}{8} a_9^2.$$

Der Näherungswert $\sqrt{2} \sim \frac{17}{12}$ ist offenbar gewonnen, indem zuerst $\sqrt{2} \sim 1 + \frac{1}{2}$, dann $\sqrt{2} \sim \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$ gesetzt wurde.

Ausgehend von bei Berechnung von F_5 gewonnenen Werten gelangt Heron zu

$$F_{10} = \frac{15}{2} a_{10}^2.$$

Sei (Fig. 64b) $ZH = a_{11}$, $Z\Xi$ Durchmesser, NH Halbmesser des Umkreises. Die Dreiecke ZHN, ΞHN haben bei gleichen Grundlinien ZN, ΞN die gemeinschaftliche Spitze in H, sind also einander gleich, und ihre Summe $ZH\Xi$ ist das Doppelte des Dreiecks ZNH, welches selbst $\frac{F_{11}}{11}$ ist. Heron führt diesen Beweis nicht, zieht nicht einmal die Hilfslinie NH, sondern setzt sofort das Dreieck $ZH\Xi = \frac{2}{11} F_{11}$ und bemerkt, es sei rechtwinklig, weil $\angle ZH\Xi$ ein Winkel im Halbkreise sei. Nun entnimmt er wieder der Schrift über die Geraden im Kreise

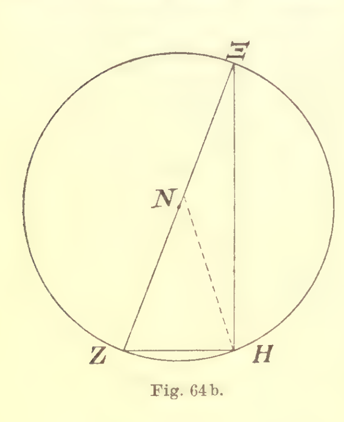


Fig. 64b.

$\Xi Z = \frac{25}{7} a_{11}$. Ist dieses richtig, so ist $\Xi H = \sqrt{\left(\frac{25}{7} a_{11}\right)^2 - a_{11}^2} = a_{11} \sqrt{\frac{576}{49}} = \frac{24}{7} a_{11}$ und das Dreieck $ZH\Xi$ ist $\frac{12}{7} a_{11}^2$ sowie

$$F_{11} = \frac{66}{7} a_{11}^2.$$

Bei dem Nachweise von

$$F_{12} = \frac{45}{4} a_{12}^2$$

ist wieder geometrisch verfahren ohne auf Hipparch zurückzugreifen. Die dabei auftretende $\sqrt{3}$ ist ebenso wie bei der Aufsuchung von F_7 durch $\frac{7}{4}$ ersetzt. Wir erkennen also in dieser Gruppe von Sätzen die wiederholte Anwendung von

$$\sqrt{2} \sim \frac{17}{12} \qquad \sqrt{3} \sim \frac{7}{4}.$$

Auf die geradlinig begrenzten Figuren folgen die mit gekrümmter Begrenzung, bei welchen Heron ausdrücklich erklärt, er bediene sich von Archimed herrührender Sätze; insbesondere wird $\pi = \frac{22}{7}$ fortwährend benutzt. Den Kreisabschnitt, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, und welcher die Sehne s als Grundlinie und Höhe h besitzt,

maßen die Alten ziemlich ungenau[1]), indem sie seinen Inhalt als $\frac{s+h}{2} \cdot s$ angaben. Heron fügt hinzu, diese Formel sei richtig beim Halbkreise, sofern $\pi = 3$, und davon hätten die Alten Gebrauch gemacht und die Formel auch noch verallgemeinert. In der Tat ist bei $\pi = 3$ die Fläche des Halbkreises $\frac{3r^2}{2} = \frac{2r+r}{2} \cdot r$, während $2r = s$, $r = h$ ist. Ein etwas genaueres Ergebnis fand man, fährt Heron fort, mittels der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot s + \frac{1}{14}\left(\frac{s}{2}\right)^2$, und diese passe auf den Halbkreis bei $\pi = 3\frac{1}{7}$. In der Tat ist dann die Fläche des Halbkreises $\frac{3\frac{1}{7}r^2}{2} = \frac{2r+r}{2} \cdot r + \frac{1}{14}\left(\frac{2r}{2}\right)^2$. Als dritte genauere Methode lehrt Heron ein der archimedischen Parabelquadratur (S. 304) nachgebildetes Verfahren, welches dahin mündet, daß man dem Kreisabschnitte ein gleichschenkliges Dreieck einzeichnet, welches sich dann zu dem Abschnitte nahezu wie $3:4$ verhält. Bei dieser Gelegenheit nennt Heron die Abhandlung Archimeds unter dem sonst nicht überlieferten Namen Ephodikon[2]). Ist der zu messende Kreisabschnitt größer als der Halbkreis, so wird er zum ganzen Kreise durch einen anderen Kreisabschnitt ergänzt, der als kleiner als der Halbkreis nach dem soeben gelehrten Verfahren berechnet wird; die ganze Kreisfläche kennt man auch; man hat also das Gesuchte als Unterschied zweier bekannter Größen. Heron lehrt weiter unter fortwährender Nennung des Archimed, als desjenigen, dem er folge, die Messung der Ellipse, der Parabel, der Oberfläche des Zylinders, des Kegels, der Kugel, des Kugelabschnittes. Er schließt das Buch mit der Vorschrift, eine unregelmäßig begrenzte ebene Figur durch eine nahezu ihr gleiche geradlinig begrenzte Figur zu ersetzen, deren Fläche man berechnen könne, eine unregelmäßig gekrümmte Oberfläche aber, wie z. B. die einer Statue, mit dünnem Papyrus zu belegen, welchen man loszulösen und eben auszustrecken vermöge, worauf er als unregelmäßig begrenzte ebene Figur gemessen werde.

Das 2. Buch wendet sich dem Rauminhalte der Körper zu. Die in Anwendung tretenden Formeln sind zumeist als von Archimed herrührend bezeichnet. Es handelt sich um gerade Zylinder, um Kegel, um schiefe Zylinder, um parallelepipedische Körper, um Prismen, um Pyramiden, um Pyramidenstumpfe, um Kegelstumpfe, um Kugeln,

---

[1]) Heron III, 72 *τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἔλαττον ἡμικυκλίου οἱ μὲν ἀρχαῖοι ἀμελέστερον ἐμέτρουν.* [2]) Heron III, 80 lin. 12. Vgl. auch W. Schmidt, Archimedes' Ephodikon in der Bibliotheca Mathematica 3. Folge Bd I, 13 bis 14 (1900).

um Kugelabschnitte, um spirische Körper (S. 242), um Zylinderhufe, um die fünf regelmäßigen Körper Platons. Bei Gelegenheit der spirischen Körper ist von einer Schrift des Dionysodor[1]) über die Spiren die Rede. Dieser aber ist, wie wir vermuten, Herons Zeitgenosse und wird uns im 20. Kapitel wieder begegnen. Den Schluß des 2. Buches bildet die Ausmessung des Körperinhaltes unregelmäßig begrenzter Gebilde nach einer Methode, welche, wie einige erzählen, von Archimed herrühre[2]). Bewegliche Körper werden in ein bis zum Rande mit Wasser gefülltes Gefäß geworfen, um Wasser zum Auslaufen zu bringen, dessen Menge man an dem Höhenunterschied der nach Herausziehung des Körpers noch übrigen Flüssigkeit erkennt. Unbewegliches wird durch einen Überzug von Wachs oder Lehm in ausmeßbare parallelepipedische Gestalt gebracht, und ebenso verfährt man mit dem abgekratzten Überzug, um den Unterschied zweier bekannter Körperinhalte als Antwort auf die gestellte Frage bilden zu können.

Das 3. Buch ist das von den Teilungen. Wir wissen von einer fast genau ebenso betitelten Schrift des Euklid (S. 287), von welcher aber die Bearbeitung Herons wesentlich abweicht. Die Aufgaben sind zwar vielfach die gleichen, z. B. ein gegebenes Dreieck durch eine der Grundlinie parallele Gerade in einem gegebenen Verhältnisse zu teilen, aber während Euklid sich mit allgemeinen Konstruktionsvorschriften begnügte, ist Heron bestrebt, mit den zahlenmäßig gegebenen Längen der einzelnen Dreiecksseiten zu rechnen. Er sucht sogar wie weit von der Dreiecksspitze entfernt die gesuchten Durchschnittspunkte der verlangten Parallelen mit beiden Dreiecksseiten sind, weil, wie er ausdrücklich hervorhebt[3]), es auf dem Felde wegen der Unregelmäßigkeiten des Bodens schwierig sei eine Parallele zu ziehen. Nur wo eine Rechnung anzustellen ihm nicht gelingt, begnügt er sich mit der Angabe von Konstruktionen teilweise auf andere Schriftsteller verweisend. In diesem Zusammenhange erscheint die oben (S. 364) von uns erwähnte Berufung auf den Raumschnitt[4]). Ferner geht Heron auch in der Beziehung über Euklid hinaus, daß er nach den Teilungen ebener Figuren auch solche von gekrümmten Oberflächen und solche von Körpern behandelt. So soll z. B. eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene geteilt werden, so daß zwischen der an der Spitze losgetrennten kleineren Pyramide und der ursprünglichen ein gegebenes Zahlenverhältnis obwalte. Diese Aufgabe führt[5]) zur näherungsweisen Ausziehung der $\sqrt[3]{100}$, von welcher

[1]) Heron III, 128 lin. 3. [2]) Ebenda III, 138. [3]) Ebenda III, 144 lin. 15 bis 16. [4]) Ebenda III, 162 lin. 2 und 166 lin. 14. [5]) Ebenda III, 178 lin. 3—16.

wir oben (S. 374) geredet haben. Den Schluß des Buches bildet die archimedische Aufgabe der Teilung einer Kugel bei gegebenem Verhältnisse der beiden durch den Schnitt gebildeten Kugelabschnitte.

Wollen wir nach dieser Inhaltsangabe der Vermessungslehre noch in Kürze eine Kennzeichnung des Werkes geben, so dürfen wir sagen, es seien Elemente der rechnenden Geometrie dort gelehrt. Verfasser der ersten derartigen Schrift war Heron wohl kaum, so wenig als Euklid der Verfasser der ersten Elemente der konstruierenden Geometrie war. Nur hat Euklid einen Proklus gefunden, welcher uns über die Vorgeschichte seines Werkes belehrt, während wir von einem Kommentare zu Heron nichts wissen. Dagegen sagt uns die übereinstimmende Überlieferung aller Völker, daß die praktische Feldmessung der eigentlichen wissenschaftlichen Geometrie, der theoretischen Raumlehre, vorausging und diese erfinden ließ. Mag auch in den griechischen Staaten im engeren Sinne des Wortes die Geometrie häufiger ihrer theoretischen als ihrer praktischen Richtung nach behandelt worden sein, wie schon daraus hervorgeht, daß das Wort Geodäsie überhaupt erst seit der Zeit des Aristoteles (S. 252) in der griechischen Literatur nachgewiesen werden kann, Herons Tätigkeit verweist nach Alexandria, auf ägyptischen Boden, wo seit Jahrtausenden die Kunst der Feldmessung blühte, wo die Harpedonapten, Seilspanner, wie der alte Grieche sie nannte (S. 104), ihr Handwerk übten, an welches wir uns bald erinnern müssen. Auch Euklids Aufenthalt in Ägypten ist verbürgt, und eine Spur feldmesserischer Vorschriften fanden wir in seiner Optik (S. 294). Die ägyptischen Feldmesser müssen dem erhaltenden Wesen ägyptischer Bildung entsprechend gewisse Vorschriften, wie man zu verfahren habe, mündlich oder wahrscheinlicher schriftlich unter sich vererbt haben. Ihr Erbe muß auf Heron gelangt sein. Ohne Zweifel hat er es verstanden dieses Erbe wuchern zu lassen. Ihm, wenn er nicht in Dikaearch und Eratosthenes Vorgänger hatte (S. 257), ist vielleicht die Erfindung der Dioptra zuzuschreiben, während man früher mit mangelhafteren Vorrichtungen sich begnügte, aber Vorrichtungen hatte man, z. B. den sogenannten Stern, und deren Gebrauch muß, wir wiederholen es, eine ältere mündlich oder schriftlich überlieferte Feldmeßkunst gelehrt haben. Der letzte geodätische Schriftsteller blieb Heron allerdings für lange Zeit. Euklid und Heron waren nachgerade ihrer Persönlichkeit beinahe entkleidet worden. Sie waren Titel von Schulbüchern geworden, welche auch zu Völkern drangen, die in anderen Sprachen als in der griechischen dachten und redeten. Mochten in diesen „Euklid" der Theoretiker, in diesen „Heron" der Praktiker Dinge eingedrungen sein, an welche der lebende Euklid, der lebende Heron nie gedacht hatte,

für die Nachkommen blieb es der „Euklid", der „Heron". Ja, es ist gar nicht unmöglich, daß bei derartigem nebeneinander hergehendem Gebrauche aus dem „Euklid" dieses oder jenes, z. B. Definitionen, in den „Heron" überging; auch das Entgegengesetzte wäre möglich, wenn es gleich an Beispielen dafür uns fehlt, aber die heronische Dreiecksformel etwa hätte samt ihrem Beweise ganz gut in eine Handschrift des Euklid eindringen können.

Gehen wir nun zur Feldmeßkunst des Heron über, wie sie in der Abhandlung über die Dioptra[1]) beschrieben ist, und beginnen wir mit der Schilderung der Dioptra selbst. Sie bestand aus einem 4 Ellen langen Lineal, welches an beiden Enden Plättchen zum Hindurchvisieren, oder, wie man heute sagt, Dioptervorrichtungen trug. Sie ruhte auf einer kreisrunden Scheibe, auf welcher sie in Drehung versetzt werden konnte, und eine vertikale Drehung war mit der Scheibe auf einem die ganze Vorrichtung tragenden Fuße ermöglicht. Wir dürfen in der Dioptra den Keim des Theodoliths der neueren Feldmeßkunst erkennen. Sie diente zum Abstecken von Geraden in den mannigfachsten Richtungen, wenn auch eine Winkelmessung auf dem Felde nicht stattfand. Um eine Senkrechte zu einer gegebenen Richtung sich zu verschaffen, dienten senkrecht zueinander eingeritzte Gerade auf der Dioptrascheibe, von deren ersten bis zur zweiten die Dioptra gedreht werden mußte, um einen rechten Winkel zu erhalten. Den oben erwähnten vorheronischen Stern bildeten zwei in horizontaler Ebene sich rechtwinklig schneidende Lineale, also eine Art von Winkelkreuz. Die Vorrichtung zum Hindurchvisieren aber fehlte, und ebenso fehlten verschiedene Hilfsapparate, die mit der Dioptra in Verbindung standen. Bei ihr war die vertikale Stellung des Fußes verbürgt durch einen herabhängenden Bleisenkel, welcher längs einer auf dem Fuße eingeritzten Geraden seinen Verlauf nehmen mußte. Die Horizontalität der Scheibe entnahm man einer Wasserwage. Statt beider mußten bei dem Sterne Bleisenkel dienen, welche an den 4 Enden des Winkelkreuzes hingen, welche aber, wie Heron tadelnd hervorhebt, namentlich bei einigermaßen stark gehendem Winde, nicht leicht zur Ruhe kamen und somit die Brauchbarkeit des Apparates, welche von der gesicherten richtigen Aufstellung untrennbar ist, wesentlich verringerten. Mit Hilfe der Dioptra und abgeteilter selbst mit Bleisenkel versehener Signalstangen wurden die wichtigsten Aufgaben auf dem Felde gelöst. Nivellierungen; Ab-

[1]) Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ διόπτρας abgedruckt mit französischer Übersetzung von Vincent, mit den Anmerkungen von Venturi und Vincent in den *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* XIX, 2 (Paris 1858) und mit deutscher Übersetzung von Herm. Schöne in Heron III, 187 sqq.

steckung einer Geraden zwischen zwei Punkten, deren keiner von dem anderen aus gesehen werden kann; Bestimmung der Entfernung eines sichtbaren aber unzugänglichen Punktes; Auffindung der Breite eines Flusses, ohne ihn zu überschreiten; Auffindung der Entfernung zweier Punkte, die beide sichtbar, beide unzugänglich sind; Absteckung einer Senkrechten zu einer unzugänglichen Geraden in einem unzugänglichen Punkte derselben; Bestimmung der Höhe eines entfernten Punktes über dem Standorte des Beobachters; Aufnahme eines Feldes; Wiederherstellung der mit Ausnahme von 2 oder 3 durch Grenzsteine gesicherten Punkten verloren gegangenen Umfriedigung eines Feldstückes unter Anwendung des vorhandenen Planes: das dürften etwa die interessantesten Aufgaben sein, welche Heron in seiner Schrift von der Dioptra behandelt hat, bei späteren Aufgaben stets früher gelehrte Operationen benutzend, wodurch das Einheitliche dieser Abhandlung sich erweist.

Es würde zu weit führen, wollten wir genau schildern, in welcher Weise Heron jedesmal verfährt. Nur die beiden letztgenannten Aufgaben müssen aus besonderen Gründen hier zur Rede kommen. Die Aufnahme eines Feldes erfolgt durch Absteckung eines Rechtecks, welches 3 seiner Eckpunkte auf der Umgrenzung selbst besitzt. Die Seiten dieses Rechtecks werden nun freilich mit den Grenzen des Feldes nicht zusammentreffen, aber die zwischenliegenden Grenzstrecken bestimmen sich durch die senkrechten Entfernungen einzelner Punkte derselben von den Rechtecksseiten unter genauer Bemerkung derjenigen Punkte der Rechtecksseiten, in welche jene meist kleinen Senkrechten eintreffen. Der geschickte Feldmesser wird, nach Herons ausdrücklicher Vorschrift, es so einzurichten wissen, daß die Grenze zwischen zwei zur Bestimmung ihrer Endpunkte dienenden Senkrechten leidlich geradlinig aussieht. Wenn wir noch so vorsichtig uns davor hüten wollen, neue Gedanken in alte Methoden hineinzulesen, hier müssen wir ein bewußtes Verfahren mit rechtwinkligen Koordinaten erkennen. Nicht als ob wir behaupten wollten, Heron habe nach einem gemeinsamen Gesetze gesucht, welchem die vertikalen und horizontalen Entfernungen zu bestimmender Punkte von gegebenen Linien gehorchen, das tut nicht einmal die moderne Feldmeßkunst, welche sehr wohl empirische Linien von geometrischen Kurven zu unterscheiden weiß. Aber denken wir daran, daß Hipparch (S. 362) die Erde mit Koordinaten überzog, welche die Lage jedes Punktes derselben bestimmen sollten, daß dieser die Breite von dem Äquator, die Länge von dem Meridiane von Rhodos, mithin von ganz genau definierten Anfangslagen beginnen und messen ließ, so werden wir in Herons Verfahren die Wiederholung auf kleinerem Felde finden

von dem, was sein etwas älterer Zeitgenosse für die Erde in ihrer Gesamtoberfläche gelehrt hat, beide vielleicht abhängig von uralten Vorbildern, aber über jene hinausgehend. Wir erinnern daran, daß um 1400 die ägyptischen Bildhauer unter König Seti I. die mit Bildwerk zu versehenden Wände zunächst mit einem Netze kleiner Quadrate überzogen (S. 108). Das waren auch Koordinaten. Aber ob und wie Linien der beabsichtigten Figuren in diese Quadratchen hineinfielen, dürfte an sich unerheblich gewesen sein. Vermutlich sollten nur bei der Ausführung im großen dieselben Verhältnisse beibehalten werden, welche der Künstler in seiner Handskizze dem Augenmaße oder der Übung nach sich vorgezeichnet hatte. Jetzt entwarf Heron kleinere rechtwinklige Figuren zu bestimmtem Zwecke und wählte Zahl und Entfernung der Senkrechten in bewußter Beliebigkeit. Früher war es eine zufällige, jetzt eine absichtliche Bestimmung einzelner Punkte mittels senkrecht zueinander gezeichneter Strecken.

Nicht minder lehrreich ist für uns die Rückübertragung des gezeichneten Planes auf das Feld, wenn nur einige Punkte desselben gegeben sind. Erhalten seien (Fig. 65) die Grenzsteine α, β, deren Inschriften gestatten, sie auf dem Plane zu identifizieren; gesucht werden die beiden Hauptrichtungen auf dem Felde, welche zueinander senkrecht dem ganzen Plane als Grundlage dienen, so daß wenn z. B. $\alpha\gamma$ einer dieser Hauptrichtungen gleichlaufend und $\beta\delta$ zu ihr senkrecht wäre, die Längen $\alpha\delta$, $\beta\delta$ mit den Inschriften der beiden Grenzsteine in Einklang stehen.

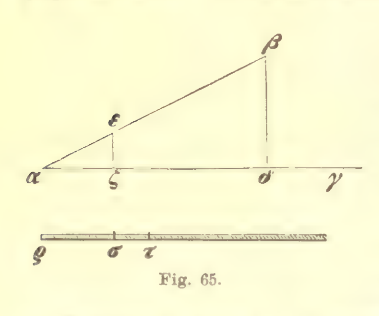


Fig. 65.

Jedenfalls kann man auf dem Felde $\alpha\beta$ abstecken und auf dieser Strecke einen Punkt ε ziemlich nahe bei α sich genau bemerken. Nun ist auf dem Plane das Dreieck $\alpha\beta\delta$ bekannt und vermöge der erfolgten Abmessung von $\alpha\beta$ auch das Verhältnis der Längen auf dem Plane zu denen auf dem Felde. Das Dreieckchen $\alpha\varepsilon\zeta$ muß dem $\alpha\beta\delta$ ähnlich sein, aus der gemessenen Länge $\alpha\varepsilon$ folgen daher durch Rechnung die Längen von $\alpha\zeta$ und $\zeta\varepsilon$, welche auf einem Seile $\varrho\sigma\tau$ durch Strichelchen angemerkt werden. Nun befestigt man dieses Seil mit ϱ in α, mit τ in ε und spannt es in σ an, so wird bei σ ein rechter Winkel entstehen und ζ gefunden sein und damit zugleich die Richtung $\alpha\zeta\delta\gamma$. Das geschichtlich Bedeutsame bei diesem Verfahren besteht darin, daß der rechte Winkel durch Anspannung eines Seiles gewonnen wird, welches mit zwei durch Striche oder Knoten bezeichneten Stellen an zwei Pflöcken im Boden befestigt wurde. Das ist ja nichts anderes als die ägyp-

tische Seilspannung (S. 104—106) bei der Grundsteinlegung der Tempel, ein Verfahren, welches, wie wir wissen, vielleicht schon zur Zeit des Königs Amenemhat I. um das Jahr 2300 nicht wesentlich anders geübt worden war als 237 bei der Gründung des Tempels von Edfu. Damit gewinnt aber auch die Vermutung einigen Halt: im Jahre 237 werde man etwa so verfahren sein, wie im ersten vorchristlichen Jahrhunderte, und das letztere uns genau bekannte Verfahren sei mit einigen Abänderungen, wie wir früher auszusprechen wagten, in ältester Zeit bereits zur Erlangung rechter Winkel benutzt worden. Natürlich können die damals angenommenen Zahlen für die gegenseitigen Entfernungen der drei Knoten hier, wo es sich um Herstellung eines einem bestimmten rechtwinkligen Dreiecke ähnlichen Dreiecks handelt, nicht zur Bestätigung kommen. Noch eine Veränderung ergab sich, wie wir finden, im Laufe der Jahrhunderte. Demokritus nannte die Seilspanner Harpedonapten, das Seil selbst also Harpedon mit einem Worte, dessen Klang schon den ägyptischen Ursprung verrät. Zu Herons Zeit führte das aus Binsen geflochtene Seil den griechischen Namen Schoinion und wurde, wie es in einer Heron zugeschriebenen Schrift heißt[1]), abwechselnd mit dem Rohre, Kalamos, zu Messungen benutzt. Wir bemerken hierzu beiläufig, daß *κάλαμος* und das dem *σχοινίον* nahe verwandte *σχοῖνος* neben der allgemeinen Bedeutung Meßstab und Meßschnur auch die besonderer und zwar untereinander verschiedener Maße besitzen.

Wir haben noch bei einem Paragraphen der Schrift über die Dioptra zu verweilen, der den Beweis für die sogenannte heronische Dreiecksformel liefert und ganz genau mit der entsprechenden Stelle der Vermessungslehre[2]) übereinstimmt. Wir stehen hier einer ganz ähnlichen Erscheinung gegenüber wie bei der Einschaltung zweier mittleren geometrischen Proportionalen zwischen zwei gegebene Strecken. Heron hat sein Verfahren sowohl der Mechanik als der Vorschrift zur Anfertigung von Geschützen einverleibt, und Pappus hat uns sein Erfinderrecht ausdrücklich bestätigt. Für unser Gefühl, das betonen wir jetzt nachträglich, war jene Bestätigung überflüssig. Man kann wohl einen wichtigen Satz in zwei verschiedenen Werken zur Anwendung bringen, aber man verbindet nicht an beiden Stellen mit dem Satze auch seinen Beweis, wenn nicht ein gewisses Selbstgefühl uns dazu treibt. Ebenso beurteilen wir, wo uns zufällig keine Bestätigung durch einen Dritten vorliegt, die wiederholte Mitteilung der Formel für den Dreiecksinhalt samt ihrem Beweise. Sie ist und bleibt für uns die heronische Dreiecksformel, benannt nach ihrem geistvollen Erfinder.

[1]) Heron (ed. Hultsch) II, 43. [2]) Vgl. Heron III, 280 sqq. mit 20 sqq.

19. Kapitel.

Heron von Alexandria. (Fortsetzung.)

Von der Abhandlung über die Dioptra wenden wir uns zu einem raschen Überblick über anderes, was von Zeugen, deren Zuverlässigkeit unbestritten ist, unserem Heron zugeschrieben wird. Der erste Zeuge ist Proklus, der in seinen Erläuterungen zu Euklids Elementen zwei Beweise als von Heron stammend anführt[1]), einen Beweis des Satzes, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist und einen solchen des Satzes, daß wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten stückweise übereinstimmen, in der dritten aber nicht, der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel in dem Dreiecke der größere sein wird, in welchem die genannte Seite die größere ist. Der zweite Zeuge ist Al Nairîzî[2]), der gleichfalls Erläuterungen zu Euklids Elementen verfaßte und darin vielfach auf Heron sich beruft. Diese Berufung findet allerdings für die beiden durch Proklus überlieferten Beweise nicht statt[3]), deren ersten Al Nairîzî ohne Urhebernamen wiedergibt und den zweiten mit der Bemerkung, er wisse nicht, von wem der Beweis herrühre, aber dadurch verlieren die anderen Zitate nicht an Wert. Es geht aus dem Mangel an Übereinstimmung, der sich vielfach auch darin äußert, daß Proklus keinen Urheber nennt, wo der Araber sich auf Heron beruft, nur hervor, daß beide nicht nach der gleichen Vorlage arbeiteten. Wir heben nur weniges hervor. Nach dem Berichte des Al Nairîzî[4]) erkannte Heron, daß bei dem Euklidischen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse und die Verbindungsgeraden der beiden anderen Dreiecksspitzen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten der über den beiden Katheten nach außen gezeichneten Quadrate einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Heron bewies[5]), daß von jedem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte zwei gleiche Berührungslinien an den Kreis gezogen werden können. Heron dehnte den Satz, daß der Peripheriewinkel die Hälfte des Zentriwinkels auf gleichem Bogen sei, auf stumpfe Peripheriewinkel aus[6]) und bewies mit dessen Hilfe den Satz, daß im Sehnenviereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen. Heron hat den Satz aus-

---

[1]) Proklus ed. Friedlein pag. 323 und 346. [2]) Anaritii in *decem libros priores Elementorum Euclidis* ed. Max Curtze. Leipzig 1899. [3]) Anaritius pag. 58 und 62. [4]) Ebenda pag. 78. [5]) Ebenda pag. 130. [6]) Ebenda pag. 130 bis 133.

gesprochen[1]), jedes regelmäßige Vieleck besitze einen von allen Eckpunkten gleich weit entfernten Mittelpunkt, der zugleich Mittelpunkt des Umkreises und des Innenkreises des Vielecks sei. Heron behauptet[2]), die Halbierende eines Winkels eines regelmäßigen Vielecks halbiere zugleich auch den gegenüberliegenden Winkel, und alle diese Winkelhalbierenden schnitten sich im gleichen Punkte. Die damit ausgesprochene Abpaarung der Winkel zeigt, daß Heron ausschließlich vom $2n$-Eck redete, und diese Einschränkung bestätigt sich mittelbar dadurch, daß gleich darauf[3]) der Satz Euklids erwähnt ist, im regelmäßigen $2n + 1$ Eck[4]) stünden die Winkelhalbierenden auf den gegenüberliegenden Seiten senkrecht, und auch diese Winkelhalbierenden besäßen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt. Wo freilich dieser Euklidische Satz sich vorfand ist heute unbekannt. Ebensowenig weiß man, wo Euklid, wo Archimed eine Definition von homogenen Größen gegeben haben mögen, welche Heron dahin erläuterte[5]), homogene Größen seien Größen derselben Gattung, von denen die eine durch Vervielfachung über die andere hinauswachsen könne, während z. B. eine Strecke selbst ins Unendliche vervielfacht niemals größer als eine Fläche werden könne. Ganz besonders möchten wir aber hervorheben, daß Heron die Verfahren kannte, welche in lateinischer Übersetzung *dissolutio* und *compositio* heißen[6]), und welche wir Klammerauflösung und Absonderung nennen, d. h. daß er wußte, man sei berechtigt $6(2+3+5) = 6 \cdot 10 = 60$ und umgekehrt $10 \cdot 10 = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 7 = 30 + 70$ zu setzen.

Nächst diesen Sätzen erwähnen wir Definitionen, welche ein zusammenhängendes Ganzes darstellend als heronisch überliefert sind, allerdings aber von manchen Schriftstellern[7]) für ganz unecht, von anderen, darunter von uns selbst, für überarbeitet und mehrfach entstellt gehalten werden. Deren Kern aber sehen wir keinen Grund Heron als Sammler, wenn nicht als Urheber, abzusprechen.

Eine hochwichtige Frage geht nun dahin, ob ursprünglich die hier erwähnten Sätze und Definitionen vereinigt oder getrennt vorhanden waren, und wenn vereinigt, in welcher Gestalt? Es dürfte wohl am meisten für sich haben die Vermutung auszusprechen, Heron habe einen Kommentar zu Euklids Elementen verfaßt, und in diesem seien auch diejenigen geometrischen Definitionen enthalten gewesen, welche Heron statt der von Euklid gegebenen an die Spitze der Geometrie gestellt wünschte. Wir wollen nicht verhehlen, daß dieser Vermutung Bedenken im Wege stehen, daß man

[1]) Anaritius pag. 152. [2]) Ebenda pag. 154. [3]) Ebenda pag. 155. [4]) *Figurarum quarum laterum numerus impar.* [5]) Anaritius pag. 162. [6]) Ebenda pag. 89. [7]) Friedlein im *Bulletino Boncompagni* IV, 93—121 (1871).

Zweifel hegen kann, ob schon im ersten vorchristlichen Jahrhunderte, an welchem wir, wie im vorigen Kapitel ausführlich begründet wurde, als Herons Lebenszeit festhalten, eine kommentierende Tätigkeit unter den Mathematikern Platz gegriffen hatte, daß man bei Proklus bei Erklärung der euklidischen Definitionen nirgend einer Erwähnung Herons begegnet, die doch, da sich Proklus für einige wenige Beweise auf unseren Schriftsteller bezieht, mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erwarten gewesen wäre, aber wir ziehen trotz dieser Schwierigkeiten die ausgesprochene Vermutung einer anderen vor, zu welcher der Keim in Herons Definitionen selbst enthalten liegt. In einer Art von Widmung an Dionysius, welche der Verfasser der Definitionen diesen vorausschickt, heißt es nämlich, er wolle eine wissenschaftliche Darstellung der geometrischen Elemente[1]) geben, und später ist in ganz ähnlichen Worten von einer Einleitung in die arithmetischen Elemente[2]) die Rede. Man wäre dadurch versucht, an zwei mehr oder weniger selbständige Schriften mit diesen Titeln zu denken. Allein diese Ausdrücke lassen sich auch auf Kommentare zu den geometrischen und zu den arithmetischen Büchern Euklids deuten, so daß wir diese letztere Auffassung der gebrauchten Worte vorziehen.

Unter den Definitionen wollen wir eine besonders hervorheben, die der Parallellinien[3]), in welcher es heißt, sie besäßen alle Senkrechten, welche von irgend einem Punkte der einen Parallelen auf die andere gefällt werden, von gleicher Länge. Eben diese Definition in die Worte gekleidet, Parallellinien hätten gleichen Abstand voneinander, erscheint nämlich auch in einer als Geometrie Herons bezeichneten Schrift[4]), von der wir gleich zu reden haben werden, erscheint ferner bei Proklus[5]), wo sie dem Posidonius, also jedenfalls dem Posidonius von Rhodos, zugeschrieben wird, der ja auch in Herons Mechanik vorkommt (S. 365), lauter Umstände, die einander gegenseitig als Stütze zu dienen geeignet sind.

Wir gelangen weiter zu den Schriften, welche vor der Auffindung der Vermessungslehre als Hauptquellen für die Kenntnis heronischer Mathematik galten, und von welchen wir (S. 368) erörterten, in welchem Sinne wir sie alle als echt, alle zugleich als unecht bezeichnen möchten. Wir werden für sie mitunter den Ausdruck: heronische Sammlungen gebrauchen.

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 7 lin. 1: *τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολούμενα.* [2]) Ebenda pag. 34 lin. 12—13 und pag. 38 lin 1—2: *ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμετικῆς στοιχειώσεως.* [3]) Ebenda pag. 22 lin. 15—17. [4]) Ebenda pag. 44 lin. 12—14. [5]) Proklus ed. Friedlein pag. 176 lin. 6—10. Vgl. auch L. Majer, Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid S. 18 Note 3. Tübingen 1875.

Die erste ist das Buch der Geometrie. Geometrische Definitionen, zwischen welche eine historische Notiz über den Ursprung der Geometrie mit Hinblick auf den jährlichen Austritt des Nils eingeschaltet ist, und eine Maßtabelle eröffnen dasselbe. Nach diesen kommt die Berechnung von Quadraten und Rechtecken, deren Fläche und deren Diagonale gesucht wird. Das rechtwinklige Dreieck folgt, auf dieses die aneinanderhängenden Dreiecke, das gleichseitige, das gleichschenklige, das beliebige Dreieck. Beim rechtwinkligen Dreiecke werden die Methoden des Pythagoras und des Platon zur Auffindung rationaler Seitenlängen gelehrt; beim beliebigen Dreiecke wird die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie gefällt und unterschieden, ob diese Senkrechte die Basis selbst trifft und Abschnitte auf ihr erzeugt, oder ob sie jenseits der Basis eintreffend eine Überragung hervorbringt; es wird aber auch die heronische Formel unmittelbar angewandt, welche ohne Durchgang durch die Berechnung des Abschnittes, beziehungsweise der Überragung und der Höhe die Dreiecksfläche sofort aus den drei Seiten ableitet. Nun folgt die Rückkehr zum Vierecke und zu den mannigfaltigsten Zerlegungen einer Figur durch Hilfslinien. Quadrate in gleichschenklige Dreiecke eingezeichnet, Rhomben oder verschobene Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, rechtwinklige Trapeze, gleichschenklige Trapeze, beliebige Vierecke werden so der Berechnung unterzogen. Nach den geradlinig begrenzten Figuren wendet Heron sich zum Kreise und zu dessen Teilen. Durchmesser, Umfang, Inhalt des Kreises werden gegenseitig auseinander abgeleitet. Die Fläche eines Kreisabschnittes und die Länge seines Bogens werden aus der Sehne und Höhe des Abschnittes ermittelt, und auch der Ring zwischen zwei konzentrischen Kreisen wird berechnet. Vom Kreise kehrt der Verfasser zu den regelmäßigen Vielecken zurück, indem er Formeln gibt, welche die Flächen dieser Vielecke vom Fünfecke bis zum Zwölfecke aus der Seitenlänge finden lehren. Damit dürfte der richtige Text im ganzen abschließen, indem das noch folgende Stück (fünf Seiten der Druckausgabe füllend) ziemlich unzweifelhaft als unecht sich erweist. Dort ist nämlich eine dem Patrikius, also einem sehr späten Schriftsteller, angehörende Vorschrift, dort die Wiederholung der Vorschriften für die Vielecksberechnung, die Wiederholung der geschichtlichen Bemerkung über den Ursprung der Geometrie mit kaum erwähnenswerten Varianten, dort am Schlusse wieder eine Maßtabelle zu finden.

Eine andere Schrift heißt Geodäsie. Auch sie beginnt mit Definitionen, mit einer historischen Notiz, mit Maßvergleichungen; auch sie berechnet den Flächeninhalt von Quadraten und Rechtecken,

bevor sie zum Dreiecke sich wendet, und zwar wieder zum rechtwinkligen Dreiecke, welches nach Pythagoras und Platon aus ganzzahligen Seiten bestehen kann, zu den aneinanderhängenden Dreiecken, zu dem gleichseitigen, zu dem beliebigen Dreiecke, bei welchem die heronische Formel den Schluß bildet.

Die sogenannte Stereometrie ist begreiflicherweise wesentlich anderen Inhaltes. Hier sind es Rauminhalte von Körpern und Körperoberflächen, welche den Gegenstand der Berechnungen bilden. Die Kugel, der Kegel, der abgestumpfte Kegel, der in langgestreckter Form bald Obelisk, bald Säule heißt, der Zylinder geben Beispiele, bevor zu den allseitig eben abgegrenzten Körpern: Würfel, Parallelepipedon, Keil übergegangen wird, als dessen nicht ganz deutlich beschriebene Sonderfälle wohl der Huf, der Mäuseschwanz, der Ziegel zu betrachten sind. Fast eben diese, aber auch andere eben begrenzte Körper erscheinen sofort noch einmal als Pyramiden mit quadratischer, mit rechteckiger, gleichseitig dreieckiger, mit rechtwinklig dreieckiger Grundfläche, jede derselben sowohl ganz als abgestumpft der Untersuchung unterworfen. Dann kommen mancherlei der Praxis, aber nicht der eigentlichen Stereometrie angehörige Körperformen an die Reihe. Von dem Inhalt einer Muschel, einer Schale, von dem Umfange eines Amphitheaters und von der Menschenmenge, welche ein Zuschauerraum fassen kann unter der Annahme, daß die Bänke sich nach dem Gesetz einer arithmetischen Reihe verjüngen, von Speisesälen und Badezimmern, von Brunnen, von Kufen und Butten, von Transportschiffen ist die Rede, und wo man bei der Berechnung über die aus den Namen nicht mit genügender Klarheit hervorgehende Gestalt sich Rats erholen will, läßt jene uns meistenteils erst recht im Stiche.

Eine zweite Sammlung mit der Überschrift als Stereometrie und dem Verfassernamen Herons gibt auch nur meist zweifelhafte Ergebnisse, bald mit denen der ersten Sammlung übereinstimmend, bald ihnen widersprechend. Die Reihenfolge ist dahin verändert, daß hier rätselhafte Körperformen, die selbst nicht durchweg die gleichen wie die der ersten Sammlung sind, die Reihe eröffnen. Zwischendrein ist die Messung der Höhe einer Säule mittels ihres Schattens angegeben, das erstmalige Auftreten dieser von Thales (S. 138) herrührenden Methode in einem geometrischen Werke. Die Schatten der Säule sowie eines seiner Länge nach bekannten Stabes werden gemessen, und dann wird die Proportion Stabschatten : Säulenschatten = Stab : Säule in Anwendung gebracht. Nun folgen erst Pyramiden, und zwar solche auf rechtwinklig dreieckiger oder gleichseitig dreieckiger Grundlage und solche, deren Grundflächen regelmäßige Fünf-

ecke, Sechsecke und Achtecke sind. Nach einer unverständlichen Stufenpyramide kommt der Satz, daß jede Pyramide der dritte Teil des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, worauf mit der Berechnung einer abgestumpften Pyramide auf rechteckiger Grundfläche unter dem Namen Altarstufe und mit der gegenseitigen Multiplikation von Längenmaßen zu Flächenmaßen diese Stereometrie abschließt.

Ausmessungen haben wir den Titel *μετρήσεις* einer weiteren Schrift heronischen Namens übersetzt, welche ungleich den vorigen, denen doch annähernd gleichartige Probleme zum Gegenstande dienen, bald Flächen, bald Körperinhalte durcheinander gewürfelt in zweimaliger Abwechslung darbietet. Zuerst erscheinen nämlich Körper, dann Flächen, dann wieder Körper, zuletzt Flächen. Wir heben aus der wirren Sammlung nur hervor, daß auch hier wieder Körper eigener Art auftreten, zu deren Verständnis noch gar manches fehlt, und daß zwischen die Inhaltsberechnungen auch Brunnenaufgaben eingeschaltet sind, d. h. Aufgaben, in welchen die Zeit gesucht wird, binnen welcher eine Zisterne durch mehrere Röhren gefüllt werden kann, wenn man weiß, wie lange die Füllung durch jede einzelne Röhre dauern würde.

Die letzte heronische Sammlung, das Buch des Landbaues, *γεηπονικὸν βιβλίον*, geht aus von Definitionen. Ihnen folgen Flächenausmessungen mancherlei Vierecke und Dreiecke, wobei die Vierecke den Dreiecken vorangehen, sowie rechnende Auflösung von Aufgaben, in welchen Kreise vorkommen. Nach Ausrechnung der Pyramiden auf quadratischer Grundfläche kehrt die Sammlung zu ebenen Aufgaben, zu den Durchmessern der dem regelmäßigen Fünfecke und Sechsecke umschriebenen Kreise zurück. Wieder erscheinen Aufgaben, welche, dem Gegenstande nach unerwartet, Einschaltungen sein könnten, und die sich auf die Auffindung von Rechtecken beziehen, deren Umfänge sowie deren Inhalt in gegebenem Zahlenverhältnisse stehen sollen, Aufgaben, welche also eigentlich zahlentheoretischer Natur freilich in planimetrischer Einkleidung sind, so daß die Unterbrechung des Gedankenganges nicht allzu auffällig und die Rückkehr zu wirklich geometrischen Aufgaben vom Rhombus, vom Rechtecke, von regelmäßigen Vielecken, von Kreisen eine leichte ist. Nur einmal gegen das Ende der Sammlung kehren stereometrische Aufgaben wieder, welche aber auf Fässer und Fruchtmaße eigentümlicher Gestalt bezüglich dem Buche des Landbaues nicht ganz unangemessen erscheinen. Den Schluß bilden Vergleichungen zwischen Kubikfußen und Fruchtmaßen.

Das ist in dürftiger, keineswegs erschöpfender, aber eben deshalb

vielleicht übersichtlicher Zusammenstellung die Reihenfolge der Gegenstände, welche in den verschiedenen heronischen Sammlungen behandelt sind. Die Geometrie und die Geodäsie lehnen sich, insbesondere die Geometrie, eng an den Stoff des ersten Buches der Vermessungslehre, die beiden Bücher der Stereometrie an den von dessen zweitem Buch, die Ausmessungen und das Buch des Landbaues an den der beiden ersten Bücher. Von dem dritten Buche der Vermessungslehre ist nirgend eine Spur zu finden. Wenn wir eine Anlehnung an den Stoff der beiden ersten Bücher der Vermessungslehre behaupten, so will dieses keineswegs sagen, nur das dort Gelehrte und alles dort Gelehrte kehre wieder, vielmehr sind auch Dinge behandelt, deren wir in unserer bisherigen Darstellung keine Erwähnung zu tun hatten weder als wir von der Vermessungslehre, noch als wir von der Abhandlung über die Dioptra sprachen.

Sollen wir aus diesen Ähnlichkeiten und Unähnlichkeiten die Folgerung ziehen, sämtliche soeben unter besonderen Titeln genannten Sammlungen seien nur späte byzantinische Überarbeitungen der Vermessungslehre[1])? Überarbeitungen müssen uns allerdings vorliegen, denn die Ähnlichkeit mit dem Stoffe der Vermessungslehre ist zu groß, um von ihr durchaus unabhängige Schriften anzunehmen, und die Unähnlichkeit wieder zu groß, um an bei einer bloßen Abschrift mögliche Veränderungen zu denken. Aber die folgerichtige Darstellung, das ungezwungene Sicheinordnen des Neuen in das Alte nötigen uns nach unserem persönlichen Gefühle an einen älteren und ebenbürtigeren Bearbeiter Herons zu denken als die byzantinische Zeit erzeugt hat. Jedenfalls möchten wir aus der erwähnten Vollwertigkeit der Einschaltungen den Schluß ziehen, der Bearbeiter habe Heronisches in Heronisches eingeschaltet.

Woher dieses stammte? Wir wissen es vorläufig noch nicht. Wir wissen nur, daß an zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Stellen der Geometrie[2]) von einem anderen Buche Herons — *ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ Ἥρωνος* — die Rede ist, und dieses andere Buch, möglicherweise die Vermessungslehre, wird der Bearbeiter vor sich gehabt haben neben seiner Hauptvorlage, die vielleicht, wie wir schüchtern und zweifelnd hinzusetzen, aus einer neben der Vermessungslehre zu gebrauchenden Aufgabensammlung bestand. Für die anderen heronischen Sammlungen hat man wahrscheinlich andere Bearbeiter anzunehmen von geringerer mathematischer Befähigung, denen aber

[1]) Heiberg, Mathematik, Mechanik und Astronomie (in Kroll, Die Altertumswissenschaft) S. 131 unten. [2]) Heron (ed. Hultsch) pag. 131 lin. 14 und pag. 134 lin. 8 und 15.

doch alte Vorlagen zu Gebote standen, vielleicht noch solche, welche älter als Heron waren.

Wir müssen rechtfertigen, warum wir in der Vermessungslehre möglicherweise das andere Buch Herons vermuten. Wir berufen uns auf unseren Auszug aus der Vermessungslehre (S. 376). Dort sagten wir, Heron lehre $F_5 = \frac{5}{3} a_5^2$ mit der Zusatzbemerkung, dieser Wert hänge von $\sqrt{5} = \frac{9}{4}$ ab; werde ein genauerer Wert von $\sqrt{5}$ in Rechnung gezogen, so könne man auch einen genaueren Wert von F_5 ermitteln. Für F_6 aber ist in der Vermessungslehre $F_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a_6^2$ angegeben, weil das Sechseck das Sechsfache des über a_6 beschriebenen gleichseitigen Dreiecks sei. In der Geometrie wird in erster Linie $F_5 = \frac{12}{7} a_5^2$ gesetzt, während das andere Buch $F_5 = \frac{5}{3} a_5^2$ vorschreibe, und für das Sechseck lehrt die Geometrie $F_6 = \frac{13}{5} a_6^2$, während das andere Buch verlange, man solle $F_6 = 6\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}\right)$ rechnen[1]. Dieser letztere Wert ist ja an und für sich genau der gleiche wie der erste, aber er läßt die Versechsfachung deutlich hervortreten, die im ersten Werte verhüllt ist. Die andere Stelle, wo von dem anderen Buche Herons die Rede ist[2], ist weniger beweiskräftig, denn sie benutzt zur Kreismessung $\pi = \frac{22}{7}$, während der gleiche Wert auch an solchen Stellen der Geometrie in Anwendung tritt, welche sich nicht auf das andere Buch berufen.

Für beweiskräftig halten wir dagegen die Verschiedenheiten der Geometrie von der Vermessungslehre. Die Geometrie beginnt mit Definitionen, welche beiläufig bemerkt der Einführung in die Geometrie[3] entnommen sein wollen und mit dem Buche der Definitionen, von welchem am Anfange dieses Kapitels die Rede war, nicht übereinstimmen. Dann folgen Maßtabellen[4]. Von beidem ist in der Vermessungslehre keine Spur zu finden. Die Vermessungslehre gibt Beweise für die anzuwendenden Formeln, die Geometrie begnügt sich mit deutlich vollzogenen Rechnungen, aus welchen der Leser sich erst die benutzte, aber nicht bewiesene Formel herausschälen muß. Die Geometrie beginnt die Anweisung, wie man rechnen solle, mit den Worten[5]: *ποίει ὅυτως*, mache es so, in der Vermessungslehre

---

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 134. [2]) Ebenda pag. 131 *ὅρος κύκλου ἑυρεθεὶς ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος*. [3]) Ebenda pag. 44 *εἰςαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων*. [4]) Ebenda pag. 47—49. [5]) Ebenda pag. 51 lin. 28—52 lin. 1 und an vielen anderen Stellen.

sind für den gleichen Zweck zwei Redensarten in Gebrauch: *ἡ δὲ μεθοδός ἐστιν ἄυτη*, folgendes ist die Methode, und *συντεθήσεται ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει ὄυτως*, der Analyse gemäß wird so gerechnet. Uns will scheinen, daß diese Verschiedenheiten ausreichen, um die Behauptung zu begründen, daß wer die Geometrie zusammenstellte, die Vermessungslehre unmöglich als Hauptvorlage, sondern nur gelegentlich als Ergänzungsvorlage benutzt haben kann, und das war eben mit dem sogenannten „anderen Buche Herons" der Fall, war der Fall in besonders nachweisbaren Stellen, und mithin glauben wir jetzt den Beweis geradezu geliefert, daß die Vermessungslehre das andere Buch war.

Und die Hauptquelle der Geometrie? Wir werden jetzt wohl etwas weniger schüchtern annehmen dürfen, es sei eine Aufgabensammlung gewesen, werden jedenfalls behaupten können, die Hauptvorlage habe eine täuschende Ähnlichkeit mit dem Rechenbuche des Ahmes besessen, das konservative Ägypten habe die alte Form aufbewahrt, wenn es derselben auch zum Teil einen neuen Inhalt gab. Wir haben soeben das *ποίει ὄυτως* der Geometrie erwähnt, Ahmes sagte: mache wie geschieht (S. 60). Wir haben die dem Leser auferlegte Pflicht die Rechnungsvorschrift den Rechnungen zu entnehmen bei der Geometrie kennen gelernt, Ahmes nötigte seine Leser zu der gleichen Gedankenarbeit.

Merit heißt bei Ahmes die obere Linie einer gezeichneten Figur (S. 93); Scheitellinie, *κορυφή*, nennt sie Heron und definiert geradezu, Scheitellinie sei die oberhalb der Grundlinie hingelegte Gerade[1]). Das gleichschenklige Paralleltrapez war seit Ahmes bis zu den Edfuinschriften eine von den Ägyptern bevorzugte Figur (S. 96 und 108); Heron widmete derselben Figur in der Geometrie neun aufeinanderfolgende Kapitel[2]). Ahmes zerlegte Figuren durch Hilfslinien in Figuren einfacherer Natur, wie es scheint, wenn auch die genaue Übersetzung der betreffenden Aufgaben noch nicht möglich ist; die Tempelvorsteher von Edfu übten dieselbe Zerlegung bei Berechnung ihrer Felder; Heron bedient sich der Zerlegung durch Hilfslinien zur Messung von unregelmäßig begrenzten Grundstücken in der Abhandlung von der Dioptra, löst gleicherweise verschiedentliche planimetrische Aufgaben in der Geometrie. Bei den Ägyptern heißt das Wort Qa, dessen Hieroglyphe ein die Arme in die Höhe streckendes Männchen ist, sowohl Höhe als allgemeiner die größte Ausdehnung eines Raum-

---

[1]) Heron, *Geometria* 3 (ed. Hultsch) pag. 44 *κορυφὴ δέ ἐστιν ἡ ἐπὶ τῇ βάσει ἐπιτιθεμένη εὐθεῖα.* [2]) Heron, *Geometria* 72—80 (ed. Hultsch) pag. 103 bis 108.

gebildes (S. 98); genau dasselbe gilt für das Wort *μῆκος* der Alexandriner[1]), bei Heron steht sodann der größeren Höhenabmessung die Breite, *πλάτος*, als geringfügigere Ausdehnung gegenüber, wie besonders deutlich aus einer Stelle seiner Geometrie hervorgeht, wo nach Einzeichnung zerlegender Hilfslinien in eine Figur, ohne daß eine Drehung vorgenommen wäre, plötzlich Höhe heißt, was in der ungeteilten Figur Breite war[2]), offenbar nur deswegen, weil durch die Teilung die wirkliche Höhe abnahm, so daß sie geringer als die unverändert gebliebene Breite wurde. Bei Ahmes war von Flächen zuerst das Quadrat, dann das Dreieck, dann das aus dem Dreiecke durch Abstumpfung gewonnene Trapez zur Ausmessung gebracht (S. 96); in den Edfuinschriften ergab sich eine Veränderung dahin, daß das Dreieck als Trapez mit einer verschwindenden Seite aufgefaßt wurde (S. 111); Heron bleibt dem Beispiele des Ahmes getreuer als selbst die priesterlichen Landsleute: bei ihm geht, wie wir bei flüchtiger Schilderung der Reihenfolge der in seinen Schriften behandelten Gegenstände wiederholt bemerken mußten, die Flächenausmessung des Quadrats, demnächst auch des Rechteckes voraus; ihnen folgt das Dreieck in seinen verschiedenen Formen, und nach diesem kehrt die Betrachtung zum Trapeze und zu anderen Vierecken zurück, dieselben zwar nicht als abgestumpfte Dreiecke untersuchend, aber Verwandlungen und Teilungen durch Hilfslinien mannigfach vornehmend, wie wir schon betont haben. Ahmes hat, worauf wir wiederholt gleichfalls aufmerksam machen, Maßvergleichungen (S. 90), Heron desgleichen. Ahmes bedient sich ausschließlich der Stammbrüche, zu welchen auch $\frac{2}{3}$ gezählt wird (S. 61); Heron verfährt vorzugsweise ebenso, wenn er auch imstande ist, Brüche mit beliebigem Zähler und Nenner in Rechnung zu bringen, ohne sie vorher in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen. Die Hauaufgabe Nr. 28. des Ahmes (S. 75) hat den Wortlaut „$\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ hinweg bleibt 10 übrig"; wir erklärten sie durch $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$; man vergleiche damit etwa die Art, wie in den Ausmessungen ein Kreisbogen aus Sehne und Höhe desselben berechnet wird[3]): „Es sei ein Abschnitt, und er habe die Grundlinie von 40 Fuß, die Höhe von 10 Fuß; seinen Umfang zu finden. Mache es so. Füge immer Durchmesser[4])

---

[1]) In der Geographie des Ptolemäus I, 6 (ed. Halma) pag. 17 heißt es ausdrücklich *καθόλου μὲν τῇ μείζονι τῶν διαστάσεων προσάπτομεν τὸ μῆκος*. [2]) Heron, *Geometria* 47, 48 (ed. Hultsch) pag. 88. [3]) Heron, *Mensurae* 33 *μέτρησις ἑτέρου τμήματος* (ed. Hultsch) pag. 199—200. [4]) Soll heißen: Grundlinie.

und Höhe zusammen. Es entstehen 50 Fuß. Nimm allgemein davon $\frac{1}{4}$ weg. Es ist $12\frac{1}{2}$. Rest $37\frac{1}{2}$. Zu diesen füge allgemein $\frac{1}{4}$ hinzu. Es ist $9\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Setze zusammen. Es sind Fuße $46\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. So viel mißt der Umfang des Abschnittes. Wir haben aber ein Viertel weggenommen und ein Viertel hinzugefügt, weil ein Viertel der Teil ist der Höhe von der Grundlinie." Als Gleichung übersieht sich diese Vorschrift noch deutlicher in ihrer Ähnlichkeit zu der Ausdrucksweise des Ahmes. Sie lautet

$$B = \left[(s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right] + \frac{h}{s}\left[(s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right],$$

wenn s die Sehne, h die Höhe, B die Bogenlänge des betreffenden Abschnittes bedeutet. An und für sich ist die Formel bis zur Unbrauchbarkeit ungenau. Sie geht bei $s = 2r$, $h = r$ in $B = \frac{9r}{4}$ über, welches, da der Halbkreis die Länge πr besitzt, die Annahme $\pi = 2{,}25$ in sich schließt, aber es kam uns bei Hervorhebung dieser Stelle nur darauf an, die Formverwandtschaft der heronischen Sammlungen, hier der „Ausmessungen", mit dem Rechenbuche des Ahmes recht deutlich hervortreten zu lassen.

Alle diese Ähnlichkeiten vereinigt dürften jeglichen Zweifel an einer unmittelbaren Abhängigkeit Herons von altägyptischen Formgewohnheiten vernichten. Was wir früher (S. 276) schon ankündigten, hat sich bestätigt: die Form der arithmetisch-geometrischen Beispielssammlung, eine in sich abgeschlossene von der anderer Werke sich wesentlich unterscheidende Form ist durch und durch ungriechisch, ist altägyptisch, und damit gewinnt die andere Vermutung erneuerte Wahrscheinlichkeit, es dürfte mit der Form des theoretisch-geometrischen Lehrbuches, mit der Form der Elemente, sich ganz ebenso verhalten.

Ein anderes freilich gilt für den Inhalt der heronischen Sammlungen, welcher näher in Erwägung gezogen neben mancher überraschenden Ähnlichkeit auch manche bei den Fortschritten, welche die Geometrie gemacht hatte, ziemlich selbstverständliche Abweichungen von dem ägyptischen Verfahren offenbart. Von überraschender Ähnlichkeit ist die Anwendung der beiden Formeln $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b}{2}$ und $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b_1 + b_2}{2}$ (S. 111) zur Auffindung der Fläche eines Dreiecks oder Vierecks, welche wir in den Ausmessungen und in dem Buche des Landbaues wiederfinden[1]). Daß Heron sie gelehrt haben sollte,

[1]) Die Dreiecksformel in den *Mensurae* (ed. Hultsch) pag. 207 lin. 1—5;

war uns früher so unglaublich, daß wir dieselben für Einschiebungen eines Kompilators hielten. Man hat uns entgegnet[1]), es sei für Heron umgekehrt geradezu unmöglich gewesen, in Ägypten in einer vollständigen Sammlung von geometrischen Rechnungsverfahren jene Formeln wegzulassen, und wir gestehen zu, daß diese Umkehrung der geschichtlichen Wahrheit wohl näher kommen dürfte als unsere erste Meinung. Wir neigen nunmehr selbst der Auffassung zu, auch diese theoretisch zwar unhaltbaren, praktisch aber mitunter ganz erträglichen Näherungsverfahren habe Heron neben den theoretisch richtigen Formeln gelehrt, die meistens nicht unmittelbar zum Ziele, d. h. zur Kenntnis der verlangten Flächenräume führten, sondern vorher die Berechnung von Hilfsstrecken, als Höhen und dergleichen nötig machten. Vielleicht mag sogar die vorzugsweise sogenannte heronische Dreiecksformel ihre Entdeckung dem Bedürfnisse verdankt haben aus den drei Dreiecksseiten unmittelbar, aber richtiger als mittels $\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{b}{2}$ die Dreiecksfläche zu gewinnen.

Einen wesentlichen Nachteil besaß freilich in den Augen des handwerksmäßigen Feldmessers die heronische Formel gegenüber der der Ägypter: sie verlangte eine Wurzelausziehung. Die Ausführung dieser Operation überschritt, wie wir wissen, die Höhe des gemeinen Rechnens. Schriftstellerische Arbeiten wurden ihr gewidmet, von deren einstigem Vorhandensein wir Kenntnis erlangt haben, wenn sie auch selbst uns verloren sind. Um eine solche vielen Mißbehagen erzeugende Rechnungsaufgabe herumzukommen war fast Notwendigkeit, wenn Praktiker mit der Ausführung betraut gewesen wären, und so blieben Näherungswerte für häufig auftretende ein für allemal berechnete Quadratwurzeln in Gebrauch. Wir haben in $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ ein Beispiel kennen gelernt, welches (S. 223) vielleicht schon zu Platons Zeit in Übung war, wir haben auch $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ und $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ hervorgehoben, auf dessen Entstehung wir (S. 373) vielleicht einiges Licht werfen durften, wenn wir auch jetzt andere Entstehungsweisen der Werte von $\sqrt{3}$ wahrscheinlicher machen können. $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ ist mittels der heronischen Methode zu gewinnen als $\sqrt{3} = 2 + \frac{3-4}{2 \cdot 2}$

die Vierecksformel in dem *Liber Geeponicus* (ed. Hultsch) pag. 212 lin. 15 bis 21.

[1]) Agrimensoren 43 und dagegen S. Günther in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung Nr. 81, vom 21. März 1876.

$= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ und $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ mittels des doppelten falschen Ansatzes. Wenn nämlich $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = 2$, so ist $d_1 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 = \frac{1}{16}$, $d_2 = (2)^2 - 3 = 1$ und $\frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1} = \frac{\frac{7}{4} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{26}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{26}{15}$. Alle diese Näherungswerte hat Heron anzuwenden nicht verschmäht, er, der doch unter die Schriftsteller zählt, die über Ausziehung der Quadratwurzeln schrieben.

Den Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ glauben wir im Buche des Landbaues an zwei verschiedenen Stellen zu erkennen[1]. Die erstere Stelle behandelt das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 30, 40, 50, bei welchem $50 = \sqrt{30^2 + 40^2}$ sei; aber, heißt es weiter, es ist auch $50 = (30 + 40) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$. Will man diese Ausrechnung nicht für baren Unsinn nehmen, so kann man ihre Entstehung nur folgendermaßen erklären. Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke von den Seiten c, c, h ist $h = c \cdot \sqrt{2} = \frac{2c}{\sqrt{2}} = \frac{c + c}{\frac{7}{5}} = (c + c) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$. Daraus wurde nun weiter geschlossen, daß auch bei ungleichen Katheten c_1 und c_2 gerechnet werden dürfe $h = (c_1 + c_2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}$, ein Schluß, der uns bei Leuten, die gewohnt waren, in ungerechtfertigter Weise arithmetische Mittel ungleicher Seiten einer Figur in Rechnung zu ziehen, nicht sonderlich auffallen kann. Die andere Stelle werden wir weiter unten besprechen.

Die Anwendung, welche Heron von $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ macht, tritt bei den auf das gleichseitige Dreieck bezüglichen Aufgaben hervor. Die Höhe desselben ist offenbar gleich dem Produkte der Seite in $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und dafür setzt Heron $\frac{13}{15}$, sei es nun, daß er dafür $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$, sei es, daß er $1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ dafür schreibt. Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, sagt er ausdrücklich[2], sei $1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$ mal der Seite, und die andere Wertform ist in der wiederholt auftretenden Angabe enthalten, die Fläche des gleichseitigen Dreiecks, mithin das Produkt der Seite

---

[1]) Heron, *Liber Geeponicus* 50 und 152—153 (ed. Hultsch) pag. 212, lin. 28—30 und pag. 226, lin. 9—16. [2]) Heron, *Geometria* 15 (ed. Hultsch) pag. 58, lin. 26—28.

in die halbe Höhe, sei $\frac{1}{3}\frac{1}{10}$ vom Quadrat der Seite[1]). Namentlich die Form der letzteren Vorschrift kehrt bei Nachahmern Herons fortwährend wieder.

Für spätere Vergleichungen müssen wir auch die bei Heron vorkommenden aneinanderhängenden rechtwinkligen Dreiecke[2]), *τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα*[3]), uns merken, worunter mutmaßlich zwei rechtwinklige Dreiecke mit rationalen Seiten gemeint sind, welche eine Kathete gleich haben, und an dieser zusammenstoßen, so daß die beiden anderen Katheten als gegenseitige geradlinige Fortsetzungen voneinander erscheinen.

Bei der Dreiecksberechnung finden der Abschnitt, *ἀποτομή*, und die Überragung, *ἐκβληθεῖσα*, häufige Anwendung. Bedeuten b die Grundlinie, a, c die beiden anderen Seiten des Dreiecks und α, ε den Abschnitt, die Überragung von der einen oder der anderen Richtung her an a anstoßend, so rechnet Heron $\alpha = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}$, $\varepsilon = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b}$.

Die Formeln für den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke sind der Vermessungslehre und den heronischen Sammlungen[4]) gemeinsam, wie wir (S. 393) genauer zu erörtern genötigt waren, und wir wissen, daß wenigstens für das Neuneck und das Elfeck das Buch von den Geraden im Kreise benutzt wurde, daß wir die ältesten auf uns gekommenen trigonometrischen Formeln vor uns haben.

Außer dem Flächeninhalt des regelmäßigen $n$ecks war unter allen Umständen der Halbmesser r, der Durchmesser d des umschriebenen Kreises von Wichtigkeit. Offenbar lehrte die Sehnentafel durch einfaches Nachschlagen $a_n = \frac{k_n \cdot d}{2}$ und so wird der heronische Ursprung der im Buch des Landbaues sich vorfindenden[5]) Formeln $a_n = \frac{3d}{n}$ und $d = \frac{n \cdot a_n}{3}$, noch dazu durch einen Mangel an Folgerichtigkeit bei $n = 8$ entstellt, indem es $a_8 = \frac{5d}{12}$ heißt, ungemein verdächtig. Nur bei $n = 6$ ist $a_6 = r = \frac{3d}{6}$, aber die Ausdehnung dieses einen zufälligen Ergebnisses zur allgemeinen Formel kann Heron

[1]) Heron, *Geometria* 14 und *Geodaesia* 13 (ed. Hultsch) pag. 58 und 147.
[2]) Heron, *Geometria* 13, 4 und *Geodaesia* 12, 4 (ed. Hultsch) pag. 58 und 147.
[3]) Das selten vorkommende *ἡνωμένον* ist von *ἑνόω* abzuleiten, welches selbst von *ἕν* (eins) abstammt und *vereinigen* heißt. [4]) Heron, *Geometria* 102, *Mensurae* 51—53, *Liber Geeponicus* 75—77 und 172—179 (ed. Hultsch) pag. 134, 206, 218, 229. [5]) Heron, *Liber Geeponicus* 146—164 (ed. Hultsch) pag. 225—228.

unmöglich verschuldet haben. Wir können die Überzeugung dieser Unmöglichkeit selbst durch Erinnerung an zwei andere Angaben Herons über das regelmäßige Achteck stützen, welche ohnehin der Erörterung unterzogen werden müssen.

In demselben Buche des Landbaues, in welchem die falschen Formeln sich breit machen, ist nur wenige Seiten später die Regel gegeben[1]), man solle zur Konstruktion eines regelmäßigen Achtecks sich eines Quadrates mit seinen Diagonalen bedienen. Die Hälfte der Diagonale von jedem Endpunkte des Quadrates aus auf den beiden in ihm zusammentreffenden Seiten des Quadrates aufgetragen liefere 8 Punkte, welche miteinander verbunden das regelmäßige Achteck geben.

Eine zweite Angabe über das regelmäßige Achteck findet sich in der zweiten stereometrischen Sammlung[2]), wo bei Gelegenheit der Ausmessung des Körperinhaltes der Pyramide auf achteckiger Grundfläche von der Formel $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$ Gebrauch gemacht wird.

Bevor wir den Zusammenhang dieser beiden richtigen Behauptungen nachweisen, wollen wir zeigen, daß die letztere mittels eines Rechenfehlers zu der einen abweichenden Achtecksformel $a_8 = \frac{5d}{12}$ im Buche des Landbaues Anlaß gab. Setzen wir nämlich $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, so wird $\left(\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{a_8}{2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \frac{169}{25}\left(\frac{a_8}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\frac{a_8}{2}\right)^2$ und da dieser Wert das Quadrat von $\frac{d}{2}$ sein soll, so ist $a_8 = \frac{5}{13}d$. Daraus kann aber sehr leicht irrtümlich $a_8 = \frac{5}{12}d$ entstanden sein. Gibt man uns dieses zu, so ist hier die zweite Anwendung von $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ bei Heron nachgewiesen, welche wir (S. 398) angekündigt hatten.

Man könnte freilich einen Einwand erheben, indem man sagte $d = \frac{13}{5}a_8$ führe zu $F_8 = \frac{24}{5}a_8^2$, während doch Heron $F_8 = \frac{29}{6}a_8^2$ rechne. Allein dieser Widerspruch scheint uns geduldet werden zu müssen. Wir geben nämlich zu bedenken, daß weder d noch F_8 genau richtig, sondern nur angenähert berechnet sind, und daß die

[1]) Heron, *Liber Geeponicus* 199 μέτρησις ὀκταγώνου (ed. Hultsch) pag. 231.
[2]) Heron, *Stereometrica* II, 37 πυραμίδα ἐπὶ ὀκταγώνου βάσεως βεβηκυῖαν μετρῆσαι (ed. Hultsch) pag. 184 lin. 10—17.

Einsetzung eines Näherungswertes in eine zweite Näherungsformel nicht immer zu den gleichen Ergebnissen führt, wenn sie in einem früheren oder in einem späteren Augenblicke erfolgt. Jedenfalls weicht $c_8 = \frac{29}{6} = 4{,}833\,333$ von dem wahren Werte $c_8 = 4{,}828\,427$ weniger ab als $c_8 = \frac{24}{5} = 4{,}800\,000$.

Die erwähnte Konstruktion des Achtecks läßt sich mit Hilfe einer Figur rechtfertigen, welche ein Einwohner Ägyptens oft zu sehen in der Lage war, und deren Anblick einen Mathematiker umgekehrt auf die Erfindung jener beiden Sätze bringen konnte. Die Figur, welche wir meinen, ist die (Fig. 14) zweier einander symmetrisch durchsetzender Quadrate, ein, wie wir uns erinnern (S. 108), häufiges Gewebemuster. Daß die Schnittpunkte dieser Quadratseiten ein regelmäßiges Achteck in der Figur erscheinen lassen, ist augenscheinlich. Eines Beweises bedarf (Fig. 66) nur die Behauptung $\alpha\beta = \beta\gamma$. Der Achteckwinkel bei γ ist 135^0, dessen Hälfte $\alpha\gamma\beta$, mithin $67\frac{1}{2}{}^0$. Ferner

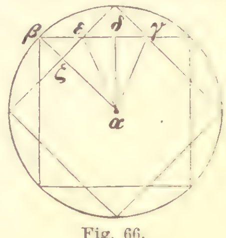


Fig. 66.

ist der Winkel $\alpha\beta\gamma$ die Hälfte eines rechten Winkels oder 45^0, und demnach $\gamma\alpha\beta = 180^0 - 67\frac{1}{2}{}^0 - 45^0 = 67\frac{1}{2}{}^0 = \alpha\gamma\beta$, folglich $\alpha\beta = \beta\gamma$. Wir werden im 26. Kapitel noch deutlicher erkennen, daß in der Tat ein dem hier gegebenen Beweise sehr ähnlicher von unserer Figur ausgehender Gedankengang zu dem heronischen Satze vom Achtecke geführt haben muß. Wenn wir heronischen Satz sagen, so meinen wir begreiflicherweise einen solchen, der uns am frühesten bei Heron begegnet, ohne Herons Erfindung für die möglicherweise noch ältere Wahrheit ausdrücklich in Anspruch zu nehmen.

Haben wir hier eine, wie sich herausstellte, wichtige Zwischenbemerkung aus der zweiten stereometrischen Sammlung in Betracht ziehen dürfen, so liefern uns die eigentlich stereometrischen Angaben als solche im allgemeinen wenig Ausbeute. Es mag ja immerhin sein, daß eine Vorschrift, welche in der Vermessungslehre (S. 379), welche aber auch in den Ausmessungen sich findet[1]), eine nicht regelmäßige Oberfläche, etwa die einer Bildsäule zu messen, indem man Leinwand oder Papier herumwickle, welches dann ausgebreitet als Maß diene, uralten Ursprung verrate, viel wird mit diesem Bewußtsein nicht gewonnen sein. Daß wir aber den stereometrischen Aufgaben so wenig abgewinnen können, hat einen zweifachen Grund. Bald steht ungenügendes Verständnis, welche Körper eigentlich ge-

[1]) Heron, *Mensurae* 46 (ed. Hultsch) pag. 204.

meint seien, hindernd im Weg, bald die Tatsache, daß recht viele Rechnungsergebnisse, auch wo sie verständlich sind, sich als falsch erweisen. Der Diorismus, ob eine Aufgabe wie die gestellte überhaupt möglich sei, ist nicht selten versäumt. So ist z. B. eine abgestumpfte Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zur Ausrechnung vorgelegt[1]), deren untere Fläche aus den Seiten 14 und 20, die obere aus den Seiten 2 und 4 gebildet wird, während dieser Körper bei mangelnder Ähnlichkeit der beiden Flächen gar nicht als Pyramidenstumpf aufgefaßt werden kann; der Körper gehört vielmehr zu denjenigen, welche deutsche Stereometer Obelisken zu nennen pflegen. Die räumliche Ausmessung der Obelisken findet allerdings nach der gleichen Formel statt, als hätte man es mit einem Pyramidenstumpf zu tun, doch glauben wir kaum, daß Heron dieses schon wußte und die Worte *πυραμὶς κόλουρος εἴτουν ἡμιτελής* (abgestumpfte oder halbfertige Pyramide) in der Meinung gebrauchte, es sei hier von zweierlei die Rede. Wer so weit zu gehen geneigt wäre, müßte jene Worte übersetzen: von Pyramidenstumpfen und ihnen nur verwandten Gestaltungen.

Unmittelbar vor dieser Stelle ist eine andere[2]), bei welcher der mangelnde Diorismus zum erstmaligen Erscheinen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geführt hat, welches in der Geschichte der Mathematik hat nachgewiesen werden können. Der Körperinhalt I einer abgestumpften Pyramide von quadratischer Grundfläche wird gesucht. Nennt man nun a_1 die Seite des unteren größeren, a_2 die Seite des oberen kleineren Quadrates, k die Kante des Pyramidenstumpfes, H dessen senkrechte Höhe, h die Höhe einer der parallelotrapezischen Seitenflächen, so ist offenbar

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}, \qquad H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}$$

oder auch

$$H = \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2}$$

und endlich

$$I = H \cdot \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2\right].$$

Eine Ableitung dieser Formel findet so wenig statt wie die irgend einer anderen (mit Ausnahme der in der Abhandlung über die Dioptra bewiesenen heronischen Dreiecksformel), aber sie wird in einem ersten Beispiele, in welchem $a_1 = 10$, $a_2 = 2$, $k = 9$ gewählt ist, mit gutem Erfolge angewandt. Es erscheint nämlich

---

[1]) Heron, *Stereometrica* I, 35 (ed. Hultsch) pag. 163. [2]) Heron, *Stereometrica* I, 33 und 34 (ed. Hultsch) pag. 162—163.

$$H = \sqrt{9^2 - \frac{1}{2}(10-2)^2} = 7$$

und daraus

$$I = 7\left[\left(\frac{10+2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{10-2}{2}\right)^2\right] = 289\frac{1}{3}.$$

Der Grund der Brauchbarkeit liegt darin, daß, wie es aus der Formel für H hervorgeht, $k^2 > \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2$ sein muß und bei den angewandten Zahlenwerten auch ist. Geometrisch heißt das: ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen existiert nur dann, wenn bei senkrechter Projizierung der oberen Fläche auf die untere zwischen zwei benachbarten Eckpunkten der ursprünglich unteren Fläche und der Projektion eine Entfernung obwaltet, die kleiner ist als die Kante des verlangten Stumpfes. In einem zweiten Beispiele mit $a_1 = 28$, $a_2 = 4$, $k = 15$ findet dieses aber nicht statt; es ist vielmehr $15^2 < \frac{1}{2}(28-4)^2$. Der Rechner, der an der Formel, welche H unmittelbar aus a_1, a_2, k liefert, diese Schwierigkeit bemerkt haben mag und sich ihr nicht gewachssen fühlte, suchte sich durch einen Umweg über h zu helfen. Er rechnete $h = \sqrt{15^2 - \left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = 9$, worauf er $H = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{63} = 8$ weniger $\frac{1}{16}$ setzte. Mit anderen Worten: die von Rechtswegen negative Differenz $81 - 144$ unter dem Quadratwurzelzeichen wird zur absoluten Differenz der beiden Zahlen 81 und 144; es wird $\sqrt{-1} = 1$ gesetzt. Ob dieser Rechner Heron war, ob damals die Stereometrie noch immer ein weniger übliches Kapitel mathematischer Untersuchungen bildete und insofern einem so hervorragenden Manne der Fehler den Diorismus vernachlässigt zu haben begegnen konnte, oder ob hier Unwissenheit der Abschreiber sündigte, dürfte nicht zur Entscheidung gebracht werden können. Welche von beiden Annahmen aber auch der Wahrheit entsprechen mag, unter allen Umständen haben wir hier das älteste Auftreten des sogenannten Imaginären vor uns.

Wenden wir uns zu den Beispielen, in welchen der Kreis vorkommt, so tritt die Verhältniszahl π, welche fast bei allen solchen Kreisaufgaben eine Rolle spielt, in zweifachem Werte auf. Weitaus am häufigsten ist $\pi = \frac{22}{7}$ angenommen, aber im Buche der Ausmessungen[1]) ist regelmäßig $\pi = 3$. Wir wissen aus unserem Auszuge aus der Vermessungslehre, daß dort gesagt wird, die Alten[2]) οἱ ἀρχαῖοι,

[1]) Heron, *Mensurae* (ed. Hultsch) pag. 188 sqq. [2]) Heron III, pag. 72 lin. 29.

hätten mit $\pi = 3$ gerechnet. Wir haben (S. 48) den babylonischen Ursprung dieses Wertes zu begründen gesucht, der aber bei dem regen Verkehre zwischen Babylon und Ägypten auch in dieses letztere Land eingedrungen sein mag. Und der ägyptische Wert, kann man fragen, $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, welchen Ahmes angewandt hat (S. 98), kommt er nirgend vor? Nein, und wenn es auch insgemein mißlich ist, negative Erscheinungen erklären zu wollen, hier wären wir am wenigsten in Verlegenheit, einen einleuchtenden Grund anzugeben. Die Neuerung $\pi = \frac{22}{7}$ statt $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ war durch die größere Genauigkeit der Ergebnisse bedeutsam, aber was die Rechnungsausführung betrifft, kaum redenswert. Ob der Praktiker mit dieser oder mit jener gebrochenen Zahl vervielfachte, das konnte ihm gleich sein. Er mußte aus Bequemlichkeit alte und neue angenäherte Dreiecks- und Vierecksformeln ohne Wurzelausziehung festzuhalten suchen, um jener für ihn schwierigen Rechnungsoperation zu entgehen. Er mußte $\pi = 3$ als ganzzahligen Multiplikator vorziehen. Aber daß er nicht auf $\pi = \frac{256}{81}$ zugunsten von $\pi = \frac{22}{7}$ verzichten sollte, dafür gab es gar keinen Grund.

Eine Stelle, welche auf den Kreis sich bezieht, verdient aus mehrfachen Gründen eine nähere Besprechung. Es ist dieselbe Stelle, welcher wir (S. 393) im voraus unsere Aufmerksamkeit zusicherten, als wir von dem anderen Buche Herons sprachen[1]). Es handelt sich um Berechnung des Kreisdurchmessers d aus der Summe S der in einer Zahl vereinigten Kreisfläche K, Peripherie P und Durchmesser d selbst. Die Tatsache der durch S angedeuteten Summenbildung ist an sich eine höchst merkwürdige. Eine Flächengröße und zwei Längenausdehnungen zu vereinigen widerspricht dem geometrischen Bewußtsein und ist nur denkbar, wenn wir zugeben, daß Heron hier auf durchaus algebraischem Boden stand, daß ihm die Zahlenwerte als solche und ohne Rücksicht auf ihren geometrischen Ursprung dienten. Unter dieser Voraussetzung gestattet aber Herons Rechnungsergebnis sein Verfahren rückwärts zu ergänzen. Er rechnet $d = \frac{\sqrt{154 S + 841} - 29}{11}$. Bekanntlich ist $K = \frac{\pi}{4} d^2$, $P = \pi d$, folglich ist $S = K + P + d = \frac{\pi}{4} d^2 + (\pi + 1) d$, und ersetzt man π hierin durch $\frac{22}{7}$, so ist die nach d quadratische Gleichung

[1]) Heron, *Geometria* 101, 7—9 (ed. Hultsch) pag. 133 lin. 10—23. Das ganze Kapitel 101 trägt in der ältesten und besten Handschrift den Titel: ὅρος κύκλου εὑρεθεὶς ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος.

$$\frac{11}{14}d^2 + \frac{29}{7}d = S$$

der Auflösung unterbreitet. Nun sind von vornherein zwei Wege zur Auflösung vorhanden. Entweder man dividiert die Gleichung durch $\frac{11}{14}$ um eine neue Gleichung zu erhalten, in welcher das quadratische Glied den Koeffizienten 1 besitzt, oder man vervielfacht die Gleichung mit einer derartigen ganzen Zahl, daß im Produkte das quadratische Glied einen ganzzahligen quadratischen Koeffizienten besitze, während auch im übrigen nur ganzzahlige Koeffizienten auftreten. Den letzteren Weg wird vorziehen, wer das Rechnen mit Brüchen so lange als möglich hinausschiebt. Befolgen wir ihn, so haben wir mit 14 mal 11 zu vervielfachen und erhalten $121d^2 + 638d = 154S$, daraus ferner $121d^2 + 638d + 841 = 154S + 841$ oder $(11d + 29)^2 = 154S + 841$. Daraus entsteht der Reihe nach $11d + 29 = \sqrt{154S + 841}$, $11d = \sqrt{154S + 841} - 29$, endlich mit Heron $d = \frac{\sqrt{154S + 841} - 29}{11}$. Damit ist also der Beweis geliefert, daß jedenfalls Heron die unreine quadratische Gleichung $ax^2 + bx = c$ bereits als Rechnungsaufgabe betrachtete, wenn man Euklid (S. 285) und Archimed (S. 316) diese Kenntnis zuzugestehen sich nicht entschließen wollte. Von Heron steht es jetzt fest, daß er die unreine quadratische Gleichung $ax^2 + bx = c$ zu lösen verstand, und daß die Ergänzung zu einem vollständigen Quadrate auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens so erfolgte, daß $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ gesetzt wurde, woraus

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

gefolgert wurde, nachdem schon am Anfange, wenn nötig, solche Multiplikationen vorgenommen waren, welche a, b, c zu ganzen Zahlen zu machen sich eigneten.

Allerdings setzen diese Schlüsse, deren große Tragweite niemand verkennen wird, Eines voraus: daß Heron wirklich der Urheber der besprochenen Aufgabe samt ihrer Auflösung war. Wir sehen jedoch keine Veranlassung dieser Voraussetzung zu widersprechen. Wir haben zu zeigen gesucht, daß schon Euklid unreine quadratische Gleichungen, allerdings in vollständig geometrischem Gewande, nicht fremd waren. Die Aufgabe, an welche wir gegenwärtig unsere Folgerungen knüpften, steht in derjenigen Sammlung heronischer Schriften, welche nächst der Vermessungslehre die verhältnismäßig größte Zuverlässigkeit besitzt. Sie steht mitten unter anderen Aufgaben voll-

kommen heronischen Gepräges. Sie ist so gefaßt, daß erst eine kleine Überlegung die Überzeugung beibringen kann, daß die Stelle überhaupt richtig ist und auf einer quadratischen Gleichung beruht, ein in unseren Augen sehr schwer wiegender Grund spätere Einschiebung auszuschließen. Und zu allen diesen die bestimmte Aufgabe betreffenden Erwägungen kommt eine allgemeine Erscheinung hinzu, deren wiederholter Erwähnung wir uns nicht enthalten können: die Entwicklungen Herons sind in den verschiedensten Kapiteln so aneinander gereiht, daß man sich dem Gedanken nicht verschließen kann, jener Mathematiker habe eine Formel aus der anderen gleichungsmäßig hergeleitet, nicht eine jede für sich geometrisch ermittelt, und diese Überzeugung bricht sich insbesondere bei den Aufgaben Bahn, in welchen der Kreis in Betracht kommt.

So haben wir mit steigender Achtung die Leistungen Herons von Alexandria durchmustert, des Mannes, der es reichlich verdiente, daß seine Schriften als Lehrgebäude der Geodäsie durch viele, viele Jahrhunderte unmittelbar oder mittelbar ihre Wirksamkeit behielten. Er ist und bleibt uns der vorzugsweise Vertreter antiker Feldmeßkunst und Feldmeßwissenschaft, wenn ersteres Wort uns die Lehre von den eigentlichen feldmesserischen Operationen, letzteres die von den anzuwendenden Formeln bedeuten soll. Er ist uns aber auch der Vertreter einer entwickelten Rechenkunst bis zur Ausziehung von Quadratwurzeln und Kubikwurzeln, der Vertreter einer eigentlichen Algebra, soweit von einer solchen ohne Anwendung symbolischer Zeichen die Rede sein kann, bis zur Auflösung unreiner quadratischen Gleichungen einschließlich.

20. Kapitel.

Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus.

Kurze Zeit nach der Blüte des hervorragenden Geodäten, mit welchem wir uns in zwei Kapiteln beschäftigt haben, lebte wahrscheinlich Geminus von Rhodos. Er schrieb eine Einleitung in die Astronomie, *εἰςαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα*, welche zwar erhalten ist[1]), aber um ihres eigentlichen Inhaltes willen uns nicht weiter be-

[1]) Dieses Werk ist mehrfach gedruckt, z. B. mit französischer Übersetzung von Halma in dessen Ausgabe des Ptolemäus hinter dem Kanon desselben. Paris 1819. Die letzte Ausgabe mit deutscher Übersetzung von Karl Manitius. Leipzig 1898. Über das mathematische Werk des Geminus ist ziemlich abschließend Carl Tittel, *De Gemini Stoici studiis mathematicis*. Leipzig 1895.

schäftigen darf, als daß wir bemerken, daß darin eine gute Darstellung der Sonnentheorie des Hipparch sich findet[1]), allerdings ohne daß der Name ihres Urhebers dabei genannt wäre. Außerdem verfaßte er ein leider verlorenes mathematisches Werk von fast unbekanntem Titel und Inhalte. Unser Bedauern über den Verlust gründet sich auf etwa 16 Stellen, in welchen Proklus in seinem Kommentare zu den euklidischen Elementen aus Geminus geschöpft hat, auf andere, die bei Eutokius sich erhalten haben, und deren zum Teil geschichtlich wertvollen Inhalt wir verschiedentlich zu benutzen Gelegenheit fanden. Ein eigentlich mathematisch-historisches Werk hat freilich Geminus gewiß nicht geschrieben, wenn man auch früher dieser Annahme zuneigte[2]). Das ist aus dem Mathematikerverzeichnisse bei Proklus gefolgert worden[3]). Wenn Proklus dort erklärt, die Schriftsteller über Geschichte der Mathematik hätten die Entwicklung bis dahin, d. h. bis kurz vor Euklid geschildert, wenn er dann in demselben Kommentare aus Geminus Auszüge gibt, welche für die Zeitbestimmung des Nikomedes, des Diokles, des Perseus verwertbar waren, so ist eben das Werk des Geminus eine Geschichte nicht gewesen. Auch die nähere Prüfung der Notizen aus Geminus selbst würde zu der gleichen Schlußfolgerung führen. Sie sind gewiß nicht von der Art, wie man sie in einem Geschichtswerke suchen würde, sie haben ihre Bedeutsamkeit für historische Zwecke nur dadurch erlangt, daß in ihnen Namen vorkommen, daß also die Träger dieser Namen, beziehungsweise die Erfinder krummer Linien, welche Geminus nennt, früher als er gelebt haben müssen, daß seine genau ermittelte Lebenszeit daher eine untere Grenze für die anderer bildet.

Um so notwendiger ist es in dieser Ermittlung jeden Zweifel auszuschließen. Man hat die Zeit, zu welcher Geminus schrieb, regelmäßig dem 6. Kapitel seiner Einleitung in die Astronomie entnommen. Dort heißt es[4]): Die Griechen nehmen auf die Ägypter und Eudoxus sich stützend an, das Isisfest treffe mit dem kürzesten Tage überein. Das ist vor 120 Jahren einmal so gewesen, aber alle vier Jahre verschiebt sich die Übereinstimmung um einen Tag und beträgt jetzt einen Monat.

Der Nutzen, welcher aus dieser Angabe zu ziehen sein kann, ist augenscheinlich. Weiß man, wann das Fest der Isis nach ägyptischem Kalender stattfand, weiß man ferner, wann das betreffende ägyptische

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 201. [2]) Montucla, *Histoire des Mathématiques* I, 266. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen 6. [4]) Unsere Übersetzung ist nicht wörtlich, kürzt vielmehr die Stelle wesentlich ohne jedoch den Sinn zu verändern. Vgl. ed. Halma pag. 43.

Datum genau auf das Wintersolstitium fiel, so hat man von dem so gewonnenen Jahre nur 120 Jahre weiter zu zählen, um zu der Zeit zu gelangen, zu welcher Geminus seine Einleitung in die Astronomie verfaßte. Diese Rechnung hat man angestellt und ist zu zwei sehr voneinander abweichenden Ergebnissen gekommen. Ein gelehrter Chronologe, Mitglied des Jesuitenordens am Anfange des XVII. S., Denis Petau[1]), hat in dem Isisfeste die Feier der Auffindung des Osiris erkannt, welche in Ägypten vom 17. bis zum 20. Athyr begangen wurde. Diese Feier, d. h. der 17. Athyr, fiel 197 auf das Wintersolstitium und die Abfassung der Einleitung in die Astronomie 120 Jahre später auf 77 v. Chr. Dagegen hat am Ende des XVII. S. ein anderer Gelehrter, Bonjour, folgende Ansicht begründet[2]). Nach römischer Überlieferung ist ein Isisfest vom 1. bis zum 5. Athyr gefeiert worden; der 1. Athyr fiel 257 auf das Wintersolstitium, und somit geben 120 Jahre weiter die Jahreszahl 137, in welcher Geminus geschrieben haben muß. Mit davon verschiedenen Gründen ist ein späterer Forscher gleichfalls zu dem Jahre 140 gekommen, auf welches die Blüte des Geminus zu setzen sei[3]). Zwischen diesen beiden Möglichkeiten hat man sich zu entscheiden, und wir tragen Bedenken Geminus, welcher nach Hipparch gelebt haben muß, um dessen Sonnentheorie, wie wir zu Anfang bemerkten, deutlich darzustellen, der auch Hipparch in seiner Einleitung in die Astronomie einmal mit Namen nennt[4]), während die Beobachtungen Hipparchs von 161 bis 126 fallen, früher als 77 als Schriftsteller anzunehmen[5]). Das zweite Datum, dem wir in unserer Anordnung des Stoffes folgten, indem wir sonst Geminus vor Heron hätten nennen müssen, steht auch im Einklang mit anderen Umständen, die für sich allein nicht entscheidend gewesen wären. Geminus nennt in seiner Einleitung in

---

[1]) Petavius, *De doctrina temporum* (Paris 1627), Lib. II, cap. 6, § 4 und desselben Verfassers *Uranologion sive systema variorum autorum qui de sphaera ac sideribus eorum motibus graece commentati sunt* (Paris 1630) in den Anmerkungen zu der dort abgedruckten Schrift des Geminus an dem betreffenden Orte. [2]) Bonjour, *De nomine Josephi a Pharaone imposito*. Rom 1696. Vgl. eine Besprechung dieses Buches von Heinr. Pipping in den *Acta Eruditorum* für 1697, pag. 6 sqq. [3]) H. Brandes, Ueber das Zeitalter des Astronomen Geminus und des Geographen Eudoxus in den Jahnschen Jahrbüchern XIII, Supplement S. 199—230, besonders 219. [4]) *Εἰςαγωγή κ. τ. λ.* (ed. Halma) pag. 19. [5]) Auch Aug. Böckh, Ueber die vierjährigen Sonnenkreise der Alten. Berlin 1863, S. 8 flgg. und S. 200 flgg. hat sich in ausführlicher Begründung für diese Meinung entschieden. Dagegen vermutet F. Blaß, *Dissertatio de Gemino et Posidonio* (Kiel 1883) eine noch spätere Lebenszeit des Geminus, nur durch das II. nachchristliche Jahrhundert als *terminus ad quem* begrenzt, weil Geminus bei Alexander Aphrodisiacus genannt ist.

die Astronomie Eratosthenes[1]), der etwa 194 starb, den Geschichtsschreiber Polybius[2]), dessen Universalgeschichte, *ἱστορία καθολική*, bis 146 herabreicht, Krates den Grammatiker[3]), wahrscheinlich denjenigen dieses Namens, der aus Mallus 167 nach Rom kam, wo er etwa 144 starb, den Philosophen Boethus, welcher einen Kommentar zu Aratus geschrieben haben muß[4]), den man aber nicht bestimmt zu identifizieren vermag; sie alle können im Jahre 137 ebenso gut wie im Jahre 77 genannt worden sein. Auch darauf wird man kein zu großes Gewicht legen dürfen, daß die Beobachtungen, von welchen Geminus Gebrauch macht, auf Rhodos, Alexandria und Rom Bezug nehmen. Ein Alexandriner, das haben wir (S. 366) erörtert, würde kaum schon 137 Rom seine Aufmerksamkeit in so hohem Grade gewidmet haben; anders ein Rhodier, nachdem seine Landsleute die Bundesgenossen der Römer seit dem syrischen Kriege im Jahre 190 v. Chr. waren. Aber folgendes gibt endgültig den Ausschlag. Nach einer Angabe des Simplicius im Kommentare zum II. Buche der aristotelischen Physik fertigte Geminus einen Kommentar zu den *μετεωρολογικά* des Posidonius[5]). Nun gab es allerdings einen Posidonius von Alexandria (S. 198), Schüler des 259 verstorbenen Zenon, aber ihn würde Simplicius nicht ohne sonstige Bezeichnung nur Posidonius genannt haben. Dazu mußte die Persönlichkeit eine allgemein bekannte sein, und von einer solchen haben wir Kenntnis: Posidonius von Rhodos[6]), der Lehrer Ciceros, der Freund des Pompejus, der auf der Insel Rhodos gestorben ist, auf welcher Geminus allem Anscheine nach lebte. Dieser Posidonius, der wiederholt durch Heron erwähnt worden ist, dem man eine Definition der Parallellinien verdankt (S. 388), wird frühestens um das Jahr 90 als Schriftsteller aufgetreten sein, und wer aus seinem Werke einen Auszug machte, kann nur 77, nicht 137 eine Einleitung in die Astronomie verfaßt haben. Damit stimmt aber endlich noch eine Tatsache überein. Die 120 Jahre rückwärts von Geminus fallen entweder auf 257 oder auf 197. Nach der ersteren Annahme würde das Edikt von Kanopus vom 7. März 238 die 120 Jahre unterbrochen und vermöge der in ihm angeordneten Einrichtung des Schaltjahres, so lange oder so kurz es in Gültigkeit war, die 30tägige Verschiebung des Isisfestes binnen 120 Jahren zu einer Unwahrheit gemacht haben. Rechnet man dagegen jene 120 Jahre von 197 an, so ist dem nicht so. Man hat vielmehr alsdann eine Grenze gewonnen, wie lange das Edikt von

[1]) Ed. Halma pag. 44. [2]) Ebenda pag. 67. [3]) Ebenda pag. 30, 31, 32, 66. [4]) Ebenda pag. 76. [5]) Aug. Böckh l. c. S. 13. [6]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 167.

Kanopus, von welchem man ohnedies weiß, daß es in Vergessenheit geriet, wirksam gewesen sein kann: von 238 an höchstens durch 40 Jahre hindurch.

Eine Voraussetzung liegt allerdings unserer bisherigen Darstellung zugrunde: daß es nur einen Geminus gab und nicht deren zwei, einen Mathematiker und einen Astronomen[1]). Wer dieser Meinung sich anschließt, verzichtet auf die Ausnutzung der Isagoge zur Bestimmung der Lebenszeit des Mathematikers Geminus und kann daher unseren Entwicklungen nicht den geringsten Wert beilegen. Wir vermögen uns von dem erhobenen Zweifel nicht beirren zu lassen und glauben nach wie vor an die Übereinstimmung des Mathematikers mit dem Astronomen. Wer Geminus war, ist nicht bekannt. Der Name besitzt einen entschieden römischen Klang, und wenn auch die Rechtschreibung *Γεμῖνος*, deren Proklus wie Pappus sich bedient, der römischen Aussprache widerspricht, so kann eine Ausgleichung darin gefunden werden, daß Simplicius den Ton auf die erste Silbe, *Γέμινος*, legt. Man hat demzufolge in Geminus wohl den Freigelassenen eines edlen Römers erkennen wollen.

Das mathematische Hauptwerk des Geminus kann vielleicht den Titel: Über die gesetzmäßige Gliederung der Mathematik geführt haben[2]). Von dessen Inhalt haben wir in negativer Weise behauptet, er sei nicht wesentlich geschichtlich gewesen. Es war auch jedenfalls kein eigentliches Lehrbuch der Mathematik. Geminus wollte vielmehr nach aller Wahrscheinlichkeit die Anfeindungen, welche Zenon von Elea und dessen Nachfolger gegen den logischen Aufbau der Mathematik sich gestattet hatten, widerlegen. Man erkennt diesen Zweck aus der Art, wie das Werk des Geminus benutzt worden ist. Proklus entnimmt ihm gern die Entscheidung, wo es sich um Streitfragen mehr allgemein logischer als mathematischer Natur handelt, um geometrische Erklärungen, Grundsätze und dergleichen. Eine einzige geometrische Entdeckung des Geminus kennen wir aus Proklus, wenn sie wirklich ihm zuzuschreiben ist, woran eine spätere Stelle bei Proklus wieder zweifeln läßt. Dieser sagt nämlich[3]): „Unter den

---

[1]) Vgl. K. Manitius, Des Geminos Isagoge, Sonderabdruck aus den Commentationes Fleckeisenianae (Leipzig 1890) mit der Besprechung der Abhandlung in Zeitschr. Math. Phys. XXXVI. Histor.-literar. Abtlg. S. 96—97. In seiner Ausgabe der Isagoge von 1898 hat Manitius die 1890 ausgesprochenen Ansichten wesentlich abgeändert und sieht seitdem in dem erhaltenen Texte einen späten in Konstantinopel angefertigten Auszug aus der ursprünglichen Isagoge des Geminus von Rhodos. [2]) Pappus VIII, 3 (ed. Hultsch) 1026 heißt es: *Γεμῖνος ὁ μαθηματικὸς ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως.* [3]) Proklus (ed. Friedlein) 112—113 und 251 lin. 2—11. Bretschneider 177.

auf Körpern konstruierten Linien sind die einen in ihren Teilen gleich und ähnlich wie die zylindrischen Schraubenlinien, andere dagegen nicht, nämlich alle übrigen. Es ergibt sich nun aus diesen Unterschieden, daß es nur drei Linien gibt, welche in allen ihren Teilen gleich und ähnlich sind, die Gerade, der Kreis und die zylindrische Schraubenlinie, von denen zwei ganz in der Ebene liegende einfache sind, eine aber eine gemischte ist und auf einem Körper liegt. Auch dies beweist ganz klar Geminus, nachdem er vorher gezeigt hat, daß wenn an eine solche in allen Teilen gleich und ähnliche Linie von einem Punkte aus zwei Gerade gezogen werden, die mit ihr gleiche Winkel bilden, diese Geraden einander gleich sind."

Vielleicht darf als mit Geminus annähernd gleichaltrig Theodosius[1]) genannt werden. Wenigstens kommt der Name dieses von Ptolemäus benutzten Mathematikers und Astronomen bei Strabon und Vitruvius vor, so daß er vor Christi Geburt gelebt haben muß, und dem Gegenstande seiner Untersuchungen nach etwa im letzten Jahrhunderte dieser Zeit. Als Heimat des Theodosius gilt alsdann Tripolis an der phönikischen Küste. Seine Sphärik in drei Büchern ist eine ziemlich vollständige Geometrie der Kugeloberfläche mit Ausschluß des messenden, also trigonometrischen Teiles. Er stützt sich, ohne seine Vorgänger zu nennen, vielfach auf dieselben, wie es bei dem Verfasser eines Lehrbuches Sitte war, auch wohl noch ist. Insbesondere hat die Abhängigkeit von den Phaenomena Euklids (S. 293) nachgewiesen werden können[2]). Wir bemerken, daß die Vermutung gleichfalls ausgesprochen worden ist[3]), der Mathematiker Theodosius sei von Theodosius von Tripolis verschieden. Er stamme vielmehr aus Bithynien und sei Landsmann sowohl als Zeitgenosse des Hipparch (S. 361) gewesen.

Dionysodorus wird von Heron (S. 380), von Strabon[4]) und

---

[1]) Vgl. Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harless) IV, 21. Die Sphärik ist griechisch mit lateinischer Übersetzung von Pena (Paris 1558) herausgegeben. Eine deutsche Übersetzung von Ernst Nizze, Stralsund 1826. Von ebendemselben eine griechische Textausgabe mit lateinischer Übersetzung, Berlin 1852. Wertvolle Untersuchungen bei Nokk, Ueber die Sphärik des Theodosius, Programm des Bruchsaler Gymnasiums 1847. Hultsch hat im X. Bande der Abhandlungen der philol.-hist. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig (1887) Scholien zur Sphärik des Theodosius herausgegeben, welche teils dem zehnten nachchristlichen Jahrhundert angehören, teils mindestens bis zum dritten Jahrhundert zurückgehen. [2]) Nokk l. c. und Heiberg, Euklidstudien S. 43—46. [3]) *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne par* Paul Tannery. Paris 1893, pag. 36—37 und Axel Anthon Björnbo in den Abhandlungen zur Geschichte der mathemat. Wissenschaften, XIV, S. 64—65. Leipzig 1902. [4]) Strabo XII, 3.

von Plinius[1]) genannt, muß also vor Christus gelebt haben. Strabon berichtet, Amisus im Pontus am asiatischen Südufer des Schwarzen Meeres sei seine Heimat gewesen. Plinius nennt ihn von Melos, so daß möglicherweise zwei verschiedene Persönlichkeiten gemeint sein können, und weiß eine Wundergeschichte zu erzählen, in welcher er eine Rolle spielt. Dem Mathematiker dürfte außer der von Heron erwähnten Schrift über die Spiren die Lösung der archimedischen Aufgabe der Kugelteilung nach gegebenem Verhältnisse der Abschnitte interessant sein, zu welcher Dionysodorus, nach den Mitteilungen des Eutokius[2]), den Durchschnitt einer Parabel mit einer Hyperbel benutzte. Man hat freilich Dionysodor auch weiter rückwärts zwischen Archimed und Apollonius einzuschieben Veranlassung genommen, wodurch die Lebenszeit des Perseus als Erfinder der Spiren ebenfalls um einige Jahrzehnte zurückdatiert werden müßte[3]).

Festen chronologischen Boden unter den Füßen gewinnen wir mit Menelaus von Alexandria. Zwei in Rom angestellte Beobachtungen dieses Astronomen aus dem ersten Regierungsjahre Trajans, d. h. aus dem Jahre 98 n. Chr., sind im Almageste erhalten[4]), und so kann über die Zeit der wissenschaftlichen Tätigkeit des Menelaus kein Zweifel stattfinden.

Er verfaßte sechs Bücher über die Berechnung der Sehnen, welche aber gleich dem ähnlichen Werke seines Vorgängers Hipparch verloren gegangen sind. Seine drei Bücher der Sphärik sind im griechischen Originaltexte gleichfalls nicht bekannt, doch sind einander gegenseitig bestätigende arabische und hebräische Übersetzungen aufgefunden worden, nach welchen seit dem XII. Jahrhunderte weitere lateinische Übersetzungen sich herstellen ließen, welche mehrfach herausgegeben sind[5]). Die Sphärik des Menelaus ist im Gegensatze zu der des Theodosius eine Art von sphärischer Trigonometrie. Wir meinen damit, daß Menelaus der Erste war, welcher die Lehre vom sphärischen Dreieck sowie die sphärische Trigonometrie aus der früheren ganz stereometrisch gehaltenen Sphärik aber auch aus der Astronomie ausgeschieden hat. Sein I. Buch ist dabei durchaus dem I. Buche

[1]) Plinius, *Historia naturalis* II, 109. [2]) Archimed (ed. Heiberg) III, 180 sqq. [3]) Wilhelm Schmidt, Über den griechischen Mathematiker Dionysodorus. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, Bd. IV, 321—325 (1904). [4]) *Ptolemaei Almagestum* VII, 3 (ed. Halma) T. II, pag. 25 und 27. [5]) Die noch immer beste Übersetzung von Halley. Oxford 1758. Die neuesten Untersuchungen über Menelaus bei Ad. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 14—18 (1900) und besonders bei Axel Anthon Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften XIV, 1—154 (1902), an welche wir uns wesentlich anschließen, mit Ausnahme der Zurückdatierung des sogenannten Satzes des Menelaus bis auf Hipparch.

der Euklidischen Elemente nachgebildet, dessen Dreieckssätze Menelaus aus der Ebene auf die Kugel übertrug. Dazu bedurfte es einer Definition des sphärischen aus Bögen größter Kreise bestehenden Dreiecks, und Menelaus gab sie, gab zugleich dem gebildeten Dreiecke den Namen *τρίπλευρον* im Gegensatze zu *τρίγωνον* als dem Namen des ebenen Dreiecks. Dann finden wir die Sätze, daß im sphärischen Dreiecke gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, daß der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, nebst der Umkehrung der beiden Sätze. Die Summe zweier Seiten wird als größer als die dritte Seite erkannt, die Summe der drei Winkel als größer als 2 Rechte, während der die Winkelsumme nach oben begrenzende Satz, sie sei kleiner als 6 Rechte, nicht vorkommt. Menelaus versucht niemals einen Deckungsbeweis für stückweise einander gleiche Dreiecke zu führen, wird also vermutlich des Unterschiedes zwischen Kongruenz und Symmetrie auf der Kugel bewußt gewesen sein. Das II. Buch ist nur mittelbar der Sphärik gewidmet und hauptsächlich astronomischen Inhaltes, so daß wir bei unserer Ausschaltung der Astronomie berechtigt, wenn nicht verpflichtet sind, darüber hinwegzugehen. Das III. Buch enthält die eigentliche Trigonometrie und gründet sie auf den ersten Satz des Buches d. i. auf den sogenannten Satz des Menelaus, der zwar unmittelbar als sphärischer Satz ausgesprochen ist, bei dessen Beweis aber der planimetrische Satz des Menelaus in Anwendung tritt. Der planimetrische Satz spricht sich dahin aus, daß bei Durchschneidung der drei Seiten eines ebenen geradlinigen Dreiecks durch eine Gerade Abschnitte erscheinen, welche das gleiche Produkt aus je drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemein haben, hervorbringen; der sphärische Satz verändert diesen Ausspruch nur dahin, daß die Abschnitte der Bögen durch die Sehnen der verdoppelten Abschnitte ersetzt werden. Menelaus selbst hat freilich so wenig wie seine Nachfolger bis in das XVI. S. seine Sätze in dieser Weise ausgesprochen. Es heißt niemals $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ oder das Parallelepipedon der betreffenden Abschnitte habe gleichen Inhalt, sondern das Verhältnis $a_1 : b_1 = b_2 \cdot b_3 : a_2 \cdot a_3$ ist gebildet und so ausgesprochen, daß gesagt wird, a_1 stehe zu b_1 in dem zusammengesetzten Verhältnisse von b_2 zu a_2 und von b_3 zu a_3. Der Name, unter welchem der Satz bekannt blieb, ist der des Satzes von den sechs Größen, *regula sex quantitatum*. Das Vorkommen zusammengesetzter Verhältnisse bei Euklid und Archimed ist uns (S. 266) bekannt geworden. Wenn der planimetrische Satz in der Sphärik nicht bewiesen ist, so muß daraus gefolgert werden, er sei schon bekannt gewesen, mag man, wozu wir uns nicht leicht entschließen können, annehmen, Hipparch habe ihn bereits besessen und benutzt, oder mag

man der Ansicht sein, Menelaus habe auch eine Schrift über ebene Dreiecke verfaßt, in welcher der planimetrische Satz vorkam. Als Stütze dieser letzteren Ansicht dient ein bei Proklus erhaltener Beweis des Menelaus zu einem Dreieckssatze und die Tatsache, daß ein Araber Menelaus als Verfasser von Elementen der Geometrie genannt hat. Von anderen im III. Buche der Sphärik vorkommenden Sätzen sei noch der 5. Satz erwähnt, der die Projektivität der Doppelverhältnisse enthält und zwar ohne jeden Beweis, mithin als altbekannt, der 9. Satz, daß die drei Halbierungsbogen der Winkel, der 10. Satz, daß die drei Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks je einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Die entsprechenden planimetrischen Sätze waren längst, der zweite vermutlich seit Archimed (S. 298) vorhanden.

Menelaus hat auch in der Kurvenlehre sich Verdienste erworben. Er hat, wie Pappus ungemein kurz sich fassend und deshalb für uns sehr fruchtlos erzählt[1]), einer krummen Linie, mit welcher vorher zwei uns gänzlich unbekannte Geometer Demetrius von Alexandria und Philo von Tyana sich beschäftigten, seine besondere Aufmerksamkeit zugewandt und derselben den Namen der außergewöhnlichen oder seltsamen, *παράδοξος γραμμή*, beigelegt.

Klaudius Ptolemäus führte zu Ende, was Hipparch und Menelaus vor ihm begonnen hatten. Er schuf für den astronomischen Gebrauch eine Trigonometrie von so vollendeter Form, daß sie weit über ein Jahrtausend nicht überboten wurde und nicht weniger als die unter dem Namen des ptolemäischen Weltsystems bekannte Lehre von den Bewegungen der Gestirne aber mit besserem Erfolge die Wissenschaft beherrschte. Beides, das astronomische und das trigonometrische Lehrgebäude, ist vereinigt in den 13 Büchern der großen Zusammenstellung, *μεγάλη σύνταξις*[2]). Als dieses Werk später, wie wir im 32. Kapitel zu schildern haben werden, aus dem Griechischen ins Arabische, aus dieser Sprache noch später ins Lateinische übersetzt wurde, erhielt es den durch Zusammenschweißung des arabischen Artikels al mit dem griechischen Superlativ *μέγιστος* gebildeten Bastardnamen Almagest, unter welchem es meistens bekannt ist, und dessen auch wir uns bedienen, einigemal weiter oben schon vorgreifend bedient haben.

---

[1]) Pappus IV, 30, (ed. Hultsch) pag. 270. [2]) Die bequemste Ausgabe ist die von Halma unter Beigabe einer französischen Übersetzung in zwei Quartbänden veranstaltete. Paris 1813—16. Eine neue Textausgabe aber leider ohne Übersetzung veranstaltete Heiberg 1899—1903. Wichtige Untersuchungen über den Almagest namentlich nach seiner astronomischen Bedeutung in *Recherches sur l'histoire de l'astronomie* par Paul Tannery. Paris 1893.

Im Almageste sind viele astronomische Beobachtungen verwertet, teils dem Ptolemäus eigentümliche, teils von anderen herrührend. Die späteste der so aufgenommenen Datierungen ist die einer Venusbeobachtung aus dem 14. Regierungsjahre des Antoninus[1]), also aus dem Jahre 151, und die Abfassung des Almagestes muß somit später fallen. Andererseits ist die früheste eigene Beobachtung des Ptolemäus, von der wir wissen, im Jahre 125 angestellt und damit erreichen wir als engste Grenzen seiner Wirksamkeit die Jahre 125 bis 141 oder 151. Das ist aber neben einem Aufenthalte in Alexandria auch alles, was wir von den persönlichen Verhältnissen des Ptolemäus mit Gewißheit aussagen können. Nach später aus arabischer Quelle geflossener Angabe[2]) wäre Ptolemäus in Alexandria geboren und aufgewachsen; er sei, heißt es dort, 78 Jahre alt geworden; auch weiß der Bericht von seiner hellen Farbe, seinen kleinen Füßen, einem roten Muttermale an der rechten Kinnlade, dem schwarzen, dichten Barte, seinen Lebensgewohnheiten und Charaktereigenschaften so viel zu erzählen, daß man sehr in Zweifel gerät, soll man der Genauigkeit trauen oder der Übergenauigkeit mißtrauen. Eine gründliche Untersuchung[3]) des arabischen Berichtes hat ergeben, daß derselbe aus einer 1053 geschriebenen Spruchsammlung eines Emir Abû'l Wafâ Mubaschschir ben Fatik stammt und auf ein ähnliches im IX. Jahrhundert entstandenes Werk des Ḥunain ibn Isḥâḳ zurückgeht. Der 78jährigen Lebensdauer des Ptolemäus, den man danach etwa von 100 bis 178 anzusetzen hätte, dürfte am ersten zu trauen sein. Die genaue Personalbeschreibung wird damit in Zusammenhang gebracht, daß gerade im II. Jahrhundert physiognomische Studien bei den Griechen in Blüte standen, und wie man aus den Gesichtszügen geistige Eigenschaften herauslas, mag man aus bekannten schriftstellerischen Leistungen auf ihnen entsprechende Gesichtszüge geschlossen haben. Daß Ptolemäus in Alexandria geboren sei, steht nicht bei Emir Abû'l Wafâ, sondern ist Zusatz des Gerhard von Cremona. Glaubwürdiger ist eine Angabe des byzantinischen Gelehrten Theodorus Meliteniota (um 1361), Ptolemäus stamme aus der Stadt Ptolemais Hermeiu.

Wir haben es hier zunächst mit dem 9. Kapitel des I. Buches

---

[1]) Da die anderen unter der Regierung des Antoninus gemachten Beobachtungen den allerersten Jahren jener Regierung angehören, so mutmaßt Franz Boll, Studien über Klaudius Ptolemaeus (XXI. Supplementband von Fleckeisen und Masius Jahrb. f. class. Philol.) jene letzte Beobachtung gehöre nicht dem $\iota\delta = 14$. sondern dem $\delta = 4$. Jahre an, sei also vom Jahre 141. [2]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese etc.* Roma 1851, pag. 16—17. [3]) Boll l. c. S. 58—63.

des Almagestes zu tun, dem wir die Berechnung einer Sehnentafel zu entnehmen haben[1]). Ptolemäus teilt den Kreisumfang in 360 Teile, τμήματα, und jeden dieser Teile halbiert er zunächst nochmals. Ferner teilt er den Durchmesser des Kreises gleichfalls und zwar in 120 Teile, τμήματα, setzt aber hier die Teilung sogleich sexagesimal fort. Die Unterabteilungen bringen 60 erste, 60 zweite Teile hervor, welche in den lateinischen Übersetzungen zu *partes minutae primae* und *partes minutae secundae* wurden, woraus andere Sprachen ihre Minuten und Sekunden hernahmen. Ein Neues hat Ptolemäus mit diesen Teilungen gewiß nicht gegeben. Wie die Gradeinteilung des Kreises über Geminus, über Hipparch bis auf Hypsikles in Alexandria verfolgbar nach Babylon als Mutterland hinweist, so dürfte ähnliches für die Teilung des Kreishalbmessers nach sexagesimaler Grundzahl gelten müssen, die jedenfalls seinen alexandrinischen Vorgängern bekannt gewesen sein wird. Das Verdienst des Ptolemäus liegt dagegen in seiner Sehnenberechnung selbst. Theon von Alexandria, der Kommentator des Almagestes, sagt uns ausdrücklich[2]), Hipparch habe die Lehre von den Sehnen in 12 Büchern und Menelaus in sechs Büchern abgehandelt, man müsse aber erstaunen, wie bequem Ptolemäus mit Hilfe weniger und leichter Sätze ihre Werte gefunden habe. Den Ausgangspunkt bildet der sogenannte ptolemäische Lehrsatz vom Sehnenviereck[3]), daß das Produkt der Diagonalen der Summe der Produkte je zweier einander gegenüberliegender Seiten gleich sei, und neben diesem Satze die Kenntnis einiger ganz bestimmter Sehnen, nämlich der Seiten der regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, Zehnecke als der Sehnen von Bögen von 120, von 90, von 72, von 60, von 36 Bogengraden jedesmal in Teilen des Durchmessers, beziehungsweise des Halbmessers des Kreises dargestellt.

Nun folgt aber aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihres Unterschiedes, aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halb so großen Bogens, aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihrer Summe.

Die Beweise der betreffenden Sätze bestehen dem Sinne nach in folgendem. Aus (Fig. 67) $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ soll $\beta\gamma$ gefunden werden. Man zieht von α aus den Durchmesser $\alpha\delta$, der also 120 Teile enthält und vollendet das Sehnenviereck $\alpha\beta\gamma\delta$ nebst seinen Diagonalen. Nun ist $\gamma\delta = \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2}$, $\beta\delta = \sqrt{120^2 - \alpha\beta^2}$, $\alpha\gamma \cdot \beta\delta = \alpha\delta \cdot \beta\gamma$

[1]) Ein vortrefflicher Auszug von L. Ideler unter dem Titel: „Ueber die Trigonometrie der Alten" in Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde (Juli 1812). Bd. XXVI, 3—38. [2]) Theon Alexandrinus (ed. Halma) I, pag. 110. [3]) Almagest (ed. Halma) I, pag. 29.

$+ \alpha\beta \cdot \gamma\delta$ oder $\alpha\gamma \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\beta^2} = 120 \cdot \beta\gamma + \alpha\beta \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2}$, woraus $\beta\gamma$ gefunden werden kann.

Soll ferner (Fig. 68) aus $\beta\gamma$ die Sehne $\gamma\delta$ des halb so großen Bogens ermittelt werden, so zieht man den Durchmesser $\alpha\gamma$, außerdem $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$, schneidet auf dem Durchmesser $\alpha\gamma$ das Stück $\alpha\varepsilon = \alpha\beta$ ab, zieht $\delta\varepsilon$ und endlich $\delta\zeta$ senkrecht zum Durchmesser $\alpha\gamma$. Die Dreiecke $\beta\alpha\delta$, $\varepsilon\alpha\delta$ sind nun kongruent, weil die beiden gleichen in α ihre gemeinschaftliche Spitze besitzenden Winkel von gleichen Seiten gebildet werden. Demgemäß sind auch die dritten Seiten gleich $\beta\delta = \delta\varepsilon$, und da überdies $\beta\delta = \delta\gamma$ als Sehnen gleicher Bögen, so ist das Dreieck $\delta\varepsilon\gamma$ gleichschenklig, und die Senkrechte $\delta\zeta$ auf dessen Grundlinie halbiert dieselbe, d. h. es ist $\zeta\gamma = \frac{\varepsilon\gamma}{2} = \frac{\alpha\gamma - \alpha\varepsilon}{2} = \frac{120 - \alpha\beta}{2}$ $= 60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - \beta\gamma^2}$. Ferner sind die beiden rechtwinkligen, einen spitzen Winkel gemeinschaftlich enthaltenden Dreiecke $\gamma\delta\zeta$, $\gamma\alpha\delta$ ähnlich, also $\zeta\gamma : \gamma\delta = \gamma\delta : \alpha\gamma$ und $\gamma\delta^2 = \alpha\gamma \cdot \zeta\gamma$ $= 120\,[60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - \beta\gamma^2}]$, woraus endlich $\gamma\delta$ sich ergibt.

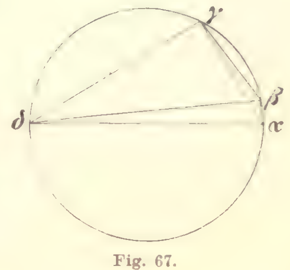


Fig. 67.

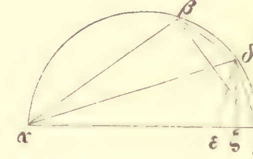


Fig. 68.

Die letzte Aufgabe ist die, (Fig. 69) aus den Sehnen $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ die Sehne $\alpha\gamma$ zu finden. Zu diesem Zwecke werden die Durchmesser $\alpha\delta$ und $\beta\varepsilon$, außerdem $\beta\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\varepsilon$ und $\delta\varepsilon$ gezogen, welche letztere wegen der Kongruenz der Dreiecke $\alpha\beta\zeta$, $\delta\varepsilon\zeta$ der $\alpha\beta$ gleich sein muß. Der auf das Sehnenviereck $\beta\gamma\delta\varepsilon$ angewandte ptolemäische Lehrsatz liefert nunmehr $\beta\delta \cdot \gamma\varepsilon = \beta\gamma \cdot \delta\varepsilon + \beta\varepsilon \cdot \gamma\delta$ oder

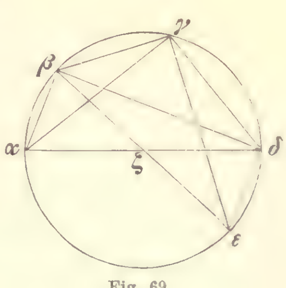


Fig. 69.

$$\sqrt{120^2 - \alpha\beta^2} \cdot \sqrt{120^2 - \beta\gamma^2} = \beta\gamma \cdot \alpha\beta + 120 \cdot \sqrt{120^2 - \alpha\gamma^2},$$

wodurch $\alpha\gamma$ bestimmt ist.

Zu den als bekannt vorausgesetzten Sehnen zurückkehrend erhält demnach Ptolemäus aus den Sehnen von 72^0 und von 60^0 die von $72^0 - 60^0$ oder von 12^0. Wiederholte Halbierung des Bogens lehrt alsdann die Sehne von 6^0, von 3^0, von $1\frac{1}{2}^0$, von $\frac{3}{4}^0$ kennen. Ptolemäus beabsichtigt aber die Sehnen der um je $\frac{1}{2}$ Grad steigenden

Bögen in eine Tabelle zu vereinigen, er bedarf also dazu in erster Linie der Kenntnis der Sehne von 1^0, und dazu verhilft ihm ein Vergleichungssatz von höchster Eleganz. Es seien (Fig. 70) zwei Bögen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ desselben Kreises gegeben, deren letzterer größer als der erstere, und es seien die Sehnen der einzelnen Bögen sowie der Summe der beiden gezogen, wobei wir zur Unterscheidung der Bögen und Sehnen jene z. B. als arcus $\alpha\beta$, diese als chorda $\alpha\beta$ oder als $\alpha\beta$ schlechtweg bezeichnen wollen. Der Winkel bei β werde durch die $\beta\delta$ halbiert; $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ werden gezogen, auch $\delta\zeta$ senkrecht zu $\alpha\gamma$, und mit $\delta\varepsilon$ d. h. mit der Entfernung des Punktes δ vom Durchschnitte der $\beta\delta$ mit der $\alpha\gamma$ als Halbmesser und mit δ als Mittelpunkt wird ein Kreisbogen beschrieben, der einesteils die $\delta\alpha$ andernteils die $\delta\zeta$, selbst oder in ihrer Verlängerung, in η und θ schneidet. Nach dem bekannten Satze von der Halbierung eines Dreieckswinkels ist $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$, aber $\alpha\beta < \beta\gamma$, also auch $\alpha\varepsilon < \varepsilon\gamma$ d. h. $\alpha\varepsilon$ ist weniger als die Hälfte von $\alpha\gamma$, ε fällt zwischen α und ζ und es ist demzufolge $\delta\alpha > \delta\varepsilon > \delta\zeta$, woraus weiter folgt, daß η auf $\delta\alpha$ selbst, θ auf der Verlängerung von $\delta\zeta$ liegen muß. Dann ist aber der Kreissektor $\delta\varepsilon\eta$ kleiner als das Dreieck $\delta\varepsilon\alpha$, und der Kreissektor $\delta\varepsilon\theta$ größer als das Dreieck $\delta\varepsilon\zeta$. Aus diesen Vergleichungen folgen die beiden anderen:

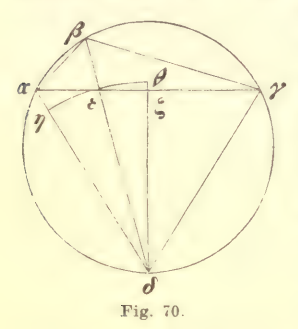


Fig. 70.

$$\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} < \frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} > \frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha},$$

aus deren Verbindung hervorgeht, daß

$$\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha} < \frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta}.$$

Aber $\frac{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\zeta}{\text{Dreieck } \delta\varepsilon\alpha} = \frac{\varepsilon\zeta}{\varepsilon\alpha}$ und $\frac{\text{Sektor } \delta\varepsilon\theta}{\text{Sektor } \delta\varepsilon\eta} = \frac{\text{arcus } \varepsilon\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}$. Die gewonnene Ungleichung heißt also auch $\frac{\varepsilon\zeta}{\varepsilon\alpha} < \frac{\text{arcus } \varepsilon\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}$. Wird beiderseits die Einheit hinzugefügt und alsdann verdoppelt, so entsteht

$$\frac{\alpha\gamma}{\varepsilon\alpha} < \frac{2 \text{ arcus } \eta\theta}{\text{arcus } \varepsilon\eta}.$$

Nun vermindert man wieder beiderseits um die Einheit und gewinnt damit $\frac{\gamma\varepsilon}{\alpha\varepsilon} < \frac{\text{arcus } \theta\varepsilon + \text{arcus } \theta\eta}{\text{arcus } \eta\varepsilon}$. Da aber weiter $\frac{\gamma\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$ und

$$\frac{\text{arcus } \theta\varepsilon + \text{arcus } \theta\eta}{\text{arcus } \eta\varepsilon} = \frac{\sphericalangle \beta\delta\gamma}{\sphericalangle \beta\delta\alpha} = \frac{\text{arcus } \beta\gamma}{\text{arcus } \alpha\beta},$$

so ist endlich

$$\frac{\text{chorda } \beta\gamma}{\text{chorda } \alpha\beta} < \frac{\text{arcus } \beta\gamma}{\text{arcus } \alpha\beta}$$

d. h. der Quotient der größeren Sehne durch die kleinere Sehne ist kleiner als der Quotient der von den Sehnen bespannten Bögen[1]). Man hat erkannt[2]), daß Aristarchus von Samos, ein Astronom, welcher um das Jahr 270 lebte und von Archimed erwähnt wird (S. 321), sich schon dieses Satzes bediente, wenn auch ohne ihn zu beweisen. Aus diesem letzteren Grunde haben wir darauf verzichtet, dort davon zu reden, wo es im 14. Kapitel der Zeitfolge nach hätte geschehen können. Werden nun Sehne und Bogen von 1^0 mit denen von $1\frac{1}{2}^0$ und von $\frac{3}{4}^0$ verglichen, so ergibt sich

$$\frac{\text{chorda } 1^0}{\text{chorda } \frac{3}{4}^0} < \frac{\text{arcus } 1^0}{\text{arcus } \frac{3}{4}^0} \quad \text{und} \quad \frac{\text{chorda } 1\frac{1}{2}^0}{\text{chorda } 1^0} < \frac{\text{arcus } 1\frac{1}{2}^0}{\text{arcus } 1^0}.$$

Aber $\frac{\text{arcus } 1^0}{\text{arcus } \frac{3}{4}^0} = \frac{4}{3}$, $\frac{\text{arcus } 1\frac{1}{2}^0}{\text{arcus } 1^0} = \frac{3}{2}$ und somit leicht

$$\frac{2}{3} \text{ chorda } 1\frac{1}{2}^0 < \text{chorda } 1^0 < \frac{4}{3} \text{ chorda } \frac{3}{4}^0.$$

Die beiden äußeren Werte heißen nun bis in den Sekunden übereinstimmend $1 \cdot 2' \cdot 50''$, und somit wird mit einer Genauigkeit, welche die Sekunden noch zuverlässig erscheinen läßt, auch der dazwischen liegende Wert chorda $1^0 = 1 \cdot 2' \cdot 50''$ sein müssen. Jetzt ist die Sehne von 1^0 und die von $1\frac{1}{2}^0$, folglich auch die Sehne von $\frac{1}{2}^0$ bekannt, und die Sehnen aller um je $\frac{1}{2}^0$ wachsenden Bögen von 0 bis 180^0 einschließlich können gefunden werden.

Sie alle hat Ptolemäus in seiner Sehnentafel vereinigt, größere Bögen ausschließend. Er tut dieses nicht etwa, weil die Sehne, die einen Bogen bespannt, der größer als der Halbkreis ist, zugleich auch zu einem anderen kleineren Bogen gehört, der den ersten zu einem ganzen Kreise ergänzt, sondern weil Bögen, die größer als der Halbkreis sind, bei ihm überhaupt nicht vorkommen. Wenigstens führt er diesen letzten Grund ausdrücklich an[3]), während wir den erstgenannten nicht bei ihm finden. Für die Auffindung der Sehnen von Bögen, welche zwischen zwei in der Tabelle befindlichen enthalten sind, sorgt eine weitere Kolumne der Proportionalteile oder,

[1]) Dem Gedächtnisse kann man diesen Satz des Ptolemäus besser in der fast in die Sinne fallenden, bei Ptolemäus jedoch nicht vorkommenden Form einprägen, daß der Quotient des größeren Bogens durch seine Sehne größer sei als der Quotient des kleineren Bogens durch seine Sehne. [2]) v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 8, Note 1. [3]) Almagest I, 11 (ed. Halma) I, pag. 51: *καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς δὲ λαμβανομένων περιφερειῶν τὸ ὅμοιον ὑπακουέσθω* (sc. *ἐλάσσονα εἶναι ἡμικυκλίου*).

wie Ptolemäus sagt, der Sechzigstel, ἑξηκοστῶν, indem angenommen wird, daß die Veränderung der Sehnen der Bögen innerhalb der tabellarischen Angabe von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ oder von 30′ zu 30′ der Veränderung der Bögen proportional sei. So steht beispielsweise neben dem Bogen 20⁰ 0′ die Chorde 20 . 50 . 16, neben dem Bogen 20⁰ 30′ die Chorde 21 . 21 . 12. Der Zunahme des Bogens um 30′ entspricht eine Zunahme der Chorde um 0 . 30 . 56, und findet diese im Verhältnisse der Bogenzunahme statt, so ist der mittlere Zuwachs der Chorde 0 . 1 . 1 . 52 für jede Minute, um welche der Bogen zwischen 20⁰ und 20⁰ 30′ zunimmt. Diese Zahl 0 . 1 . 1 . 52 steht denn auch in der dritten Kolumne neben den Zahlen 20 . 0 der ersten, 20.50.16 der zweiten Kolumne. Ein Beweis für diese angenommene Proportionalität in engem Bereiche ist dagegen nicht vorhanden[1]).

War das 9. Kapitel der Entwerfung der Sehnentafel gewidmet, so ist im 11. Kapitel die Trigonometrie, und zwar hauptsächlich die sphärische Trigonometrie enthalten, sich aufbauend auf den Sätzen des Menelaus, die hier ohne Quellenangabe vorkommen[2]), so daß man sie lange für Erfindungen des Ptolemäus hielt, bis im XVII. S. Pater Mersenne sie ihrem Urheber zurückerstattete[3]). Der Hauptsatz der ebenen Trigonometrie, daß im Dreiecke zwei Seiten sich verhalten wie die Sehnen der doppelten Bögen, welche die den Seiten gegenüberliegenden Winkel messen, ist allerdings nicht deutlich ausgesprochen, sondern nur in anderen Sätzen inhaltlich mit enthalten. Vollständiger sind die Sätze der sphärischen Trigonometrie angegeben. Dem Wortlaute, aber nicht dem Gedanken nach modernisiert lautet seine Darstellung etwa folgendermaßen[4]). Wenn Ptolemäus (Fig. 71) das bei H rechtwinklige Dreieck AHB berechnen will, so konstruiert er den Pol P von AH, dann den zu A als Pol gehörigen Äquator $PB'H'$, der in B', H' die verlängerten Seiten AB, AH schneidet. Somit wird $B'H' = \alpha$ und alle in der Figur vorkommenden Bögen lassen sich durch a, b, h, α und deren Komplemente ausdrücken. Nun kann der Satz des Menelaus viermal angewandt

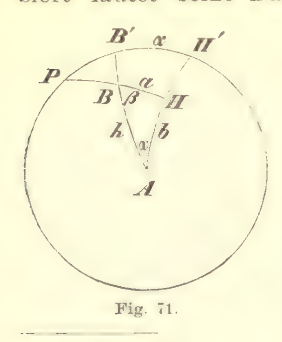


Fig. 71.

[1]) Ideler l. c. 23 hat die Richtigkeit der ptolemäischen Zahlen geprüft und hat gefunden, daß sie auf fünf Dezimalstellen genau sind. [2]) Almagest (ed. Halma) I, pag. 50 der Satz für das ebene Dreieck, pag. 55 der Satz für das sphärische Dreieck. [3]) Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 293, Deutsch 289. Chasles selbst ist geneigt, die Sätze auch dem Menelaus wieder abzusprechen und hält Euklid für den Erfinder, in dessen Porismen sie vorgekommen seien. [4]) Wir entnehmen diese Zusammenfassung fast wörtlich aus Hankel S. 285—286,

werden, nämlich auf die Dreiecke ABH, PBB', PHH', $AB'H'$. Die zugehörigen Transversalen sind in gleicher Ordnung $PB'H'$, AHH', $B'BA$, PBH, und die Anwendung des Satzes von den sechs Größen liefert die vier Gleichungen:

1. $\cos h = \cos a \cdot \cos b$ oder $\cos h = \cos a \cdot \cos b$
2. $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin h$ oder $\sin a = \sin h \cdot \sin \alpha$
3. $\cos a \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \sin a$ oder $\operatorname{tng} a = \sin b \cdot \operatorname{tng} \alpha$
4. $\sin b \cdot \cos h = \cos b \cdot \cos \alpha \cdot \sin h$ oder $\operatorname{tng} b = \cos \alpha \cdot \operatorname{tng} h$.

Die Beweise hat Ptolemäus nicht immer gegeben und die Kommentatoren haben nicht unterlassen, hier die sehr nötigen Ergänzungen eintreten zu lassen[1]).

Die Trigonometrie als Kapitel des I. Buches des Almagestes behandelt, entspricht vollständig dem, was wir (S. 412) schon andeuteten. Die Trigonometrie ist wesentlich zu astronomischen Zwecken entstanden, so daß die sphärische Trigonometrie notwendiger und demzufolge auch früher ausgebildet war als die ebene Trigonometrie. Eine ebene Trigonometrie im Dienste der theoretischen Planimetrie ist dem Altertume ebenso fremd wie eine solche im Dienste feldmesserischer Untersuchungen, wenn man von der einzigen Ausnahme der Zahlenformeln Herons für den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke absieht. Die Tatsache mag uns beim ersten Anblicke auffallen, eine Erklärung derselben scheint nicht schwer zu sein. Trigonometrische Ausdrücke als Durchgangspunkte, von welchen man wieder zu anderen Größengattungen gelangen will, sind nicht denkbar, so lange noch keine ausgebildete Zeichensprache der Mathematik vorhanden ist. Bis dahin liefern trigonometrische Ausdrücke mit Hilfe von Sehnentafeln in Zahlen umgesetzt nur näherungsweise richtige Ergebnisse. Der wissenschaftliche Geometer war aber abgeneigt, sich mit einer bloßen Annäherung, und sei sie noch so nahe, zufrieden zu geben. Der unwissenschaftliche Feldmesser war abgeneigt, das Wissen sich zu erwerben, welches zur Erlernung des trigonometrischen Rechnens unerläßlich war. So überließen beide die mißachteten oder gescheuten Verfahrungsweisen der Trigonometrie dem Astronomen, der weniger heikel als der eine, weniger denkfaul als der andere der guten Ergebnisse dieser Nährungsmethoden sich freute und bediente.

Gehören die übrigen Bücher des Almagestes der Geschichte der Astronomie an[2]), und ist für uns höchstens noch ein Wert von

---

Anmerkung, da wir es kaum für möglich halten, eine bündigere und übersichtlichere Darstellung zu liefern.

[1]) Theon Alexandrinus (ed. Halma) I, pag. 243 sqq. [2]) Wolf, Geschichte d. Astronomie S. 61—63, eine sehr hübsche Übersicht über den Inhalt des Almagestes.

$\pi = 3 \cdot 8 \cdot 30$ d. h. $= 3\frac{8}{60}\frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}141\,666\ldots$ bemerkenswert[1]), so hat die Entwicklungsgeschichte der Mathematik den Namen des Ptolemäus noch wegen anderer Werke aufzubewahren, die teilweise wieder für sie und für andere Disziplinen ein gemeinsames Interesse besitzen, teilweise rein mathematisch sind.

Wir reden hier zuerst von der mathematischen Geographie des Ptolemäus[2]). Wir erinnern uns, daß Hipparch (S. 362) die Punkte der Erde durch Koordinaten der Länge und Breite bestimmte. Er ging von dem Meridiane von Rhodos als Anfang für die Längen aus. Marinus von Tyrus im ersten Jahrhundert n. Chr. dürfte den Anfangsmeridian nach den kanarischen Inseln verlegt haben, dem damals äußersten nach Westen gelegenen bekannten Punkte[3]). Ptolemäus folgte auf Marinus und fußt in vielen Dingen auf dessen Untersuchungen, in andern ihn tadelnd und verbessernd. Auch ihm heißen die Ausdehnungen von Ost nach West und von Nord nach Süd Länge, *μῆκος*, und Breite, *πλάτος*, weil die Erde, wie jedermann zugestehe, mehr Ausdehnung in der ersten als in der zweiten Abmessung besitze, und Länge eben die größere Abmessung (S. 395) bezeichne[4]). So hat sich also das Koordinatenbewußtsein in seiner geographischen Anwendung fortwährend erhalten.

Ptolemäus ging aber vielleicht in dem Bewußtsein, daß man auf gewisse Grundrichtungen sich beziehen müsse, noch weiter. Wir denken dabei an eine Notiz, welche wir Simplicius, dem bekannten Erklärer des Aristoteles, schulden. In den Erläuterungen zum I. Buche vom Himmel berichtet er, Ptolemäus habe über die Ausdehnungen, *περὶ διαστάσεων*, geschrieben und dort gezeigt, daß nur drei Ausdehnungen eines Körpers möglich seien. Bei der Unbestimmtheit dieser Angabe müssen wir allerdings dahingestellt sein lassen, ob man glauben will, es seien in jener Schrift Gedanken enthalten gewesen, welche dem Begriffe von Raumkoordinaten nahe kommen.

Wieder an Hipparch sich anlehnend, lehrt Ptolemäus in der

---

[1]) Almagest VI, 7 (ed. Halma). Ptolemäus sagt ausdrücklich, dieser Wert liege nahezu in der Mitte — *μεταξύ ἐστιν ἔγγιστα* — zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$. In der Tat ist sexagesimal ausgedrückt $3\frac{1}{7} = 3^0\,8'\,34{,}28''$ und $3\frac{10}{71} = 3^0\,8'\,27{,}04''$, und deren arithmetisches Mittel ist $3^0\,8'\,30{,}66''$, während $3\frac{17}{120}$ wie in unserem Texte angegeben ist $3^0\,8'\,30''$ beträgt. [2]) *Traité de Géographie de Claude Ptolémée d'Alexandrie* (ed. Halma). Paris 1828. [3]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 153. [4]) *Ptolémée, Géographie* (ed. Halma) pag. 17.

Geographie die Anfertigung von Landkarten, und das 24. Kapitel des I. Buches[1]) ist wohl das älteste erhaltene Schriftstück, welches in seiner Überschrift als der Abbildung der bewohnten Erde auf einer Ebene gewidmet bezeichnet ist, so daß die Maße der Lagenverhältnisse auf der Kugel beibehalten werden sollen. Verschiedene Projektionsmethoden werden hier gelehrt, mit welchen Ptolemäus sich auch in einer anderen Schrift, dem Planisphaerium, beschäftigt hat[2]). Ptolemäus benutzt vorzüglich die Projektion, bei welcher das Auge als im Pole befindlich gedacht wird und die Äquatorialebene die Zeichnungsebene bildet, die Projektion also, welcher Aiguillon 1613 den Namen der stereographischen beigelegt hat. Wieder eine andere Abhandlung ist das Analemma, das griechisch in nicht unbedeutenden Bruchstücken und lateinisch in einer im XIII. Jahrhunderte angefertigten Übersetzung vollständig erhalten ist[3]). Es handelt sich darum, den Ort der Sonne zu einer bestimmten Tageszeit zu ermitteln, und diese Aufgabe wird graphisch gelöst. Was nun die praktische Benutzung der durch Zeichnung erhaltenen Figur betrifft, so geht aus dem Wortlaute des Ptolemäus hervor, daß er die beiden Möglichkeiten unmittelbarer und mittelbarer Winkelmessung kannte und ausübte. Zu der ersten diente ein in 90 Grade geteilter Kreisquadrant, zu der zweiten die Sehnentafel. Man hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Figur selbst die Hälfte der Sehne des doppelten Winkels als meßbare Strecke darbot, daß also die Benutzung der Sehnentafel erst eine Verdoppelung einer Strecke, dann eine Halbierung eines Winkels verlangte, während diese Hilfsrechnungen in Wegfall kamen, wenn man das kannte, was in späterer Zeit und auf anderem Boden Sinustafeln genannt wurde.

Schriften des Ptolemäus über die Harmonielehre, d. h. über die Verhältnisse, welche, wie man heute sagen würde, zwischen den Schwingungszahlen der einzelnen Töne stattfinden, und über Optik[4]) begnügen wir uns zu nennen, da sie der Geschichte der Mathematik nicht angehören. Von Arbeiten über Mechanik wissen wir nur überhaupt, daß sie vorhanden waren; Pappus erwähnt ihrer in seinem

[1]) *Ptolémée*, *Géographie* (ed. Halma) pag. 59. [2]) Diese Abhandlung hat Commandinus 1558 übersetzt und herausgegeben. [3]) Heiberg, *Ptolemaeus de analemmate* in den Abhandlungen z. Gesch. d. Mathem. VII, 1—30 (1895) hat die griechischen Bruchstücke und die alte Übersetzung herausgegeben. Über den Inhalt vgl. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Gesch. der Trigonometrie I, 11—14 (1900) und die wenig spätere Abhandlung von Zeuthen, *Note sur la trigonométrie de l'antiquité* in der Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, I, 20—27 (1900). [4]) Vgl. Poudra, *Histoire de la perspective.* Paris 1864. pag. 28—32. Eine früher als Ptolemäus, *De speculis* bezeichnete Katoptrik ist nicht von Ptolemäus, sondern von Heron. S. Agrimensoren 18—19.

VIII. Buche, Eutokius in seinen Erläuterungen zu der archimedischen Schrift über das Gleichgewicht. Vielleicht hatte Ptolemäus auch einen Sohn, der ein mechanisches Werk verfaßte, in welchem die ungleicharmige Wage mit Laufgewicht beschrieben war. Jener Sohn, so vermutet man[1], hieß Charistion und gab der von ihm erläuterten Wage seinen Namen.

Dagegen hat uns Proklus Auszüge aus einem reingeometrischen Buche des Ptolemäus überliefert[2], welche verdienen, daß wir bei ihnen verweilen. Aus diesen Auszügen geht hervor, daß Ptolemäus jedenfalls der erste Mathematiker war, von welchem bekannt geworden ist, daß er das sogenannte 11. Axiom des Euklid nicht als selbstverständlich betrachtet wissen wollte, daß er die zahllose Reihe derer eröffnet hat, welche durch Versuche die Parallelentheorie zu beweisen vergeblich sich abmühten, bis im XIX. S. der unendlich viel kühnere Versuch auftauchte, die Parallelentheorie als anfechtbar zu erklären und eine Geometrie zu schaffen, welche von ihr absehend als nicht-euklidische oder absolute Geometrie Geltung beansprucht. Ptolemäus beweist zunächst, daß Gerade, welche durch eine Transversale so geschnitten werden, daß die Winkel auf derselben Seite der Transversalen und auf entgegengesetzten Seiten der Geschnittenen sich zu zwei Rechten ergänzen, parallel sein müssen, d. h. sich nicht treffen (Fig. 72). Gesetzt $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schnitten sich in $\varkappa$, während die Winkel $\beta\zeta\eta$ und $\delta\eta\zeta$ sich zu zwei Rechten ergänzen. Wegen des Satzes über Nebenwinkel werden auch die Winkel $\alpha\zeta\eta$ und $\gamma\eta\zeta$ sich zu zwei Rechten ergänzen, und folglich wird auch auf der Seite, wo α und γ steht, ein Durchschnitt der beiden Geraden in λ stattfinden. Die Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schneiden sich also zweimal in $\varkappa$ und λ, ohne zusammenzufallen, d. h. sie schließen einen Raum ein, was nicht möglich ist. So wenig gegen diesen Beweis sich einwenden läßt, so wenig zutreffend ist der Beweis, den Ptolemäus von dem umgekehrten Satze liefert, daß bei wirklich vorausgesetztem Parallelismus die entsprechenden Winkel auf derselben Seite der Transversalen sich zu zwei Rechten ergänzen müssen. Die beiden

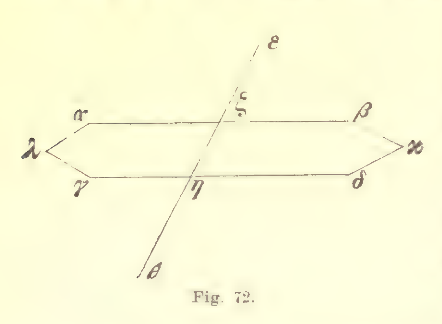


Fig. 72.

[1] P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 86—87. [2] Proklus (ed. Friedlein) 362—368. Vgl. L. Majer, Proklos über die Petita und Axiomata bei Euklid. Tübingen, Gymnasialprogramm 1875.

$\alpha\zeta$ und $\gamma\eta$, sagt er nämlich, sind nicht weniger parallel als die $\zeta\beta$ und $\eta\delta$. Wäre also die Summe der Winkel $\beta\zeta\eta$ und $\delta\eta\zeta$ mehr oder weniger als zwei Rechte, so müßte genau das Gleiche für die Summe der Winkel $\alpha\zeta\eta$ und $\gamma\eta\zeta$ gelten. Die vier Winkel zusammen müßten also, sei es nun mehr, sei es weniger als vier Rechte betragen, während sie als zwei Paar Nebenwinkel genau vier Rechten gleich sind.

Wie Ptolemäus die euklidischen Elemente in der Theorie der Parallellinien für ergänzungsbedürftig hielt, so scheint es damals auch mit anderen Büchern des darum nicht minder bewunderten Werkes gegangen zu sein. Wir bringen in Erinnerung (S. 348), daß im II. S. der byzantinische Astronom Vettius Valens einen aus 2 Büchern bestehenden Kommentar zum X. Buche der euklidischen Elemente verfaßte, dessen arabische Übersetzung sich möglicherweise erhalten hat.

Die Schriftsteller, mit welchen wir in diesem Kapitel bekannt geworden sind, zeigen uns eine gewisse Gleichartigkeit unter sich und mit denjenigen, welche in dem 17. Kapitel besprochen wurden. Wieder haben wir es mit Geometern zu tun, welche der Kurvenlehre ihre Aufmerksamkeit zuwandten, welche die Stereometrie ausbildeten, von allen Körpern hauptsächlich die Kugel beachtend, welche der rechnenden Geometrie die Vollendung zur Trigonometrie gaben, indem sie gewisse Linien berechneten und tabellarisch zusammenstellten, welche zu gewissen Winkeln gehörten. Die Sehnentabelle ist — wir können uns nicht versagen, unsere Augen so weit nach rückwärts zu werfen — die für lange Zeit letzte Entwicklung eines alten Keimes. Das Seqt genannte Verhältnis des Ahmes wuchs dazu heran, und es scheint fast, als ob die ganze Entwicklung auf ägyptischem Boden vor sich ging.

Ist aber eine Art von Gemeinsamkeit der Mathematiker von Nikomedes und Diokles bis auf Menelaus und Ptolemäus, von 200 v. Chr. bis 150 n. Chr. nicht zu verkennen, so ist es nicht minder notwendig, auf allgemeine kulturhistorische Veränderungen hinzuweisen, welche innerhalb dieser Zeit eintraten, und welche nunmehr beginnen werden auf dem Gebiete, welches wir zu unserem Arbeitsfelde ausgewählt haben, sich deutlich bemerkbar zu machen. In der Einleitung zum 12. Kapitel haben wir (S. 259) die alexandrinische Literaturperiode ihrem allgemeinen Charakter nach kurz umrissen. Wir haben als untere Grenze derselben die Einverleibung Alexandrias in das römische Reich bezeichnet in der Mitte des ersten vorchristlichen Jahrhunderts. Über diese Grenze hat uns das hier abschließende Kapitel hinübergeführt und noch über eine andere von weltgeschichtlich größter Bedeutung. Geminus 77 v. Chr., Ptolemäus

150 n. Chr. bilden Anfang und Schluß unseres Kapitels. Müssen wir erst sagen, was zwischen beiden Jahreszahlen liegt? Und dennoch war die Entstehung des Christentums für die Geschichte unserer Wissenschaft ein zunächst fast nebensächliches Ereignis, weit geringfügiger in seinen unmittelbaren Einwirkungen als jene Machtverschiebung, die wir schon andeuteten. Rom kommt in den feldmesserischen Beispielen des Heron, in den astronomischen Beobachtungen des Geminus vor. Auch Menelaus beobachtete in Rom. Ptolemäus entnahm seine Datierungen den Regierungsjahren römischer Kaiser. Daran erkennen wir äußerlich, daß neue staatliche Kombinationen innerhalb des Lebens gerade der Männer sich gebildet haben, welche wir in diesem Kapitel friedlich nacheinander betrachteten. Solche weltgeschichtliche Tatsachen dürfen auch in der historischen Darstellung einer Wissenschaft nicht mit Schweigen übergangen werden. Die Entwicklung der Wissenschaft knüpft sich an die Träger der Wissenschaft, die Träger der Wissenschaft gehören als Menschen ihrer Zeit an. Deutlicher oder in verwischteren Spuren wird die Zeit auch in der Wissenschaft zu erkennen sein. Überblicken wir darum in raschestem Fluge die allgemeinen Verhältnisse. Wir gelangen damit zugleich zu denjenigen mathematischen Dingen, deren Erörterung uns der Zeit nach etwas zurückgreifend nunmehr obliegt.

21. Kapitel.

Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon.

Rom hatte nach und nach in Italien das unbestrittene Übergewicht über die Mitbewohner des Landes südlich von den Alpen errungen. Der Tod des Archimed knüpft sich für uns an die Eroberung von Syrakus, das Todesjahr des Apollonius war es ungefähr, in welchem Rom mit Mazedonien handgemein wurde und den Sieg bei Kynoskephalä erfocht. Zehn Jahre später und der syrische Krieg gegen Antiochus den Großen war geschlagen. Die seegeübten Bewohner der Insel Rhodos wie die Krieger von Pergamum waren den Römern zur Seite gestanden und fühlten von jetzt an den Einfluß der mächtigen Weltbefreier, wie man die Römer noch nannte. Deutlicher wurde das Streben des die Stellung als Weltmacht sich erobernden Staates, als um 150 die Nebenbuhlerschaft Karthagos vernichtet ward, und mehr und mehr drängte sich in dem nun folgenden Jahrhunderte römischer Wille den orientalischen Ländern mit Einschluß Ägyptens auf. Gegen Ägypten selbst führte Cäsar im Jahre 47

seine Truppen zum alexandrinischen Kriege, und der Eroberung der Stadt leuchtete mit bildungsfeindlicher Flamme der Brand des Brucheion.

Wir haben von dem großartigen Sammeleifer der ersten Ptolemäer gesprochen. Ihnen fast voraus war die Gier, mit welcher König Attalus von Pergamum Bücher sich zu verschaffen suchte, und diese Wettbewerbung soll die Ursache nachweisbar vorgekommener Fälschungen gewesen sein. Im II. vorchristlichen Jahrhunderte tauchten plötzlich Schriften auf, von welchen der sein sollende alte Verfasser nie eine Ahnung gehabt hatte, und welche wissenschaftlich nur so weit Verwertung finden können, als sie den Beweis liefern, daß man im II. S. mit den Dingen bekannt war, die den Inhalt derselben bilden. Durch Ankäufe echter und unterschobener Schriften wuchs die alexandrinische Bibliothek so, daß sie in einem Gebäude nicht mehr Platz fand. Nachdem das Brucheion in der Nähe des Hafens angefüllt war, legte man eine zweite Sammlung im Tempel des Serapis an. Jene erste Hauptsammlung war es, die der Feuersbrunst zum Opfer fiel, die mit mehr als 400000 Bänden das vernichtende Element nährte.

Das war ein harter Schlag für die Wissenschaft und deren alexandrinische Vertreter. Bis zu einem gewissen Grade wurde zwar Ersatz geboten. Der römerfreundliche König von Pergamum, Attalus III., hatte sterbend im Jahre 133 v. Chr. den römischen Senat zum Erben seiner Schätze eingesetzt, und Antonius überließ die pergamenische Büchersammlung der Stadt, welche durch die Reize Kleopatras an ihm einen Gönner gewonnen hatte. So war aufs neue eine großartige Bibliothek, jetzt im Serapeion, vereinigt. War die grammatische Tätigkeit, welche wir bei unserem früheren Berühren der alexandrinischen Wissenschaft als im Museum vorzugsweise neben und wohl vor der Mathematik gepflegt nannten, eine solche, die als Stoff ihrer Untersuchung ältere Schriften verwerten mußte, so mag jetzt, nachdem man gesehen, wie ein Unglücksfall unschätzbar vieles zerstört hatte, mehr noch als zuvor eine Neigung erwacht sein, durch Erläuterungen und Zusammenstellungen die alte Wissenschaft in Sicherheit zu bringen. Andere Momente waren gleichfalls vorhanden, anderen Beweggründen entstammend, aber für unsere Zwecke mit der kommentierenden Tätigkeit zusammenfallend.

Alexandria war der Ort, wo Hellenentum, wo Ägyptisches, wo aber auch Asiatisches sich begegneten. Assyrer, Inder, Hebräer trafen dort ein, ihre ältere oder jüngere Bildung mit sich bringend, austauschend, ergänzend. Was bei einem solchen Zusammenströmen Weitgereister einzutreffen pflegt, fehlte auch hier nicht. Der Wissens-

durst schöpfte mit notwendigem Eklektizismus bald da, bald dort; das Wunderbarste übte die größte Anziehung; man fühlte sich versucht, selbst nach jenen Gegenden, dem Schauplatze märchenhafter Erzählungen, aufzubrechen; man gewann aber auch neues Interesse an solchen, die ehedem gleiche Reisen ausgeführt hatten, denen man zu den wirklich erlebten Abenteuern neue hinzudichtete. Die Phantasie gewann das Übergewicht über den nüchtern denkenden Verstand. Die Dialektik des Aristoteles entsprach den Neigungen nicht mehr in dem Maße wie Platons die Einbildungskraft anregende und voraussetzende Schriften. Platon als Schriftsteller, Pythagoras als Persönlichkeit zu verehren wurde allgemeiner und allgemeiner. Ein gewisser mystischer Pythagoräismus, von Wissenschaft freilich weit entfernt, war nie gänzlich verschollen. Er erholte sich zu neuem, kräftigem Leben. Die neue Akademie bildete sich heran, die Neupythagoräer entstanden. Sie studierten, sie erläuterten Platon im pythagoräischen Sinne, soweit derselbe zu ermitteln war.

So kamen selbstverständlich auch diejenigen mathematischen Forschungen wieder in eifrigere Übung, welche schon vorher vorhanden gegen die Geometrie zurückgetreten waren, wenn auch ein Verschwinden derselben nicht behauptet werden kann. Die pythagoräische Arithmetik wurde jetzt Mode in dem Sinne, wie wir dieses Wort schon einmal (S. 259) gebraucht haben. Männer wie Nikomachus, wie Theon standen auf.

Nikomachus war in Gerasa zu Hause, einem Orte, der wahrscheinlich in Arabien zu suchen ist[1]). Er nennt in einer musikalischen Abhandlung Thrasyllus, womit jedenfalls der unter der Regierung des Tiberius lebende Platoniker aus Mende gemeint ist, er kann also nicht früher als etwa 30 n. Chr. geschrieben haben. Ihn übersetzte Appuleius von Madaura unter den Antoninen ins Lateinische[2]), und damit ist als untere Grenze das Jahr 150 etwa gewonnen. Gemeiniglich setzt man Nikomachus von Gerasa auf einen mittleren Zeitpunkt zwischen diese Grenzen, um das Jahr 100 n. Chr., denkt ihn also etwa als Zeitgenossen des Menelaus von Alexandria.

Nikomachus war als Pythagoräer bekannt[3]), als Arithmetiker berühmt. Neben der Tatsache einer Übersetzung so kurz nach dem Erscheinen des Werkes, wie die des Appuleius, ist der Ausspruch des Lucian dafür bemerkenswert, der um 160 etwa einen Rechner nicht

[1]) Die Stellen, welche diese Annahme unterstützen, vgl. bei Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 189, Note 33. [2]) So berichtet Cassiodorius. Die Übersetzung selbst ist verloren. [3]) Pappus III, 18 (ed. Hultsch) pag. 81 *Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικός*.

besser zu kennzeichnen wußte als mit den Worten, er rechne wie Nikomachus von Gerasa[1]), und auch von Kommentaren zu den Büchern des Nikomachus, welche deren große Berühmtheit verbürgen, werden wir weiter unten zu reden haben.

Die musikalischen Schriften des Nikomachus werden wir nicht zu betrachten haben, so wenig wir andere Musiker in das Bereich unserer Besprechung ziehen. Uns kümmert in erster Linie nur die „Einleitung in die Arithmetik in zwei Büchern“[2]), *εἰςαγωγὴ ἀριθμητική*, eben jenes von Appuleius bald übersetzte Werk, dessen geschichtliche Stellung wir zu erörtern haben. Ein Schriftsteller aus dem Anfange des VII. S., Isidorus von Sevilla, hat behauptet, Nikomachus habe weitläufiger auseinandergesetzt, was Pythagoras über die Zahlenlehre schrieb[3]). Wir sind weit entfernt, an die übertreibungslose Wahrheit dieser Aussage zu glauben, allein eben so gewiß scheint uns, daß von dem Inhalte der Einleitung in die Arithmetik vieles auf ältere und älteste Quellen zurückzuführen sein wird. Nikomachus ist uns auf arithmetischem Gebiete das, was uns Euklid, was uns Heron für die Elemente der theoretischen, der praktischen Geometrie gewesen ist. Er ist der erste Schriftsteller, von dem wir wissen, daß er die arithmetischen Lehren als solche zu einem Lehrkörper zusammenstellte. Euklid hatte auch Arithmetisches behandelt, aber als Einschaltung zwischen geometrische Untersuchungen und in geometrischer Einkleidung. Was Herons Einleitung in die arithmetischen Elemente war, wissen wir nicht. Alle Zweifel schwinden bei Nikomachus. Er hat die Zahlenlehre für sich behandelt, und wenn er auch schon vorhandenen Stoff sicherlich nicht verschmähte, wenn er ebenso auch die Gewohnheit griechischer Mathematiker nicht so weit abzustreifen vermochte, daß er geometrische Begriffe gänzlich aus seiner Darstellung verbannte, er hat doch nicht fortwährend mit Linien oder höchstens beiläufig mit Zahlen zu tun. Er ist, wenn wir so sagen dürfen, der Elementenschreiber griechischer Arithmetik. Er hat eine Liebhaberei, von welcher wir unsere Leser in Kenntnis setzen müssen. Er sucht so viel als möglich nach Dreiteilungen, auch wo dieselben nur mit einem gewissen Zwange erlangt werden können. Die an sich gerechte Bemängelung, die manchen seiner Ein-

[1]) *ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός.* [2]) Schon 1538 in Paris gedruckt, ist sie 1817 zugleich mit dem anonymen Buche *θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς* durch Ast herausgegeben, dann 1866 durch Hoche. Wir zitieren nach letzterer Ausgabe. [3]) Isidorus Hispaliensis, *Origines* III, 2: *Numeri disciplinam apud Graecos Pythagoram autumant conscripsisse ac deinde a Nicomacho diffusius esse dispositam, quam apud Latinos primus Appuleius deinde Boethius transtulerunt.*

teilungen geworden ist, mußte stets an diese Tatsache anknüpfen[1]), eine Tatsache freilich, deren nähere Besprechung durchaus der Geschichte der Philosophie und der Theologie angehört, welche mit dem Ursprunge und der Entwicklung des Trinitätsbegriffes sich abzufinden haben. Nach dieser Vorbemerkung berichten wir in aller Kürze über die Einleitung in die Arithmetik[2]). Unsere Leser werden, auch ohne daß wir sie besonders aufmerksam machen, ohne Zweifel vieles erkennen, was wir in früheren Kapiteln dem Werke des Nikomachus entlehnten, um es für Pythagoras und seine Schule bis auf Platon und dessen nächste Nachfolger in Anspruch zu nehmen.

Die Zahlen sind nach Nikomachus gerade und ungerade, jede selbst von drei verschiedenen Gattungen. Die geraden Zahlen sind nämlich 1. gerademalgerad, *ἀρτιάκις ἄρτιοι*, d. h. führen durch fortwährende Halbierung auf die Einheit zurück; oder sie sind 2. geradeungerad, *ἀρτιοπέριττοι*, d. h. führen durch einmalige Halbierung auf eine ungerade Zahl; oder sie sind 3. ungeradegerad, *περισσάρτιοι*, d. h. führen durch mehrmals fortgesetzte Halbierung auf eine ungerade Zahl. Die ungeraden Zahlen sind 1. unzusammengesetzte Primzahlen, 2. zusammengesetzte Sekundärzahlen, 3. unter sich teilerfremde Zahlen. Unter den geraden Zahlen wird eine neue Gruppierung in 1. vollkommene, 2. überschießende, 3. mangelhafte Zahlen vorgenommen. Die vier ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28, 496, 8128, jedesmal eine unter den Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, abwechselnd mit 6 und 8 schließend[3]). Die euklidische Entstehung der vollkommenen Zahlen wird dann erörtert, welche ins Unendliche fortgesetzt werden könne[4]), oder soweit man mit den Ausrechnungen zu folgen imstande sei[5]). Von zwei gemeinsam betrachteten Zahlen ist die größere entweder ein Vielfaches der kleineren, die alsdann selbst Untervielfaches der größeren ist, oder nicht. Im letzteren Falle werden die Namen angegeben, welche jedesmal der größeren, beziehungsweise der kleineren gegenüber von der anderen beigelegt werden, Namen, die jedes beliebige Verhältnis ausdrücken können, die aber ganz besondere, später auch in die lateinische Sprache übergegangene Formen erhalten, wenn das Verhältnis wie 1 zu $n + \frac{1}{m+1}$ oder wie 1 zu $n + \frac{m}{m+1}$ ist, wo n sowohl als m ganze Zahlen bedeuten, die min-

[1]) So Nesselmann, Algebra der Griechen S. 195: „Nikomachus hätte sicherlich diesen Fehler nicht begangen, wenn er nicht der Analogie wegen durchaus drei Teile hätte herausbringen wollen.“ [2]) Ein ausführlicher Auszug bei Nesselmann l. c. S. 191—216. [3]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 40. [4]) Ebenda pag. 41 lin. 18 *μέχρις ἀπείρου*. [5]) Ebenda pag. 43 lin. 18 bis 19 *ἀεὶ ὄντως, μέχρις ἂν εὐτονῇ τις παρέπεσθαι.*

destens der Einheit gleich sind. Um die Sache recht klar zu machen, bedient sich Nikomachus einer schachbrettartig aus 100 Feldern bestehenden Tafel[1]). Die erste Horizontalzeile enthält einfach die Zahlen 1 bis 10, die zweite die Doppelten derselben, 2, 4 bis 20, die dritte die Dreifachen, 3, 6 bis 30 und so fort; endlich die zehnte Horizontalzeile enthält die Zehnfachen jener Zahlen oder 10, 20 bis 100. Sieht man die Tafel als aus zehn Vertikalkolumnen bestehend an, so gleicht jede Vertikalkolumne ganz genau und Zahl für Zahl der entsprechend bezifferten Horizontalzeile, die erste der ersten, die zweite der zweiten, die zehnte der zehnten. Wir halten uns bei dieser Beschreibung etwas länger auf, weil die Benutzbarkeit der Tafel als Einmaleinstabelle einleuchtet. Das Produkt zweier einziffriger Zahlen steht an der Kreuzungsstelle der durch die beiden Faktoren bezifferten Zeile und Kolumne. Außerdem stehen zwei Zahlen derselben Kolumne je in dem gleichen Verhältnisse wie die ihre Zeile eröffnenden Zahlen. Alle diese verschiedenen Verhältnisse lassen sich aber aus einer Terne von Einheiten durch eine gewisse Reihenfolge von Verbindungen hervorbringen, welche symbolisch geschrieben darauf hinauslaufen, daß aus den drei Zahlen a, b, c die drei neuen Zahlen a, $a + b$, $a + 2b + c$ gebildet werden sollen, ein Bildungsgesetz, welches der moderne Mathematiker mit einigem Staunen als das gleiche erkennen wird, das anderthalb Jahrtausende später zu den Größen x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$ führte. Der Reihe nach erhält man:

1, 1, 1
1, 2, 4 oder die Verdoppelungen,
1, 3, 9 oder die Verdreifachungen,
1, 4, 16 oder die Vervierfachungen, usw.

Schreibt man eine dieser Reihen z. B. die der Verdoppelungen rückläufig 4, 2, 1, d. h. benutzt man bei gleichem Bildungsgesetze wie oben $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, so entsteht als neue Reihe

4, 6, 9 oder die Veranderthalbfachungen usw.

Im zweiten Buche ist die Lehre von den figurierten Zahlen und daran sich anschließend die von den Proportionen enthalten. Die figurierten Zahlen erscheinen als vieleckige und als körperliche Zahlen. Die vieleckigen Zahlen sind solche, welche durch einzelne Punkte dargestellt ein regelmäßiges Vieleck zu bilden imstande sind. Vielecke aufeinander gehäuft bilden einen Körper, und so wird der Sinn der körperlichen Zahl erkennbar, die freilich zunächst

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 51.

nichts mit dem Produkte dreier Faktoren gemein hat, welches Platon als Körperzahl bezeichnet, wenn auch Nikomachus in zweiter Linie auf diese Begriffsbestimmung zurückkommt. Ähnlich geht es schon vorher mit der Flächenzahl, welche für Nikomachus nicht wie für Platon ein Produkt zweier Faktoren bedeutet, während nachträglich diese Bedeutung doch eingeführt wird. Jede vieleckige Zahl ist bei Nikomachus, wie bei Hypsikles, Summe einer mit 1 beginnenden arithmetischen Reihe, deren Differenz stets um 2 kleiner ist als die Eckenzahl, und diese erzeugende arithmetische Reihe heißt auch die Reihe der Gnomonen der betreffenden Vieleckszahlen, weil jede neu hinzutretende Gnomonzahl die Vieleckszahl nur in die nächsthöhere ähnlicher Art verwandelt. Eine beliebige $n$eckszahl mit der an Rang um 1 niedrigeren Dreieckszahl vereinigt gibt stets die $n + 1$eckszahl gleichen Ranges. So ist z. B. die vierte Sechseckszahl 28, die dritte Dreieckszahl 6, deren Summe $28 + 6 = 34$ wird die vierte Siebeneckszahl sein. — Die Summe aufeinander folgender ungerader Zahlen von der 1 an bildet, der vorher angegebenen Regel für Vieleckszahlen gemäß, eine Quadratzahl. Die Summe aufeinander folgender gerader Zahlen von der 2 an bildet eine heteromeke Zahl. — Die Kubikzahlen erscheinen als Summen aufeinander folgender ungerader Zahlen[1], und zwar ist die erste Kubikzahl der ersten Ungeraden gleich: $1^3 = 1$; die zweite Kubikzahl entsteht als Summe der zwei folgenden Ungeraden: $2^3 = 3 + 5$; die dritte Kubikzahl als Summe der drei nachfolgenden Ungeraden: $3^3 = 7 + 9 + 11$ usw.[2]). Dieser durch seine Verwendung zur Summierung der Kubikzahlen selbst, wie wir im 26. Kapitel sehen werden, ungemein interessante Satz dürfte wohl von Nikomachus herrühren[3]). — Die Proportionenlehre zählt alsdann als die drei wichtigsten Proportionen die arithmetische, geometrische, harmonische auf, an welche die sieben andern sich anschließen, über die wir (S. 239) uns verbreitet haben. Den Schluß des Ganzen bildet die vollkommenste Medietät, *μεσότης τελειοτάτη*, die nichts anderes ist als die musikalische, welche Jamblichus zufolge Pythagoras aus Babylon mitbrachte (S. 166).

Außer der Einleitung in die Arithmetik muß Nikomachus auch eine solche in die Geometrie geschrieben haben, von welcher uns aber nur eine Erwähnung bei Nikomachus bekannt ist[4]). Vielleicht

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 119, lin. 12—18. [2]) Die allgemeine Formel, welche Nikomachus nicht gekannt zu haben scheint, ist $n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1)$. [3]) So nimmt auch Nesselmann S. 210 an. [4]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 83, lin. 4: *ἐν τῇ γεωμετρικῇ παραδίδοται εἰςαγωγῇ*.

ist eine Vermutung über deren Inhalt statthaft, zu welcher wir im 27. Kapitel gelangen werden.

Ein aus arabischen Quellen schöpfender Schriftsteller des XII. S., Ocreatus, spricht von einer regula Nicomachi, welche die Quadrierung einziffriger Zahlen vollziehen läßt. Soll man a^2 finden, so zieht man a von 10 und die Differenz $d = 10 - a$ wieder von a ab. Weil nun $(a - d) \cdot (a + d) = a^2 - d^2$, so ist auch $a^2 = (a - d) \cdot (a + d) + d^2$ oder wegen $a + d = 10$ in diesem Falle $a^2 = 10 . (a - d) + d^2$ und das ist die Regel des Nikomachus. Bei Nikomachus selbst ist sie als sehr schöne und von den meisten übersehene Eigenschaft der stetigen arithmetischen Proportion dahin ausgesprochen, das Quadrat des Mittelgliedes werde, wenn man das Produkt der äußeren Glieder davon abziehe, gleich dem Quadrate der konstanten Differenz[1]).

Nikomachus scheint ferner eine Schrift über mystische Bedeutung der Zahlen, über Zahlentheologie mag der Titel gewesen sein, verfaßt zu haben, und sie dürfte auszugsweise oder erweitert einem gleichnamigen Buche zugrunde liegen, welches im 23. Kapitel genannt werden wird; der Geschichte der Mathematik gehören diese Dinge kaum an.

Theon von Smyrna ist nach aller Wahrscheinlichkeit derselbe, welchen Ptolemäus als den Mathematiker Theon bezeichnet[2]), indem er vier durch denselben in den Jahren 128 und 132 vorgenommene Beobachtungen des Merkur und der Venus benutzt. Der Kommentator des Almagestes, Theon von Alexandria, erklärt nämlich jenen Mathematiker Theon als den alten Theon, *τόν παλαιὸν Θέωνα*, als ob ein Mißverständnis nicht möglich wäre[3]). Unser Theon selbst erwähnt als jüngsten Schriftsteller noch den Thrasyllus, der, wie wir bei Bestimmung der Lebenszeit des Nikomachus bemerkten, in die Regierung des Tiberius fällt, und den Adrastus, der wohl noch etwas später gelebt hat[4]).

Wir haben (S. 155) schon zu schildern gehabt, welcherlei Inhalt Theon von Smyrna seinem Werke ausgesprochenermaßen geben wollte. Er beabsichtigte vorzutragen, was von mathematischen Kenntnissen

---

[1]) Nicomachi *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 125, lin. 18—21: *ἔτι τὸ γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθός, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον συγκρινόμενον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἔλαττον αὐτοῦ εὑρίσκεται τῷ ὑπὸ τῶν διαφορῶν.* [2]) Almagest IX, 9; X, 1 und X, 2. [3]) Die betreffende Stelle ist abgedruckt bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 224, Note 58. [4]) Vgl. Th. H. Martin in der Abhandlung, welche seiner Ausgabe der astronomischen Abteilung von Theons Werke (Paris 1849) als Einleitung dient pag. 6—12. Martin bezweifelt die Identität des Theon von Smyrna mit dem von Ptolemäus genannten Mathematiker, setzt ihn aber in die gleiche Zeit, worauf es uns schließlich allein ankommt.

für das Studium Platons notwendig sei. Er ging dabei aus von der Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, darauf sollte die Behandlung der Geometrie, der Stereometrie, der Astronomie, der Musik der Welten folgen. Man hat daraus lange Zeit die Vermutung geschöpft, es seien fünf Bücher ziemlich gleichen Umfanges gewesen, welche das Werk des Theon von Smyrna bildeten, und diese Vermutung fand eine Art von Begründung in dem Umstande, daß zwei verschiedene umfangreiche Bruchstücke sich vorfanden, das eine vorzugsweise arithmetischen, das andere vorzugsweise astronomischen Inhaltes. Beide wurden getrennt herausgegeben[1]). In dem einen glaubte man das erste, in dem zweiten das vierte Buch zu erkennen. Man vermißte drei ganze Bücher von ähnlichem Charakter: der Geometrie, der Stereometrie, der Musik der Welten gewidmet. Wir sind nicht dieser Meinung und stehen in unserer durchaus abweichenden Ansicht auch nicht vereinzelt[2]). Wir erkennen vielmehr in jenen beiden Fragmenten das ganze Werk Theons. Nach einer philosophischen Einleitung erscheinen Einteilungen der Zahlen in Gattungen ähnlicher Art, wie sie bei Nikomachus uns bekannt wurden. Da ist von der Entstehung der Quadratzahl als Summe ungerader Zahlen, aber auch als Summe von je zwei Dreieckszahlen, von Viereckszahlen und Pyramidalzahlen, von vollkommenen Zahlen und Verwandtem die Rede, darunter von zwei Gegenständen, denen wir nachher besondere Aufmerksamkeit schenken wollen. Daran knüpfen sich Kapitel über die Tonzahlen untermischt mit weitläufig ausgesponnenen zahlensymbolischen Tüfteleien, die auch schon in der ersten Abteilung spukten, untermischt mit Erörterungen über die verschiedenen Proportionen. In kurzen kaum mehr als einige Worterklärungen bietenden Abschnitten ist von Geometrie und von Stereometrie die Rede[3]). Weitaus am ausführlichsten ist alsdann die Astronomie behandelt, vielleicht in diesem mangelnden Ebenmaße der Ansicht förderlich, daß Theon von Smyrna vorzugsweise Astronom, mithin der von Ptolemäus genannte Beobachter war. Die Schlußworte heißen: „Das sind die notwendigsten Dinge und vorzugsweise

[1]) Die sogenannte Arithmetik von Bullialdus. Paris 1644 und von De Gelder. Leiden 1827, die sogenannte Astronomie von Martin. Paris 1849.
[2]) Prof. E. Hiller, welchem wir unsere Ansicht brieflich darlegten, teilte uns mit, daß er die genau gleiche in seiner Bonner Habilitationsschrift (1869), welche ungedruckt geblieben ist, ausgesprochen und begründet habe. Diese Auffassung liegt auch der durch ihn besorgten Ausgabe des Theon von Smyrna (Leipzig 1878), nach welcher wir zitieren, zugrunde. [3]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 111, lin. 14 bis pag. 113, lin. 8 und pag. 117, lin. 12 bis pag. 118, lin. 3. Die erstere Stelle enthält planimetrische und stereometrische Definitionen, die letztere die geometrische Konstruktion eines geometrischen Mittels.

aus der Astronomie zur Kenntnisnahme platonischer Schriften. Da wir aber sagten, die Musik und Harmonie sei teils an Instrumenten, teils an Zahlen, teils am Weltall, und daß wir über die Musik der Welten das Notwendige nach der Astronomie angeben würden — denn auch Platon sagt, sie sei die fünfte Wissenschaft nach Arithmetik, Geometrie, Stereometrie, Astronomie — so ist auch darüber mitzuteilen, was hauptsächlich Thrasyllus zeigte zugleich mit dem, was wir früher selbst ausgearbeitet haben.“ Diese Sätze machen auf uns den Eindruck, als wenn sie einem Werke, nicht bloß einem Abschnitte als Schluß gedient hätten, als ob Theon die zuletzt versprochene weltharmonische Erörterung sich vorbehalten hätte. Mag dem nun sein wie da wolle, wesentliche Lücken zwischen dem Erhaltenen können wir uns unter keinen Umständen entschließen anzunehmen; höchstens könnten wir uns dazu verstehen, an eine Umstellung mancher Kapitel zu glauben, da es eigentümlich sich ausnimmt, wie Theon verschiedentlich auf früher Besprochenes zurückkommt, ohne daß eine künstlerische Anordnung des Werkes die Wiederholung erforderte. Vielleicht sind solche Mängel auch der geringeren Befähigung Theons anzurechnen. Theon war bei weitem kein Nikomachus! Seiner Zusammenstellung fehlt nach Form und Inhalt die Folgerichtigkeit. Erwähnen wir ein Beispiel, welches geschichtlichen Wert besitzt.

„Die Einheit ist nicht Zahl, sondern Anfang der Zahl“, sagt Theon[1]), den pythagoräischen Gedanken deutlicher als irgend ein anderer Grieche aussprechend; das hindert ihn aber nicht 1 neben 3, 5 ... als ungerade Zahl[2]) oder mit nachfolgenden 2, 3, 4 ... in der natürlichen Zahlenreihe auftreten zu lassen[3]).

Es fällt uns nach dieser nicht sehr hohen Meinung, welche wir von Theon besitzen, schwer in ihm den Erfinder bedeutsamer arithmetischer Neuerungen zu sehen, und damit wächst umgekehrt die historische Benutzbarkeit seiner Angaben für alte Zeiten. Älteren Datums dürften daher auch die Dinge sein, auf welche zurückzukommen wir oben zugesagt haben. Jede Quadratzahl, sagt uns Theon[4]), ist entweder selbst oder nach Verminderung um eine Einheit durch 3 wie auch durch 4 teilbar, und so entstehen vier Arten von Quadratzahlen durch Vereinigung jener beiden selbständigen je zwei Unterarten bedingenden Unterscheidungen. Es ist ziemlich gleichgültig, wann man diesen Satz entdeckte, der freilich der Lehre von den quadratischen Resten angehört, aber eine große praktische Bedeutung nicht besitzt.

---

[1]) Theon (ed. Hiller) pag. 24, lin. 23. [2]) Theon pag. 28, 5 und 32, 11. [3]) Ebenda pag. 33, 4. [4]) Ebenda pag. 35, 17 etc.

Ganz anders verhält es sich mit den Seiten- und Diametralzahlen, πλευρά und διάμετρος, mit welchen Theon sich beschäftigt[1]). Die Entstehung dieser Zahlen ist folgende. Ausgehend von zwei Einheiten bildet Theon neue Zahlen, indem er einmal die beiden gegebenen Zahlen addiert $1 + 1 = 2$ und das andere Mal das Doppelte der einen Zahl zur anderen fügt $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Es soll hier nicht versäumt werden, auf Ähnliches bei Nikomachus (S. 431) erinnernd zurückzuverweisen. Von den beiden so gewonnenen Zahlen heißt ihm die kleinere 2 die Seite, die größere 3 die Diametralzahl. Diese Bildungsweise wird alsdann fortgesetzt, indem die Summe einer Seite und ihrer Diametralzahl die folgende Seite, die Summe der doppelten Seite und der Diametralzahl die folgende Diametralzahl liefert. Heißen etwa alle Seiten α, alle Diametralzahlen δ mit jedesmal beizufügender Ordnungszahl, so ist das Bildungsgesetz $\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} = \alpha_n$ und $2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} = \delta_n$. Das Quadrat einer jeden Diametralzahl, behauptet nun Theon, unterscheidet sich von dem doppelten Quadrate der zugehörigen Seite nur um eine Einheit, um welche bald die eine, bald die andere Zahl abwechselnd größer ist. Einen Beweis für diesen Lehrsatz:

$$\delta_n^2 = 2\alpha_n^2 \pm 1$$

wird man bei Theon vergeblich suchen, richtig aber ist er, wie die Werte $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$, $\delta_2 = 3$; $\alpha_3 = 5$, $\delta_3 = 7$; $\alpha_4 = 12$, $\delta_4 = 17$ usw. zeigen. Allgemein folgt aus den Definitionsgleichungen für α_n und δ_n, daß

$$2\alpha_n^2 = 2\alpha_{n-1}^2 + 4\alpha_{n-1}\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1}^2,$$
$$\delta_n^2 = 4\alpha_{n-1}^2 + 4\alpha_{n-1}\delta_{n-1} + \delta_{n-1}^2,$$
$$2\alpha_n^2 - \delta_n^2 = -(2\alpha_{n-1}^2 - \delta_{n-1}^2)$$

und durch Fortsetzung der gleichen Schlußart:

$$2\alpha_n^2 - \delta_n^2 = (-1)^{n-1}(2\alpha_1^2 - \delta_1^2) = (-1)^{n-1}(2-1) = (-1)^{n-1}$$

und

$$\delta_n^2 = 2\alpha_n^2 + (-1)^n.$$

Jedenfalls kann man aus dem als wahr angenommenen Satze die Folgerung ziehen, daß $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ sich nur wenig von $\sqrt{2}$ unterscheide, daß also $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{17}{12}$ usw. aufeinander folgende Näherungswerte von

[1]) Theon pag. 43, 5 etc. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 228—231 hat eine von unserer Auffassung verschiedene Erklärung dieser Stelle. Mit uns stimmt dagegen überein Unger in einem Erfurter Gymnasialprogramm von 1843: Kurzer Abriß der Geschichte der Zahlenlehre von Pythagoras bis auf Diophant S. 17—19.

$\sqrt{2}$ sein müssen. Jedenfalls deuten ferner die Namen Seiten- und Diametralzahl mit ihren Beziehungen zur Seite und Diagonale eines Quadrates darauf hin, daß Theon sich dieser Anwendung bewußt war. Um so wahrscheinlicher wird die Vermutung, man werde bei Erfindung seines Satzes von einem wesentlich geometrischen Gedankengange geleitet worden sein. Man hat an folgende Entwicklung gedacht[1]). Es sei (Fig. 73) $AB\Gamma$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten α_{n-1}, α_{n-1}, δ_{n-1}. Werden nun die beiden Katheten jede um δ_{n-1} verlängert, so entsteht das neue gleichschenklig rechtwinklige Dreieck $A\Delta E$ mit den Seiten α_n, α_n, δ_n. Voraussetzungsmäßig ist $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$, aber aus der Figur sieht man dann sofort, daß $\delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1}$ sein muß. Natürlich ist die hier gezeigte Konstruktion falsch, indem die Diagonale des Quadrates von rationaler Seitenlänge irrational ist; aber um immer nähere Werte zu erhalten, mußte man geometrisch von der falschen Hypothese einer rationalen Diagonale ausgehen. Wir haben $\frac{7}{5}$ mehrfach als mutmaßlich seit Platon bekannten Näherungswert von $\sqrt{2}$ auftreten sehen. Der darauf folgende Bruch $\frac{17}{12}$ wird im 30. Kapitel uns erinnerlich werden müssen. Dadurch wächst die Wahrscheinlichkeit, daß man der erwähnten Folgerung von dem Zusammenhange zwischen $\sqrt{2}$ und $\frac{\delta_n}{\alpha_n}$ sich bewußt war, wenn die Folgerung selbst bei Theon auch nicht gezogen ist. Berücksichtigt man weiter, daß die Bildungsgesetze der Seiten- und der Diametralzahlen genau dieselben sind, welche die Nenner und Zähler der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche für den Kettenbruch

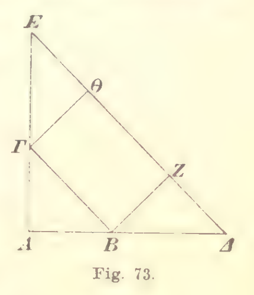


Fig. 73.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

entstehen lassen, so wird man wohl zu der (S. 317) ausgesprochenen Behauptung genötigt, die Griechen seien natürlich nicht der Form nach, aber der Sache nach mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ und mit dem Gesetze der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches bekannt gewesen. Wir brauchen nun nicht mehr zu sagen, wie wichtig es wäre, darüber unterrichtet zu sein, ob auch die Bildung der Seiten-

---

[1]) P. Bergh in Zeitschr. Math. Phys. XXXI, Histor.-literar. Abtlg. S. 135.

und der Diametralzahlen, wie sie bei Theon sich vorfindet, vorplatonischen Ursprunges war?

Eine Stelle, auf welche wir noch aufmerksam zu machen haben, ist diejenige, wo erörtert wird, die Zahl 5 sei arithmetisches Mittel zwischen 1 und 9, zwischen 2 und 8, zwischen 3 und 7. Diese Tatsache ist nämlich durch das Zahlenquadrat

1	4	7
2	5	8
3	6	9

erläutert[1]) und zeigt dadurch einen ersten Anfang wenn auch nur unvollkommener magischer Quadrate.

22. Kapitel.

Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria.

Wir gelangen zum III. S. nach Christi Geburt. Um die Zeit des Kaisers Alexander Severus, welcher 220—230 regierte, schrieb Sextus Julius Africanus seine Kesten. Der römische Name des Schriftstellers würde ihm in einem anderen Kapitel seinen Platz anweisen, wenn nicht die griechische Sprache, deren er sich bediente, uns veranlaßte, seiner hier zu gedenken. Kesten bedeutet wörtlich „mit der Nadel Durchstochenes" und als Titel eines Werkes soll das wohl so viel sagen als „Aneinandergeheftetes". Aneinandergeheftete Bemerkungen der verschiedensten Art sind es auch, die Sextus Julius Africanus dort vereinigt hat, und fast zufällig befinden sich darunter auch zwei Stellen, von welchen die Geschichte der Mathematik Nutzen zu ziehen hat.

Das XXXI. Kapitel der Kesten[2]) beschäftigt sich mit praktischer Kriegsgeometrie, insbesondere mit der Auffindung der Breite eines Flusses, dessen jenseitiges Ufer vom Feinde besetzt ist, und mit der Auffindung der Höhe der Mauern einer belagerten Stadt, um danach im voraus die Größe der herzustellenden Kriegsmaschinen, Türme usw. ermessen zu können. Grundlage des ganzen Verfahrens ist ein geometrischer Satz, dessen Beweis, wie der Verfasser sagt, nur von dem I. Buche der euklidischen Elemente abhängt, der Satz nämlich, daß sämtliche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert

---

[1]) Theon pag. 102. [2]) *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale.* Tome XIX, Partie 2. Paris 1858, pag. 407—415 ist der Text nebst französischer Übersetzung von Vincent abgedruckt. Vgl. Agrimensoren S. 110 flgg.

erscheinen, wenn aus der Mitte einer Kathete parallel zur anderen eine Gerade nach der Hypotenuse, und aus deren Durchschnittspunkte wieder eine neue Parallele zur ersten Kathete bis zum Durchschnitte mit der zweiten gezogen wird (Fig. 74). Sei $\alpha\beta$ die erste Kathete und außer den vorgeschriebenen $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ noch die Hilfslinie $\delta\zeta$ gezogen. $\alpha\delta = \delta\beta$, $\delta\beta = \varepsilon\zeta$ als Parallele zwischen Parallelen, folglich auch $\alpha\delta \# \varepsilon\zeta$, und somit treten in der Figur zwei Parallelogramme auf $\gamma\varepsilon\delta\zeta$, $\delta\beta\varepsilon\zeta$, vermöge deren $\delta\varepsilon = \gamma\zeta = \beta\zeta$ und $\delta\zeta = \varepsilon\gamma$, während (aus dem in dem Beweise nicht genannten Parallelogramme $\alpha\delta\zeta\varepsilon$ folgend) auch $\delta\zeta = \alpha\varepsilon$ ist.

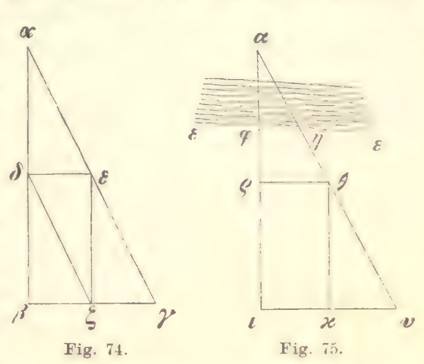


Fig. 74. Fig. 75.

Von diesem Satze aus wird die Breite eines Flusses gemessen. Liegt α am feindlichen Ufer (Fig. 75), während $\varepsilon\varepsilon$ die diesseitige Uferlinie bezeichnet, so stellt man die Dioptra in ι auf, weiter vom Flusse entfernt als der Fluß breit ist und visiert sowohl (senkrecht zur Flußlinie $\varepsilon\varepsilon$, was aber nicht ausdrücklich gesagt, sondern nur aus der Figur zu entnehmen ist) nach α, als rechtwinklig zu dieser ersten Linie nach υ, so daß dabei der Punkt $\varkappa$ in der Mitte von $\iota\upsilon$ gewonnen wird. Steckt man nun von υ aus die Richtung $\upsilon\alpha$, von $\varkappa$ aus $\varkappa\theta \parallel \iota\alpha$ und endlich $\theta\varrho \parallel \iota\upsilon$ ab, so ist $\alpha\iota$ doppelt so groß, $\alpha\varrho$ genau gleich groß mit $\iota\varrho$ und läßt nach Abziehung von $\varphi\varrho$ die gesuchte $\alpha\varphi$ übrig. Man kann als wesentlich bei dieser Methode auffassen, daß die gesuchte Breite, beziehungsweise eine ihr gleiche Breite, wirklich auf dem Felde dargestellt wird. Man kann bei dem uns erhaltenen Berichte auf die von allen geometrischen Gewohnheiten abweichende Buchstabengebung für die einzelnen Punkte hinweisen. Nicht nur, daß ι nicht vermieden ist, das hörte überhaupt um die Zeit, in welcher wir uns befinden, auf, und noch spätere Geometer ersten Ranges benutzen unterschiedlos ι wie andere Buchstaben, es ist überhaupt kein System zu erkennen, nach welchem α, ε, η, θ, ι, $\varkappa$, ϱ, υ, φ als Buchstaben an eine Figur gewählt worden sein mögen. Das war anders in der vorhergehenden Figur, anders in der folgenden (Fig. 76), an welcher unmittelbar anschließend eine von Dreiecksähnlichkeiten ausgehende Methode die Flußbreite zu messen gelehrt wird. Man soll längs

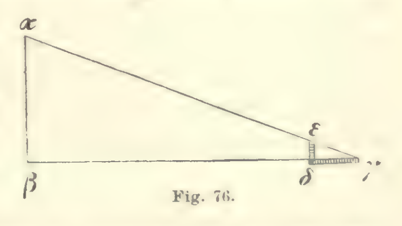


Fig. 76.

dem Flusse in der gemessenen Linie $\beta\gamma$ einhergehen und dabei einen massiven rechten Winkel von augenscheinlich ziemlich bedeutender Größe, der das Kennzeichnende des Verfahrens bildet, und uns wiederholt begegnen wird, mitnehmen. Auf dem einen Schenkel dieses rechten Winkels in ε ist überdies eine Signalstange senkrecht zur Ebene des rechten Winkels befestigt. Wird nun γ so gewählt, daß jene Signalstange bei ε mit dem den Punkt α bezeichnenden Gegenstande und dem Standpunkt γ in einer Geraden liegt, so ist aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\beta\gamma : \gamma\delta = \alpha\beta : \varepsilon\delta$, mithin $\alpha\beta$ gefunden. Dieselbe Figur, so beschließt der Verfasser dieses interessante Kapitel, dient die Höhe einer Mauer von weitem zu messen. Die Dioptra wird dazu in δ als $\delta\varepsilon$ aufgestellt und ihr Lineal in die Neigung $\varepsilon\alpha$ gebracht, wo α einen Punkt des oberen Mauerrandes bedeutet. Die rückwärtsige Verlängerung dieser Richtung $\varepsilon\alpha$ nach γ lehrt $\gamma\delta$ neben dem bekannten $\delta\varepsilon$ und neben dem nach der vorigen Aufgabe ermittelten $\gamma\beta$ finden und nun ist $\gamma\delta : \delta\varepsilon = \gamma\beta : \beta\alpha$. Der Schüler Herons ist hier unverkennbar, und die Paragraphe von dessen Abhandlung über die Dioptra, an welche das angegebene Verfahren sich anlehnt, haben nachgewiesen werden können, wenn auch der massive rechte Winkel bei Heron nicht vorzukommen scheint.

Das LXXVI. Kapitel der Kesten[1]) lehrt eine Art von Feuertelegraphie kennen. Die Römer hätten, so erzählt der Sammler, an leicht sichtbaren Plätzen drei Signalstangen aufgerichtet, je eine links, eine rechts, eine in der Mitte. An jeder Stange konnten bis zu neun Fackeln befestigt werden, und zwar bedeuteten dieselben Einer, wenn sie an der Stange links, Zehner, wenn sie an der mittleren Stange, Hunderter, wenn sie an der Stange rechts befestigt wurden. Sie sollten nämlich von weitem gesehen werden, und für den gegenüberliegenden Beobachter kehrt sich natürlich rechts in links, links in rechts, so daß die Ordnung der Zahlenwerte ihm von rechts nach links zunehmend erscheint, wie es z. B. auch bei der salaminischen Tafel (S. 133) der Fall war. Zahlen als solche sollten freilich nicht mitgeteilt werden. Man machte von den Zahlen Gebrauch, um Buchstaben des griechischen Alphabetes zu erkennen zu geben, deren jeder je einen der Werte 1 bis 9, 10 bis 90 oder 100 bis 900 besitzt, und so konnten an der richtigen Stange sichtbar gemachte Fackeln die Buchstaben eines Wortes, eines Satzes nach und nach dem entfernten Freunde bekannt machen.

---

[1]) Vgl. Vincent in den *Comptes Rendus de l'académie des sciences* vom 3. Januar 1842, XIV, 43, und Friedlein im *Bullettino Boncompagni* 1868, pag. 49—50.

Eine Sammlung ganz anderen wissenschaftlichen Wertes ist die des Pappus von Alexandria, eines Schriftstellers, der mutmaßlich dem Ende des III. S. angehört hat[1]). Wir besitzen über seine Lebenszeit überhaupt nur zwei, beide aber bestimmt lautende und einander geradezu widersprechende Angaben, beide selbst aus der gleichen Zeit, nämlich aus dem X. S. Die Leidener Bibliothek besitzt eine in den Jahren 913—920 angefertigte Handschrift der theonischen Handtafeln, welche am Rande der Regentenliste verschiedene literärgeschichtliche Glossen aus der Zeit der ersten Niederschrift besitzt. So steht neben der Regierung des Diokletian die Bemerkung: *ἐπὶ τούτου ὁ Πάπος ἔγραφεν*, unter diesem schrieb Pappus. Daß der Name hier nur mit einem π geschrieben auftritt, kann uns nicht beirren. In der Mitte des Namens bricht nämlich die Zeile ab und macht eine Spaltung in *Πά* und *πος* notwendig, wobei leicht ein π verloren gegangen sein kann, für welches in der ersten Zeile etwa kein Platz mehr vorhanden war. Außerdem ist, wenn der Mathematiker Pappus nicht gemeint sein wollte, kein Schriftsteller gleichen oder nur wenig abweichenden Namens aus der Zeit des Diokletian bekannt. Dieser regierte 284 bis 305, folglich wäre Pappus in dieselbe Zeit zu setzen. Dem gegenüber steht unvermittelt, was Suidas, der bekannte Lexikograph, an zwei sachlich übereinstimmenden Stellen sagt. Unter Theon heißt es bei ihm, er sei Zeitgenosse des Pappus, der wie er in Alexandria zu Hause gewesen sei, und beide hätten unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt. Unter Pappus heißt es, er habe unter der Regierung des älteren Theodosius gelebt, zur Zeit, als auch der Philosoph Theon in seiner Blüte stand, welcher über den Kanon des Ptolemäus schrieb. Die Werke des Pappus seien eine Erdbeschreibung, ein Kommentar zu den vier Büchern der großen Zusammenstellung des Ptolemäus, ferner über die libyschen Flüsse und über Traumdeutung. Auch diese Angabe ist von bestimmtester Klarheit. Theon hat, wie wir aus seinem chronologischen Werke selbst entnehmen, jedenfalls 372 noch gelebt; Theodosius I. regierte 379 bis 395; diese Zahlen stimmen zueinander, und folglich wäre Pappus wie Theon an das Ende des IV. S. zu setzen, was auch alle Geschichtswerke der Mathematik ohne Anstand getan haben. Wenn wir gleichwohl der Meinung folgen, welche den älteren Zeitpunkt für Pappus als zutreffend erachtet, so leitet uns folgender Gedanke. Bei zwei einen Widerspruch enthaltenden gleichzeitigen Angaben müssen

[1]) Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XXI, Histor.-liter. Abtlg. S. 70 flgg. (1876) über die Lebenszeit und die Handschriften des Pappus. In bezug auf letztere diente die Einleitung zu Hultschs Pappusausgabe als Quelle.

wir einesteils uns fragen, ob und wie ein Irrtum des einen, beziehungsweise des anderen Gewährsmannes Erklärung finden kann, müssen wir andernteils überlegen, ob innere Gründe die eine oder die andere Meinung unterstützen. Die Behauptung des Schreibers des Leidener Kodex ist nun, wenn falsch, auf keine Weise zu verstehen. Suidas könnte dagegen dadurch zu seinem Irrtume gelangt sein[1]), daß in seiner Quelle die beiden Schriftsteller Pappus und Theon von Alexandria ihrer Heimat, ihrer verwandten literarischen Tätigkeit wegen unmittelbar hintereinander aufgeführt waren, oder aber dadurch, daß er einen aus den Erläuterungen des Pappus und des Theon gemischt zusammengesetzten Kommentar zum Almageste vor Augen hatte, eine Möglichkeit, die im 24. Kapitel sich uns ergeben wird, und daß er nun auf eine gar nicht angegebene, weil überhaupt nicht vorhandene Gleichzeitigkeit der beiden Erklärer schloß. Als unterstützend dienen folgende Gesichtspunkte. Suidas war mit des Pappus Werken nicht aufs beste bekannt. Er nennt unter denselben gar nicht dasjenige, welches allein in einiger Vollständigkeit sich erhalten hat, und welches genügt, um unsere Bewunderung des Verfassers zu rechtfertigen. Der andere Berichterstatter ist in seinem Schweigen entschuldigt, weil er gar kein Werk des Pappus mit Namen anführt. Ferner wäre es sehr auffallend, wenn Pappus und Theon an dem gleichen Orte lebend zur selben Zeit einen Kommentar zu demselben Werke, dem Almageste des Ptolemäus, geschrieben hätten. Weit wahrscheinlicher wird diese Tatsache, wenn Pappus hundert Jahre vor Theon von Alexandria schrieb. Fraglich erscheint dabei, ob Pappus den ganzen Almagest erklärt haben mag, oder nur vier Bücher. Die Vermutung, es habe bei Suidas ursprünglich $I\Gamma = 13$ Bücher geheißen, der wirklichen Bücherzahl des Almagestes entsprechend, und daraus sei $\Delta = 4$ Bücher verschrieben worden[2]), ist ausgesprochen worden und hat manche Wahrscheinlichkeit, nachdem es sich erwiesen hat, daß Pappus jedenfalls zum ersten, zum fünften und zum sechsten Buche des Almagestes einen Kommentar verfaßte, daß der zum fünften und sechsten Buch gehörende Teil sich noch erhalten hat[3]). Wahr ist es, daß Theon seinen Vorgänger niemals genannt hat außer in Überschriften, deren Ursprung ja immer zweifelhaft ist. Mag aber Theon 100 oder ein paar Jahre nach Pappus gelebt haben, so ist dieses Schweigen gleich auffallend, zu derselben Zeit auch gleich einfach damit zu erklären, daß Theon den Pappus recht fleißig benutzte. Es bildet, wie uns

[1]) Diese Hypothese rührt von Usener her. Neues Rheinisches Museum 1873, Bd. XXVIII, S. 403. [2]) So glaubt Hultsch pag. VIII, Anmerkung 3 der Praefatio, welche den dritten Band seiner Pappusausgabe eröffnet. [3]) Hultsch l. c. pag. XIV.

von philologischer Seite versichert wird, geradezu eine Eigentümlichkeit der Kommentatoren des IV. S. etwa ein wahres Plünderungssystem an älteren Schriftstellern auszuüben, welche niemals genannt werden, so daß nur in einzelnen Fällen ein glückliches Ohngefähr es möglich gemacht hat, diesen unrechtmäßigen Aneignungen auf die Spur zu kommen. So nehmen wir also an, Pappus habe an der Schwelle vom III. zum IV. S. gelebt und geschrieben.

Ob ein Zitat bei Proklus[1]) dahin zu deuten ist, daß Pappus gleich Heron an der Spitze einer Schule stand, mag dahingestellt bleiben. Nach griechischem Sprachgebrauche kann *οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον* unzweifelhaft diese Bedeutung einschließen, die Worte können aber auch Heron und Pappus allein bezeichnen sollen, und letzteres wohl noch häufiger als ersteres. Unter den Schriften, welche Pappus verfaßte, fanden seine Bemerkungen zum Almageste mehrfache Erwähnung. Wir erinnern daran, daß (S. 318) Eutokius auch sie unter den Schriften genannt hat, welche über die Ausziehung von Quadratwurzeln zu Rate gezogen werden können. Pappus selbst spricht von einem Kommentare, welchen er zu dem Analemma des Diodorus angefertigt habe[2]). Von jenem Schriftsteller ist zwar auch bei anderen wiederholt die Rede[3]), jedoch ohne daß dadurch sein Zeitalter oder der Inhalt seiner Schrift genauer bekannt würde; deren Titel stimmt allerdings mit demjenigen eines Buches des Ptolemäus überein, von welchem (S. 423) die Rede war. Eine weitere schriftstellerische Leistung des Pappus bildete ein Kommentar zu den euklidischen Elementen, von welchem Bruchstücke, insbesondere eine von Eutokius[4]) erwähnte Bemerkung, in einem Vatikankodex aufgefunden worden sind[5]). Diesem Kommentare dürfte eine Anzahl von Bemerkungen entnommen sein, welche bei Proklus sich erhalten haben, und deren eine verdient, daß wir ihrer erwähnen.

Pappus habe, berichtet Proklus[6]), Einspruch gegen den Satz erhoben, daß der Winkel, der einem Rechten gleich sei, immer selbst ein Rechter sein müsse. Er stellte nämlich (Fig. 77) zwei gleichlange Gerade $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ senkrecht zueinander und beschrieb über jede

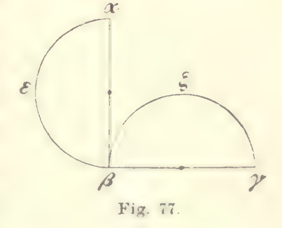


Fig. 77.

[1]) Proklus (ed. Friedlein) 429, 13. [2]) Pappus IV, 27 (ed. Hultsch) pag. 246. [3]) Vgl. Hultschs Praefatio zum III. Bande seiner Pappusausgabe IX—XI. [4]) Archimed (ed. Heiberg) III, 34 in dem Kommentare des Eutokius heißt es: *εἴρηται καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων.* [5]) Heiberg, *Om scholierne til Euklids Elementer* in den Vidensk. Selsk. Skr. 6. Raekke, historisk. og philosophisk. Afd. II, 3. Kjöbnhavn 1888, pag. 297. [6]) Proklus (ed. Friedlein) 190.

derselben einen Halbkreis. Da diese Halbkreise sich decken, müssen die Winkel $\alpha\beta\varepsilon$, $\gamma\beta\zeta$ vollkommen gleich sein. Wird sodann von dem rechten Winkel $\alpha\beta\gamma$ der eine jener identischen Winkel weggenommen, der andere beigefügt, so muß also ein Etwas entstehen, welches einem rechten Winkel wieder gleich ist, ohne daß man doch sagen könnte, dieser Winkel $\varepsilon\beta\zeta$ sei ein rechter Winkel. Diese Betrachtung über nicht geradlinige Winkel ist das Vorbild späterer Spitzfindigkeiten ähnlichen Inhaltes geworden (S. 264).

Das mathematische Werk des Pappus, welches auf uns gekommen ist, und welches merkwürdigerweise durch keine bekannt gewordene Erwähnung von seiten irgend eines Mathematikers oder sonstigen Schriftstellers in seinem Vorhandensein bestätigt wird, führte den Namen der Sammlung, συναγωγή, und bestand aus acht Büchern[1]. Titel und Einteilung verbürgt uns eine vatikanische Pappus-Handschrift aus dem XII. S., welche selbst sämtlichen übrigen, keineswegs seltenen Abschriften unmittelbar oder mittelbar zugrunde liegt. Der Charakter dieser Sammlung besteht darin, daß Pappus den Inhalt von zu seiner Zeit hochgeschätzten mathematischen Schriften kurz angibt und zu denselben erklärende, aber auch erweiternde, oftmals nur den allerlosesten Zusammenhang mit dem gerade in Rede Stehenden wahrende Sätze hinzufügt. Diese Beziehung, oder fast besser diese Beziehungslosigkeit lassen uns die Sätze erkennen, von denen Pappus uns sagt, daß sie zu Werken gehören, welche, wie die Kegelschnitte des Apollonius von Pergä, auf uns gekommen sind und den Vergleich gestatten. Die Freiheit, welche Pappus sich demgemäß bei seinen Zusätzen gestattet hat, die Genauigkeit, deren er daneben bei übersichtlichen Inhaltsangaben sich befleißigte, machen den doppelten Wert seiner Sammlung aus. Jene Gewissenhaftigkeit, welche wir als zweite Tugend des Pappus erwähnten, macht, daß seine Sammlung als Ersatz für wertvolle im Urtexte verloren gegangene Abhandlungen dienen kann, so daß wir nach dem Vorgange aller Schriftsteller über Geschichte der Mathematik keinen Anstand nahmen, sie im Verlauf dieses Bandes wiederholt zu solchem Zwecke zu benutzen. Jene Selbständigkeit, die wir zuerst rühmend betonten, hat uns Dinge geliefert, die, teils nicht anderweitig rückwärts verfolgbar, teils von Pappus ausdrücklich für sich in Anspruch genommen, den zuverlässigen Beweis für die hohe Meisterschaft des Verfassers insbesondere

[1] Eine lateinische Übersetzung durch Commandinus erschien 1588, dann in mehrfachen neuen Abdrücken bis 1602. C. J. Gerhardt gab 1871 das VII. und VIII. Buch im Urtexte mit nicht tadelloser deutscher Übersetzung heraus. Eine vortreffliche Textausgabe mit lateinischer Übersetzung und reichhaltigen Anmerkungen veranstaltete Fr. Hultsch in 3 Bänden. Berlin 1875, 1877, 1878.

in solchen geometrischen Untersuchungen liefern, welche unser Jahrhundert unter dem Namen der neueren oder der höheren synthetischen Geometrie kennt.

Welchen Gang Pappus bei Ausarbeitung seiner Sammlung einschlug, ob er überhaupt einen bestimmten Gedanken planmäßiger Reihenfolge zugrunde legte, ist mit Sicherheit nicht zu ermitteln, weil das erste Buch und die mutmaßlich größere Hälfte des zweiten Buches verloren gegangen ist, die Darstellung sich mithin auf die übrigen Bücher beschränken muß. Dabei ist überdies vorausgesetzt, daß alle vorhandenen Bücher Pappus angehören. Allerdings nimmt man dieses gegenwärtig an, und ein vereinzelter Versuch[1]) nur das III. und IV. Buch, welche ursprünglich ein einziges gebildet hätten, dann das VII. und das VIII. Buch Pappus zuzuschreiben, alles übrige als unechte spätere Einschaltung auszuscheiden, ist, soviel wir wissen, ohne jegliche Beistimmung geblieben.

Der vorhandene Überrest des II. Buches enthält die Multiplikationsmethode des Apollonius von Pergä.

Im III. Buche sind vier verschiedene Abhandlungen vereinigt. Die erste beschäftigt sich mit der Aufgabe zwischen zwei gegebenen Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten nach Methoden des Eratosthenes, des Nikomedes, des Heron, des Pappus selbst. Die zweite Abhandlung lehrt die drei verschiedenen Mittel, welche zwischen zwei Strecken bestehen, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel, von welchen übrigens auch in den einleitenden Kapiteln der ersten Abhandlung des III. Buches schon die Rede war, an einer und derselben Figur zur Erscheinung bringen. Aber dieses geometrische Problem dient nur zum Anknüpfungspunkte für eine ganz Lehre von den Medietäten, welche mit einer Tabelle von ganzzahligen Beispielen für sämtliche zehn Formen von Medietäten abschließt. Die dritte Abhandlung beschäftigt sich wieder mit einer ganz anderen Untersuchung. Der 21. Satz des I. Buches der euklidischen Elemente behauptet, daß, wenn innerhalb eines Dreiecks ein Punkt gewählt und mit den Endpunkten der Grundlinie geradlinig verbunden wird, die Summe dieser Geraden kleiner ausfalle als die Summe der sie umfassenden Dreiecksseiten. Ganz anders, wenn die inneren Geraden nicht nach den Eckpunkten, sondern nach zwischen denselben liegenden Punkten der Dreiecksgrundlinie gezogen werden. Alsdann kann die Summe der inneren

---

[1]) C. J. Gerhardt, Die Sammlung des Pappus von Alexandria. Programm des Gymnasiums in Eisleben für 1875. Vgl. dazu die Besprechung in der Zeitschr. Math. Phys. XXI, Histor.-literar. Abteilung 37—42 (1876).

Geraden unter Umständen ebenso groß sein, sie kann auch mehr betragen als die der umfassenden Seiten und zwar in mannigfachen Abstufungen, und diese sämtlichen Fälle werden ausführlich durchgenommen. Die vierte Abhandlung geht zur Einbeschreibung der fünf regelmäßigen Vielflächner in die Kugel über, bei welcher Gelegenheit die Sphärik des Theodosius von Tripolis mehrfach benutzt aber auch ergänzt wird. Es ist mit großem Rechte bemerkt worden[1]), daß die Auffassung der Aufgabe eine wesentlich andere ist als die, von welcher Euklid im XIII. Buche seiner Elemente ausgeht, und daß dadurch die erneute Behandlung um so höheren Wert erhalte. Euklid kommt es auf die metrischen Zusammenhänge zwischen Polyederseite und Kugeldurchmesser an; er bildet sich zuerst die Polyeder und beweist hinterdrein ihre Einbeschreibbarkeit. Pappus will die Polyeder selbst erhalten; er geht aus von der Kugel und verschafft sich die Parallelkreise auf der Kugeloberfläche, welche je eine Polyederfläche als eingeschriebenes Vieleck besitzen.

Das IV. Buch zerfällt gleichfalls in mehrere Abteilungen, wenn schon die Sonderung derselben nicht auf den ersten Blick in die Augen fällt. Es beginnt mit der Lehre von den Kreistransversalen, an welche sich die Aufgabe knüpft, den drei einander äußerlich berührende Kreise umschließenden Kreis zu konstruieren. Noch andere Berührungsaufgaben vollenden das, was wir die erste Abhandlung des IV. Buches nennen möchten. Auf sie folgen eine Anzahl von Sätzen aus der Lehre von der archimedischen Spirale sowie von der nikomedischen Konchoide und darauf eine ziemlich ausgedehnte Abhandlung über die Quadratrix, in welche verschiedene andere Untersuchungen sich ziemlich naturgemäß einfügen. Wir nennen die Rektifikation des Kreises; wir nennen Beziehungen zwischen Quadratrix und Spirale; wir nennen die Trisektion des Winkels und die allgemeinere Aufgabe der Teilung des Kreises in beliebigem Verhältnisse der Bögen mittels der Quadratrix, aber auch mittels der Spirale; wir nennen endlich die Benutzung der Quadratrix zur Lösung der drei Probleme: ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl in einen Kreis zu beschreiben, zu einer gegebenen Sehne einen Kreisbogen zu finden, welcher ein bestimmtes Längenverhältnis zur Sehne besitze, zueinander inkommensurable Winkel zu zeichnen.

Das V. Buch beginnt mit dem Auszuge aus der Abhandlung des Zenodorus über Figuren gleichen Umfanges, so weit ebene Figuren in Frage stehen. Dann geht Pappus zu dem Raume über, lehrt die

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* série 5, T. V (Février-Mars 1855) pag. 238—240.

archimedischen Körper kennen und zeigt, daß bei gleicher Oberfläche Kegel sowohl als Zylinder kleineren Rauminhaltes als Kugeln sind. Damit ist der Rückweg zur Abhandlung des Zenodorus, soweit sie auf Raumkörper sich bezieht, gewonnen, und der Beweis wird ihr nachgebildet, daß von den fünf platonischen regelmäßigen Körpern bei gleicher Oberfläche stets der mehreckige den größeren Inhalt einschließe.

Das VI. Buch stellt sich in seiner Überschrift die Aufgabe Auflösungen zu den Schwierigkeiten zu finden, welche in dem sogenannten kleinen Astronomen, μικρὸς ἀστρονομούμενος, enthalten sind. Der Gegenstand, der damit gemeint ist, ist uns keineswegs neu, nur der Name begegnet uns hier zuerst, und deshalb haben wir bis hierher es aufgespart uns desselben zu bedienen. Der kleine Astronom ist nämlich eine Sammlung von Schriften, deren Studium nach dem der Elemente des Euklid und vor dem des Almagestes des Ptolemäus eingeschoben werden mußte, wenn letzteres vollen Erfolg haben sollte. Ob der kleine Astronom eine endgültig begrenzte Sammlung war, ob nicht vielmehr der an sich lose Zusammenhang gestattete, bald diese bald jene kleinere Schrift aufzunehmen oder auszuschließen, dürfte zweifelhaft sein. Der Kommentar des Pappus verbreitet sich über nachfolgende Bücher, welche demgemäß zum kleinen Astronomen gehörten: Die Sphärik des Theodosius, die Abhandlung des Autolykus über die sich drehende Kugel, die des Theodosius über Tag und Nacht, die des Aristarchus über Größe und Entfernung von Sonne und Mond, die Optik des Euklid, die Phaenomena desselben Verfassers. Ein Kommentar des Menelaus zu dem letztgenannten Werke hatte zwar nach einer durch Pappus gegebenen Zusage[1]) auch noch erläutert werden sollen, doch findet sich davon in dem auf uns gekommenen Texte keine weitere Spur. Wir bemerken, daß die beiden Astronomen Autolykus und besonder Aristarchus von Samos in der Geschichte ihrer Wissenschaft hochbedeutsame Persönlichkeiten sind. Autolykus[2]) lebte kurz vor Euklid um 330 etwa, Aristarch[3]), wie wir schon (S. 419) bemerkten, ein gutes halbes Jahrhundert später um 270. Wir bemerken ferner, daß die Erläuterungen des VI. Buches, auch wo sie auf astronomische Werke sich beziehen, ihrer größten Mehrzahl nach geometrischer Natur sind. Wir bemerken endlich, daß Pappus durch seine Namensnennung selbst den Geometern, welche er nur unter den Ersten des Faches auswählt, ein hohes Lob erteilt, daß man also beispielsweise

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 602, lin. 1. [2]) Hultsch in der Vorrede zu seiner Ausgabe des Autolykus. Leipzig 1885. [3]) Wolf, Geschichte der Astronomie. S. 35—37.

aus diesem VI. Buche sich eine Meinung von dem Ansehen bilden kann, in welchem damals verdientermaßen die Schriften des Theodosius und des Menelaos standen.

Wer die Elemente des Euklid inne hat und von ihnen aus der Astronomie sich zuwenden will, bedarf, wie vorher bemerkt, des Studiums des kleinen Astronomen, bei welchem das VI. Buch ihn zu unterstützen bestimmt ist. Wer, mit den allgemeinen Elementen vertraut, erlernen will, wie man durch Konstruktion mannigfacher Linien die Auflösung gestellter Aufgaben vollende, bedarf dazu eines anderweitigen eignen Übungsstoffes, der unter dem Namen Sammelwerke analytischer Natur[1]) von Euklid, von Apollonius von Pergä, von Aristäus dem Älteren behandelt worden ist. Die hierzu notwendigen Hilfssätze und Erläuterungen hat Pappus in seinem VII. Buche vereinigt. Gleichwie im vorhergehenden Buche sind Unterabteilungen gebildet, welchen die Namen der einzelnen Werke als Überschriften dienen, welche Pappus zu empfehlen wünscht. Er nennt die Daten des Euklid, den Verhältnisschnitt, den Raumschnitt, den bestimmten Schnitt, die Berührungen des Apollonius, die Porismen des Euklid, dann wieder von Apollonius die Neigungen, die ebenen Örter, die Kegelschnitte, endlich die körperlichen Örter des Aristäus, die Örter auf der Oberfläche des Euklid, die Mittelgrößen des Eratosthenes. Es sind dies, sagt Pappus, 33 Bücher, deren Inhalt bis zu den Kegelschnitten des Apollonius ich Dir übersichtlich herausgestellt habe[2]), und in der Tat entspricht dieser Angabe eine Einleitung von ziemlichem Umfange. An sie knüpft sich eine große Anzahl von Hilfssätzen zu den Büchern des Apollonius über den Verhältnisschnitt und den Raumschnitt, über den bestimmten Schnitt, über die Neigungen, über die Berührungen, über die ebenen Örter. Weitere Hilfssätze zu den Porismen des Euklid folgen. Die zu den Kegelschnitten des Apollonius und endlich zu Euklids Örtern auf der Oberfläche bilden den Beschluß des Buches. Der 8. Satz zu dem Verhältnisschnitt des Apollonius[3]) würde unter Benutzung von Brüchen statt der Verhältnisse aussprechen, daß $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ immer zwischen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ liege. In der Tat ist

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\beta+\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\beta}{\beta+\delta}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)$$

---

1) So die richtige Übersetzung von τόπος ἀναλυόμενος, wie Gow, *A short history of greek mathematics* pag. 211 Note 1 gezeigt hat. 2) Pappus (ed. Hultsch) pag. 636, lin. 25. 3) Ebenda pag. 688, lin. 31.

woraus die Verschiedenartigkeit der Vorzeichen beider Differenzen einleuchtet. Der 22. Satz zu den Berührungen des Apollonius[1]) stellt die Aufgabe, von drei auf einer gegebenen Geraden gegebenen Punkten aus nach einem gleichfalls gegebenen Kreise Gerade zu ziehen, welche ein diesem Kreise eingeschriebenes Dreieck bilden. Es ist das die Aufgabe, welche im XVIII. S. die Erweiterung erfuhr, daß die drei gegebenen Punkte beliebige Lage in der Kreisebene erhielten, und welche unter anderen von Annibale Giordano aus Ottajano gelöst wurde[2]).

Das VIII. Buch kündigt sich als solches an, welches verschiedene interessante mechanische Aufgaben zur Sprache bringe. Ich habe für gut gehalten, „erklärt Pappus, die mit Hilfe der Geometrie gewonnenen, notwendigsten Theoreme über die Bewegung der schweren Körper, die in den Schriften der Alten vorhanden und die von uns selbst geschickt aufgefunden sind, kürzer und deutlicher niederzuschreiben und auf eine bessere Weise, als es früher geschehen, zusammenzustellen[3]). Zu diesen geometrisch begründeten mechanischen Lehren gehören die Theorie des Schwerpunktes, der schiefen Ebene, gehört die Aufgabe mit Hilfe von Zahnrädern, die in gewissem gegenseitigen Verhältnisse der Durchmesser stehen, eine gegebene Last durch gegebene Kraft zu bewegen. Hierher gehört aufs neue die Aufgabe der Einschiebung zweier geometrischen Mittel, welche schon im III. Buche in anderem Zusammenhange aufgetreten war, und welche jetzt wiederkehrt, weil auf ihr die Vergrößerung eines durch mechanische Vorrichtungen irgendwie in Bewegung zu bringenden Körpers unter Festhaltung seiner Gestalt beruht. Weiter läßt Pappus die Aufgabe folgen den Kreisumfang eines geraden Zylinders zu finden, aus welchem überall Stücke herausgebrochen sind, so daß eine unmittelbare Messung an keiner Stelle stattfinden kann. Ohne bemerkbaren Zusammenhang, wie wir es bei Pappus nicht selten gewohnt wurden, treffen wir alsdann auf Fragen, bei denen es sich um Auffindung gewisser Punkte auf einer Kugel handelt, z. B. des Punktes, der einer gegenüberliegenden Ebene am nächsten liegt, und der Punkte, in welchen eine gegebene Gerade die Kugel durchdringt. Daran schließt sich die Einbeschreibung von sieben einander gleichen regelmäßigen Sechsecken in einen gegebenen Kreis, so daß das eine denselben Mittelpunkt mit dem Kreise hat, die übrigen sechs auf je einer Seite des mittleren aufstehen und die dieser gegenüberliegende

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 848. [2]) Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 328 (deutsch 341) mit Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 216—217. [3]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 1028.

Seite jedesmal als Kreissehne besitzen. Diese Aufgabe dient zur Herstellung von Zahnrädern, und nun bilden Auszüge aus dem Gewichtezieher und aus der Mechanik des Heron (S. 369) den Schluß, der vielleicht von fremder Hand dem ursprünglichen VIII. Buche beigefügt sein dürfte.

Mag man aus dieser schematischen Zeichnung des Gerippes der Sammlung des Pappus, so wie dieselbe auf uns gekommen ist, den Eindruck eines Ganzen oder lose und fast zufällig aneinander gereihter Einzelheiten erhalten, mag ein leitender Gedanke dem einen auffindbar, dem anderen unentdeckbar erscheinen, jedenfalls wird, trotz stylistischer Schönheiten, die an manchen Stellen eine geradezu dichterische Veranlagung des Schreibers enthüllen[1]), die Achtung vor Pappus dem Mathematiker eine höhere sein als die vor Pappus dem Schriftsteller, und diese relative Wertschätzung wird noch festeren Boden fassen, wenn wir Einzelheiten herausgreifen, deren Entdeckung nicht wohl einem anderen als Pappus selbst anzugehören scheint.

An die Spitze stellen wir einen Satz des VII. Buches, der den Körperinhalt eines Umdrehungskörpers als dem Produkte der gedrehten Figur in den Weg des Schwerpunktes proportional erkennt[2]), einen Satz, der als Guldinsche Regel seit dem XVII. S. wieder in der Geschichte auftritt.

Wir fügen aus dem VIII. Buche einen Satz bei dahin gehend, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks zugleich Schwerpunkt eines zweiten sei, dessen Eckpunkte auf den drei Seiten des ersten Dreiecks so liegen, daß dadurch jene Seiten sämtlich in gleichem Verhältnisse geteilt erscheinen[3]).

Wir heben jenen Abschnitt des IV. Buches hervor, der mit der Quadratrix sich beschäftigt[4]). Die Quadratrix wird diesem Abschnitte zufolge außer nach dem Gesetze, welches wir bei der ersten Nennung der Kurve schon kennen gelernt haben, auch noch durch zwei viel verwickeltere Entstehungsarten erzeugt, welche man in folgende Worte fassen kann: Es sei eine Schraubenlinie auf einem geraden Kreiszylinder beschrieben, dann bilden die Perpendikel, welche von den einzelnen Punkten derselben auf die Achse des Zylinders gefällt

---

[1]) Z. B. die Einleitung in das V. Buch (ed. Hultsch) pag. 304, welche der Herausgeber mit Recht als kennzeichnend für die Schreibweise des Pappus erklärt hat. [2]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 682. [3]) Ebenda pag. 1034 sqq. [4]) Dieser Abschnitt (ed. Hultsch) pag. 258—264 hat in dem Eislebener Programm von 1875 durch Gerhardt eine deutsche Übersetzung erhalten. Der Text Gerhardts weicht indessen in wesentlichen Dingen von dem Hultschs ab. Letzterer befindet sich in vollem Einklang mit Chasles, *Aperçu hist.* 31, deutsch 28, dem wir hier vorzugsweise folgen.

werden, eine Schraubenfläche. Legt man durch eines dieser Perpendikel unter passender Neigung gegen die Grundfläche des Zylinders eine Ebene, so schneidet diese Ebene die Schraubenfläche in einer Kurve, deren senkrechte Projektion auf die Grundfläche des Zylinders die Quadratrix ist. Und zweitens: wählt man eine archimedische Spirale zur Basis eines geraden Zylinders und denkt man sich einen Umdrehungskegel, dessen Achse diejenige Seitenlinie des Zylinders ist, welche durch den Anfangspunkt der Spirale geht, so schneidet dieser Kegel die Zylinderfläche in einer Kurve doppelter Krümmung. Die Perpendikel, welche von den verschiedenen Punkten dieser Kurve auf die erwähnte Seitenlinie des Zylinders gefällt werden, bilden die Schraubenfläche, welche Pappus an dieser Stelle plektoidische Oberfläche nennt. Legt man nun durch eine dieser Linien unter passender Neigung eine Ebene, so schneidet diese die Oberfläche in einer Kurve, deren senkrechte Projektion auf die Ebene der Spirale die verlangte Quadratrix sein wird. Welche tiefe Kenntnis krummer Oberflächen mußte nicht vorausgehen, damit diese Erzeugungsarten der Quadratrix erfunden werden konnten! Welchen Weg hat auch in dieser Beziehung die griechische Geometrie von Archytas, der, wie wir uns erinnern (S. 229), gekrümmte Oberflächen zur Würfelverdoppelung benutzte, bis auf Pappus zurückgelegt! Um so bedauerlicher ist es, daß uns die euklidischen Örter auf der Oberfläche fehlen, aus denen wir ermessen könnten, in welcher Periode der größere Teil jenes Weges zurückgelegt worden ist.

Pappus geht hier in seiner Betrachtung von Oberflächen und auf denselben hervortretenden Kurven doppelter Krümmung noch weiter. Er läßt eine sphärische Spirale entstehen, indem ein größter Kugelkreis um seinen Durchmesser mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich dreht, während zugleich ein Punkt mit ebenfalls gleichmäßiger Geschwindigkeit die Peripherie des gedrehten Kreises durchläuft[1]), und er findet die Fläche eines durch diese sphärische Spirale begrenzten Stückes der Kugeloberfläche, eine Komplanation, welche unsere Bewunderung um so lebhafter in Anspruch nimmt, wenn wir daran denken, daß die gesamte Kugelfläche zwar seit Archimed bekannt war, Stücke der Kugeloberfläche aber zu messen, wie z. B. sphärische Dreiecke, damals und noch lange später eine ungelöste Aufgabe darstellte.

Sätze aus der Geometrie der Ebene, welche bei Pappus den Leser überraschen, finden sich namentlich in dem VII. Buche, dessen Inhalt

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 264 sqq. Vgl. Klügels Mathematisches Wörterbuch Bd. IV, S. 449 flgg.

von selbst einlud, Erweiterung zu jenen feinen Analysen vorzunehmen, die in den meisten verlorenen Schriften eines Euklid und Apollonius enthalten gewesen sein müssen[1]. Hier findet sich in den Lemmen zum bestimmten Schnitte des Apollonius die Lehre von der Involution von Punkten, in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius die Aufgabe, durch drei in einer Geraden gelegenen Punkte ebensoviele Gerade zu ziehen, welche ein Sehnendreieck in einem gegebenen Kreise bilden (S. 448). Hier enthält ein Lemma zu den Porismen des Euklid die Lehre von der Konstanz des anharmonischen Verhältnisses und ein Lemma zu den Örtern auf der Oberfläche ebendesselben den Satz, daß die Entfernungen eines jeden Punktes irgend eines Kegelschnittes vom Brennpunkte und der zu demselben gehörigen Leitlinie in konstantem Verhältnisse stehen, was Apollonius vielleicht noch nicht gewußt zu haben scheint (S. 339). Hier ist in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius der Lehre von den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise soweit vorgearbeitet, als wenigstens bekannt ist, daß die Verbindungsgerade der entgegengesetzten Endpunkte paralleler Halbmesser zweier sich äußerlich berührender Kreise durch den Berührungspunkt geht und auch der äußere Ähnlichkeitspunkt einer Figur entnommen werden kann[2].

Hier endlich spricht Pappus zu den Kegelschnitten des Apollonius die Aufgabe aus, welcher, seit Descartes die Aufmerksamkeit der Mathematiker aufs neue auf sie gelenkt, der Name der Aufgabe des Pappus vorzugsweise geblieben ist[3]. Wenn mehrere gerade Linien der Lage nach in einer Ebene gegeben sind, den geometrischen Ort eines solchen Punktes zu finden, daß, wenn man von ihm Perpendikel, oder allgemein Linien unter gegebenen Winkeln, nach den gegebenen Geraden zieht, das Produkt gewisser unter ihnen zu dem Produkt aller übrigen in einem konstanten Verhältnisse stehe.

Aber nicht die Geschichte der Mechanik und der Geometrie allein kann aus der Sammlung des Pappus ihre merkwürdigen Ergebnisse schöpfen. Auch anderen mathematischen Lehren ist sie eine wenn auch nicht ganz ebenso ergiebige Fundgrube. Betrachten wir z. B. eines der Lemmen zum Verhältnisschnitte und Raumschnitte des Apollonius[4]. Wir haben (S. 266) im 27. Satze des VI. Buches der euklidischen Elemente die Wahrheit erkannt, das Produkt zweier Teile, in welche man eine gegebene Größe teile, werde ein Maximum, wenn die Teile einander gleich sind. So fest wir an dieser Auffassung des betreffenden Satzes halten, so ist immerhin eine Auffassung dazu er-

[1] Für das Folgende vgl. namentlich Chasles, *Aperçu hist.* 33—44, deutsch 31—41. [2] Pappus (ed. Hultsch) pag. 840 und 852. [3] Ebenda pag. 678. [4] Ebenda pag. 694.

forderlich. Der Wortlaut des Satzes sagt nicht ausdrücklich, was wir in demselben gefunden haben. Pappus dagegen spricht an der genannten Stelle jene Wahrheit klar und durchsichtig aus. Sein Beweis lautet in Buchstaben übertragen folgendermaßen. Wird a in zwei Teile zerlegt, so ist der eine x kleiner als $\frac{a}{2}$ und zwar um y. Der andere Teil ist, wie man erkennt, $x + 2y$ und das Produkt $x^2 + 2xy$ stets kleiner als $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, oder kleiner als $\frac{a^2}{4}$, so lange y von Null verschieden ist.

Pappus, wissen wir, hat der Ausziehung der Quadratwurzeln seine Aufmerksamkeit zugewandt. Er hat auch die Aufgabe der Einschiebung zweier mittleren Proportionalen zwischen gegebene Größen, die analytisch zur Kubikwurzelausziehung führt, aber von den Griechen stets geometrisch bearbeitet wurde, an zwei verschiedenen Orten im III. und im VIII. Buche verschiedenen Schriftstellern nachbehandelt. Eine solche von ihm durchgesprochene Lösung ist besonders merkwürdig, weil sie falsch ist, und Pappus den Irrtum durch Rechnung nachweist, also den geometrischen Gang zugunsten einer arithmetischen Prüfung unterbricht. Man hat gezeigt[1]), daß jene tatsächlich unrichtige Methode, wenn fortgesetzt angewandt, eine wirkliche näherungsweise richtige Kubikwurzelausziehung liefert, und damit wäre ein ungemein wichtiger Fortschritt griechischer Wissenschaft enthüllt, wenn wahrscheinlich gemacht werden könnte, daß der Erfinder jenes Verfahrens wirklich beabsichtigte, was nachträglich aus seinem Versuche gemacht worden ist. Wir können für jetzt nicht daran glauben, weil ein Mann wie Pappus, gelehrt und geometrisch gewandt wie kein zweiter seiner griechischen Zeitgenossen, sonst wohl kaum mit einer gewissen Geringschätzung von jenem Versuche gesprochen haben würde.

Zu den Berührungen des Apollonius macht Pappus zwei Bemerkungen, von welchen wir (S. 345) andeutungsweise redeten, ihre eigentliche Erwähnung bis hierher aufsparend, da es mindestens zweifelhaft ist, ob wir hier dem Apollonius bereits Bekanntes, ob einen Zusatz des Pappus vor uns haben. Pappus sagt nämlich, aus drei Elementen, deren jedes beliebig oft gesetzt werden darf, lassen

---

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 32 sqq. Vgl. Pendlebury, *On a method of finding two mean proportionals* im *Messenger of the mathematics* Ser. 2, Tom. II, pag. 166 sqq., dann Glaisher in dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik V, 244 und beide ergänzend S. Günther, Antike Näherungsmethoden im Lichte moderner Mathematik (aus den Abhandlungen der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften VI. Folge, 9. Band. Prag 1878) S. 32—41 des Sonderabdruckes.

sich zehn Ternen und nur sechs Amben bilden[1]). Das sind wahre kombinatorische Lehrsätze von einem Mathematiker verwertet. Neben der Ursprungsfrage bleibt noch eine zweite zu stellen, die wir nicht zu entscheiden wagen, ob die beiden Sätze als spezielle Fälle, ob als in einer allgemeinen Hauptwahrheit enthalten bekannt waren. Wir neigen der Meinung zu, es sei nur ersteres der Fall gewesen, und Pappus, oder wer nun die Sätze fand, habe durch tatsächliches Bilden der Kombinationsformen sich von ihrer Anzahl überzeugt.

Die drei hauptsächlichen Mittelgrößen sind schon mehrfach von uns besprochen. Wir wissen, daß Nikomachus von Gerasa, daß Theon von Smyrna sich mit ihnen beschäftigte, aber keiner von beiden leitete so, wie Pappus in seinem III. Buche es tut[2]), alle drei durch eine gleichmäßige Erzeugungsweise ab. Zwischen a und c ist Pappus zufolge eine dritte Größe b arithmetisches, geometrisches oder harmonisches Mittel, je nachdem die beiden Differenzen $a - b$ und $b - c$ in dem Verhältnisse $a : a$ oder $a : b$ oder $a : c$ stehen.

Wir möchten ferner die Aufmerksamkeit unserer Leser auf die dem III. Buche angehörige Aufgabe lenken: zu einem gegebenen Parallelogramme ein zweites zu finden, so daß die Seiten des zweiten zu denen des ersten in einem gegebenen Längenverhältnisse stehen, während die Flächenräume in einem anderen gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehen sollen[3]). Die Aufgabe ist an sich leicht und eine vollständig bestimmte, aber sie gewinnt an geschichtlicher Tragweite, wenn wir sie mit jener unbestimmten Aufgabe im Buche des Landbaues vergleichen (S. 391): zwei Rechtecke zu finden, bei welchen die Summe der Seiten in einem, die Flächeninhalte in einem anderen gegebenen Verhältnisse stehen sollen, eine Aufgabe, welche uns noch wiederholt begegnen wird, und deren Ursprung durch das bloße Vorkommen im heronischen Buche des Landbaues noch keineswegs gesichert ist, da gerade dieses Buch spätere Einschiebungen mit großer Wahrscheinlichkeit vermuten läßt.

Endlich kommen wir auf die Multiplikationsmethode des Apollonius im II. Buche des Pappus zurück und auf eine Bemerkung, welche wir bei unserer ersten Erörterung dieses Verfahrens (S. 346) dazu machten. Jene Bemerkung bezog sich auf das Auftreten $\varkappa$ter Myriaden. Die Allgemeinheit der Darstellung beschränkt sich nicht auf sie. Bei den Zahlenbeispielen, an welchen die Multiplikation mit Hilfe der Wurzelzahlen gelehrt wird, kommen natürlich griechischer Gewohnheit gemäß Buchstaben als Vertreter von Zahlen

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 646 und 648. [2]) Ebenda pag. 70 und 72. [3]) Ebenda pag. 126 sqq.

vor. Aber neben den zu diesem Zwecke verwandten Buchstaben des Alphabetes erscheinen auch große Buchstaben in der Bedeutung allgemeiner Zahlen. So ist $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$, und von den entsprechenden großen Buchstaben wird angenommen, es sei[1]) $A = 20$, $B = 3$, $\Gamma = 4$, $\Delta = 5$, $E = 6$ und Z sei die Wurzelzahl von A oder 2. Offenbar ist hier ein ungemeiner Fortschritt enthalten. Es ist nicht bloß von einer gesuchten Größe, einem Hau der Ägypter die Rede; es werden nicht bloß, wie in dem Epantheme des Thymaridas, zwei Gattungen von Größen, gegebene und unbekannte unterschieden; es liegt die Möglichkeit vor, so viele allgemeine Größen als es nur große Buchstaben gibt zu unterscheiden, Operationen an ihnen anzudeuten und damit Regeln selbst in ihrer Allgemeinheit auszusprechen, ohne den Leser zu nötigen die Regel erst aus dem besonderen Beispiele zu abstrahieren. Es ist in der Tat eine Buchstabenrechnung. Schon Aristoteles hat (S. 253) eine Kraft, eine Zeit durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet. Bezeichnungen durch einfache Buchstaben hat man auch aus Ciceros Briefen nachzuweisen vermocht[2]). Aber eine so freie Bewegung mit den Symbolen allgemeiner Größen wie im II. Buche des Pappus ist doch neu. Dem Vorgange des Aristoteles gegenüber ist es nicht erlaubt ohne weiteres zu leugnen, daß Apollonius schon diesen gewaltigen Fortschritt vollzog. Es ist noch weniger gestattet solches geradezu zu behaupten und anzunehmen weder ein Geometer noch ein Arithmetiker, kein Heron, kein Nikomachus seien in die Fußtapfen des Apollonius getreten. Vielleicht ist der Fortschritt in zwei Bewegungen erfolgt, wenn man uns diese Ausdrucksweise gestatten will. Apollonius, das wissen wir aus Pappus, hat sein Verfahren geometrisch dargestellt[3]), d. h. er sprach offenbar, gleich Euklid an manchen Stellen der Elemente, von Linien und Flächen, wo wir von Zahlen und ihren Produkten zu reden gewohnt sind. Auch Euklid bezeichnete solche Zahlenlinien regelmäßig durch einfache Buchstaben. Dieselbe Gewohnheit, sollten wir meinen, habe Apollonius gehabt; er habe seine Zahlenlinien durchgängig mit je einem großen Buchstaben benannt. Pappus, vermuten wir dann, habe die Buchstaben beibehalten, die lineare Versinnlichung fallen lassen. So war der Fortschritt vielleicht ein halb unbewußter, aber er war darum doch gemacht, und die Algebra der Zeitgenossen wie der Nachkommen konnte Nutzen davon ziehen.

[1]) Pappus (ed. Hultsch) pag. 8. [2]) *Epistolae ad Atticum* Lib. II *epistola* 3. Wenn dagegen römische Juristen vielfach die Gewohnheit hatten, statt einer unbestimmt gelassenen Zahl *decem* (*X*) zu schreiben, z. B. *dabo X asses*, so ist diese Gewohnheit kaum als eine Spur allgemeiner Größenbezeichnung aufzufassen. [3]) *τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται* bei Pappus (ed. Hultsch) pag. 8.

23. Kapitel.

Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria.

Wir sehen in diesem Kapitel Männer auftreten, deren richtige Würdigung kaum möglich ist, ohne daß wir ein Anlehen bei der Geschichte der Philosophie uns gestatten[1]). Nicht als ob wir gesonnen wären die Unterschiede deutlich zu machen, welche zwischen dem Neupythagoräismus, von welchem wir in der Einleitung zum 21. Kapitel (S. 428) gesprochen haben, und dem Neuplatonismus, zu welchem wir uns jetzt wenden, obwalten; so tief dürfen wir in das uns fremde Gebiet nicht eindringen; aber die Persönlichkeiten müssen wir wenigstens kennen lernen, welche im Neuplatonismus tonangebend waren, und die vielleicht ein Recht in der Geschichte der Mathematik mit Ehren genannt zu werden nur dadurch einbüßten, daß ihre mathematischen Schriften verloren gingen, Schriften, deren arithmetischer Inhalt, sofern wir nach dem Erhaltenen auf das Verlorene schließen dürfen, eine Fortsetzung dessen darstellen würde, was die Neupythagoräer Nikomachus und Theon uns zu entwickeln nötigten. Noch in einem anderen Berührungspunkte treffen die Neuplatoniker, von denen wir besondere mathematische Erinnerung besitzen, mit den genannten neupythagoräischen Arithmetikern überein. Wie Gerasa und Smyrna, so gehört die Heimat des Porphyrius, des Jamblichus dem asiatischen Weltteile an, und gehen wir von dem Satze aus, daß sich häufende Zufälligkeiten wahrscheinlich ähnlichen Gründen entstammen und damit aufhören Zufälligkeiten zu sein, so werden wir die Tatsache uns zu bemerken haben, daß vorderasiatische Philosophen, welche der Mathematik sich zuwandten, vorzugsweise Arithmetiker wurden. Eine Begründung dieser Tatsache aber zu geben reichen die heutigen Mittel nicht aus. Kaum anzudeuten wagen wir, daß es heimatliche Einflüsse gewesen sein dürften, die diese bestimmte Geistesrichtung hervorbrachten, heimatliche Einflüsse, die aber jedenfalls nach Zeit und Ort weiter verfolgbar sein müssen, in eine vielleicht graue Vergangenheit, in weiter östlich liegende Gegenden.

Der Verkehr mit diesem Osten, selbst mit dem äußersten Osten, war wenn auch kein lebhafter doch immer vorhanden. Alexandrinische Handelskarawanen wagten sich nach Indien; aber auch indische und chinesische Gesandtschaften erschienen bei römischen Kaisern.

---

[1]) Unsere Hauptquelle: Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung III. Theil, 2. Abtheilung (2. Auflage) 1868, zitieren wir als Zeller III, 2.

Der Hof des Augustus, des Claudius, des Trajan, des Constantin des Großen, des Julianus hat solche Botschafter fremdartigster Gestalt gesehen[1]). Im II. S. n. Chr. soll Scythianus magische Schriften aus Indien nach Alexandria gebracht haben, die dort gierig verschlungen wurden. In das III. S. fällt die Gründung der neuplatonischen Schule in Alexandria durch Ammonius Sakkas. Ammonius aber war von 232—242 der Lehrer des Plotinus, eines Ägypters, in dem nunmehr die Neigung aus den orientalischen Quellen selbst zu schöpfen so lebhaft erwachte, daß er 39 Jahre alt dem Heere sich anschloß, welches unter Gordian gegen die Perser zu Felde zog. Die selbständige Wirksamkeit des Plotinus entfaltete sich in Rom, wo er etwa 244 als Lehrer auftrat und eines großen Zulaufs sich erfreute, bis er 270 in Campanien einer lange dauernden Krankheit erlag.

Der Lieblingsschüler Plotins erhielt den Auftrag die Schriften des Lehrers zu sammeln und herauszugeben. Es war der Tyrier Malchus, der etwa 232 auf asiatischem Boden geboren zuerst in Athen unter einem Philosophen Longinus, der für uns kein weiteres Interesse besitzt, studierte, dann nach Rom zu Plotinus gelangte und dort den Namen Porphyrius erhielt, unter welchem er uns schon wiederholt vorgekommen ist. Porphyrius erreichte jedenfalls ein hohes Alter, da er selbst von einem Vorfalle aus seinem 68. Lebensjahre erzählt hat, und somit sicherlich erst nach 300 gestorben ist. Er war außer in Rom, wohin er am Ende seiner Laufbahn nochmals zurückkehrte, auch in Sizilien schriftstellerisch und als Lehrer tätig. Von seinen Schriften haben wir das Leben des Pythagoras sowie den Kommentar zu der Musik des Ptolemäus als Quelle mancher wertvollen geschichtlichen Angaben kennen gelernt. Die letztere Schrift ihrem eigentlichen wissenschaftlichen Inhalte nach zu besprechen haben wir keine Veranlassung. Wichtiger wären vielleicht für die Geschichte der Sternkunde und ihrer Ausartungen die astrologischen Anklänge, welche bei Porphyrius vorhanden sind, welche von da an unter den Neuplatonikern nicht verhallen, von welchen aber auch schon Ptolemäus, der strenge Forscher, nicht frei war; ihrem Ursprunge nachgehend könnte man möglicherweise zu auch anderwärts verwertbaren Ergebnissen gelangen. Porphyrius verfaßte ferner Einleitungen zu aristotelischen Schriften. Von Geometrischem, was Porphyrius geschrieben, ist uns nur weniges in des Proklus Kommen-

---

[1]) Vgl. Reinaud, *Relations politiques et commerciales de l'empire Romain avec l'Asie centrale* im *Journal Asiatique*, 6. série, T. I (1863) und eine Notiz von Woepcke in demselben Bande pag. 458 mit Berufung auf Wilson, *Vishnu Purana*. London 1840 in 4^0, pag. VIII und IX.

tare zu dem ersten Buche der euklidischen Elemente erhalten[1]) und dieses Wenige ist nicht von solcher Bedeutung, daß wir dabei zu verweilen hätten.

Zwei Schüler des Porphyrius werden als bedeutendste genannt. Der ältere, ein gewisser Anatolius, war seit 270 Bischof von Laodicea. Von ihm haben sich mancherlei mystisch-arithmetische Bruchstücke erhalten[2]). Sein Schüler und erst später Schüler des ihnen somit gemeinsamen Lehrers Porphyrius war der zweite, den wir zu nennen haben: Jamblichus.

Jamblichus ist aus reicher und angesehener Familie zu Chalcis in Cölesyrien geboren, also Vorderasiate, wie wir oben bemerkten. Er folgte wahrscheinlich in Rom dem Unterrichte des Anatolius und des Porphyrius, als dieser aus Sizilien wieder zurückgekehrt war. Später verlegte Jamblichus seinen Aufenthalt in seine syrische Heimat, wo er selbst schulebildend auftrat. So sehr seine Anhänger ihn verehrten, — den Göttlichen nannte ihn die Schule — so sind doch die Angaben über seine Lebenszeit von Widersprüchen behaftet[3]). An und für sich könnte es ja richtig sein, daß er am Ende des III. S. in Rom zu den Füßen des Porphyrius saß, daß er während der Regierung Constantin des Großen (306—337) wirkte, daß noch Kaiser Julianus Apostata (361—363) in Briefwechsel mit dem greisen Philosophen stand. Wie aber will man dann begreiflich machen, daß Kaiser Constantin den Sopater, einen Schüler des Jamblichus, der erst nach des Lehrers Tode an den Kaiserhof kam, hinrichten ließ, wie damit wieder in Einklang bringen, daß Kaiser Julianus in einem seiner Briefe von Sopater als einem damals noch lebenden Schüler des Jamblichus redet? Soll man wirklich den Tod des Jamblichus etwa auf 330 setzen, die Briefe des Julian an Jamblichus für untergeschoben erklären? Wir verzichten auf die Entscheidung dieser Fragen, welche eine große Wichtigkeit für uns nicht besitzen. Daß Jamblichus unzweifelhaft am Anfange des IV. S. lebte, genügt uns. Wie lange Jamblichus im IV. S. seine Tätigkeit fortsetzte, ist uns ziemlich gleichgültig.

---

[1]) Die betreffenden Stellen sind mit Hilfe des Namensverzeichnisses der Friedleinschen Proklusausgabe leicht aufzufinden. [2]) In einer Münchener Handschrift sind solche Stücke als von Anatolius herrührend gesammelt. Heiberg hat sie in den Veröffentlichungen des *Congrès d'Histoire des sciences* (Paris 1900) abdrucken lassen und P. Tannery hat eine französische Übersetzung sowie Schlußbemerkungen folgen lassen, in welcher mit der älteren Ansicht gebrochen ist, als wäre der Lehrer des Jamblichus gar nicht Christ gewesen, also von dem Bischof von Laodicea zu unterscheiden. Vgl. auch Borghorst, *De Anatolii fontibus* (Berlin 1904). [3]) Zeller III, 2, 613, Anmerkung 2.

Von den Werken des Jamblichus[1]) kümmern uns vorzugsweise einige Bücher, welche zwar getrennt voneinander herausgegeben worden sind, aber ursprünglich ein einziges Werk von zehn Büchern bildeten und den Gesamttitel: Sammlung der pythagoräischen Lehren, *συναγωγὴ τῶν πυθαγορικῶν δογμάτων*, führten. Das I. Buch enthielt das Leben des Pythagoras, das II. eine Einleitung in die Philosophie, das III. eine solche in die Mathematik, das IV. Erläuterungen zu Nikomachus, das V. Physikalisches, das VI. Ethisches, das VII. theologisch-arithmetische Auseinandersetzungen, das VIII. eine Musik, das IX. eine Geometrie, das X. eine Sphärik. Die kleinere Hälfte des Werkes, das I., II., III, IV. Buch haben sich erhalten[2]), die andere Hälfte ist verloren gegangen. Der wesentliche Inhalt des VII. Buches mag allerdings von einem späteren unbekannten Verfasser in die erhaltene Schrift Theologumena Arithmeticae hineingearbeitet worden sein[3]). Verloren ist auch ein Werk über Chaldäisches, aus dessen 28. Buche eine Notiz sich erhalten hat, woraus auf den großen Umfang des Werkes ein Schluß gezogen werden kann. An ihm dürfte die Geschichte der Wissenschaften überhaupt, der Mathematik insbesondere, viel eingebüßt haben, und jedenfalls reicht dessen einstmaliges Vorhandensein aus, die Glaubwürdigkeit dessen, was Jamblichus, der sich somit erwiesenermaßen mit den chaldäischen Überlieferungen beschäftigt hatte, über den Ursprung mancher mathematischen Sätze in Babylon berichtet, wesentlich zu erhöhen. Die sonstigen vielen Schriften, welche Jamblichus mit Recht oder Unrecht beigelegt werden, welche teils ganz verloren, teils in Bruchstücken vorhanden sind, haben für uns keine weitere Bedeutung.

Von den zehn Büchern pythagoräischer Lehren haben wir das IV., welches schon mehrfach von uns ausgebeutet worden ist, dem wir z. B. das Epanthem des Thymaridas entnahmen, noch nach der Richtung hin zu prüfen, was wohl in den Erläuterungen zur Arithmetik des Nikomachus, die übrigens nichts weniger sind als ein fortlaufender Kommentar zum Texte des zu erklärenden Werkes, erwähnenswert sein möchte, und als älteren Schriftsteller nicht überweisbar

[1]) Zeller III, 2, 615, Anmerkung 2. [2]) Buch I ist am besten von Kießling, Leipzig 1815, Buch II von ebendemselben, Leipzig 1813, herausgegeben, Buch III ist bei Ansse de Villoison, *Anecdota Graeca* Bd. II. Venedig 1781 abgedruckt, in unserer Zeit von Festa neu herausgegeben. Buch IV gab Tennulius heraus. Arnheim 1668, sowie Pistelli (Leipzig 1894). [3]) *Θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς* ed. Fr. Ast. Leipzig 1817. C. von Ian, *Musici scriptores Graeci* pag. 212 (Leipzig 1895) neigt sich der Ansicht zu, die Theologumena seien von Jamblichus zusammengestellt.

dem Jamblichus angehören könnte. Da ist freilich das Auszuzeichnende ungemein dürftig. Der Satz, daß jede Dreieckszahl mit 8 vervielfacht und alsdann noch um die Einheit vermehrt zur Quadratzahl werde, ist keinesfalls des Jamblichus Eigentum, da derselbe mindestens schon bei Plutarch im I. S. n. Chr. vorkommt (S. 168). Auch was Jamblichus von Seiten- und Diametralzahlen weiß, kennen wir schon von Theon von Smyrna her. Ihm dagegen gehört vielleicht der Satz an, daß jede Zahl mit einer der beiden ihr zunächst liegenden gleichartigen (d. h. gerade mit geraden, ungerade mit ungeraden) vervielfacht unter Hinzufügung der Einheit zu dem Produkte ein Quadrat gibt, und zwar ein gerades Quadrat wenn man von ungeraden, ein ungerades wenn man von geraden Faktoren ausging[1]), ein Satz, der freilich keines weiteren Beweises bedarf, als der sich aus der Identität $a(a+2)+1=(a+1)^2$ ergibt. Über die vollkommenen Zahlen sagt Jamblichus, nach den vier ersten 6, 28, 496, 8128 folgten auch in der ersten und zweiten Stufe der Myriaden je eine usw. ins Unendliche immer abwechselnd mit 6 und 8 endigend.[2])

Jamblichus darf sich wohl auch die Erfindung zuschreiben, welche jede Quadratzahl in ihrer Entstehung als Summe zweier aufeinander folgenden Dreieckszahlen mit dem Bilde einer Rennbahn vergleicht[3]). Von der Einheit als Schranke durchläuft man alle Zahlen bis zu einem Wendepunkte a, von wo aus auf der anderen Seite wieder durch die sämtlichen Zahlen die Rückkehr zur Einheit als Ziel erfolgt; d. h. $1+2+\cdot\cdot+(a-1)+a+(a-1)+\cdot\cdot+2+1=a^2$. Daneben weiß Jamblichus auch, daß $1+2+\cdot\cdot+(a-1)+a+(a-2)+\cdot\cdot+2=(a-1)\cdot a$ eine heteromeke Zahl wird, und stellt auch diese Vorwärts- und Rückwärtssummierung, bei der freilich beim Zurückgehen ein Sprung von a nach $a-2$ erfolgt, und außerdem das Ziel bei 2 und nicht bei 1 ist, an dem Bilde einer Rennbahn dar. Ja er hetzt das Bild einer Rennbahn zu Tode, indem er von $1+2+3+\cdot\cdot+9+10+9+\cdot\cdot+3+2+1=100$ durch Vervielfachung jeder Zahl mit 10, mit 100 usw. zu 1000, zu 10000 usw. gelangt und die Zahlen 1, 10, 100, 1000 die Einheiten des ersten, des zweiten, des dritten, des vierten Ganges mit den Pythagoräern nennt, woraus hervorgeht, daß den Pythagoräern ein genaues Bewußtsein des dekadischen Zahlensystems innewohnte, wie es auch aus dem Begriff der

---

[1]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Tennulius) pag. 127, (ed. Pistelli) pag. 90. Vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 236, Anmerkung 70. [2]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Tennulius) pag. 46, (ed. Pistelli) pag. 33. Vgl. Fr. Hultsch in den Nachrichten der k. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen. 1895, Heft 3. [3]) Für diese und die folgenden Bemerkungen zu Jamblichus vgl. Nesselmann, Algebra der Griechen S. 237—242.

Wurzelzahlen bei Apollonius deutlich hervorgeht. Die Wurzelzahlen selbst, aber nicht Pythmenes, sondern Einheit, μονάς, genannt, spielen in einem letzten Satze des Jamblichus eine Rolle. Addiert man drei in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar aufeinander folgende Zahlen, deren größte durch 3 teilbar ist, nimmt die Ziffernsumme der Summe (d. h. bei Jamblichus die Summe der Monaden), von dieser Ziffernsumme abermals die Ziffernsumme usf., so gelangt man endlich zu der letzten Ziffernsumme 6. So erweist sich uns Jamblichus immerhin als erträglicher, wenn auch nicht als bedeutender Arithmetiker. Bedürfte der negative Teil dieses Ausspruches einer Bestätigung, so könnten wir sie in dem Tadel finden, den Jamblichus gegen Euklid sich erlaubt, weil derselbe die Zahl 2 eine Primzahl nenne, während es nach Nikomachus nur ungerade Primzahlen gebe.

Das Wort Pythmen, welches bei Jamblichus vermißt wird, findet sich dagegen bei einem anderen christlichen Schriftsteller des III. Jahrhunderts, bei dem Heiligen Hippolytos[1]), der die Pythmenen zur Neunerprobe und ebenso zur Siebenerprobe benutzt, d. h. die Frage aufwirft, welcher Rest übrig bleibe, wenn man die Summe von Pythmenen durch 9 oder auch durch 7 teile. Eine rechnerische Verwertung dieses Verfahrens ist allerdings nicht beabsichtigt, sondern es handelt sich um eine Art Vorbedeutungsarithmetik, die möglicherweise in Griechenland noch weit vor die Zeit des Hippolytos hinaufreicht.

Der Zeit des Jamblichus gehören möglicherweise die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie an[2]). Sammlungen kleiner griechischer Gedichte wurden seit dem letzten Jahrhundert vor Christi Geburt vielfach zusammengestellt. Aber was damals, was später während der Regierungen Trajans, Hadrians gesammelt wurde, ist verloren gegangen. Nur die Erinnerung daran ist geblieben, nur was teilweise mit Anlehnung an diese Vorgänger am byzantinischen Hofe zuerst im X. S. von Constantin Kephalas, dann wiederholt in den ersten Jahren des XIV. S. von Maximus Planudes, einem Vielschreiber, welcher uns noch mehrmals als Verfasser mathematischer Schriften begegnen wird, zu einer Blumenlese vereinigt worden ist. Einige dieser Gedichte gehören der Geschichte der Mathematik insofern an, als man in ihnen Isopsephien

---

[1]) P. Tannery, *Notice sur des fragments d'Onomatomancie arithmétique* (*Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale* 1885, Tome XXXI, 2. Partie). [2]) Die besten Ausgaben der Anthologie von Friedr. Jacobs in 3 Bänden (Leipzig 1813—17) und von Brunck. Die 47 arithmetischen Epigramme hat Zirkel in einem Bonner Gymnasialprogramme vom Herbst 1853 mit deutscher Übersetzung und einigen Erläuterungen herausgegeben. Vgl. auch Nesselmann, Algebra der Griechen S. 477 flgg.

erkannt hat, d. h. sie bestehen aus zwei Distichen, und die Buchstaben aller in je einem Distichon vorkommenden Wörter nach ihrem Zahlenwerte additiv vereinigt geben die gleiche Summe, eine Spielerei, welche an die im ersten nachchristlichen Jahrhunderte in Alexandria geübte Gematrie (S. 125) täuschend erinnert. Wirklich ist auch einer der Dichter, welche an Isopsephien sich versuchten, ein gewisser Leonidas von Alexandria, der, wie man aus in seinen Gedichten vorkommenden Persönlichkeiten zu ermitteln gewußt hat, in der Zeit von Kaiser Nero etwa gelebt haben muß[1]. Dann finden sich in der Anthologie auch eine große Anzahl algebraischer Rätselfragen. Wir haben (S. 285) das sogenannte euklidische Epigramm von den beladenen Tieren kennen gelernt; es steht in der Anthologie. Das Rinderproblem des Archimed (S. 312) steht nicht in derselben, gehört aber seinem Inhalte wie der dichterischen Einkleidung nach gleichfalls hierher, und man wird vielleicht nicht irre gehen, wenn man Inhalt und Form der Epigramme voneinander trennt, letztere erheblich später als ersteren entstehen läßt. Für mehrere von den algebraischen Epigrammen gilt Metrodorus als Verfasser und da dieser nach den einen unter Constantin dem Großen, nach anderen im VI. Jahrhundert gelebt haben soll[2], so wählten wir diese Stelle, um von den Epigrammen zu reden. Wir wollen freilich nur zwei derselben hervorheben, welche eine gewisse Bedeutung zu besitzen scheinen.

Wir meinen erstens eine Brunnenaufgabe, wenn dieses Wort den Sinn behalten soll, unter welchem wir es (S. 391) bei Besprechung der Ausmessungen des Heron eingeführt haben:

Vier Springbrunnen es gibt. Die Zisterne anfüllet der erste
Täglich; der andere braucht zwei Tage dazu, und der dritte
Drei, und der vierte gar vier. Welche Zeit nun brauchen zugleich sie?

Wir meinen zweitens ein Epigramm, welches seinem Gegenstande nach an die Kronenrechnung des Archimed erinnert, durch die Art aber, wie die gegebenen Größen in ihm mit den Unbekannten verbunden sind, die Anwendung des Epanthems des Thymaridas erheischt:

[1] H. Stadtmüller, Zur griechischen Anthologie in der Festschrift zur Einweihung des neuen Gebäudes für das Großherz. Gymnasium in Heidelberg 1894 besonders S. 40—43. Für die Lebenszeit des Leonidas von Alexandria standen uns mündliche Mitteilungen Stadtmüllers zu Gebote. [2] Jacobs, *Comment. in Anthologiam Graecam* T. XIII, pag. 917. Allerdings beruht nach Tannery (Prolegomena zum II. Bd. seiner Diophantausgabe (1895) pag. XII—XIII) die Angabe von Jacobs auf einer Verwechslung von Persönlichkeiten gleichen Namens, und der Zusammensteller der algebraischen Epigramme lebte erst im VI. S.

Schmied' mir die Krone und menge das Gold mit dem Kupfer zusammen,
Füg' auch Zinn noch hinzu samt sorglich bereitetem Eisen.
Sechzig der Minen sie hab' an Gewicht. Zwei Drittel der Krone
Wiege das Gold mit dem Kupfer gemengt; drei Viertel dagegen
Gold mit dem Zinn im Gemisch; drei Fünftel betrage das Gold noch,
Wenn du es fügst zu dem Eisen. Wohlan! nun sage mir pünktlich,
Was du an Gold mußt nehmen und Kupfer, zu treffen die Mischung;
Wie viel Minen an Zinn; auch nenne die Masse des Eisens,
Daß du zu schmieden vermagst von sechzig der Minen die Krone.

Mag nun Metrodorus unter Constantin dem Großen im ersten Drittel des IV. S. oder erst im VI. S. gelebt haben, mag im ersteren jetzt allerdings so gut wie ausgeschlossenen Falle ein Mann, dessen Persönlichkeit einem sogleich von uns zu erwähnenden Epigramme den Inhalt gab, vor Jamblichus gelebt haben, so konnte die strenge Zeitfolge für unsere Darstellung nicht maßgebend sein. Jamblichus ist von den Neuplatonikern nicht zu trennen. Er ist in seinen Schriften durch die Leistungen Diophants — denn dieser ist der Mann, den wir im Auge haben — nicht im geringsten beeinflußt. Er konnte daher ohne Rücksicht auf die Lebenszeit des anderen selbständig behandelt werden. In gleicher Weise ist umgekehrt eine Einwirkung des Jamblichus auf Diophantus von Alexandria[1]) nicht zu bemerken.

Der Name dieses Schriftstellers war selbst dem Zweifel unterworfen, so lange man in griechischer Sprache nur die Genitivform kannte, welche ebensowohl von einer Endung ης als ος sich herleiten konnte. Man berief sich aber auf die arabische Form des Namens, welche mit der hier benutzten übereinstimmt und fand alsdann volle Bestätigung in einer Stelle des Kommentars Theons von Alexandria zum ersten Buche des Almagestes, wo unzweideutig *Διόφαντος* steht und unser Algebraiker gemeint sein muß, weil es sich bei Theon[2]) um einen Satz handelt, der bei Diophant wirklich in dem dort angegebenen Wortlaute vorkommt. Der gleichen Form *Διόφαντος* hat sich auch Johannes von Jerusalem bedient[3]). Am Ende des VIII. S.

---

[1]) Über Diophant hat Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* I, 56—95. Parma 1797, gehandelt; dann Otto Schulz in der Einleitung und den Anmerkungen zu seiner deutschen Übersetzung des Diophant. Berlin 1822; Nesselmann, Algebra der Griechen S. 243—476. Hankel 157—171. T. L. Heath, *Diophantos of Alexandria.* Cambridge 1885. P. Tannery in der *Bibliotheca mathematica* 1887 pag. 37—43, 81—88, 103—108 und 1888 pag. 3—6. [2]) *Théon d'Alexandrie* (ed. Halma) I, 111. [3]) Vossius, *De scientiis mathematicis* (Amsterdam 1650) pag. 432 hat die betreffenden Worte abgedruckt und zitiert dafür „pag. 683 edit. Basil." Tannery hat sie in seine Diophantausgabe II, 36 in der Form aufgenommen, welche sich im Pariser Kodex 1559 erhalten hat.

lebte nämlich Johannes von Damaskus, der gleich seinem Vater Sergius als Christ Schatzmeister des Kalifen ʿAbdAlmelik war. Er zog sich jedoch bald in das Kloster Saba zurück, wo er, wie die einen sagen, 780, nach anderer Meinung 760 gestorben ist[1]. Das Leben dieses Johannes von Damaskus hat nun sein jerusalemitischer Namensgenosse beschrieben und ihm dabei nachgerühmt, er sei in der Geometrie so bewandert gewesen wie Euklid, in der Arithmetik wie Pythagoras und Diophantus.

Für das Leben des Diophantus sind uns zwei weit getrennte Grenzen gegeben. Damit Theon seiner erwähnen konnte, müssen seine Schriften spätestens um 370 vorhanden gewesen sein. Damit er Hypsikles nennen konnte, dessen Definition der Vieleckszahlen er uns aufbewahrt hat (S. 361), muß er später als 180 v. Chr. gelebt haben. So ist ein Zwischenraum von ganzen 550 Jahren gewonnen, in welchem Diophant unterzubringen ist. Die Gründe, weshalb man früher vermutete, Diophant müsse ganz am Ende der überhaupt möglichen Zeit gelebt haben, sind teils negative, teils ein positiver. Negativ ließ man sich dadurch bestimmen, daß weder bei Nikomachus, noch bei Theon von Smyrna, noch bei Jamblichus eine Erwähnung des Diophant oder seiner Lehren aufgefunden worden ist, so nahe dieselbe gerade diesen Schriftstellern gelegen hätte, daß überhaupt eine Einwirkung des Diophant auf griechische Arithmetik nicht nachzuweisen ist, was nur dann begreiflich erscheine, wenn man annehme, er habe erst nach den Männern gelebt, welche ihn einigermaßen, wenn auch nicht vollkommen zu verstehen imstande waren. Dazu kommt dann das positive Zeugnis des Abulpharagius, eines syrischen Geschichtsschreibers aus dem XIII. S., Diophant sei Zeitgenosse des Julianus Apostata gewesen, welcher 361—363 regierte. Der einzige, aber für uns den Ausschlag gebende Gegengrund ist der, daß Michael Psellus in einem Briefe sagt[2], Anatolius habe eine Schrift über das ägyptische Rechnen dem Diophant gewidmet, und Anatolius war (S. 458) seit 270 Bischof von Laodicea. Diophant würde danach etwa in die Mitte des III. S. zu setzen sein, und die mangelnde Einwirkung auf Jamblichus wäre daraus zu erklären, daß dieser, wenn er Diophants Schriften kannte, sie nicht verstand.

Das mehrerwähnte Epigramm enthält alles, was wir von den persönlichen Verhältnissen des Diophantus wissen.

---

[1]) A. von Kremer, Kulturgeschichte des Orientes II, 402—403 (Wien 1877). [2]) Tannerys Diophantausgabe II, 37—42, insbesondere pag. 38 lin. 22 bis 25.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.

Wurde Diophant x Jahre alt und starb der Sohn, als er die Hälfte der damaligen Jahre des Vaters erreicht hatte[1], so entspricht das Epigramm der Gleichung: $\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5\right)+\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5\right)+4=x$ oder $3x=196$ mit $x=65\frac{1}{3}$. Auf die Kindheit fielen alsdann $10\frac{8}{9}$ Jahre. Nach weiteren $5\frac{4}{9}$ Jahren $\left(\text{mit } 16\frac{1}{3} \text{ Jahren}\right)$ sproßte der Bart. Nach weiteren $9\frac{1}{3}$ Jahren $\left(\text{mit } 25\frac{2}{3} \text{ Jahren}\right)$ folgte die Verheiratung und 5 Jahre später $\left(\text{mit } 30\frac{2}{3} \text{ Jahren}\right)$ die Geburt des Sohnes, der selbst $30\frac{2}{3}$ Jahre alt war als er starb und der Vater mit $61\frac{1}{3}$ Jahren doppelt so alt war. Endlich überlebte der Vater den Sohn um 4 Jahre und wurde $65\frac{1}{3}$ Jahre alt.

Wer aber Diophantus von Alexandria war, darüber sagt uns auch das kleine niedlich erfundene Rätselgedicht nicht das mindeste. Es fällt in das Gebiet der durchaus ungestützten Vermutungen, wenn man hat behaupten wollen, Diophant von Alexandria habe in dieser Stadt nur seinen Wohnsitz gehabt und sei selbst gar nicht Grieche gewesen, so wenig wie seine Wissenschaft griechischen Ursprunges sei. Die Möglichkeit dieser Annahme ist nicht ausgeschlossen; man kann ihr beipflichten ohne in bestimmter Weise Widerlegung zu finden; aber sie ist nicht notwendig. Erinnern wir uns der algebraischen Begriffe, welche wachsend und an Gewicht zunehmend bei Euklid, bei Archimed, bei Heron, bei den Neupythagoräern, bei Pappus uns begegneten, und wir haben nicht nötig die Brücke abzubrechen, welche auf dem Boden

[1]) So die Deutung, welche Heinrich Weber uns brieflich vorschlug, und welche vor der früheren, nach welcher der Sohn halb so alt geworden sein sollte als der Vater im ganzen war, wodurch man Diophants Alter auf 84 Jahre ausrechnete, den Vorzug besitzt, daß die auftretenden Zahlen den gemeldeten Ereignissen besser entsprechen, als wenn z. B. 14 Jahre auf die Kindheit fallen, mit 26 Jahren erst der Bart sproßt usw.

Alexandrias, den jedenfalls Euklid, Heron und Pappus bewohnten, in fast unmerklicher Steigung, wenn man die Weite der Jahreskluft erwägt, von den Hauaufgaben des Ahmes zu den Gleichungen des Diophantus hinaufführt. Uns ist Diophant mit seinem in Griechenland mehrfach vorkommenden Namen wirklicher Grieche, Schüler griechischer Wissenschaft, wenn auch ein solcher, der weit über seine Zeitgenossen hervorragt, Grieche in dem, was er leistet, wie in dem, was er zu leisten nicht vermag. Eines wollen wir dabei keineswegs ausgeschlossen haben, was wir übrigens zu Anfang dieses Kapitels anzudeuten schon Gelegenheit nahmen: daß nämlich die griechische Wissenschaft, wie sie von Alexandria aus nach Westen und nach Osten erobernd vordrang, wovon folgende Abschnitte unseres Bandes Zeugnis ablegen, von den gleichen Eroberungszügen auch neuen Wert an Ideen mit nach Hause brachte, daß die griechische Mathematik als solche nie aufgehört hat sich anzueignen, was sie da oder dort Aneignenswertes fand.

Diophant hat ein Werk unter dem Namen Arithmetisches[1]), ἀριθμητικά, verfaßt, über dessen Einteilung er sich in der Vorrede folgendermaßen äußert: „Da aber bei der großen Masse der Zahlen der Anfänger nur langsam fortschreitet, und überdies das Erlernte leicht vergißt, so habe ich es für zweckmäßig gehalten, diejenigen Aufgaben, welche sich zu einer näheren Entwicklung eignen und vorzüglich die ersten Elementaraufgaben gehörig zu erklären und dabei von den einfachsten zu den verwickelteren fortzuschreiten. Denn so wird es dem Anfänger faßlich werden, und das Verfahren wird sich in seinem Gedächtnisse einprägen, da die ganze Behandlung der Aufgaben 13 Bücher umfaßt“[2]).

Dreizehn Bücher waren es also, und nur von einem Werke des Diophant ist bei zwei arabischen Schriftstellern, die seiner erwähnen, die Rede[3]). Dem gegenüber enthalten die griechischen Handschriften, welche sich erhalten haben[4]), nur sechs Bücher (eine einzige enthält den gleichen Text in sieben Bücher abgeteilt), enthalten sie eine besondere Schrift des Diophant über Polygonalzahlen, verweisen

[1]) Die beste ältere Textausgabe ist die von Bachet de Méziriac von 1621. Dagegen ist ihr Wiederabdruck mit den Anmerkungen von Fermat, Toulouse 1670, vielfach durch Druckfehler entstellt. Eine neue kritische Textausgabe hat P. Tannery besorgt, Leipzig 1893. Eine deutsche Übersetzung von O. Schulz erschien Berlin 1822, eine abermalige von G. Wertheim, Leipzig 1890. Wir zitieren nach den Ausgaben von Tannery und Wertheim. [2]) Diophant (Tannery) pag. 14, (Wertheim) S. 8. [3]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 274, Note 37. [4]) Die Handschriften sind einzeln aufgezählt bei Nesselmann S. 256, Note 23.

sie an einzelnen Stellen auf eine Schrift des Diophant, welche den Namen der Porismen geführt habe. Außerdem berichtet ein unbekannter griechischer Scholiast[1]) in einer in Florenz befindlichen Handschrift von einer Schrift Moriastica, d. h. Teilungsgrößen des Diophant. Ob darunter eine Bruchrechnung verstanden sein soll, oder was sonst damit gemeint ist, ist nicht zu ermitteln.

Man hat aus der stylistischen Verschiedenheit zwischen der wesentlich synthetischen Abhandlung über die Polygonalzahlen und den wesentlich analytischen arithmetischen Büchern geschlossen, es müssen hier zwei getrennte Werke vorliegen; man hat vermutlich daraus, daß in den arithmetischen Büchern die Porismen ausdrücklich genannt werden, gefolgert, auch sie müßten eine besondere Schrift gebildet haben. Man hat von anderer Seite weniger auf die Ungleichartigkeit der Form, als auf den stets arithmetischen Inhalt Gewicht gelegt, und vermutet, es seien die Polygonalzahlen wie die Porismen ursprünglich Bestandteile der 13 Bücher des Diophant gewesen[2]). Wir neigen uns der ersten Meinung zu, deren wirkliche Gründe nicht vornehm beseitigt oder unberücksichtigt gelassen werden können. Glücklicherweise stimmen die Vertreter beider sich schroff ausschließenden Ansichten in einer Meinung überein, der wir uns gleichfalls durchaus anschließen, und welche weitaus Wichtigeres betrifft als die Frage der Zusammengehörigkeit oder Nichtzusammengehörigkeit der genannten Stücke. Man hält nämlich allgemein dafür[3]): 1. daß uns von Diophant viel weniger fehlt, als man gewöhnlich glaubt, wenn man sich an das Zahlenverhältnis von 6 : 13 hält; 2. daß der Defekt nicht am Ende, sondern in der Mitte des Werkes, und zwar hauptsächlich zwischen dem I. und II. Buche zu suchen ist; endlich 3. daß diese Verstümmelung des Werkes ziemlich frühe, gewiß aber vor dem XIII. oder XIV. S. und bereits in Griechenland stattgefunden hat.

Der dritte Satz ist dadurch zur Gewißheit erhoben, daß die älteste der vorhandenen Handschriften, ein Madrider Kodex vom XIII. S., den gleichen Text wie die übrigen besitzt, daß ein Kommentar zu den beiden ersten Büchern, welcher etwa um 1300 entstand, ebenfalls für diese zwei Bücher wenigstens den heutigen Wortlaut bestätigt, daß ein deutscher Astronom, der berühmte Regiomontanus, in einem Briefe an seinen Fachgenossen Bianchini in Ferrara vom Monate Februar 1464 erzählt, er habe in Venedig einen griechischen Arith-

[1]) Jamblichus *in Nicomachum* (ed. Pistelli) pag. 127 lin. 11—13. [2]) Vertreter der ersten Meinung sind Reimer und Hankel, der zweiten Colebrooke und Nesselmann. [3]) Nesselmann l. c. S. 265 hat die drei Thesen am deutlichsten und zwar in dem Wortlaute ausgesprochen, den wir uns hier aneignen.

metiker Diophant entdeckt, der aber leider nur aus sechs Büchern bestehe, während deren 13 in der Einleitung versprochen seien[1]). Die beiden anderen Sätze folgen allerdings nicht mit der gleichen objektiven Gewißheit, sondern mehr für die Überzeugung dessen, der sich genau mit dem Studium der vorhandenen Teile beschäftigt hat, aus diesen selbst. Man gewinnt das Gefühl, Diophant sei über das, was in den erhaltenen sechs Büchern steht, nicht hinausgekommen, es seien nur gewisse der Zahl nach beschränkte Kunstgriffe gewesen, über welche er verfügte, und mittels deren nicht viel mehr zu leisten war, als wir tatsächlich geleistet sehen. Man kommt so zu der Wahrscheinlichkeit, um nicht zu sagen zu der Gewißheit, daß am Schlusse unmöglich so viel fehlen kann, daß man von einer Erhaltung nur der sechs oder sieben ersten Bücher zu reden berechtigt wäre. Dazu kommt die vorher angegebene Verschiedenheit, daß eine Handschrift in sieben Bücher teilt, was den anderen zufolge sechs Bücher waren. Dazu kommt der gelungene Nachweis, daß innerhalb der ersten drei Bücher Verschiebungen stattgefunden haben müssen, daß insbesondere eine Ablösung der beiden letzten Aufgaben des II. Buches von dem Vorhergehenden ebenso wie eine Vereinigung derselben mit den ersten Aufgaben des III. Buches durch den Sinn als notwendig erzwungen ist. Dazu kommt endlich eine unbedingt vorhandene Lücke, über deren Ausfüllung ein Zweifel nicht bestehen kann. In der Einleitung ist nämlich, wie wir noch sehen werden, die Auflösung der gemischten quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten zugesagt. In den späteren Büchern ist dieselbe als bekannt vorausgesetzt. Gelehrt muß sie also worden sein, aber die Vorschrift dazu fehlt. Diese bildete jedenfalls einen Teil und einen nicht unbeträchtlichen Teil des Verlorenen, da wir annehmen dürfen und müssen, die Lösung der gemischten quadratischen Aufgaben sei in drei Sonderfällen vorgetragen worden, deren jeder an zahlreichen Beispielen erläutert vielleicht ein ganzes Buch füllen mochte. Der Platz für diese Lösungen war am naturgemäßesten zwischen dem I. und II. Buche, also dort, wo die große Lücke angenommen zu werden pflegt.

Die Aufgaben, welche Diophant behandelt hat, sind von zwei

---

[1]) Ch. Th. v. Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae* I, 135 (Nürnberg 1786) ist der Wortlaut des Briefes abgedruckt, die einzelne auf Diophant bezügliche Stelle schon bei Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern S. 5, Anmerkung *y* (Nürnberg 1730). Die letzte Ausgabe von Regiomontans Briefen gab Curtze in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XII; die betreffende Briefstelle s. S. 256—257.

wesentlich verschiedenen Gattungen. Es sind algebraisch bestimmte und algebraisch unbestimmte Gleichungen, mit denen er sich beschäftigte. Auf dem einen Gebiete besteht seine große Bedeutung darin, daß er Bekanntes in neuer Form vortragend ein organisches Ganzes schuf, wo früher, mindestens bei den Schriftstellern, die wir besitzen, nur zersplitterte Teile vorlagen. Auf dem anderen Gebiete stellt er uns den Pfadfinder vor, der abgesehen von einzelnen Vorgängern, die nur die Vorhalle des Gebäudes betraten, zuerst unter den Griechen, soviel wir wissen, durch das Labyrinth der verwickeltsten Zahlenbedingungen und Beziehungen sich hindurchzuwinden weiß, sei es, daß er dabei nur dem eigenen Genius vertraute, sei es, daß ihm hier wirklich aus der Fremde der Faden der Ariadne gereicht war, der ihn vor Irrgängen sicherte.

Wir reden zuerst von Diophants Leistungen in der bestimmten Algebra. Diophant selbst lehrt uns die Reihenfolge einhalten, da er in der schon erwähnten Vorrede gerade über die bestimmten Aufgaben sich ausläßt und die unbestimmten Aufgaben kaum andeutet. Diophant beginnt mit den Worten: „Ich sehe, mein teuerster Dionysius, mit welchem Eifer Du die Auflösung arithmetischer Aufgaben zu erlernen wünschest; ich habe daher versucht, das Verfahren wissenschaftlich darzustellen, indem ich mit der eigentlichen Grundlage desselben anfange, nämlich mit einer Entwicklung der eigentümlichen Natur und Beschaffenheit der Zahlen. Die Sache scheint vielleicht etwas schwierig, da sie noch gar nicht bekannt ist, und Anfänger haben immer wenig Hoffnung eines glücklichen Fortganges; aber Dein Eifer und meine Darstellung wird Dir alles recht faßlich machen, denn man lernt schnell, wenn Eifer und Unterweisung zusammenkommt"[1]).

Die Worte „da sie noch gar nicht bekannt ist", ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, wurden mitunter so verstanden, als behaupte Diophant damit, er trage ganz Neues, in Griechenland nicht Bekanntes vor. Die neueren Bearbeiter sind übereinstimmend der Meinung, der Sinn sei gerade umgekehrt der, daß Diophant die Unbekanntschaft des Dionysius allein mit den Auflösungen der arithmetischen Aufgaben betone. Ihm zuliebe will er das Verfahren wissenschaftlich darstellen von den Anfängen zu dem Gipfel aufsteigend.

Die Richtigkeit dieser Auffassung wird durch die weitere Einleitung bestätigt, in welcher algebraische Begriffe der Reihe nach entwickelt sind, welche uns einzeln genommen schon hier und dort

[1]) Diophant (Tannery) pag. 2, (Wertheim) S. 1.

bei griechischen Schriftstellern begegnet sind, und welche auch wohl in ihrer Fortbildung zu Diophants Zeiten schon wesentliche Fortschritte gemacht haben müssen, sonst wäre die Kürze der Darstellung bei ihrer Einführung unbegreiflich. Quadratzahlen und Kubikzahlen z. B. mit ihren griechischen Namen *δύναμις* und *κύβος* sind uns längst bekannt. Diophant geht darüber hinaus und nennt Quadratoquadrat (*δυναμοδύναμις*), Quadratokubus (*δυναμόκυβος*), Kubokubus (*κυβόκυβος*) das was durch stets wiederholte Vervielfachung mit der Grundzahl entsteht. Eigentlich versteht er unter diesen Namen auch das nicht, was wir ihm folgend ausgesprochen haben. Nicht die zweite bis zur sechsten Potenz irgend einer Zahl, sondern nur diese Potenzen der unbekannten Zahl, um deren Auffindung es sich in der betreffenden Aufgabe handelt, hat Diophant im Sinne. Für sie gelten die abgekürzten Bezeichnungen, welche er weiter erörtert, und welche aus den Anfangsbuchstaben *δ* und *κ* bestehen, denen noch rechts oben ein *υ*, der zweite Buchstabe sowohl von *δύναμις* als von *κύβος*, angehängt wird. Was also die moderne Algebra durch x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 bezeichnet, schreibt Diophant:

$$\delta^{\bar{\upsilon}},\ \kappa^{\bar{\upsilon}},\ \delta\delta^{\bar{\upsilon}},\ \delta\kappa^{\bar{\upsilon}},\ \kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$$

gewissermaßen unter Ersetzung der Potenzen durch ihre Exponenten und dem entsprechend unter Addition der Exponenten, wo es sich um die Multiplikation der Potenzen handelt. Die gesuchte Zahl selbst, welche eine unbekannte Menge von Einheiten enthält, heißt schlechtweg die Zahl, *ἀριθμός*. Diophant bedient sich für sie des Zeichens ς[1]), welches man früher für ein finales Sigma hielt; es ist aber wahrscheinlicher gemacht worden[2]), daß man es mit einem auch sonst vorkommenden sogenannten Kompendium für *αρ*, als Anfangsbuchstaben von *ἀριθμός* zu tun hat. Dabei ist zu bemerken, daß die unbekannte Einheitsmenge in Diophants Definition *πλῆθος μονάδων ἀόριστον* heißt, also unter Anwendung des Wortes des Thymaridas[3]) (S. 158). Endlich gibt es noch ein ständiges Zeichen für bestimmte Zahlen, welche Einheit *μόνας* heißen und $\mu^{\bar{o}}$ geschrieben werden.

Diophant begnügt sich nicht mit den bisher genannten Zahlenarten. Er bedarf zu seinen Aufgaben auch noch der Brüche, welche jene Benennungen im Nenner führen, algebraische Stammbrüche, wie man sie insgesamt nennen möchte, um nicht von Potenzen mit negativen Exponenten reden zu müssen. Diophant nennt den Stammbruch der Zahl *ἀριθμοστόν*, den der zweiten Potenz *δυναμοστόν* und so fort bis zu dem Stammbruche der sechsten Potenz *κυβοκυβοστόν*. Man

[1]) Diophant (Tannery) pag. 6 lin. 5. [2]) Heath l. c. pag. 57—67. [3]) Nesselmann l. c. S. 291, Anmerkung 54 hat die Stellen gesammelt.

hat diese Wörter ganz zweckmäßig mit einfachem Bruche, quadratischem Bruche, endlich kubokubischem Bruche übersetzt[1]. Diophant lehrt hierauf die Multiplikation solcher Potenzen und algebraischer Stammbrüche unter sich in den vielfachsten Veränderungen. Natürlich gibt er dafür lauter einzelne Regeln, z. B. ein quadratoquadratischer Bruch multipliziert mit der Kubokubikzahl gibt das Quadrat. Wir würden schreiben $\frac{1}{x^4} \cdot x^6 = x^2$. Nur der Fall wird allgemein vorausgeschickt, daß eine dieser Potenzgrößen mit dem gleichnamigen Stammbruche vervielfacht die bestimmte Zahl als Produkt liefere, d. h. $x^n \cdot \frac{1}{x^n} = 1$, und daß, da bestimmte Zahlen bei allen Rechnungen wieder bestimmte Zahlen geben, das Produkt einer bestimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdruckes wieder ein Ausdruck derselben Art sein werde.

Diophant unterscheidet hinzuzufügende und abzügliche Zahlen. Die Addition nennt er *ὕπαρξις*, die Subtraktion *λεῖψις* und besitzt für erstere zwar nicht, wohl aber für letztere ein eigenes Abkürzungszeichen, nämlich, wie er selbst sagt, ein verstümmeltes umgekehrtes *ψ* in der Gestalt ⋔. In den Handschriften sieht das Zeichen meistens so aus: ⩚, und ist dahin gedeutet worden[2], es sei ein aus Λ und I gebildetes Kompendium für den Anfang des Wortes *λεῖψις*. Diophant rechnet dann mit Differenzen, vervielfacht sie und spricht dabei ohne weiteres die Regel aus: Eine abzügliche Zahl mit einer abzüglichen vervielfacht gibt eine hinzuzufügende, eine abzügliche mal einer hinzuzufügenden gibt eine abzügliche[3]. Daß dabei von positiven und negativen Zahlen als Maße entgegengesetzter Größen keine Rede ist, bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung. Nur mit Differenzen weiß Diophant umzugehen, mit solchen Differenzen, die einen wirklichen Zahlenwert besitzen, d. h. deren Subtrahend kleiner ist als der Minuend. Mit solchen aber rechnet er in vollster Gewandtheit und schlägt seinem Dionysius vor sich die gleiche Gewandtheit zu erwerben: „Es ist aber sehr zweckmäßig, ehe man sich an die Auflösung von Aufgaben macht, sich in der Addition, Subtraktion und Multiplikation dieser Ausdrücke zu üben; besonders wie man eine Reihe hinzuzufügender und abzüglicher Ausdrücke mit ungleichen Zahlenfaktoren zu anderen allgemeinen Ausdrücken addiert, die entweder bloß hinzuzufügende sind oder aus hinzuzufügenden und abzüglichen Gliedern bestehen; ferner wie man von einer Reihe hinzuzufügender und abzüglicher Zahlen andere subtrahiert, die entweder

[1]) Diophant (Tannery) pag. 6, (Wertheim) S. 3. [2]) Heath l. c. pag. 71 bis 73. [3]) *λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.*

bloß hinzuzufügende sind, oder auch aus hinzuzufügenden und abzüglichen Gliedern bestehen"[1]. Die Subtraktion der größeren Zahl von der kleineren ist aber für Diophant unmöglich, gibt ihm keine Zahl, kann daher als Auflösung irgend einer Aufgabe nicht vorkommen. Dem entspricht die Tatsache, daß negative Gleichungswurzeln bei Diophant nirgends erscheinen, wenn auch die hier erörterte Begründung nicht ausgesprochen ist.

Abgesehen von dem Nichtvorhandensein negativer Zahlen als solcher ist es aber eine hoch entwickelte Buchstabenrechnung, welcher wir uns bei Diophant gegenüber befinden. Es fehlt ihr nicht einmal ein Gleichheitszeichen, indem der Buchstabe *ι* als Abkürzung des Wortes *ἴσοι* (gleich) benutzt wird. Das hat sich aus erneuter Vergleichung der Pariser Handschrift, nach welcher Bachet de Méziriac 1621 einen Abdruck ausführen ließ, ergeben[2]. Nur in einer allerdings nicht unbedeutenden Verschiedenheit kann man einen gewissen Gegensatz der diophantischen Schreibweise gegen diejenige, welche seit dem XVI. S. sich allmählich einbürgerte, erkennen. Die moderne Buchstabenrechnung hat es durchgehend mit Symbolen zu tun, welche sich selbst zur Aussprache einer Wahrheit genügen. Diophant rechnet und schreibt mit Abkürzungen, welche mit ausgeschriebenen Wörtern abwechseln und gleich diesen grammatischer Beugung unterworfen sind, wie sie auch unbedenklich durch Partikeln und dergleichen voneinander getrennt werden. Man vergleiche z. B. $10x + 30 = 11x + 15$ mit dem diophantischen *ςς^{οὶ} ἄρα $\bar{ι}$ μ^{ο} $\bar{λ}$ ἴσοι εἰσὶν ςς^{οῖς} $\overline{ια}$ μονάσι $\overline{ιε}$* und man wird sich des Gegensatzes sofort bewußt werden[3].

Wie Gleichungen aufgelöst werden, ist in Diophants Einleitung überaus klar und bestimmt gelehrt: „Wenn man nun bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, die zwar aus den nämlichen allgemeinen Ausdrücken besteht, jedoch so daß die Koeffizienten an beiden Seiten ungleich sind, so muß man Gleichartiges von Gleichartigem abziehen, bis ein Glied einem Gliede gleich wird[4]. Wenn aber auf einer oder auf beiden Seiten abzügliche Größen vorkommen, so muß man diese abzüglichen Größen auf beiden Seiten hinzufügen, bis auf beiden Seiten nur Hinzuzufügendes entsteht. Dann muß man wiederum Gleichartiges von Gleichartigem abziehen, bis auf jeder Seite nur ein Glied übrig bleibt."

Die Zurückbringung einer Gleichung durch Additionen und Subtraktionen auf die Form $ax^m = bx^n$, wo m und n ganze vonein-

---

[1] Diophant (Tannery) pag. 14, (Wertheim) S. 7. [2] Vgl. Rodet im *Journal Asiatique,* 7ième série, T. XI (Janvier 1878) pag. 42. [3] Vgl. Nesselmann l. c. S. 300—301. [4] *ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται.*

ander verschiedene Zahlen bedeuten, deren eine auch Null sein kann, ist damit in eine Regel gebracht, so unzweideutig, wie wir nur selten im Altertum Regeln ausgesprochen finden. Bemerkenswert ist das Wort εἶδος für Glied, welches später in lateinischer Übersetzung durch *species* wiedergegeben den Ursprung des Namens *arithmetica speciosa* für Buchstabenrechnung gebildet hat.

„In der Folge“, sagt Diophant noch weiter, „will ich Dir zeigen, wie man die Aufgabe löset, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich wird.“

Damit beabsichtigte Diophant aber sicherlich nicht in gleicher Allgemeinheit wie bei dem vorigen Falle die Auflösung der Gleichung $ax^m + bx^n = cx^p$ zu versprechen, sondern es kann sich nur um die gemischten quadratischen Gleichungen handeln. Allerdings treten dabei drei Möglichkeiten auf, indem nach Ausführung der vorbereitenden Operationen, die im obigen mitgeteilt wurden, entweder $ax^2 + bx = c$ oder $bx + c = ax^2$ oder $ax^2 + c = bx$ als Gleichheit eines zweigliedrigen Ausdruckes mit einem eingliedrigen erhalten wird, a, b, c selbstverständlich als positiv gedacht. Das ist die früher erwähnte Zusage der Auflösung gemischtquadratischer Gleichungen, welche im vorhandenen Texte nirgend erfüllt vielfach als erfüllt vorausgesetzt wird, und daher den Beweis des Verlustes jener Auflösung liefert.

Über den von Diophant bei der Auflösung einer gemischten quadratischen Gleichung eingeschlagenen Weg gibt die 24. Aufgabe des VI. Buches[1]) wohl die deutlichste Auskunft. Die dort erhaltene Gleichung heißt in modernen Zeichen geschrieben

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Diophant sagt nun wörtlich wie folgt, wobei nur wieder moderne Zeichen statt der griechischen Abkürzungen gebraucht sind: „Man addiere auf beiden Seiten die abzüglichen Größen, ziehe Gleichartiges von Gleichartigem ab und vervielfache alles mit x, so erhält man $336x^2 + 24 = 172x$. Diese Gleichung aber läßt sich nicht auflösen, wenn nicht das Quadrat des halben Koeffizienten von x, nachdem man das Produkt der 24 Einheiten in den Koeffizienten von x^2 davon abgezogen hat, ein Quadrat wird.“

Was uns zuerst auffallend erscheinen mag, ist die Abhängigkeit der Auflösbarkeit der Gleichung von einer Bedingung, welche nicht etwa besagt, es müsse die unter dem Quadratwurzelzeichen erscheinende Zahl ein Hinzuzufügendes sein, was gleich bei dieser Aufgabe, in welcher $x = \frac{86 + \sqrt{-668}}{336}$ ist, nicht eintreffen würde, sondern welche,

[1]) Diophant (Tannery) pag. 444, (Wertheim) S. 288—290.

wie einige Überlegung uns zeigt, darauf hinausläuft, daß die Wurzel der Gleichung rational werde. Ersetzen wir nämlich die bestimmten Zahlen durch allgemeine Buchstaben, so ist in der angeführten Aufgabe von der dritten Gleichungsform $ax^2 + c = bx$ die Rede und als Kennzeichen der Auflösbarkeit ausgesprochen, es müsse $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ ein Quadrat sein. Wird aber die Gleichung mit dem Koeffizienten a von x^2 vervielfacht und durch beiderseitige Subtraktion von $abx + ac - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ in die Form $a^2x^2 - abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ oder $\left(ax - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ übergeführt, so entsteht

$$ax - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

und Diophant knüpft, wie wir vorhin sagten, die Auflösbarkeit der Gleichung an die Rationalität der Quadratwurzel. Jene andere Bedingung, deren wir gewärtig sein durften, daß nur Hinzuzufügendes unter dem Wurzelzeichen nach vollzogener Zusammenziehung der dort auftretenden Werte stehen dürfe — abzügliche Zahlen als solche sind, wie wir oben sahen, bei Diophant überhaupt nicht gestattet, also auch nicht unter einem Wurzelzeichen — steckt wohl in der diophantischen Bedingung enthalten, aber letztere geht noch bedeutend weiter und schränkt die Anzahl der auflösbaren Gleichungen beträchtlich mehr ein. Woher diese Beschränkung stammt, ist, wenn man weiter nachdenkt, unschwer zu erkennen. Die eigentliche Algebra sieht ab von der geometrischen Bedeutung der vorkommenden Glieder. Sie vereinigt z. B. wie in jener heronischen Aufgabe (S. 404) Flächen und Längen, beide nur als Maßzahlen aufgefaßt, in eine Summe. Dieser allgemeinere Standpunkt gestattet geometrisch undenkbare Fragestellungen, schließt aber zugleich nur geometrisch denkbare Antworten aus. Jede Quadratwurzel aus positiven Werten läßt mit Zirkel und Lineal sich geometrisch herstellen, so gut wie die Diagonale des Quadrates eine geometrisch genau bestimmte Länge besitzt, aber in Zahlen ist eine Quadratwurzel nur möglich, wenn sie rational ist. Man halte uns nicht die heronische Aufgabe entgegen, auf welche wir eben uns bezogen haben, nicht die geodätischen Beispiele Herons, in welchen Näherungswerte von Quadratwurzeln vielfach benutzt sind, nicht Archimeds Rechnungen in seiner Kreismessung. Heron blieb Feldmesser, auch wo er der algebraischen Anschauung sich nähert, und die Feldmeßwissenschaft begnügt sich mit dem Maße geometrischer Gebilde, so genau es in Zahlen hergestellt werden kann, während die Gebilde selbst geometrische Größen sind und bleiben. Archimed aber, gleichfalls von geodätischen Zwecken ausgehend, blieb noch

strenger den Gesetzen geometrischer Behandlung auch bei seinen Zahlengrößen getreu: er bediente sich niemals angenäherter Gleichungen, sondern sprach Ungleichungen aus, welche er nur immer näher aneinander brachte. Die griechische Algebra, welche für Diophant einen Teil der Arithmetik bildet, kennt dagegen nur Zahlen als solche, Zahlen, die ausgesprochen werden können. Wir haben schon früher (S. 187) hervorgehoben, daß die Beschränkung sogar auf positive ganze Zahlen der griechischen Arithmetik lange eigentümlich war. Nikomachus, Theon von Smyrna, Jamblichus haben uns keine Veranlassung gegeben, diese Ansicht zu widerrufen. Brüche kommen bei ihnen nur in der Gestalt von Verhältnissen ganzer Zahlen vor. Auch die Seiten- und Diametralzahlen bei Theon (S. 436) waren wesentlich ganze Zahlen, deren Verhältnis nur nach unserem Dafürhalten statt des Verhältnisses $1 : \sqrt{2}$ näherungsweise eintreten konnte. Diophant hielt sich an die Ganzzahligkeit nicht mehr gebunden, und das ist ein zwar allmählich vorbereiteter, aber darum nicht minder wichtiger Fortschritt. Dagegen ist ihm das Irrationale immer noch keine Zahl.

Kehren wir mit diesem Bewußtsein zu dem diophantischen Verfahren bei der Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen zurück, so ist uns höchst bemerkenswert die Art, in welcher er die Auflösung vorbereitet. Genau so, wie wir es bei Heron kennen gelernt haben, vervielfacht er die Gleichung mit dem Koeffizienten des Quadrates der Unbekannten, statt durch diesen Koeffizienten zu dividieren. Darauf wies uns die bereits besprochene 24. Aufgabe des VI. Buches. Eine Bestätigung besitzen wir in der 45. Aufgabe des IV. Buches[1]): „Man findet, daß $2x^2$ größer als $6x + 18$ sein muß. Um nun hier eine Vergleichung anzustellen, so erhebe ich den halben Koeffizienten von x ins Quadrat und erhalte 9. Nun multiplizieren wir den Koeffizienten von x^2 mit der bestimmten Zahl 18, gibt 36. Dazu addieren wir 9, gibt 45, und davon ist die Wurzel nicht kleiner als 7. Dazu addieren wir den halben Koeffizienten von x und dividieren durch den Koeffizienten von x^2, so finden wir, daß x nicht kleiner sein darf als 5.“

Hier ist freilich eine Ungleichung, keine Gleichung zu behandeln, allein das verändert das anzuwendende Verfahren nur so weit, als hier eine Grenze der betreffenden irrationalen Quadratwurzel eingesetzt werden darf, weil unter Annahme der richtigen Zahl statt 18, die Ungleichung $2x^2 > 6x + 18$ in die Gleichung $2x^2 = 6x + 18 + k$ d. h. in eine Gleichung der zweiten Form übergehen würde, bei

[1]) Diophant (Tannery) pag 304, (Wertheim) S. 187.

welcher z. B. durch $k = 2$ die Irrationalität verschwände. Diophant geht nun folgendermaßen zu Werke. Aus $ax^2 = bx + c + k$ erhält er $\left(ax - \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak$, daraus $x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ak} + \frac{b}{2}}{a}$ oder endlich $x > \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}}{a}$.

Noch eine andere Eigentümlichkeit, welche freilich bei der eben betrachteten Ungleichung nicht zu Tage treten kann, weil negative Zahlen als solche für Diophant nicht existieren, besteht darin, daß nirgends zwei Auflösungen einer quadratischen Gleichung vorkommen, indem die Wurzelgröße sowohl hinzufügend als abzüglich mit einer anderen Zahl höheren Wertes verbunden ist. Man hat allerdings die Bemerkung gemacht, unter den Beispielen, welche bei Diophant sich vorfinden, sei kein solches, bei welchem eine zweifache Möglichkeit positiver Wurzeln auftrete, weil immer noch gewisse zahlentheoretische Nebenbedingungen zu erfüllen seien, welche sich der Annahme der Wurzel mit negativer Quadratwurzel widersetzen, es sei also ein Zufall, der diese Lücke schuf, und man sei nicht berechtigt anzunehmen, Diophant habe wirklich nicht gewußt, daß es Aufgaben mit zwei voneinander verschiedenen Auflösungen gebe[1]. Es scheint indessen doch, daß man die Behauptung des Nichtwissens rechtfertigen kann. Kommt auch außer der (S. 473) erwähnten nicht auflösbaren Gleichung $336x^2 + 24 = 172x$ keine andere von der Gestalt $ax^2 + c = bx$ bei Diophant, so weit er uns erhalten ist, vor, so trifft man doch bei ihm auf Ungleichungen von der Gestalt $ax^2 + c < bx$ und $ax^2 + c > bx$, welche je zwei positive Grenzwerte für x liefern, mag man eine in ihnen auftretende Quadratwurzel positiv oder negativ wählen. Im V. Buche begegnen wir den doppelten Ungleichungen[2] $\frac{17}{12} < \frac{6x}{x^2+1} < \frac{19}{12}$ und $11 < \frac{x^2+60}{2x} < 12$. Diophant folgert aus ihnen $\frac{66}{19} < x < \frac{67}{17}$, beziehungsweise $19 < x < 21$. Werte, welche der Möglichkeit der negativen neben der positiven Quadratwurzel Rechnung trügen, wären $\frac{36 \pm \sqrt{935}}{19} < x < \frac{36 \pm \sqrt{1007}}{17}$, beziehungsweise $11 \pm \sqrt{61} < x < 12 \pm \sqrt{84}$. Man erkennt an beiden Beispielen die Wahrheit der Tatsache, daß Diophant die Lösungen mit negativer Quadratwurzel nicht berücksichtigte, auch wo sie be-

---

[1]) So L. Rodet im *Journal Asiatique*, 7ième série, T. XI (Janvier 1878) pag. 89—90. [2]) Diophant (Tannery) pag. 340 und 388, (Wertheim) S. 211 und 251.

rücksichtigungsfähig waren, daß er sie also wahrscheinlich nicht kannte[1]).

In diesem Zusammenhange müssen wir auch von solchen quadratischen Gleichungen reden, welche gewöhnlich mit Hilfe zweier Unbekannten gelöst bei Diophant nur das Aufsuchen einer einzigen freilich mit besonderem Geschick ausgesuchten Größe verlangen. Wenn Diophant in der 30. Aufgabe des I. Buches[2]) zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Produkte finden will, so nimmt er die halbe Differenz der beiden Zahlen zur Unbekannten und erhält beide Zahlen je nachdem er die Unbekannte zur halben Summe addiert oder von ihr abzieht; das gegebene Produkt ist daher gleich dem Quadrat der halben Summe verringert um das Quadrat der Unbekannten, die somit durch einfache Quadratwurzelausziehung sich ergibt. Derselben Unbekannten bedient er sich in der 31. Aufgabe[3]), wenn zwei Zahlen aus ihrer Summe und aus der Summe ihrer Quadrate gefunden werden sollen. Wieder erhält er beide Zahlen, je nachdem er die Unbekannte zur halben Summe addiert, oder von ihr abzieht, und die Summe der Quadrate wird gleich dem Doppelten des Quadrates der halben Summe und des Quadrates der Unbekannten, die wieder durch einfache Quadratwurzelausziehung sich ergibt. Nicht anders werden in der 32. Aufgabe[4]) zwei Zahlen aus ihrer Summe und dem Unterschiede ihrer Quadrate gewonnen, welche letztere sich als doppeltes Produkt der Unbekannten in die gegebene Summe erweist, so daß einfache Division hinreicht die Unbekannte zu finden. Sind in der 33. Aufgabe[5]) Differenz und Produkt zweier Zahlen gegeben, so wird die halbe Summe als Unbekannte gewählt, welche die beiden Zahlen in der Gestalt erscheinen läßt, daß die halbe Differenz zur Unbekannten addiert, beziehungsweise von ihr subtrahiert wird. Das gegebene Produkt ist also das Quadrat der Unbekannten vermindert um das Quadrat der halben Differenz, und die Unbekannte wird wiederholt durch eine Quadratwurzelausziehung gefunden. Ähnlich verfährt Diophant noch in anderen Fällen, die wir nicht alle einzeln vorführen dürfen, um uns nicht zu lange bei dem Gegenstande zu verweilen.

Eine kubische Gleichung kommt in der 19. Aufgabe des VI. Buches[6]) vor, aus welcher aber keinerlei gesicherte Schlußfolgerung sich ziehen

[1]) Auf diese Ungleichungen und die aus ihnen zu ziehende Folgerung hat uns Herr C. Büchel brieflich aufmerksam gemacht. [2]) Diophant (Tannery) pag. 60—62, (Wertheim) S. 36. [3]) Ebenda (Tannery) pag. 62—64, (Wertheim) S. 36—37. [4]) Ebenda (Tannery) pag. 64, (Wertheim) S. 37. [5]) Ebenda (Tannery) pag. 66, (Wertheim) S. 38. [6]) Ebenda (Tannery) pag. 434, (Wertheim) S. 282.

läßt. Es heißt bei Diophant nur: „Es ist $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$, hieraus findet man $x = 4$" ohne die leiseste Andeutung, wie „man" diesen Wurzelwert finde. Ob man die Gleichung zunächst in die Form $x^3 + x = 4x^2 + 4$ brachte und dann daraus durch Division mit $x^2 + 1$ den Wert $x = 4$ erhielt?[1]) Es ist wohl möglich, vielleicht wahrscheinlich, denn an einer nur wenig späteren Stelle des VI. Buches[2]) heißt es von dem Ausdrucke $4x^2 + 6x + 2$, er sei zusammengesetzt (σύνϑετος), und zwar aus $4x + 2$ und $x + 1$, und wenn man ihn durch $x + 1$ teile, so entstehe $4x + 2$. Diophant mußte also mit Zerlegungen in Faktoren vertraut sein und wissen, daß man mittels Division einer Gleichung durch einen ihren beiden Gleichungsseiten gemeinschaftlichen Faktor deren Grad erniedrigen kann[3]).

Bis hierhin haben wir mit Diophant in der ersten Bedeutung, die wir ihm beilegten, uns beschäftigt. Wir wenden uns zu dem Gebiete der unbestimmten Aufgaben, auf welchem wir Diophant als Bahnbrecher, als Pfadfinder zu erkennen haben. Er setzt sich dabei die gleichen Schranken, welche auch seiner bestimmten Algebra anhaften, keine anderen. Die Wurzelwerte, welche er den vorgelegten Gleichungen zu geben sich bemüht, dürfen keine abzüglichen, keine irrationalen sein, denn sonst wären es keine Zahlen, aber weiter gehen seine Anforderungen nicht. Insbesondere verlangt Diophant nicht ganzzahlige Auflösungen, und nur in einzelnen Fällen, wo etwa das Weglassen eines denjenigen Zahlen, die gemeinschaftlich die gestellte Aufgabe erfüllen, insgesamt anhaftenden Nenners den Übergang zu ganzzahligen Auflösungen allzunahe legt, gibt er solche an. In einer ganzen Anzahl von Aufgaben (II, 36. III, 13. IV, 23, 43, 45. V, 12) kommen sogar Brüche mit gemischtzahligen Zählern vor, wie die Ägypter sie einst benutzten (S. 71). Was also heute Diophantische Analytik genannt zu werden pflegt, was man als Diophantische Gleichungen dem Schulunterrichte einverleibt hat, das darf man bei Diophant nicht suchen. Diophant, sagen wir, löst unbestimmte Aufgaben in rationalen Zahlen, und daraus folgt, daß für ihn eine unbestimmte Aufgabe mit aufsuchungsbedürftigen Wurzeln nur dann vorhanden sein kann, wenn der Grad sich auf den zweiten erhebt, ja in nicht wenigen Fällen weiß er noch Aufgaben vom dritten und vierten Grade zu bewältigen.

Unsere Leser werden nun vielleicht nach den Methoden fragen, deren Diophant sich bei Auflösung dieser unbestimmten Aufgaben

---

[1]) So meint Schulz S. 589 in seinen Anmerkungen zu der betreffenden Aufgabe. [2]) Diophant (Tannery) pag. 438, (Wertheim) S. 285. [3]) Auf diese Verwandtschaft hat uns Herr C. Büchel brieflich hingewiesen.

bedient, sie werden diese Frage um so sicherer stellen, wenn sie wissen, daß der Geschichtsschreiber neuerer Zeit, der am eingehendsten mit Diophant sich beschäftigt hat, einem umfangreichen Kapitel geradezu die Überschrift „Diophants Auflösungsmethoden" gegeben hat[1]. Aber neben dem Umfange jenes Kapitels selbst sind dessen erste Worte geeignet die durch die Überschrift geweckten Erwartungen zurückzudrängen: „Diophants Methoden in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit vollständig darstellen hieße nichts anderes, als sein Buch abschreiben." Darin liegt das Zugeständnis, daß Diophant keine einheitliche Methode besaß, ja nicht einmal eine Anzahl von Methoden, deren jede für sich zur Bewältigung einer umgrenzten Gruppe von Aufgaben diente. „Diophant war", wie ein anderer genauer Kenner seiner Werke sich sehr bezeichnend ausgedrückt hat[2], „ein glänzender Virtuos in der von ihm erfundenen Kunst der unbestimmten Analytik, die Wissenschaft hat jedoch, wenigstens unmittelbar, diesem glänzenden Talente wenig Methoden zu verdanken, weil es ihm an dem spekulativen Sinne fehlte, der in dem Wahren mehr als das Richtige sieht." Seine Virtuosität zeigt er vornehmlich in der Wahl der unbekannten Größe. Was wir oben bei Gelegenheit bestimmter Aufgaben mit zwei Unbekannten, die er auf die Auffindung einer einzigen Unbekannten zurückzuführen wußte, rühmen durften, gilt auch für Diophants unbestimmte Aufgaben. Er greift die zu suchende Größe so geschickt heraus, daß verhältnismäßig geringe Mühe noch erforderlich ist, die Aufgabe vollends zu bewältigen, während andrerseits die Willkürlichkeit der Voraussetzungen, welche er sich gestattet, in keiner Weise zu rechtfertigen gesucht wird, eine Rechtfertigung auch nicht gestattet.

Wenn Diophant z. B. in der 7. Aufgabe des III. Buches[3] drei Zahlen von der Beschaffenheit sucht, daß sowohl die Summe von allen dreien als die Summe von je zweien ein Quadrat sei, und die Gesamtsumme $x^2 + 2x + 1$ setzt, so kann dagegen keinerlei Einwand erhoben werden. Wer aber berechtigt ihn die Summe der ersten und zweiten Zahl als x^2 anzunehmen, so daß die dritte Zahl für sich $2x + 1$ wird? Wer berechtigt ihn vollends die Summe der zweiten und dritten Zahl als $x^2 - 2x + 1$ zu setzen, wie er es tut? Unter dieser Annahme wird allerdings eine Lösung gefunden. Die erste Zahl allein muß nämlich erhalten werden, wenn die Summe der zweiten und dritten von der Gesamtsumme, d. h. wenn $x^2 - 2x + 1$ von $x^2 + 2x + 1$ abgezogen wird, sie muß $4x$ sein, und die zweite

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 355—436. [2]) Hankel S. 165.
[3]) Diophant (Tannery) pag. 146—148, (Wertheim) S. 89.

Zahl allein ist die um die erste Zahl $4x$ verringerte Summe x^2 der ersten und zweiten Zahl oder $x^2 - 4x$. Es bleibt jetzt nur noch zu erfüllen, daß die Summe der ersten $4x$ und der dritten $2x + 1$, d. h. daß $6x + 1$ ein Quadrat werde, und dazu setzt Diophant $6x + 1 = 121$, mithin $x = 20$ und die drei Zahlen sind 80, 320, 41. Diophant verschweigt uns sogar, warum er $6x + 1 = 121$ setzt und nicht eine kleinere Quadratzahl ähnlicher Form wählt, wenn auch der Grund hiervon nachträglich zu erkennen ist. Die Annahme $6x + 1 = 25$ gibt nämlich die drei Zahlen 16, 0, 9, unter welchen die 0 vorkommt, die ihm keine Zahl ist; und die Annahme $6x + 1 = 49$ gibt die Zahlen 32, 32, 17, welche er wohl deshalb vermeidet, weil die beiden ersten unter sich gleich sind, also streng genommen keine drei Zahlen darbieten.

Man hat in der 17. Aufgabe des II. Buches und in der 9. Aufgabe des III. Buches wirkliche Methoden zu erkennen geglaubt, die auch bei anderen Aufgaben benutzt seien und auf den beiden Sätzen beruhen, daß $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ rationale Zahl werden könne, wenn C oder wenn A eine positive Quadratzahl sei[1]), allein wenn wir auch unseren Lesern diese Vermutung nicht vorenthalten möchten, können wir uns doch nicht entschließen dieselbe als berechtigt anzuerkennen oder gar der Meinung beizustimmen, die erwähnten beiden allgemeinen Sätze seien von Diophant in seinen Porismen (S. 467) ausgesprochen, wenn nicht bewiesen worden.

Virtuosität legt Diophant auch darin an den Tag, daß er die zu lösende Aufgabe teilt, daß er gewisse Bedingungen derselben zunächst willkürlich durch irgend Zahlenannahmen erfüllt, daß er dann diese Annahmen als falsch erkennt und vermöge anderer Bedingungen der Aufgabe in die richtige umwandelt, ein Weg, der uns unwillkürlich an den falschen Ansatz erinnert, dessen Ahmes in seiner schwierigsten Aufgabe von der arithmetischen Reihe (S. 78) sich bedient hat, ein Weg, den vielleicht, wie wir im 18. Kapitel bei Besprechung von Herons Vermessungslehre auseinandersetzten, die Griechen zur Aufsuchung von Quadrat- und Kubikwurzeln in kunstvoller Weise gangbar zu machen wußten, der künftig unseren forschenden Blicken wiederholt erkennbar sein wird, von vielen Fußspuren durchkreuzt, die den mannigfachsten Betretern angehören.

Als einfachste Aufgabe dieser Art wird die 22. des IV. Buches[2])

[1]) Paul von Schaewen, Zur Lösung der Gleichung $z = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$. Osterprogramm 1906 des Evangelischen Gymnasiums zu Glogau [1906 Programm Nr. 235]. Die genannten Aufgaben stehen (Tannery) pag. 109 und 151, (Wertheim) S. 63 und 90. [2]) Diophant (Tannery) pag. 234—236, (Wertheim) S. 146—147.

genannt. Drei proportionale Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß der Unterschied von je zweien ein Quadrat werde. Ist die erste Zahl x, so setzt Diophant die zweite $x + 4$, die dritte $x + 13$, damit der Unterschied der ersten und zweiten, sowie der zweiten und dritten ein Quadrat werde. Die angegebenen Zahlen lassen aber den Unterschied der ersten und dritten nicht zu einem Quadrat werden. Die als Summe der Quadrate $4 + 9$ entstandene Zahl 13 muß also so umgewandelt werden, daß sie die selbst quadratische Summe zweier Quadrate werde. Man wählt z. B. $25 = 9 + 16$ und setzt x, $x + 9$, $x + 25$ für die drei Zahlen. Jetzt endlich ist die Hauptbedingung $x : (x + 9) = (x + 9) : (x + 25)$ oder $x^2 + 18x + 81 = x^2 + 25x$ zu erfüllen, was durch $x = \frac{81}{7}$ geschieht, und die drei Zahlen sind $\frac{81}{7}$, $\frac{144}{7}$, $\frac{256}{7}$. Es kann auffallen, daß Diophant hier versäumt sämtliche Brüche mit 49 (dem Quadrate ihres Nenners) zu vervielfachen, um die ganzzahlige Auflösung 567, 1008, 1792 sich zu verschaffen; vielleicht schienen diese Zahlen ihm zu groß. Noch mehr drängt sich die Frage auf, warum gerade 9 und 25 als die Unterschiede der ersten Zahl von der zweiten und dritten gewählt wurden, warum nicht mindestens gesagt ist $9 + 16 = 25$ sei die kleinste ganzzahlige Auflösung der vorauszulösenden Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so daß man daraus entnähme, auch andere die gleiche Bedingung erfüllende Zahlen hätten benutzt werden dürfen.

Auf alle solche Fragen, die wir zu stellen geneigt sind, läßt sich stets nur dieselbe Antwort erteilen, die nämlich, daß für Diophant diese Fragen nicht so nahe lagen, wie wir zu meinen geneigt sind. Diophant suchte meistens eine Lösung, nicht die Lösung. Er beantwortete Rätselfragen, er hatte es nur in seltenen Ausnahmsfällen mit folgerungsreichen Theorien zu tun. Er stand damit innerhalb seiner Zeit, innerhalb seines Volkes. Seine Genialität in Erreichung der vorgesteckten Ziele gehört ihm persönlich zu, die Beschränkung dessen, was er zu erreichen suchte, verschuldet mit ihm die gesamte griechische Arithmetik, wenn von einer Schuld gesprochen werden kann, wo auch das entfernteste Bewußtsein fehlt, man hätte anders handeln können.

Statt daher bei Diophant Methoden zur Auflösung unbestimmter Gleichungen vom ersten oder von höherem Grade zu suchen, werden wir uns begnügen müssen zuzusehen, ob ihm unterwegs bei seinen künstlichen Windungen einzelne zahlentheoretische Wahrheiten bekannt geworden sind, welche der späteren Zeit zugute kamen.

Solche Wahrheiten finden wir nun z. B. in der 22. Aufgabe des

III. Buches[1]), wo es zuerst heißt, daß in jedem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder hinzufügt, und später daß die Zahl 65 sich von selbst auf zweierlei Art in zwei Quadrate, nämlich zuerst in 16 und 49 und dann wieder in 64 und 1 zerlegen lasse, welches seinen Grund darin habe, daß 65 aus der Multiplikation der Faktoren 5 und 13 entstanden sei, deren jeder die Summe von zwei Quadraten sei. Das heißt erstlich, daß $a^2 + b^2 \pm 2ab$ ein Quadrat gebe und zweitens, daß $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ auf zwei Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden könne. Wenn auch Diophant nicht sagt, daß ihm die Zerlegungen selbst $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ und $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ bekannt seien, so ist doch wohl nicht daran zu zweifeln, da andernfalls die zweifache Möglichkeit der Zerlegung ihm nicht so einleuchtend hätte sein können.

Daß jedes Quadrat auf beliebig viele Arten als Summe zweier Quadrate aufgefaßt werden könne, lehrt Diophant in der 8. und 9. Aufgabe des II. Buches[2]) wie folgt. Ist a^2 die zu zerlegende Quadratzahl, so denke man x^2 als den einen, $(mx - a)^2$ als den anderen Teil, wo m ganz beliebig gewählt werden kann. Demnach muß $a^2 = x^2 + m^2x^2 - 2amx + a^2$, also $x = \frac{2am}{m^2 + 1}$ und $mx - a = \frac{a(m^2 - 1)}{m^2 + 1}$ sein, oder man hat $a^2 = \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \cdot a\right)^2$ unter ganz willkürlicher Annahme von m. Das ist einer von den seltenen Ausnahmefällen, in welchem Diophant sich zur vollen Allgemeinheit erhebt und wie wir von dem $m$fachen, von „irgend einem Vielfachen“ und von „einem beliebigen Vielfachen“ spricht.

Wir nennen ferner die Wahrheit, daß keine Zahl von der Form $4n + 3$ die Summe zweier Quadrate sein könne, welche in der 12. Aufgabe des V. Buches[3]) gelegentlich ausgesprochen ist. Ob Diophant auch wußte, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ als Summe zweier Quadrate aufgefaßt werden kann? Schwerlich! und noch weniger wird man annehmen dürfen, falls er wirklich diese oder eine ähnliche Umkehrung sich gestattet hätte, er habe einen vollgültigen Beweis dafür besessen.

Diophant geht vielmehr in Umkehrungen nicht mit der nötigen

---

[1]) Diophant (Tannery) pag. 182—184, (Wertheim) S. 110—111. [2]) Ebenda (Tannery) pag. 90—92, (Wertheim) S. 51—53. [3]) Ebenda (Tannery) pag. 332 bis 334, (Wertheim) S. 206 und in der Übersetzung von Schulz die Anmerkung S. 518—520.

Vorsicht zu Werke, wie aus einem seiner Porismen sich ergibt. Wir haben (S. 467) gesagt, daß Diophant an verschiedenen Stellen auf seine Porismen verweise. Drei Porismen sind ausdrücklich angeführt in der 3., 5. und 19. Aufgabe des V. Buches.

Das erste derselben lautet[1]): „Wenn man zwei Zahlen hat und nicht nur jede dieser Zahlen für sich, sondern auch das Produkt ein Quadrat wird, wenn man die nämliche vorgeschriebene Zahl dazu addiert, so sind sie von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Quadraten entstanden", d. h. wenn $x + a = m^2$, $y + a = n^2$, $xy + a = p^2$ sein soll, so müssen m, n aufeinanderfolgende ganze Zahlen sein. Hier hat man zeigen können[2]), daß Diophant eine falsche Umkehrung vornahm. Wenn m und n aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, findet allerdings der ausgesprochene Satz statt, aber derselbe kann auch stattfinden, ohne daß diese Bedingung erfüllt werde.

Das zweite Porisma lautet[3]), „daß wenn man zu zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen noch eine dritte Zahl suche, welche um 2 größer ist als die doppelte Summe jener beiden, man dann drei Zahlen von der Beschaffenheit habe, daß das Produkt von je zweien, sowohl wenn die Summe der zwei multiplizierten, als auch wenn die dritte Zahl dazu addiert wird, ein Quadrat werde". Die drei Zahlen sind a^2, $(a + 1)^2$, $4a^2 + 4a + 4$ und daß diese in der Tat die ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, ist leicht erkennbar.

Endlich das dritte Porisma heißt[4]), „daß der Unterschied zweier Kubikzahlen auch allemal Summe von zwei Kubikzahlen sei". Der Satz ist wahr, aber einen Beweis gibt Diophant an der Stelle, wo er das Porisma anwendet, nicht. Das würde auch niemand erwarten dürfen, denn Verweisungen haben ja gerade den Zweck Beweise zu ersparen. Dagegen ist es allerdings einigermaßen auffallend, daß auch die praktische Ausführung jenes als möglich Erklärten fehlt. Der Satz selbst wird uns erst im XVII. S. wieder begegnen, wo er den Ausgangspunkt interessanter Untersuchungen bildete.

Neben den drei besonders genannten Porismen hat man auch wohl die vorher von uns hervorgehobenen Wahrheiten als Porismen des Diophant aufgefaßt, was wenigstens mit dem Charakter der Sätze nicht in Widerspruch steht.

Bei den erhaltenen sechs arithmetischen Büchern noch einen Augenblick verweilend müssen wir eins betonen, welches von geschichtlicher Bedeutung sein dürfte. Wir haben arithmetische Unter-

---

[1]) Diophant (Tannery) pag. 316, (Wertheim) S. 195. [2]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 441—442. [3]) Diophant (Tannery) pag. 320, (Wertheim) S. 198. [4]) Ebenda (Tannery) pag. 358, (Wertheim) S. 226.

suchungen griechischer Schriftsteller durch Jahrhunderte verfolgen können und haben deren enge Verbindung mit der Theorie des rechtwinkligen Dreiecks in den verschiedensten Perioden hervortreten sehen. Auch Diophant beschäftigt sich mit solchen Zahlen, welche die Längenmaße der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, und zwar treten diese Aufgaben, abgesehen von einigen wenigen[1]), die wohl bei der Zerstörung, welche der ursprüngliche Text unter allen Umständen erlitt, an eine unrechte Stelle gekommen sein mögen, durchaus im VI. Buche auf. Man gewinnt dadurch die Empfindung, es seien zuerst arithmetische, dann geometrisch-arithmetische Fragen behandelt worden. Wir haben uns (S. 467) der Meinung angeschlossen, es sei nicht wahrscheinlich, daß am Ende der auf uns gekommenen sechs Bücher vieles fehle. Wir sind nicht gewillt solches gegenwärtig zu widerrufen, aber wenn auch nicht vieles, so könnte ein Gegenstand hier verloren gegangen sein, den wir nennen möchten. Die geometrisch-arithmetischen Fragen des VI. Buches beziehen sich insgesamt auf das rechtwinklige Dreieck. Die Möglichkeit geometrisch-arithmetischer Fragen vom Rechtecke ist nicht ausgeschlossen. Solche Aufgaben kennen wir bereits. Sie stehen in dem Buche des Landbaues (S. 391), wir mußten bei Gelegenheit einer Stelle aus dem III. Buche der Sammlung des Pappus (S. 454) daran erinnern. Die Aufgaben verlangen: 1. zwei Rechtecke zu finden, deren Umfänge wie deren Flächeninhalte im Verhältnisse wie 1 : 3 stehen; 2. zwei Rechtecke zu finden, deren Umfänge einander gleich seien, deren Flächen aber im Verhältnisse von 1 : 4 stehen. Die Auflösung der ersten Aufgabe bilden die Rechtecke aus den Seiten 54, 53 und 318,3, die der zweiten die Rechtecke aus den Seiten 3,60 und 15,48. Eine wenn auch nur geringe Familienähnlichkeit dazu besitzt die achte Aufgabe des V. Buches[2]) bei Diophant: „Man soll drei rechtwinklige Dreiecke suchen, deren Flächen einander gleich sind.“ Hat Diophant, was wir nicht für unmöglich halten, Aufgaben behandelt, welche näher mit denen im Buche des Landbaues übereinstimmen, so wird er es schwerlich in dem gleichen Buche getan haben, in welchem von den rechtwinkligen Dreiecken die Rede war. Jedes rechtwinklige Dreieck ist zwar für die arithmetische Betrachtung nicht minder wie für die geometrische die Hälfte eines Rechtecks, d. h. die Katheten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks können auch als Seiten eines rationalen Rechtecks betrachtet werden; aber das gilt nicht umgekehrt. Die Seiten vieler Rechtecke z. B. alle

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 436 hat dieselben gesammelt.
[2]) Diophant (Tannery) pag. 324, (Wertheim) S. 200.

obigen Paare 54, 53 wie 318,3 wie 3,60 wie 15,48 können nicht als Katheten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks benutzt werden. Dieser Gegensatz erscheint auch in der Natur der gestellten Fragen wieder. Jene Aufgaben von den Rechtecken verlangten sowohl den Inhalt als den Umfang gewissen Zahlenbedingungen zu unterwerfen. Die angeführte diophantische Aufgabe von Dreiecken schrieb nur für den Inhalt eine Bedingung vor, weil die Rechtwinkligkeit der Dreiecke den Seitenlängen von selbst gewisse Bedingungen auferlegt, die nicht erst ausgesprochen zu werden brauchen.

Wie es nun damit sei, ob Diophant in einem Schlußbuche seines Werkes Aufgaben über Rechtecke behandelte oder nicht, unter allen Umständen ist die Form der meisten geometrisch-arithmetischen Aufgaben des VI. Buches zu beachten, bei welchen, wie in jener Aufgabe Herons vom Kreise (S. 404), Flächen und Linien so sehr als Zahlen behandelt werden, daß man Summen und Differenzen aus ihnen bildet. Wir führen als einfaches Beispiel die neunte Aufgabe des VI. Buches[1]) an: „Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die beiden Katheten davon abzieht“ oder in Zeichen geschrieben $\frac{xy}{2} - x - y = c$.

Wir wenden uns zu der kleinen 10 Sätze umfassenden Abhandlung über Polygonalzahlen, welche in den Handschriften mit den arithmetischen Büchern vereinigt ist. Um den Inhalt[2]) der Abhandlung richtig zu verstehen müssen wir uns des Satzes von den Dreieckszahlen erinnern, die 8fach genommen und um 1 vermehrt stets zu Quadraten werden. Wir haben diesen Satz bei Plutarch, später bei Jamblichus (S. 460) gefunden. Ihn verallgemeinert Diophant und behauptet, jede Polygonalzahl werde zu einem Quadrate, wenn man sie mit einem Zahlenkoeffizienten vervielfache, der von der Anzahl der Ecken der Polygonalzahl abhänge, und das Quadrat einer gleichfalls aus dieser Eckenzahl sich ergebenden Zahl hinzuaddiere. Er spricht ihn später dahin aus, daß wenn etwa p_m^r das Symbol der r^{ten} m-Eckszahl, und p_m allgemeiner das Symbol irgend einer m-Eckszahl darstellt, stets $8(m-2)p_m + (m-4)^2$ eine Quadratzahl werde. Er findet sodann diese Quadratzahl, welche nicht bloß von m, sondern auch von dem jedesmaligen r abhängt, als $[(m-2)(2r-1)+2]^2$. Damit ist zugleich eine Doppelformel gegeben, welche zeigt, wie die r^{te} m-Eckszahl gefunden werden kann, sobald m und r bekannt sind,

[1]) Diophant (Tannery) pag. 409, (Wertheim) S. 266. [2]) Eine sehr klare Übersicht bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 463—469. Die Abhandlung selbst in Diophant (Tannery) pag. 450—480, (Wertheim) S. 297—313.

wie aber auch die Seite r einer bekannten m-Eckszahl p^r_m sich berechnen läßt. Denn einmal ist

$$p^r_m = \frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2-(m-4)^2}{8(m-2)},$$

was bei Diophant im 9. Satze folgendermaßen lautet: „Wir nehmen die Seite (r) der Polygonalzahl doppelt, ziehen davon die Einheit ab; den Rest vervielfältigen wir durch die um 2 verkürzte Zahl der Ecken (m); zu dem Produkte wird 2 gezählt und die Summe quadriert; von dem Quadrate ziehen wir ab das Quadrat der um 4 verkleinerten Anzahl der Ecken; den Rest teilen wir durch das 8fache der um 2 verkürzten Anzahl der Ecken, so werden wir die Polygonalzahl finden.“ Zweitens findet sich aus dieser Formel durch Rückwärtsentwicklung

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(m-2)p^r_m+(m-4)^2}-2}{m-2}+1\right]$$

und Diophant fährt auch wirklich fort: „Ist diese (i. e. die Polygonalzahl) gegeben, so finden wir deren Seite auf folgende Art. Wir vervielfältigen sie durch das 8fache der um 2 verkürzten Anzahl der Ecken; zum Produkte zählen wir das Quadrat der um 4 verkürzten Anzahl der Ecken, so werden wir eine Quadratzahl erhalten, wenn die gegebene wirklich eine Polygonalzahl war. Von der Seite dieses Quadrates ziehen wir 2 ab; den Rest teilen wir durch die um 2 verkleinerte Anzahl der Winkel, setzen die Einheit hinzu und nehmen von der Summe die Hälfte: so werden wir die Seite der gesuchten Quadratzahl erhalten.“ Als Satz 10. schließt sich noch die Aufgabe an, zu erforschen, auf wieviele Arten eine gegebene Zahl Polygonalzahl sein könne? Der Sinn dieser Frage ist klar. Die Zahl 36 z. B. ist die achte Dreieckszahl, die sechste Viereckszahl, die dritte Dreizehneckszahl und die zweite Sechsunddreißigeckszahl, kann also auf vier Arten Polygonalzahl sein, und diese Anzahl 4 wird eben gesucht. Leider ist die Antwort auf diese Frage nicht so verständlich wie die Frage selbst. Sie bricht in der Mitte ab, ohne daß es bisher gelungen wäre, das Bruchstück dem Sinne entsprechend zu ergänzen.

Wir haben schon früher (S. 467) bemerken müssen, daß die Abhandlung über die Polygonalzahlen ein ganz anderes Gepräge trage als die arithmetischen Bücher. Die arithmetischen Bücher, sagten wir, seien wesentlich analytisch, die Schrift über die Polygonalzahlen wesentlich synthetisch. Letztere lehnt sich, wie wir jetzt ergänzend sagen möchten, vornehmlich an die arithmetischen Bücher des Euklid an. Wie dort sind die Sätze erst behauptungsweise ausgesprochen,

dann bewiesen. Wie dort schließt der Beweis häufig mit den Worten: „welches zu zeigen war". Wie dort sind die Beweise an Linien geführt, welche aber nichts anderes sind noch sein wollen als Versinnlichungen von Zahlen, und geometrische Vorkenntnisse werden nicht beansprucht[1]). Das alles sind nur erschwerende Einzelheiten, geeignet die Übersichtlichkeit der Sätze für den Leser, aber auch für den Erfinder bedeutend zu verringern. Man vergleiche doch die beiden Hauptformeln mit der Einkleidung derselben in Worte bei Diophant, welche wir ihnen zur Seite gestellt haben, und man wird ein Gefühl davon erhalten, wie schwer es bei solcher Fassung war auch nur die zweite Formel aus der ersten herzuleiten.

Was in dieser Abhandlung über die Polygonalzahlen dem Diophant eigentümlich ist, was er von Vorgängern entlehnte, ist zweifelhaft. Fehlen uns auch die Schriften des Philippus Opuntius (S. 169), des Speusippus (S. 249), des Hypsikles (S. 361) über diesen Gegenstand, so wissen wir doch, daß die ersteren die Namen der Vieleckszahlen überhaupt, letzterer eine sachgemäße Definition derselben kannte, auf welche gerade Diophant, bei dem allein sie sich erhalten hat, Rücksicht nimmt. Es ist also jedenfalls unrichtig, daß Diophant zuerst von Vieleckszahlen im allgemeinen gehandelt habe, wie wohl gesagt worden ist. Möglich ist es dagegen, daß die Doppelformel, in welcher Diophants Abhandlung gipfelt, von ihm herrühre, möglich auch, wie im 26. Kapitel verständlich werden wird, daß in dem verloren gegangenen Schlusse der Abhandlung noch Sätze über Pyramidalzahlen und deren Beziehung zu den Polygonalzahlen enthalten waren. Ja es ist selbst nicht ausgeschlossen, daß Hypsikles bereits sich mit Untersuchungen über diesen letzteren Gegenstand beschäftigte.

Lassen wir die weniger bedeutenden Schriftsteller, denen die zufällige Zeit ihres Lebens einen Platz in den beiden letzten Kapiteln anwies, beiseite, so bleiben die beiden Alexandriner: Pappus, Diophantus als reicher Inhalt. Beide hervorragende Geister, Mathematiker, welche jedem Volke, jedem Jahrhunderte zur Zierde gereicht hätten, welche aber da, wo ihnen zu wirken das Geschick verlieh, einer unmittelbaren Wirkung entbehrten, entbehren mußten. Pappus stand, wie wir gesehen haben, vielleicht an der Spitze einer Schule (S. 443), und von seiner geometrischen Sammlung ist bei keinem Griechen die Rede! Diophantus' Name war, wie wir aus den Äußerungen von Theon von Alexandria, von Johannes von Jerusalem (S. 464) wissen, von dem Strahlenglanze algebraischen Ruhmes um-

[1]) Ganz vereinzelt ist auch die Aufgabe V, 13 der arithmetischen Bücher an einer Linie versinnlicht. Diophant (Tannery) pag. 336, (Wertheim S. 209).

schlossen, und doch ist kein griechischer Algebraiker nach ihm aufgetreten, der seine Geistesrichtung verfolgte! Vereinzelte Zutaten, Einschiebungen von nicht immer zweifellosem Werte in die Sammlung des Pappus, dürftige Kommentare zu alten Arithmetikern, zu Diophantus selbst, das war alles, wozu griechische Schriftsteller sich noch zu erheben vermochten. Pappus und Diophantus muten uns an, wie riesige erratische Blöcke in einer weiten Ebene. Sie bilden weit sichtbare Punkte, an denen das Auge des Beschauers haften muß, aber sie durchbrechen nur, sie verändern nicht die allgemeine Flachheit. Die Griechen am Ende des IV. S. waren längst nicht mehr das Volk, dem Leben gleichbedeutend war mit Fortschreiten in Kunst und Wissenschaft. Die kommentierende Tätigkeit, welche, wie wir erörtert haben, eine Hauptbeschäftigung der philosophischen Sekten jener Zeit bildete, schloß den Geist in die engeren Schranken des bereits Vollendeten, statt ihm Flügel zum Ausschweifen in unentdeckte Fernen zu verleihen. Immer tiefer sinkt griechische Mathematik herab, und gälte es nicht das Gebot der Vollständigkeit zu erfüllen, wäre es nicht historisch notwendig zu sehen, wie eine Wissenschaft abstirbt, man schlösse am liebsten mit Diophant die Besprechung der in griechischer Sprache geschriebenen mathematischen Werke.

24. Kapitel.

Die griechische Mathematik in ihrer Entartung.

Wir haben in den Schlußsätzen des vorigen Kapitels wohl hinlänglich entschuldigt, weshalb wir mit Diophant wenigstens ein Kapitel abzuschließen für nötig fanden. Es widerstrebte uns auf ihn noch Schriftsteller folgen zu lassen, die zwar auch noch dem IV. S. angehören, deren einer sogar nicht unbedeutender Berühmtheit sich erfreut, die aber doch einen gar zu grellen Abstich gegen Diophant bieten würden.

Wir meinen zunächst Patrikius[1]), einen Schriftsteller, von welchem nur in zwei heronische Bücher, in die Geometrie und in die erste stereometrische Sammlung, unbedeutende Überreste sich eingeschlichen haben. Die erste Stelle lehrt bei größerer Länge eines Grundstückes dessen Breite an verschiedenen Stellen zu messen,

[1]) Th. H. Martin in dem IV. Bande der *Mémoires présentés par divers savants à l'académie des inscriptions et belles-lettres. Série I. Sujets divers d'érudition* (Paris 1854) pag. 220. Agrimensoren S. 112.

daraus eine Durchschnittsbreite zu berechnen und die Fläche als Rechteck zwischen dieser Durchschnittsbreite und der Länge zu betrachten[1]). Die zweite Stelle gibt eine ähnliche Vorschrift für Körperräume: eine nach oben sich verjüngende kreisrunde Säule soll als Zylinder von gleicher Höhe betrachtet werden, für dessen Grundfläche ein Mittelkreis gilt, dessen Durchmesser die halbe Summe des obersten und untersten Säulendurchmessers ist[2]). So Patrikius, wenn die Sätze wirklich in der Einschiebung in heronische Schriften, aus der wir sie kennen, auf den richtigen Urheber zurückgeführt sind, da sie ihrem Charakter nach ebenso gut, ja fast noch besser, uralt sein könnten. Wer aber dieser Patrikius selbst war, ist zweifelhaft. Man kennt zwei Männer des Namens, einen der aus Lydien stammend 374 hingerichtet wurde, also in der Tat noch dem Ende des IV. S. angehört, einen zweiten aus Lykien, der schon in das V. S. hinüberreicht und am bekanntesten ist durch seinen Sohn Proklus, von welchem wir weiter unten zu reden haben.

Serenus hat sich einige Berühmtheit zu erwerben gewußt. Wann er lebte, ist weder aus seinen uns bekannten Schriften noch aus Erwähnungen bei anderen Schriftstellern genau zu ermitteln. Er nennt einen Kyros und einen Peithon als seine Freunde, die im übrigen gänzlich unbekannt sind. Er sagt im 16. Satze seines Zylinderschnittes, er habe Erklärungen zu den Kegelschnitten des Apollonius verfaßt, was aber auch nicht weiterhilft, als daß Serenus später als zu Anfang des II. vorchristlichen Jahrhunderts schrieb. Er selbst wird in der Vorrede zu den euklidischen Daten von Marinus, dem Herausgeber jenes Werkes, genannt[3]), und dieser Marinus war Nachfolger des Proklus am Ende des V. oder Anfang des VI. nachchristlichen Jahrhunderts. Das sind so weit voneinander abliegende Grenzen, daß ihnen nichts zu entnehmen ist. Wir kommen dagegen weiter durch die Kenntnis der Heimat des Serenus. In der ältesten Handschrift seiner Werke, einem Vatikankodex des XII. bis XIII. Jahrhunderts, heißt er *ἀντινσέως*, welches man lange Zeit durch *von Antissa* übersetzte, so sehr dem Worte damit Gewalt angetan war. Statt dessen wurde die sehr einfache Verbesserung *ἀντινοέως* vorgeschlagen[4]) und sofort allgemein angenommen. *Antinoeia*, welches danach die Heimat des Serenus wäre, ist im Jahre 122 durch Kaiser Hadrian, der von 117—138 regierte, gegründet, und Serenus muß also frühestens im II. nachchristlichen Jahrhunderte gelebt haben. Sprach-

---

[1]) Heron (ed. Hultsch) pag. 136. Vgl. ebenda pag. 207, lin. 16—20. [2]) Ebenda pag. 159. [3]) Euklid (ed. Gregory) pag. 457. [4]) Heiberg in der *Bibliotheca mathematica* 1894 pag. 97.

liche Gründe führten, nachdem Serenus jetzt zwischen das II. und das VI. Jahrhundert eingeschlossen war, zu der Vermutung, er werde etwa in der Mitte der überhaupt möglichen Zeit im IV. Jahrhundert, nach Pappus (der Serenus nirgend erwähnt) und vor dem bald von uns zu nennenden Theon von Alexandria gelebt haben[1]).

Die beiden Abhandlungen des Serenus[2]) haben zum Inhalte den Schnitt des Zylinders und den Schnitt des Kegels. Der Schnitt des Kegels ist die unbedeutendere von beiden Schriften. Serenus beschäftigt sich darin mit solchen Schnittebenen, welche durch die Spitze des Kegels gelegt ein Dreieck auf dem Kegelmantel erzeugen, weil keiner seiner Vorgänger sich um diese Dreiecke gekümmert habe. Von einigem Interesse ist höchstens, daß dabei die Frage nach dem größtmöglichen Inhalte der so entstehenden Dreiecke auftaucht. Der Schnitt des Zylinders lehrt zunächst, daß die den Zylinder schneidende Ebene auf dessen Mantel eine Ellipse hervorbringe und löst alsdann Aufgaben, wie die in Satz 22. und 23. Zu einem gegebenen Kegel (Zylinder) einen Zylinder (Kegel) zu finden und beide durch eine und dieselbe Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ähnliche Ellipsen bilde. Von Sätzen, die bewiesen werden, heben wir hervor: Satz 31. Gerade Linien, welche aus demselben Punkte ausgehend eine zylindrische Oberfläche berühren, haben sämtlich die Berührungspunkte in den Seiten eines einzigen Parallelogramms, und Satz 34. Alle Geraden, welche aus demselben Punkte als Berührungslinien an einen Kegelmantel gezogen werden, haben ihre Berührungspunkte in den Seiten eines einzigen Dreiecks. Endlich sei bemerkt, daß im Satz 33. ganz gelegentlich die Grundlage zu dem mitgeteilt ist, was

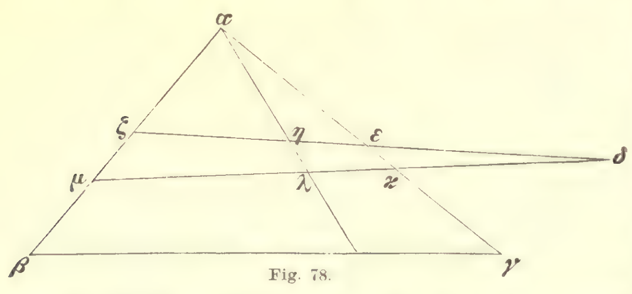


Fig. 78.

mit modernem Namen die Lehre von den Harmonikalen genannt zu werden pflegt. Es wird nämlich behauptet, daß wenn (Fig. 78)

[1]) Heiberg in seiner Ausgabe des Serenus von Antinoeia mit lateinischer Übersetzung. Leipzig 1896. Vorrede pag. XVII in Übereinstimmung mit Chasles, *Aperçu hist.* 47 (deutsch 44) und Tannery im *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 1883. [2]) Der griechische Text ist als Anhang zur Halleyschen Ausgabe der Kegelschnitte des Apollonius gedruckt. Deutsche Übersetzungen hat E. Nizze als Programmbeilagen des Stralsunder Gymnasiums veröffentlicht: Ueber den Schnitt des Cylinders 1860. Ueber den Schnitt des Kegels 1861. Die neueste Ausgabe von Heiberg 1896.

von δ aus die $\delta\varepsilon\eta\zeta$ zum Schnitte eines Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gezeichnet und η so auf ihr gewählt wird, daß $\delta\varepsilon : \delta\zeta = \varepsilon\eta : \eta\zeta$ und die Gerade $\alpha\eta$ gezogen wird, alsdann jede neue von δ ausgehende Transversale $\delta\varkappa\lambda\mu$ das entsprechende Verhältnis $\delta\varkappa : \delta\mu = \varkappa\lambda : \lambda\mu$ bieten werde. Eigentum des Serenus ist der Satz keinenfalls, da er, wie wir (S. 414) sahen, schon zur Zeit, als Menelaus das III. Buch seiner Sphärik niederschrieb, bekannt gewesen sein muß.

Außer diesen beiden Abhandlungen hat Serenus noch Hilfssätze verfaßt, aus welchen ein geometrischer Satz über Winkel im Kreise mit exzentrischem Scheitelpunkte aber auf gleichen Bögen aufstehend in einer Handschrift des astronomischen Teiles des Werkes Theons von Smyrna aufgefunden worden ist[1]). Könnte man annehmen, Theon habe selbst den Serenus benutzt, so würde durch die bekannte Lebenszeit dieses Schriftstellers eine untere Zeitgrenze mit dem Jahre 130 etwa angegeben sein; doch wäre jene Annahme durchaus willkürlich. Man hat vielmehr, wie bemerkt worden ist, wohl nur an eine Vereinigung ähnlicher Dinge in einer Handschrift zu denken, ohne daß festgestellt wäre, wer es gewesen sein mag, der von jenem Satze aus den Lemmen des Serenus eine astronomische Anwendung machte.

Der dritte Schriftsteller, an welchen wir vorher dachten, ist Theon von Alexandria[2]). Er lebte, wie wir schon bei Gelegenheit der Zeitbestimmung des Pappus (S. 441) angeben mußten, während der Regierung Theodosius des Großen und zwar in Alexandria, wo er, nach der Angabe des Suidas, am Museum lehrte. Wir wissen durch ihn selbst, daß er in Alexandria im Jahre 365 eine Sonnenfinsternis beobachtete. Seine Bemerkungen zu den chronologischen Handtafeln des Ptolemäus erstrecken sich bis auf das Jahr 372. Das Todesjahr seiner nachher zu erwähnenden Tochter ist 415. Das sind lauter zusammenstimmende Jahreszahlen, welche an seiner Lebenszeit einen Zweifel nicht aufkommen lassen.

Den Mathematiker interessieren vorzugsweise zwei Reihen von Arbeiten, welchen Theon sich unterzog. Zuerst gab er die Elemente des Euklid heraus, wie wir bei Besprechung dieses Werkes selbst (S. 277) anführten und vermehrte — bereicherte dürfen wir kaum sagen — dieselben durch Zusätze von geringfügigem Werte. Später verfaßte er einen Kommentar zu dem ptolemäischen Almageste, in welchem von der Euklidausgabe die Rede ist[3]), wo-

[1]) *Theonis Smyrnaei liber de astronomia* ed. Th. H. Martin. Paris 1849, pag. 340 und Martins Bemerkungen pag. 79—81. [2]) Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harleß) IX, 176, 178—179. [3]) *Commentaire de Théon sur la composition mathématique de Ptolémée* (ed. Halma, Paris 1821) I, 201.

durch die Reihenfolge dieser Arbeiten sich feststellt. Der Kommentar erstreckte sich, wenigstens soweit er im Drucke und auch handschriftlich bekannt ist, nicht auf sämtliche 13 Bücher des Almagestes. Der Kommentar zu einem Teile des V., zum XI. und XII. Buche fehlt. Als Anfang der Erläuterungen zum V. Buche enthalten die Handschriften ein Bruchstück des Pappusschen Kommentars; an diese knüpft sich als Fortsetzung bezeichnet eine Ergänzung Theons[1]), daran wieder ein Stück aus dem Kommentare des Pappus[2]). Man wird darin eine Bestätigung unserer früher (S. 442) ausgesprochenen Meinung, Theon habe Pappus fleißig benutzt, erblicken. Jedenfalls aber muß als Ergebnis dieser Art der Vereinigung der beiden Kommentare angesehen werden, daß Theon später als Pappus lebte, wie groß oder wie klein auch der Zwischenraum zwischen beiden gewesen sein mag.

Theons Kommentar zum I. Buche des Almagestes ist für uns weitaus am wichtigsten. Nicht als ob Dinge darin enthalten wären, geeignet unser ziemlich geringschätziges Urteil über den Verfasser zu entkräften, aber weil er als Quelle mancher geschichtlicher Angaben dient, die wir durch andere zu ersetzen nicht imstande sind. Dort steht jenes Zitat des Diophantus, welches die untere Grenze seiner Lebenszeit bildet, dort der Beweis dafür, daß Theon eine *ἔκδοσις*, eine Herausgabe, des Euklid vollzogen hatte, dort eine Darstellung des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen.

Über das sexagesimale Rechnen gibt es eine besondere Abhandlung, welche durch die Handschriften, in welchen sie sich erhalten hat, dem Pappus oder gar dem Diophantus zugeschrieben wird[3]). Wir beabsichtigen keineswegs die Möglichkeit anzuzweifeln, daß namentlich Pappus bei der Kommentierung des I. Buches des Almagestes, wo er über Quadratwurzelausziehungen sich verbreitete, vom Rechnen mit sechzigteiligen Brüchen überhaupt geschrieben haben mag. Nur ist alsdann, falls die jetzt bekannte Abhandlung ein Bruchstück jenes Kommentars bildete, der interessantere Teil immer noch verloren, und wir glaubten der Wertschätzung, die man Pappus und Diophantus schuldet, nur Rechnung zu tragen, wenn wir bei Erörterung ihrer Werke jene elementaren Betrachtungen unberück-

---

[1]) *Τοῦ Θέωνος εἰς τὸ λεῖπον τοῦ Πάππου.* [2]) Fabricius, *Bibliotheca Graeca* (ed. Harleß) IX, 176. [3]) Vgl. Hultsch in der *Praefatio,* welche er dem III. Bande seiner Pappusausgabe vorangeschickt hat, pag. XII und XVI. Dann die durch C. Henry besorgte Ausgabe des *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum.* Halle 1879, und die kritischen Bemerkungen dazu von Hultsch in der Zeitschr. Math. Phys. XXIV. Histor.-literar. Abtlg. S. 199—203.

sichtigt ließen, von wem dieselben auch herrühren mögen — ein Löwe ist aus dieser Klaue keinesfalls zu erkennen, und deshalb tragen wir auch Scheu das Bruchstück zu den Moriastica des Diophantus (S. 467) in Beziehung zu setzen.

Theons Darstellung ist umfangreicher und vollständiger[1]). Die Multiplikation beginnt mit dem größten Teile des Multiplikators, genau so wie wir (S. 319) nach Eutokius das Verfahren des Archimed bei nicht sexagesimal fortschreitenden Zahlen geschildert haben. Um z. B. $37^0\ 4^I\ 55^{II}$ mit sich selbst zu vervielfachen wird zuerst das Produkt von 37^0 in die vorgelegte Zahl als $1369^0\ 148^I\ 2035^{II}$ angeschrieben, wobei allerdings das Zeichen für Grad ebenso wie für die kleineren Teile nur in dem Sinne von Einheiten und Bruchteilen der Einheit aufzufassen nötig ist, und nicht etwa an eine von Theon nicht beabsichtigte Multiplikation beziehungsweise später an eine Division oder Radizierung benannter Zahlen gedacht werden darf. Dann folgt das durch 4^I hervorgebrachte Produkt $148^I\ 16^{II}\ 220^{III}$; endlich das Produkt mittels der 55^{II} oder $2035^{II}\ 220^{III}\ 3025^{IV}$, indem die Benennung der einzelnen Teilprodukte den Gesetzen diophantischer Multiplikation allgemeiner Größen folgt. Bei dieser Gelegenheit erscheint eben das Zitat des Diophantus. Theon glaubt eine Unterstützung durch geometrische Beweisführung geben zu müssen, für seine Landsleute und Zeitgenossen eine vermutlich nicht überflüssige Zugabe, bei der wir uns jedoch nicht aufhalten wollen. Nun faßt Theon erst sämtliche Teilprodukte zusammen und vollzieht dabei durch wiederholte Teilung durch 60 die zur Übersichtlichkeit notwendigen Reduktionen: 3025^{IV} sind $50^{III}\ 25^{IV}$; nunmehr sind 490^{III} vorhanden oder $8^{II}\ 10^{III}$; ferner erscheinen 4094^{II} oder $68^I\ 14^{II}$; des weiteren 364^I oder $6^0\ 4^I$; und da endlich 1375^0 sich ergeben, so ist das ganze Produkt $1375^0\ 4^I\ 14^{II}\ 10^{III}\ 25^{IV}$, oder unter Vernachlässigung der beiden kleinsten Bruchgattungen nahezu $1375^0\ 4^I\ 14^{II}$.

Die Division läßt alle bei der Multiplikation getanen Schritte rückwärts ausführen. So vollzieht Theon die Division von $25^0\ 12^I\ 10^{II}$ in $1515^0\ 20^I\ 15^{II}$ folgendermaßen. Zunächst ist 25 in 1515 mehr als 60, weniger als 61 mal enthalten; der erste Teilquotient ist demnach 60^0. Zieht man 60 mal 25 von 1515 ab und verwandelt den Rest 15 in Minuten, mit welchen die vorhandenen 20^I vereinigt werden müssen, so hat man deren 920. Von ihnen sind 60 mal 12^I

[1]) *Commentaire de Théon* (ed. Halma) I, 110—119 und 185—186. Durch falsche Paginierung folgt auf pag. 120 nicht 121, sondern 181, der Zwischenraum zwischen beiden Stellen, an welchen von unserem Gegenstande die Rede ist, beträgt also nur etwa fünf Seiten. Vgl. eine Übersicht bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 138—147.

abzuziehen, wobei 200^{I} und, unter Berücksichtigung der vorhandenen 15^{II}, im ganzen 200^{I} 15^{II} als Rest bleiben. Davon ist wieder 60 mal 10^{II} oder 10^{I} abzuziehen, und so entsteht 190^{I} 15^{II} als Gesamtrest nach Abziehung des vollen ersten Teilproduktes. Nun sucht Theon den zweiten Teilquotienten mittels der Division von 25^{0} in 190^{I} und erhält ihn als 7^{I}. Wieder wird 7^{I} mal 25 von 190^{I} 15^{II} abgezogen; von dem Reste 15^{I} 15^{II} oder 915^{II} werden 7^{I} mal 12^{I}, von dem Reste 831^{II} endlich 7^{I} mal 10^{II} oder 1^{II} 10^{III} abgezogen, so daß als Gesamtrest 829^{II} 50^{III} übrig bleibt. Der letzte Teilquotient durch die Division von 25^{0} in 829^{II} erhalten ist ungefähr 33^{II}, und hier gibt die Subtraktion der einzelnen Stücke des Teilproduktes zuerst den Rest 4^{II} 50^{III} oder 290^{III}, wovon das etwas zu große 396^{III} abgezogen werden mußte. Es ist also 1515^{0} 20^{I} 15^{II} geteilt durch 25^{0} 12^{I} 10^{II} gleich 60^{0} 7^{I} 33^{II} nahezu, ἔγγιστα.

Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 4500 Einheiten lehrt endlich Theon nach einer Methode, welche wir wohl genugsam kennzeichnen, wenn wir sie der heute üblichen genau gleich nennen abgesehen von dem Gebrauche von Sexagesimalbrüchen statt der heute üblicheren Dezimalbrüche. Das nächste rationale Quadrat unterhalb 4500 ist 4489, dessen Wurzel 67 heißt. Zieht man (Fig. 79) 4489 von 4500 ab, so bleiben die 11 Einheiten oder 660^{I} in Gestalt eines Gnomon, welcher selbst zunächst aus zwei Rechtecken und einem Quadrate besteht, dessen Seite gesucht werden muß. Man dividiert mit dem Doppelten der 67 Einheiten oder mit 134 Einheiten in 660^{I}. Das gibt 4^{I} als Quotient. Die beiden neuen Rechtecke sind also jedes 67 mal 4^{I} oder 268^{I}, zusammen 536^{I}, und das neue Quadrat ist 4^{I} mal 4^{I} d. h. 16^{II}. Als Rest bleibt zunächst $660^{I} - 536^{I} = 124^{I} = 7440^{II}$, dann $7440^{II} - 16^{II} = 7424^{II}$, welches wieder in Gestalt eines Gnomon zu denken ist. Um die neue Zerlegung in zwei Rechtecke und ein Quadrat zu finden, nimmt man das Doppelte von 67^{0} 4^{I} d. h. 134^{0} 8^{I} und dividiert damit in 7424^{II}, wodurch man den Quotienten 55^{II} etwa erhält, dessen Quadrat alsdann außer den beiden Rechtecken noch wegzunehmen sein wird. Die erste Subtraktion gibt als Rest $7424^{II} - 134^{0}\ 8^{I} \times 55^{II} = 46^{II}$ 40^{III}, und dieses ist, sagt Theon, nahezu das Quadrat von 55^{II}. Tatsächlich würde als Rest 45^{II} 49^{III} 35^{IV} übrig bleiben, welcher als Gnomon gedacht eine noch bessere Annäherung als diejenige

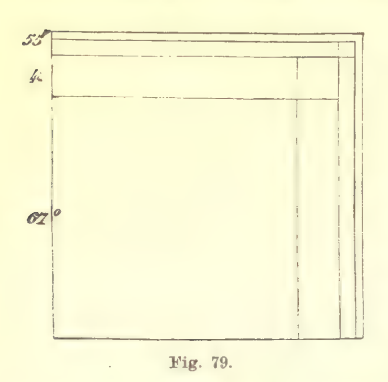


Fig. 79.

$\sqrt{4500^0} = 67^0\ 4^I\ 55^{II}$ gestatten würde, mit welcher Ptolemäus sich begnügte.

Die letztere Tatsache ist insofern von geschichtlicher Tragweite, als sie beweist, daß auch Ptolemäus von dem durch Theon gelehrten Näherungsverfahren Gebrauch machte gleichwie Heron es häufig stufenweise anwandte. Es mag immerhin sein, daß je nach dem Umstande, ob man mit Sexagesimalbrüchen rechnete oder nicht, mitunter ein Wechsel des Verfahrens eintrat, ein Wechsel, der seine leichte Begründung darin findet, daß bei Sexagesimalbrüchen sofort und ein für allemal eine Grenze — etwa die des zweiten Sechzigstels — festgesetzt werden konnte, bis zu welcher man die Annäherung treiben wollte, während in gewöhnlichen Brüchen eine solche Grenze sich weder von selbst darbot, noch auch ihre Erreichung im Augenblicke bekannt werden konnte, mithin eine andere Methode leicht als vorzuziehende sich erwies.

Theons Tochter Hypatia[1]) war, wie Suidas angibt, selbst eine Gelehrte von umfassendem Wissen. Die Angabe ebendesselben, sie sei die Gattin des Philosophen Isidorus gewesen, ist vermutlich irrtümliche Einschiebung eines späten Glossators. Hypatia war vielmehr stets unverheiratet. Richtig ist wieder die Zeitbestimmung des Suidas, sie habe ihre Blütezeit unter der Regierung des Arkadius gehabt. Ihr Tod erfolgte unter des Arkadius Nachfolger im März 415 in tragischster Weise. Die Philosophenschulen hatten sich, auch nachdem das Christentum die Religion der römischen Kaiser geworden war, der neuen Lehre keineswegs in dem Maße angeschlossen, wie die sonstige Bevölkerung. Der Schutz, den Kaiser Julianus Apostata insbesondere ihnen gewährt hatte, wirkte noch Jahrzehnte nach seinem Tode fort und ließ die Heidin Hypatia in Ansehen selbst bei einem christlichen Bischofe von Ptolemais, wie Synesius, und bei dem kaiserlichen Präfekten Orestes in Alexandria stehen, ohne daß eine besonders auffallende Erscheinung darin zu suchen wäre. Aber gerade das Ansehen, in welchem sie bei Orestes stand, wurde ihr Verderben. Der Präfekt wies hierarchische Ansprüche des Bischofs Cyrillus zurück. Hypatias Einfluß wurde als Ursache verdächtigt, und der fanatische Pöbel der Stadt zerriß die Unglückliche. War es doch derselbe Pöbel, der 392 schon in dem Zerstörungstaumel religiöser Wut ein Verbrechen begangen hatte, welches die Wissenschaft noch heute schwer empfindet. Theodosius der Große erließ in dem genannten Jahre den Befehl zur Vernichtung der heidnischen Tempel, und dieser

---

[1]) R. Hoche, Hypatia, die Tochter Theons, in der Zeitschrift: Philologus (1860) XV, 435—474.

Befehl wurde von der plünderungssüchtigen Horde so genau ausgeführt, daß auch der Serapistempel, die zweite alexandrinische Bibliothek, wie wir uns erinnern (S. 427), von Grund auf mit zerstört wurde. Von da an gibt es eine Universalbibliothek des Altertums nicht mehr. Von da an beginnt die Seltenheit alter Originalwerke zur Unmöglichkeit solche zu beschaffen auszuarten.

Wenn wir der Hypatia hier zu gedenken hatten, so liegt der Grund darin, daß ihr auch mathematische Schriften von Suidas nachgerühmt werden[1]), Werke freilich, deren Überschriften ebenso zweifelhaft sind wie ihr Inhalt. Die einen machen daraus einen Kommentar zum Diophant, eine astronomische Tafel, einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonius. Die anderen übersetzen[2]): „Sie schrieb einen Kommentar zu der astronomischen Tafel des Diophant und einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonius.“ Gesichert ist keine der beiden Auffassungen. Gibt man der zweiten den Vorzug, so ist Zweifel darüber, ob Diophant, der Verfasser einer astronomischen Tafel, und Diophant, der Algebraiker, ein und dieselbe Persönlichkeit gewesen sein mögen. Das Beispiel Hipparchs zeigt uns, daß die Möglichkeit der Verbindung beider schriftstellerischen Richtungen mindestens nicht auszuschließen ist. Der letzte Herausgeber des Diophant ist wieder der Überzeugung[3]), Hypatia habe die Arithmetik des Diophant erläutert und Teile dieser Erläuterung seien als Scholien erhalten.

Hypatia war für geraume Zeit eine der letzten, wenn nicht die letzte durch die Abfassung mathematischer Schriften bekannte Persönlichkeit in Alexandria. Früher bildete die Lokalisation an diesem Mittelpunkte mathematischer Bildung die wenn auch nicht ausnahmslose Regel. Von Archimed bis Jamblichus verband doch immer ein oder der andere Faden geistiger Zusammengehörigkeit die Schriftsteller, die nicht in Alexandria lebten, mit jenem Zentrum. Allmählich wurde umgekehrt die Lostrennung von jenem Boden, der den Erzeugnissen schriftstellerischer Tätigkeit wie den Schriftstellern als gleich gefährlich sich erwiesen hatte, zur Regel. Der Neuplatonismus setzte sich fort, aber hauptsächlich an jenem Orte, wo die Grundlegung der alten Schule stattgefunden hatte, in Athen, wo eine Universität entstand, an Einrichtungen, Sitten und Unsitten, Gebräuchen und Mißbräuchen deutschen Universitäten vergleichbar[4]).

---

[1]) *ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα.* [2]) Nesselmann, Algebra der Griechen S. 248, dessen Auseinandersetzungen Hoche in seiner Abhandlung nicht gekannt zu haben scheint. [3]) Tannery in seiner Diophantausgabe II, pag. VII—VIII und IX. [4]) Zeller III, 2, 675 flgg. und Hertzberg, Gesch. Griechenlands unt. d. Römern Bd. III. Halle 1875.

Der Keim zur neuen athenischen Schule wurde vermutlich nicht von Alexandria aus, sondern von dem syrischen Ableger der Alexandriner, von den Nachfolgern des Jamblichus gepflanzt. Mit der örtlichen Rückkehr aus dem Oriente nach Hellas streifte der Neuplatonismus einen Teil seiner Überschwenglichkeit, seiner Mystik ab. Das Studium der aristotelischen Schriften und damit verbunden dialektische Geistesübungen kamen wieder zu ihrem Recht, und neben und nach Erklärern platonischer Schriften wurden die Jünger der athenischen Schule die emsigsten Scholiasten des Aristoteles. Für uns haben indessen die ersten Schulvorstände in Athen und selbst der berühmte Syrianus kaum soviel Bedeutung, daß wir deren Namen anführen dürften.

Erst Proklus[1]), der Schüler Syrians, verlangt wieder unsere Aufmerksamkeit. Als Sohn des byzantinischen Anwaltes Patrikius von Lykien, den wir (S. 488—489) vielleicht als Urheber zweier geodätischer Näherungsvorschriften kennen gelernt haben, ist Proklus 410 geboren. Sein Tod erfolgte am 17. April 485. Marinus, sein Schüler und Nachfolger, der eine Biographie des Proklus verfaßt hat, erzählt von ihm, er habe als Knabe in der Heimat seiner Eltern, wohin er denselben bald nach seiner Geburt folgte, die Schule eines Grammatikers besucht, worauf ihn ein Rhetor Leonas mit sich nach Alexandria nahm, wo er Grammatik und Rhetorik studierte. Nach kurzer Heimkehr in seine Vaterstadt Byzanz lag er neuerdings in Alexandria philosophischen und mathematischen Studien ob, letzteren unter der Leitung eines gewissen Heron, von welchem aber abgesehen von dieser einen Notiz durchaus nichts bekannt ist. Der Unterricht der alexandrinischen Lehrer genügte bald dem strebsamen Jünglinge nicht. Sein Wissensdurst führte ihn nach Athen, wo er von Syrian an die eigentlichen Quellen menschlichen Denkens hingeleitet wurde. So ward Proklus der naturgemäße Erbe Syrians als Schulvorstand in Athen und erhielt als solcher den Beinamen des Nachfolgers, *διάδοχος*, Diadochus, unter welchem er vielfach bekannt ist. Von den Schriften des Proklus Diadochus kümmern uns weder die philosophischen Originalabhandlungen, noch die zahlreichen Kommentare zu platonischen Schriften. Auch seine Sphärik, *σφαῖρα*, ein bloßer Auszug aus dem astronomischen Werke des Geminus, ist für uns ohne jede Bedeutung. Wir haben es nur mit dem Kommentare des Proklus zu den euklidischen Elementen zu tun, welcher uns im Verlaufe unserer bisherigen Untersuchungen so vielfach als Quelle

[1]) Zeller l. c. 700 flgg. Hertzberg l. c. 516 flgg. J. G. van Pesch, *De Procli fontibus*. Leiden 1900.

dienen mußte, daß die Besprechung sich als notwendig erweisen würde, selbst wenn wir gar nichts mathematisch Neues daraus mitzuteilen hätten.

Der Kommentar des Proklus zum I. Buche der euklidischen Elemente ist mehrfach herausgegeben[1]), und schon dem Übersetzer desselben in der zweiten Hälfte des XVI. S. legte sich die Frage vor, ob Proklus nur zum I. Buche der Elemente einen Kommentar verfaßt habe, verfassen wollte? Die letztere Frage war sofort zu verneinen, da Proklus selbst am Ende des Kommentars zum I. Buche einen solchen zu den gesamten Elementen in Aussicht stellt[2]) und auch an sonstigen Stellen vorläufig ankündigt, was er in dem Kommentare zum II., zum VI. Buche auseinandersetzen werde. Ob aber dieser Plan in Erfüllung ging, ob nicht etwa Proklus vorhatte, was er nicht ausführte, darüber haben erst Entdeckungen neuer Scholien in griechischen Handschriften Aufschluß gegeben, welche mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit dem Proklus zugeschrieben werden[3]). Proklus hat also wirklich zu allen Büchern der euklidischen Elemente, wenige ausgenommen, einen Kommentar verfaßt. Darüber freilich wird immer einiger Zweifel übrig bleiben, ob auch zu den späteren Büchern ein so umfassender Kommentar des Proklus existiert haben müsse wie zu dem I., ob die geringen Bruchstücke, welche uns davon erhalten sind, nur Splitter eines großen Ganzen, ob sie etwa die Hauptsache des einst Vorhandenen darstellen. Wie man sich zu dieser Frage stellt, hängt wesentlich von der Meinung ab, welche man von dem Zwecke des Proklus sich bildet. Wer da glaubt[4]), Proklus wollte nicht Geometrie lehren, sondern die geometrische Genauigkeit für die philosophische Dialektik nutzbar machen, und nur philosophisches Inter-

---

[1]) Den ersten griechischen Abdruck besorgte Grynaeus in der Basler Euklidausgabe von 1533. Eine lateinische Übersetzung gab Barocius 1560. Auch Commandinus gab die Scholien zum I. Buche und zu den späteren lateinisch in seiner Euklidausgabe von 1572. Friedleins Textausgabe der Scholien zum I. Buche (Leipzig 1873) ist jetzt allgemein verbreitet. [2]) Proklus (ed. Friedlein) 432, 9 sqq. [3]) Die Scholien des Proklus zu späteren Büchern hat C. Wachsmuth entdeckt. Vgl. dessen Aufsatz: „Handschriftliche Notizen über den Commentar des Proklus zu den Elementen des Euklides" im Rhein. Museum für Philologie (1863). Neue Folge XVIII, 132—135. Ebenda (1864) XIX, 452 einen Aufsatz von Hultsch. Programme von Knoche, Herford 1862 und 1865 und von L. Majer, Tübingen 1875. [4]) Dieser Meinung ist Knoche in seinen beiden Programmen. Vgl. Untersuchungen über des Proklus Diadochus Commentar zu Euklids Elementen 1862, S. 14 und 21. Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen 1865, S. 36 und 45.

esse habe seinem ganzen Kommentare als Richtschnur gedient, der kommt natürlich zur Vermutung, das vornehmliche Interesse des Proklus müsse erschöpft gewesen sein, als es sich in dem erläuterten Werke um wirklich geometrische Sätze und nicht mehr um Erklärungen, um Forderungen, um Grundsätze und Grundwahrheiten handelte. Wer dagegen[1]) Proklus als Mathematiker anerkennt, dem es auf einen Versuch der Verbesserung des großen Meisters ankam, einen Versuch, zu welchem er Vorarbeiten älterer Exegeten und selbstständiger Geometer, eines Heron, eines Geminus, eines Ptolemäus, eines Pappus, eines Theon verwerten konnte, ohne darum die pietätsvolle Bewunderung dessen aus den Augen zu verlieren, den er mit dem ganzen Altertume vorzugsweise den Elementenschreiber nennt, wer dieser Meinung huldigt, kann nicht anders als auch für die auf das I. Buch folgenden Bücher einen gleich vollständigen Kommentar anzunehmen, muß den Verlust schmerzlich bedauern, mit welchem ihm zugleich die reichste Quelle für die Geschichte griechischer Mathematik verloren ging. Nicht viel anders wird die Meinung dessen sein, der in dem Werke des Proklus ein Stück des Vorlesungsheftes sieht, nach welchem derselbe in engstem Anschlusse an die von ihm aufs höchste bewunderten Elemente des Euklid seinen Schülern Mathematik vortrug[2]). Wir selbst möchten in dieser persönlichem Dafürhalten weiten Spielraum lassenden Frage nicht Partei ergreifen, wenn wir auch mit der als zweite dargelegten Meinung uns besser als mit der ersten oder der letzten befreunden können. Wir besitzen aber neben dem fortlaufenden Kommentare des Proklus zum I. Buche der Elemente nur kürzere, teilweise allerdings geschichtlich wertvolle Scholien zu einzelnen Sätzen späterer Bücher und müssen wohl oder übel uns damit begnügen.

Was von eigenen Leistungen des Proklus hervorgehoben werden kann, ist teilweise ziemlich dürftig[3]), teilweise läßt sich nicht mit Bestimmtheit ermessen, ob Proklus der Erfinder oder nur der Berichterstatter ist. Ersteres dürfte höchst wahrscheinlich für verschiedene Einwürfe gegen die euklidische aber auch gegen die ptolemäische Parallelenlehre der Fall sein[4]), so wie für die Entstehung der

---

[1]) So L. Majer, Proklus über die Petita und Axiomata bei Euklid 1875, S. 29. Heiberg, Euklidstudien S. 166 Anmerkung 1 spricht sich dahin aus, daß Proklus, wenn er den Kommentar fortgesetzt hat, die übrigen Bücher eben so ausführlich wie das erste erläutert haben muß. Über die in dem Zwischensatze als fraglich hingestellte Tatsache äußert Heiberg keinerlei bestimmte Meinung, neigt aber jedenfalls mehr der Ansicht zu, Proklus habe den Kommentar nicht fortgesetzt Vgl. Heiberg l. c. S. 166—167. [2]) G. van Pesch, *De Procli fontibus*. [3]) Knoche, Programm von 1862, S. 16 flgg. [4]) Vgl. Majers Programm.

Ellipse als geometrischer Ort eines bestimmten Punktes einer gegebenen Strecke von beständiger Länge, welche alle Lagen annimmt, bei denen die beiden Endpunkte die Schenkel eines rechten Winkels durchlaufen[1]).

Zu den Zeitgenossen des Proklus gehörte Domninos aus Larissa, ein Schriftsteller über Arithmetik, der ohne wesentlich Neues zu bringen sich guter älterer Quellenschriften bediente[2]).

Nach dem Tode des Proklus ging es auch mit der Universität Athen entschieden abwärts. Es ist nicht unsere Aufgabe diesen Satz allgemein zu begründen, aber eine bloße Nennung der Namen derer, die als Schulvorstände auf Proklus folgten, und der mathematischen Leistungen, welche von ihnen berichtet werden, genügt, die Wahrheit desselben für unsere Wissenschaft festzustellen. Da erscheint zuerst Marinus von Neapolis, einer Stadt, die man sich wohl hüten muß mit Neapel zu verwechseln. Die Heimat des Marinus war vielmehr Flavia Neapolis in Palästina, das alte Sichem. Von Marinus ist uns als Mathematisches nur eine Vorrede zu den euklidischen Daten bekannt. Noch bei Lebzeiten des Marinus und auf dessen eigenen Wunsch ließ Isidorus von Alexandria sich bestimmen an seine Stelle zu treten. Isidorus erfreute sich allerdings verhältnismäßig großer Berühmtheit. Ihm ward ein Beiname zuteil, welcher überhaupt nur zweimal, und, soviel bekannt ist, nur von zwei Schriftstellern einem griechischen Philosophen beigelegt worden ist[3]), der Beiname des Großen. Der Verfasser des Sophisten, sei es, daß dieser Dialog von Platon oder von einem anderen herrühre, spricht von Parmenides dem Großen, und Damascius, von dem wir gleich noch zu reden haben, gleichfalls von Parmenides dem Großen, aber auch von Isidorus dem Großen. Den Grund oder Ungrund dieser Auszeichnung zu prüfen haben wir nicht Veranlassung. Mathematische Schriften des Isidorus kennen wir nicht, wenn auch dem Geiste der neuplatonischen Schule nach nicht zu zweifeln ist, daß er gleich allen anderen Schulhäuptern solche von höherem oder vermutlich von geringerem Werte verfaßt haben wird.

Neben der Athener Schule bestand auch eine solche in Alexandria. Zu ihren Lehrern gehörte Ammonius, Sohn des Hermeias und der Andesia, und unter seinen Schülern befanden sich so hervorragende Gelehrte wie Simplicius, wie Johannes Philoponus. Ammonius (natürlich nicht mit Ammonius Sakkus zu verwechseln) übte

---

[1]) Proklus (ed. Friedlein) pag. 106 lin. 12—15. [2]) Die Schrift des Domninos hat J. F. Boissonade herausgegeben. Anecdota Graeca IV, 413 bis 429. [3]) Th. H. Martin, *Sur l'époque et l'auteur du prétendu XV. livre des éléments d'Euclide* im *Bullettino Boncompagni* 1874, pag. 263—266.

eine reiche schriftstellerische Tätigkeit aus. Er verfaßte z. B. einen Kommentar[1]) zu der Einleitung des Porphyrius zu Aristoteles (S. 457). In diesem ist der Satz ausgesprochen, die Zahl der Kombinationen zu je zweien aus beliebig vielen Elementen werde gefunden, wenn man die Hälfte des Produktes der Elementenzahl in ihre um 1 verminderte Anzahl nehme.

Der Schüler und, wie wir schon sahen, der jedenfalls dankbar begeisterte Schüler des Isidorus war Damascius von Damaskus, der etwa um das Jahr 510 die Schulvorstandschaft in Athen übernahm, nachdem Isidorus, mißmutig und verstimmt darüber seine Kräfte einer verlorenen Sache zu widmen, sich nach Alexandria zurückgezogen hatte. Damascius soll, nach einer scharfsinnigen Vermutung, der Verfasser des sogenannten XV. Buches der euklidischen Elemente sein, welches man sonst auch als II. Buch des Hypsikles über die regelmäßigen Körper zu bezeichnen pflegte. Wir haben (S. 358) dieses Buch mit dem I. Buche des Hypsikles verglichen und sind zu dem Ergebnisse gekommen, das II. Buch sei viel unbedeutender als das I., mit welchem es nicht zusammenhänge. Im 7. Satze dieses Buches spricht nun der Verfasser von seinem großen Lehrer Isidorus[2]) und dieser Ausdruck gab eben die Veranlassung, die ihrer Sprache nach unbedingt ziemlich spät verfaßte Abhandlung dem Damascius zuzuschreiben. Ein scharfer Beweis dürfte allerdings in dem einen Worte nicht zu finden sein, und gäbe es, wie es den Anschein hat, Scholien zu diesem sogenannten XV. Buche des Euklid, die den gleichen Ursprung mit den sonstigen Scholien zu Euklid verraten, die also auch von Proklus herrühren müßten, so wäre umgekehrt der Gegenbeweis gegen das Verfasserrecht des Damascius geliefert, und die Abhandlung müßte von dem Schüler irgend eines anderen Isidorus herrühren, welcher zwischen dem IV. und VI. S., weder viel früher noch keinenfalls später, gelebt haben möchte. Der Name Isidorus ist ohnedies nichts weniger als selten, und aus dem VI. S. selbst ist ein Baumeister Isidorus von Milet berühmt, der in Gemeinschaft mit Anthemius von Tralles im Auftrage des Kaisers Justinian den Prachtbau der Sophienkirche in Konstantinopel herstellte. Isidor von Milet wird von dem Verfasser[3]) der neuesten Untersuchungen über das sogenannte XV. Buch des Euklid für den im 7. Satze desselben genannten Lehrer gehalten. Das Buch selbst will er mit schwerwiegenden, aus der Verschiedenheit der Sprache

---

[1]) Diesen Kommentar hat A. Busse herausgegeben. Comment. in Aristot. Gr. IV, 1. Berlin 1851 und IV, 3. Berlin 1891. [2]) Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος μέγας διδάσκαλος. [3]) G. Kluge, *De Euclidis elementorum libris qui feruntur XIV et XV.* Leipzig 1891.

und des Inhalts hergenommenen Gründen in drei Abteilungen (Satz 1—5, Satz 6, Satz 7) von ebenso vielen Verfassern gespaltet wissen.

Von Anthemius von Tralles ist ein Bruchstück erhalten[1]), welches sich mit der Herstellung von Brennspiegeln beschäftigt, sowohl mit solchen, die aus einem Systeme ebener Spiegel zusammengesetzt sind, als mit parabolisch gekrümmten. Ein weiteres Fragment dieser Schrift des Anthemius dürfte 1881 entdeckt worden sein[2]). Ihm entstammt die Angabe (S. 344), daß Apollonius bereits über Brennspiegel geschrieben habe.

Schüler des Isidorus von Milet war Eutokius von Askalon, der mithin etwa in der zweiten Hälfte des VI. S. die Kommentare zu verschiedenen Schriften des Archimed und zu den Kegelschnitten des Apollonius verfaßte, eine Fundgrube für den Geschichtsforscher, aus der wir gleich unseren Vorgängern zahlreiche Aufschlüsse gewonnen haben, aber mathematisch unbedeutend. Wir haben insbesondere (S. 318) von einer Stelle über die Methoden der Quadratwurzelausziehung bei den ältesten Mathematikern Gebrauch gemacht. Ihr hätten wir auch den Satz entnehmen können, daß das Quadrat einer ganzen Zahl selbst ganzzahlig, das Quadrat eines Bruches selbst ein Bruch sei, woraus die Irrationalität der Quadratwurzel aus jeder ganzen Zahl folgt, die nicht Quadratzahl ist[3]).

Wir kehren zu Damascius von Damaskus zurück. In ihm war[4]) „noch einmal ein Mann des schroffsten antiken Heidentums“ an die Spitze der Schule getreten. Die Rückwirkung blieb nicht aus. Gesinnungsgenossen eilten noch einmal herbei, unter ihnen Simplicius, der Erklärer aristotelischer Schriften sowie der euklidischen Elemente (S. 409), der neben Damascius lehrte und ein keineswegs gering zu schätzender Mathematiker war, wie insbesondere aus seinem mit wertvollen eigenen Bemerkungen durchsetzten Berichte über frühe Quadraturversuche (S. 202) hervorgeht. Aber auch die Feindschaft des gekrönten Theologen, der als Kaiser Justinian 527 den Thron be-

[1]) Abgedruckt in den von Westermann herausgegebenen *Παραδοξόγραφοι (Scriptores rerum mirabilium Graeci)*. Braunschweig 1839, pag. 149—158. Ein älterer Abdruck mit Erläuterungen und französischer Übersetzung von Dupuy in *Histoire de l'Académie des Inscriptions et des Belles-lettres* T. 42 pag. 392 bis 451 der *Mémoires* und pag. 72—75 der *Histoire*. Paris 1786. [2]) Chr. Belger in der Zeitschrift Hermes Bd. XVI, S. 261—284. M. Cantor und C. Wachsmuth ebenda S. 637—642. Heiberg in der Zeitschr. Math. Phys. XXVIII. Histor.-literar. Abtlg. S. 121—129. [3]) Archimed (ed. Heiberg) III, 268 lin. 22—25. Vgl. Hultsch in den Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vom 28. Juni 1893. S. 370 Note 1. [4]) Hertzberg, Die Geschichte Griechenlands unter der Herrschaft der Römer III, 536—545 über die letzte Zeit der Universität Athen.

stiegen hatte, war mit den Lehrern der Schule erworben. Schärfere und schärfere Verordnungen gegen die Bekenner jeder Gattung von Irrlehren folgten einander. Im Jahre 529 erging endlich ein allgemeines Verbot dagegen, daß in Athen noch irgend jemand Philosophie lehrte. Noch einige Jahre fristeten die letzten Lehrer der geschlossenen Hochschule auf dem Boden von Hellas ein kümmerliches Dasein, dann vollzogen sie eine freiwillige Selbstverbannung nach dem Hofe des Perserkönigs Chosrau Anôscharwân.

Der Ruhm des „gerechten" Sassaniden hatte freilich die Wahrheit übertroffen. Damascius und seine Freunde fanden eine weit geringere Bildung der Hofkreise, grobere Unsitte des Volkes als sie vermutet hatten, und als Chosrau 533 mit Justinian einen Frieden abschloß, der vorangegangenem dreißigjährigem Kriege ein Ziel setzte, und in den Vertrag die ungehinderte Rückkehr der athenischen Gelehrten mit aufnahm, war niemand froher als diese die Heimat wieder zu sehen.

Die athenische Schule aber war und blieb dahin. Da und dort tauchen noch Schüler derselben auf, welche selbst neue Schüler bilden, Philosophen und Mathematiker, in letzterer Beziehung von herzlich geringer Bedeutung. Dahin gehört vielleicht der von Eutokius erwähnte Heronas, welcher einen Kommentar zum Nikomachus geschrieben haben soll (S. 368); dahin mit Kommentaren zu eben demselben Schriftsteller die beiden alexandrinischen Gelehrten Asklepius von Tralles und dessen als Grammatiker vorzugsweise berühmter Schüler Johannes Philoponus, der, wie wir wissen (S. 500), neben Simplicius auch zu den Füßen des Ammonius von Alexandria gesessen hatte. Der Kommentar des ersteren ist nur handschriftlich, der des zweiten auch im Drucke vorhanden[1]), enthält aber kaum irgend bemerkenswerte Stellen.

Johannes Philoponus ist vielfach durch die von Abulpharagius berichtete Geschichte bekannt, er sei es gewesen, der 640 bei der Einnahme Alexandrias durch die Araber für den Bestand der dortigen Bibliothek sich verwandt habe. ʿOmar aber habe deren Vernichtung befohlen, denn „entweder enthalten die Bücher das, was im Koran steht, dann brauchen wir sie nicht zu lesen, oder sie enthalten das Gegenteil dessen, was im Koran steht, dann dürfen wir sie nicht lesen", und nun sei während sechs Monaten die Feuerung der Bäder Alexandrias mit den Bücherrollen der Bibliothek vollzogen worden. Die zweimalige Zerstörung der Bibliotheken im Brucheion und im

[1]) *Joannes Philoponus* in *Nicomachi introductionem arithm.* (ed. R. Hoche) Heft 1. Leipzig 1864. Heft 2. Berlin 1867.

Serapistempel hat aber gewiß nicht eine dritte großartige Bibliothek in Alexandria entstehen lassen, am wenigsten eine so umfangreiche, wie Abulpharagius in der von ihm behaupteten Verwendung der Bücher bezeugt, und so wird der ganze Bericht dieses auch unter dem Namen Barhebräus bekannten den Arabern keineswegs günstig gesinnten syrischen Christen des XIII. S. einigermaßen verdächtig, wenn auch andererseits nicht verkannt werden soll, daß Antwort und Handlungsweise mit dem Charakter des zweiten Nachfolgers Mohammeds wohl verträglich sind, der in der Tat nach Unterwerfung der Hauptstadt der Sassaniden die dort vorhandenen Bücher in den Tigris werfen ließ und auch sonst sich bildungsfeindlich erwies[1]. Die Erwähnung des Johann Philoponus gleichzeitig mit ʿOmar ist aber jedenfalls irrig, indem jener im Jahre 517 einen Kommentar zur Physik des Aristoteles verfaßte, mithin keinenfalls 640 noch am Leben gewesen sein kann.

Hier ist wohl die passendste Stelle, von dem Rechenbuche von Achmîm (S. 59) zu reden, einem in Achmîm, in einem koptischen Grabe, aufgefundenen griechischen Papyrus, welcher nach der Meinung des Herausgebers[2] innerhalb der Zeit zwischen dem VI. und IX. Jahrhunderte von einem Christen geschrieben wurde. Die Angabe läßt möglicherweise die Ergänzung zu, der Schreiber beziehungsweise Verfasser sei ein griechisch schreibender Römer gewesen. Jedenfalls war er in altägyptischer Rechenkunst erfahren und zerlegte Brüche in Summen von Stammbrüchen, wie Ahmes es dritthalbtausend Jahre früher getan hatte. Der wesentliche und nicht hoch genug zu schätzende Unterschied besteht darin, daß der Verfasser des Rechenbuches zu Achmîm die Vorschriften angibt, nach welchen jene Zerlegungen vorgenommen wurden. Darunter ist die Methode der durch Summenteile multiplizierten Faktoren des Nenners besonders bemerkenswert. Als Formel geschrieben heißt sie $\frac{z}{p \cdot q} = \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{z}} + \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{z}}$ und geht bei $z = 2$ in die Formel des Ahmes $\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}}$ über (S. 67). Bei der oft auftretenden Möglichkeit verschiedenartiger Zerlegung ließ man sich, wie der Herausgeber des Papyrus erkannt hat, von dem Gesichts-

[1] Schöll-Pinder, Griechische Literaturgeschichte III, 8. [2] J. Baillet in den *Mémoires publiés par les Membres de la mission archéologique française au Caire* T. IX, Fascicule 1, pag. 1—88 und 8 Tafeln. Paris 1892. Vgl. auch Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII. Histor.-literar. Abtlg. S. 81—87 und Tannery in der *Revue des Études Grecques*.

punkte leiten, Stammbrüche mit solchen Nennern zu wählen, die nicht durch gar zu große Unterschiede voneinander abwichen. Von den verschiedenen möglichen Zerlegungen von $\frac{239}{6460}$ zog man z. B. $\frac{239}{6460} = \frac{1}{85} + \frac{1}{95} + \frac{1}{68}$ allen anderen vor, weil 68, 85, 95 ziemlich nahe beieinander liegen. Die eigentlichen Rechenaufgaben, bei deren Auflösung die Stammbrüche in Anwendung treten, gehören meistens der Regeldetri an, welche uns hier erstmalig bei einem in griechischer Sprache schreibenden Verfasser begegnet. Bruchteile sind häufig auf den Nenner 6000 zurückgeführt, was unzweifelhaft von der Münzeinteilung herrührt, welche ein Goldstück (*νόμισμα*) 6000 Kupfermünzen (*λεπτά*) gleichsetzte[1]). Dieselbe Zurückführung auf Sechstausendstel hat auch bei einem spätestens dem X. Jahrhunderte angehörenden byzantinischen Scholiasten nachgewiesen werden können und neben ihr eine gleichfalls auf Münzeinteilung sich gründende Benutzung von Brüchen mit dem Nenner 288; der Goldsolidus zerfiel nämlich in 288 Billonmünzen mit dem Namev *φόλλις*[2]).

Nach Konstantinopel, wie seit 330 das alte Byzanz hieß, noch bevor es die Hauptstadt des besonderen Reiches wurde, welches man nach dem älteren Namen des Kaisersitzes das byzantinische zu nennen pflegt, hatte Justinian ganz besonders Rechtsgelehrte, der Zahl wie der Bedeutung nach überwiegend, berufen, aus deren Vereinigung eine Rechtsschule als Mittelpunkt einer dort ansässigen Gelehrsamkeit entstand. Auch Mathematiker werden uns hier begegnen, welche aber nur den Eindruck zu verstärken geeignet sind, den wir schon erhalten haben, daß es in immer rascheren Sprüngen bergab ging mit der einstmals so hoch emporgedrungenen griechischen Wissenschaft, daß dann später für die Mathematik wie für benachbarte Kenntnisreihen eine Pause im Niedergange wieder eintrat, daß aber auch für jene späte Zeit — es handelt sich um das XIV. S. — den Byzantinern nicht mehr nachgerühmt werden kann, als ein neuerer Verteidiger ihrer Bildung für sie in Anspruch nimmt[3]), nämlich eine erhaltende Tätigkeit ausgeübt zu haben. Man möchte, insbesondere für die Zeit vom IX. bis zum XI. S., meinen, es seien die geistig bedeutenderen Leute gewesen, die in der Fremde ihre Kenntnis der griechischen Sprache und anderer Idiome dazu benutzten, Übersetzungen der großen griechischen Mathematiker anzufertigen, die man zu Hause nicht mehr studierte, jedenfalls in meist unfruchtbarer Weise studierte.

---

[1]) Hultsch, Metrologie S. 338 (Berlin 1882). [2]) Ebenda S. 345. [3]) Demetrius Bikélas, Die Griechen des Mittelalters und ihr Einfluss auf die europäische Cultur (deutsch von W. Wagner), Gütersloh 1878.

Wir verweilen einen Augenblick bei einer geodätischen Abhandlung, welche, seit sie 1572 in lateinischer Übersetzung des Barocius bekannt wurde, für das Werk eines Heron des Jüngeren galt, den man wohl in das VII. auch in das VIII. S. zu setzen liebte. Gegenwärtig ist der griechische Text nebst einer französischen Übersetzung leicht zugänglich[1]), und über Ort und Zeit der Entstehung ist kaum ein Zweifel geblieben[2]). Die Örtlichkeit, auf welche die in der Abhandlung vorgenommenen Messungen sich beziehen, ist als die Rennbahn von Konstantinopel erkannt worden, jene berühmte Rennbahn, welche so oftmals zu großen politischen Versammlungen diente, von wo aus meuterische Volkshaufen sich in die Straßen der Hauptstadt ergossen, Umwälzungen einleitend und vollendend. Vorkommende Beobachtungen von Sterndistanzen haben ferner zur Zeitbestimmung führen können und haben ergeben, daß jene Geodäsie in Konstantinopel ziemlich genau im Jahre 938 geschrieben worden sein muß. Wie aber der Verfasser hieß, ob Heron, wie man sonst zu sagen pflegte, ob anders, darüber ist nicht das Geringste bekannt, und vielleicht befreundet man sich am ersten damit, ihn mit uns als den ungenannten Feldmesser von Byzanz zu bezeichnen. Wir haben seiner Abhandlung (S. 164) ganz im Vorübergehen gedenken dürfen, als in welcher ein sehr spätes Zeugnis für den Beweis der Winkelsumme des Dreiecks von der Winkelsumme des Vierecks aus vorlag. Wir möchten jetzt an eben diesen Beweis in dem Sinne erinnern, als er für das Musterwerk des ungenannten Verfassers zur Vermutung führt, dasselbe habe die Betrachtung des Vierecks überhaupt der des Dreiecks vorangehen lassen. Welches Musterwerk aber ihm diente, ist auf den ersten Anblick klar: kein anderes als das feldmesserische Werk des Heron von Alexandria, der übrigens selbst genannt ist[3]), und dessen Abhandlung über die Dioptra insbesondere man in der Nachbildung nicht verkennen kann. Damit ist zugleich gesagt, daß die Schrift des Ungenannten nicht schlecht ist. Wer so wenig wie er von einem trefflichen Muster sich entfernte, konnte Unbrauchbares nicht liefern.

Das gelang viel besser einem Michael Psellus. Dessen letzte Schrift ist von 1092 datiert, er lebte also bis zum Ende des XI. S. Er hatte den Beinamen Erster der Philosophen, ein Beiname, der ihn nicht zu schmücken vermag, sondern nur den Zeitgenossen zur

[1]) *Géodésie de Héron de Byzance* ed. Vincent. *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale.* Paris 1858. T. XIX, 2. partie. [2]) Die abschließenden Untersuchungen von Th. H. Martin in seiner häufig angeführten Abhandlung: *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie.* [3]) *Géodésie de Héron de Byzance* (ed. Vincent) pag. 368.

Unehre gereicht. Eine auf des Psellus Namen im XVI. S. gedruckte Schrift über die vier mathematischen Disziplinen rührt keinenfalls im ganzen von ihm her, da die Astronomie sich selbst vom Jahre 1008 datiert, in welchem Psellus, wenn geboren, jedenfalls im zartesten Kindesalter stand[1]). Ob die auch einzeln herausgegebene Arithmetik[2]) wirklich von Psellus herstammt, bedürfte noch besonderer Untersuchung, aber man kann nicht behaupten, daß diese Mühe sich lohnte. Die Einheit ist keine Zahl, sondern Wurzel und Quelle der Zahlen. Einmal eine Zahl ist von der Zahl nicht verschieden, wohl aber zweimal und dreimal die Zahl. Zwei mal zwei ist mit zwei und zwei gleichwertig, was bei anderen Zahlen nicht vorkommt. Die Zahlen sind bald gerad, bald ungerad, bald zusammengesetzt, bald einfach. Die Primzahlen können mittels einer Siebmethode erkannt werden. Es gibt vollkommene, mangelhafte und überschießende Zahlen. Zwischen den Zahlen gibt es Verhältnisse. Zehn Analogien sind zu unterscheiden. Es gibt vieleckige Zahlen und körperliche Zahlen. Das ist die ganze arithmetische Weisheit des Psellus oder wer der Verfasser gewesen sein mag. Er wird sie aus irgend einem Neupythagoräer oder Neuplatoniker geschöpft haben. Vermehrt hat er sie keinesfalls, auch nicht um den Schatten eines eigenen Gedankens.

In der geometrischen Abteilung, wenn diese echt sein sollte, sagt uns Psellus[3]), es gebe unterschiedene Meinungen, wie des Kreises Inhalt zu finden sei. Am meisten Beifall habe die Gleichsetzung des Kreises mit dem geometrischen Mittel zwischen dem eingeschriebenen und dem umschriebenen Quadrate, d. h. zwischen $2r^2$ und $4r^2$, gefunden. Hier ist also $\pi = \sqrt{8} = 2{,}8284271\ldots$ gesetzt, und der Beifall des Zustimmenden kennzeichnet seine Unwissenheit. Hätte er wenigstens von dem arithmetischen Mittel jener beiden Quadrate gesprochen, so wäre darin eine Erinnerung an das uralte $\pi = 3$ enthalten!

Von großer geschichtlicher Bedeutung, welche allerdings erst in unserem II. Bande im 57. Kapitel hervortreten wird, ist ein Bruchstück des Psellus[4]), worin den Namen, deren sich Diophant (S. 470) für die aufeinander folgenden Potenzen der Gleichungsunbekannten bediente, andere gegenüber gestellt sind. In dieser zweiten Reihe von Ausdrücken heißt die 5. und die 7. Potenz der unbekannten Größe *ἄλογος πρῶτος* und *ἄλογος δεύτερος*, irrational weil, wie aus-

[1]) Tannery in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 41. [2]) *Ψέλλου τῶν περὶ ἀριθμητικῆς σύνοψις.* Paris 1538, 4⁰, lag uns vor. [3]) Kästner, Geschichte der Mathematik I, 281–282. [4]) P. Tannery, *Psellus sur Diophante* in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII. Histor.-literar. Abtlg. S. 41—45.

drücklich hinzugesetzt ist, eine solche Potenz weder Quadrat noch Kubus ist.

Es trat eine geistige Versumpfung ein, die als natürliche Begleiterin der steten Palastrevolutionen zu betrachten ist, von welchen die Geschichte des byzantinischen Reiches wimmelt. Auch die Kreuzzüge, um 1100 beginnend, brachten diesen inneren Unruhen keinen Stillstand, brachten ebensowenig neue Bildungselemente, und als 1204 die Unordnung aufs höchste gestiegen war, rückte das lateinische Kreuzheer, Franzosen und Venetianer, vor Konstantinopel, eroberte am 12. April die Stadt und hauste fürchterlich, mit Raub und Brand ganze Viertel zerstörend. Es entstand unter Teilung des Reiches in Konstantinopel ein lateinisches Kaisertum, welches bis 1261 dauerte. Dann kehrte ein eingeborener Fürst Michael Palaeologos, mit genuesischer Hilfe zurück, bemächtigte sich der Herrschaft, und unter den Palaeologen kam im ersten Viertel des XIV. S. für unsere Wissenschaft eine neue Anregung zustande[1]).

Georgios Pachymeres (1242 bis um 1310) verfaßte ein Werk über das Quadrivium, dessen zweites Buch (Musik) und Bruchstücke des vierten Buches (Astronomie) veröffentlicht sind[2]).

Nikephoros Gregoras (1295 bis kurz nach 1359) besaß das Vertrauen des Kaisers Andronikos II. Palaeologos (1282—1328), dem er eine Kalenderreform vorschlug, die der Kaiser jedoch wegen der Schwierigkeit, die anderen Völker zur Annahme zu bewegen, ablehnen zu müssen glaubte.

Im Jahre 1322 wurde von unbekanntem Übersetzer eine griechische Bearbeitung eines persischen astronomischen Werkes angefertigt, als dessen Verfasser *Σαμψ μπουχαρης* genannt ist, eine Verketzerung, in welcher man Schamsaldîn von Bukhara wiedererkannt hat, wahrscheinlich denselben Astronomen, der unter dem Namen Schamsaldîn von Samarkand vermutlich im Jahre 1276 ein Büchlein über die Fixsterne in persischer Sprache geschrieben hat, und der seinen Aufenthalt wechselnd in Samarkand und Bukhara gehabt haben mag.

Nun folgten sich ziemlich rasch weitere byzantinische Bearbeitungen persischer Schriften, mittelbare Abflüsse des im griechischen Texte nahezu vergessenen Almagestes, welcher selbst die vorzüg-

---

[1]) Vgl. Usener, *Ad historiam astronomiae symbola,* Bonner Universitätsprogramm zur Geburtstagsfeier Kaiser Wilhelm I. am 22. März 1876. Krumbacher, Geschichte der Byzantinischen Litteraturgeschichte (2. Aufl., München 1897) S. 289, 294. [2]) Vincent in den *Notices et extraits* XVI² (Paris 1847). Martin, *Theonis Smyrnaei liber de astronomia* (Paris 1849).

lichste Quelle persischer Gelehrsamkeit bildet. Chioniades von Konstantinopel, welcher jedenfalls vor 1346 lebte, Georg Chrysococces im Jahre 1346 selbst, Theodorus Meliteniota, wie es scheint unter der Regierung des Kaisers Johannes Palaeologos 1361 lebend, der Mönch Isaak Argyrus vor 1368, das sind die Hauptvertreter persisch-griechischer Astronomie. Der letztgenannte schrieb[1]) auch eine handschriftlich gebliebene Geodäsie und Scholien zu den ersten sechs Büchern der euklidischen Elemente. Und nun tritt in der zweiten Hälfte des XIV. S. ein neuer Umschlag ein. Mit Nikolaus Cabasilas beginnt ein Geschlecht von Gelehrten, welche auf Ptolemäus selbst zurückgreifen und so die Wiedergeburt klassischer Wissenschaft in Europa vorbereiten. Während auf astronomischem Gebiete die hier kurz geschilderte Bewegung sich vollzog, war es kaum möglich, daß die Mathematik unberührt geblieben wäre, und wirklich haben wir Isaak Argyrus als mathematischen Schriftsteller nennen müssen. Neben ihm treten im XIV. S. noch andere auf, zu welchen wir uns jetzt wenden. Der Hauptsache nach ist ihre Tätigkeit freilich als bloße Kompilation aufzufassen. Höchstens Einer könnte eine Ausnahme bilden, für welchen die Urquelle seines Wissens wenigstens nicht nachzuweisen ist. Ein Vorzug, der ihnen insgesamt zukommt, besteht darin, daß sie nicht mit breitgetretenen Stoffen sich abmühen, wie es die früheren Byzantiner taten, sondern solche Gegenstände wählten, die hier in griechischer Sprache zum ersten Male erscheinen.

Barlaam[2]), ein in Calabrien geborener Mönch, der längere Zeit als Abt in Konstantinopel lebte, dann als Bischof von Geraci im neapolitanischen Gebiete nach Italien zurückkehrte und dort 1348 starb, ist hauptsächlich durch die wechselvolle Stellung bekannt, welche er in dem Streite zwischen der abendländischen und der morgenländischen Kirche einnahm. Von mathematischen Schriften verfaßte er in griechischer Sprache arithmetische Erläuterungen zum zweiten Buche des Euklid, welche mit lateinischer Übersetzung 1564 in Straßburg gedruckt sind, und 6 Bücher Logistik, denen zweimal, 1592 in Straßburg und 1600 in Paris, die Ehre des Druckes widerfuhr. In dieser Schrift wurde in mühseliger Weise die Rechenkunst an

[1]) Nach Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 345. [2]) Montucla, *Histoire des mathématiques* I, 344 und v. Jan in Wisowas Enzyklopädie s. v. Barlaam. Nach Wolfs Mathematischem Lexicon (Auflage 1716 S. 177, Auflage 1734 S. 1141) hat Jo. (?) Chambers auf Anraten des Savilius Barlaams Logistik ins Lateinische übersetzt und 1609 mit Anmerkungen herausgegeben. Unsere Bemerkung über den Inhalt der Logistik stammt aus Montucla. Uns ist das Werk noch nie zu Augen gekommen.

ganzen Zahlen, an gewöhnlichen Brüchen und an Sexagesimalbrüchen gelehrt.

Johannes Pediasimus, auch Galenus, γαληνός = der Heitere, genannt, war Siegelbewahrer des Patriarchen von Konstantinopel während der Regierungszeit von Andronikos III. Palaeologos 1328—1341. Von ihm sollen handschriftlich, außer literär-kritischen Schriften, Bemerkungen zu einigen dunkeln Stellen der Arithmetik und eine Abhandlung über Würfelverdoppelung vorhanden sein. Seine Geometrie ist im Druck erschienen[1]). Man kann das Urteil über dieselbe kurz dahin fassen, daß Pediasimus sich ganz ähnlich wie jener unbekannte Byzantiner des X. S. eng an Heron von Alexandria anschließt. Nur daß jener, wie wir gesagt haben, die praktisch-feldmesserische Abhandlung über die Dioptra als Vorbild benutzte, während Pediasimus sich an die rechnende Geometrie des Heron hält, wie sie in den als Geometrie und als Geodäsie betitelten heronischen Schriften vertreten ist. Die Anlehnung ist eine so enge, daß mitunter Pediasimus dazu dienen kann Stellen des Heron zu erläutern.

Maximus Planudes[2]) gehört einer etwas früheren Zeit an. Er lebte etwa 1260—1310, wurde jedenfalls 50 Jahre alt. Ein aus Nikomedien stammender Mönch und besonders durch seine Kenntnisse in lateinischer Sprache und Literatur berühmt, vertrat er 1296 den Kaiser Andronikos II. als Gesandter in Venedig. Maximus Planudes hat einen Kommentar zu den ersten Büchern des Diophant verfaßt, der uns erhalten ist[3]), und als Beweis (S. 467) benutzt wurde, daß die Gestalt, in welcher ihm diese Bücher vorlagen, in keiner Weise von der heutigen Gestalt abwich. Maximus Planudes ist in diesem Kommentar mit weiser Vorsicht allem aus dem Wege gegangen, was der Erläuterung wirklich bedurft hätte, und hat sich nur bei Selbstverständlichem aufgehalten. Wir haben ferner (S. 461) der griechischen Anthologie gedacht, welche Maximus Planudes aus früheren Sammlungen auszog, und in welcher auch algebraische Epigramme sich vorfanden. Wir haben es jetzt mit einer Schrift zu tun, die den widerspruchsvollen Namen Markenlegung nach Art der Inder, ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, führt und gemeiniglich das Rechenbuch des Maximus Planudes[4]) genannt wird. Der Verfasser beginnt

[1]) Die Geometrie des Pediasimus (griechischer Text) herausgegeben von G. Friedlein als Herbstprogramm der Studienanstalt Ansbach für 1866. Die allgemeinen Notizen über den Verfasser entnehmen wir der Friedleinschen Einleitung, in welcher die wünschenswerten Verweisungen sich finden. [2]) Krumbacher, Gesch. der Byzant. Litteraturgeschichte S. 543 flg. [3]) Er ist lateinisch abgedruckt in Xylanders gleichsprachiger Diophantübersetzung. Basel 1571, griechisch in Tannerys Diophantausgabe II, 125—255. [4]) Eine griechische

mit den Worten: „Da die Zahl das Unendliche umschließt, aber eine Erkenntnis des Unendlichen nicht möglich ist, so haben hervorragende Denker unter den Astronomen eine Methode gefunden, wie man Zahlen beim Gebrauch übersichtlicher und genauer darstellen kann. Solcher Zeichen gibt es nur neun und zwar folgende[1]) 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Man fügt auch ein andres Zeichen hinzu, was Tziphra genannt wird und bei den Indern das Nichts darstellt. Auch jene neun Zeichen stammen von den Indern. Die Tziphra wird folgendermaßen geschrieben 0.“ Hier ist also zum ersten Male im XIV. S. das indische Zifferrechnen nach Byzanz gedrungen, wie wir später sehen werden mindestens 200 Jahre nachdem es auf anderem Wege bereits zur Kenntnis des westlichen Europas gekommen war, wo die sogenannten Algorithmiker in Spanien, in England, in Deutschland, in Frankreich mit den Abacisten ringen, um sie seit Anfang des XIII. S. siegreich zu verdrängen. Wir könnten in der uns hier gegenübertretenden fremdländischen Kunst eine Hindeutung finden, daß wir mit Unrecht auch diese späte Zeit in dem der griechischen Mathematik gewidmeten Abschnitte behandeln, wenn uns nicht umgekehrt gerade das so späte Auftreten, welches wir soeben betonten, darin bestärkte, daß wenigstens verhältnismäßige Abgeschlossenheit der griechisch schreibenden Mathematiker gegen im beginnenden Mittelalter allerwärts sich verbreitende Einflüsse stattfand, und daß sie somit hinter ihrer Zeit stehend und darum ohne Einwirkung auf dieselbe nur als Vertreter einer selbst sich verspätenden Nationalität erscheinen. Der Inhalt des Rechenbuches des Maximus Planudes bedarf dagegen hier keiner auf das eigentlich indische Verfahren eingehenden Erörterung. Die Bemerkung muß uns genügen, daß Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren an ganzen Zahlen, dann an Sexagesimalbrüchen gelehrt wird nach Methoden und unter Anwendung von Proben, von welchen wir an anderem Orte zu reden Gelegenheit nehmen. Es folgt alsdann noch die Quadratwurzelausziehung und zwar auf folgende Weise: „Nimm die Quadratwurzel der nächstniedrigen wirklichen Quadratzahl und verdoppele dieselbe; dann nimm von der Zahl, deren Wurzel du suchst, das gefundene nächstniedrige Quadrat weg, und dem Reste gib als Nenner die aus der

---

Textausgabe hat C. J. Gerhardt veranstaltet. Halle 1865. Eine deutsche Übersetzung von H. Waeschke erschien Halle 1878. Die allgemeinen Notizen über Maximus Planudes entnehmen wir der Gerhardtschen Einleitung. Die deutsche Fassung einzelner Sätze ist bis auf geringe Änderungen, die wir für nötig hielten, der Waeschkeschen Übersetzung entlehnt.

[1]) Die von Maximus Planudes gebrauchten Zeichen vgl. auf der hinten angehefteten Tafel.

Verdoppelung der Wurzel gefundene Zahl. Z. B. wenn 8 das Doppelte der Wurzel wäre, so nenne den Rest Achtel, wenn 10 Zehntel usw. Willst du z. B. 18 als Quadrat darstellen und die Wurzel suchen, so nimm die Wurzel der nächstniedrigen Quadratzahl also von 16. Sie ist 4. Verdopple dieselbe, ist 8. Nimm 16 von 18, bleibt 2. Diese nenne (nach 8) Achtel und sage so: die Seite des Quadrates 18 ist 4 und 2 Achtel, 2 Achtel ist aber gleich einem Viertel, also ist die Seite auch 4 und ein Viertel.“ Nun zeigt der Verfasser, daß $4\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{4} = 18\frac{1}{16}$ ist, wobei, wie durch den Wortlaut unserer Übersetzung angedeutet worden ist, Brüche nicht in Zeichen, sondern nur mit Worten geschrieben werden. Die Methode sei daher nicht ganz richtig. „Welche Methode aber die genauere und der Wahrheit nähere ist, die ich zugleich als meine mit Gottes Hilfe gemachte Erfindung in Anspruch nehme, das wird in der Folge gesagt werden.“ Die vorher gelehrte Methode muß jedenfalls nach des Verfassers Meinung die indische sein, denn er spricht nachher von der indischen Methode, wie von einer bereits vorgetragenen[1]), während nur diese Auseinandersetzung und die geometrische Begründung ihrer nicht genau zutreffenden Richtigkeit vorausgegangen ist, bevor er an die eigene Methode gelangt, welche er nochmals mit wahren Posaunenstößen ankündigt: „Es ist nun an der Zeit, daß wir die Methode, die wir selbst erfunden haben, und die nur weniges vom wahren Werte abweicht, vorlegen.“

Worin besteht diese eigene Methode? Darin, daß die Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, vorher durch Multiplikation mit 3600 in Sekunden verwandelt wird, worauf die Wurzel in der Gestalt von Minuten sich zeigt! Damit brüstet sich ein Leser von Theons Kommentar zum Almagest, der als solcher sich ausdrücklich zu erkennen gibt, indem er zugesteht, seine Methode sei doch umständlich, wenn es um recht große Zahlen sich handle, wie um die Zahl 4500, aus welcher Theon die Wurzel zu ziehen habe. Alsdann könne man aus der indischen Methode, aus der des Theon und aus seiner eigenen folgende Mischmethode bilden. Zunächst sucht er jetzt die nächste ganzzahlige Wurzel 67 und verschafft sich den Rest $4500 - 67^2 = 11$. Diese 11 Ganze werden als Minuten zu 660, und durch $2 \cdot 67 = 134$ geteilt entstehen $4'$ als Quotient. Der neue Rest $660 - 4 \cdot 134 = 124'$ wird in Sekunden verwandelt und dadurch zu 7440, wovon $16''$ d. h. das Quadrat von $4'$ abgezogen wird. Der neue Rest besteht aus $7424''$. In ihn dividiert man mit

---

[1]) Ἑτέρα μέθοδος μίγμα οὖσα τῆς τε Ἰνδικῆς καὶ τοῦ Θέωνος καὶ τῆς ἡμετέρας (ed. Gerhardt) pag. 45 lin. 3.

dem Doppelten von $67^0\ 4'$ d. h. mit $60 \cdot 134 + 2 \cdot 4 = 8048'$, nachdem man ihn selbst in $60 \cdot 7424 = 445\,440'''$ verwandelt hat. So erscheint der Quotient $55''$, und mit ihm ist die Wurzel zu $67^0\ 4'\ 55''$ ergänzt, und zwar, wie der Vergleich mit dem (S. 494) von uns gegebenen Auszuge aus Theon zeigt, genau in der von diesem gelehrten Weise, nur mit dem Umwege über die Eselsbrücke eingeschalteter Multiplikationen mit 60 vor Ausführung der die Teilziffern der Wurzel liefernden Divisionen, die einzige Beimischung, deren Maximus Planudes sich rühmen kann.

Sind aber das die großen Gedanken eines Schriftstellers, der „sich vorgenommen hat über das zu handeln, was zur astronomischen Rechnung gehört“[1]), so ist kaum anzunehmen, daß ebendemselben zwei Aufgaben eigentümlich sein sollten, mit welchen unmittelbar nach Auseinandersetzung der letzterwähnten Methode zur Quadratwurzelausziehung das Rechenbuch abschließt. Die zweite Aufgabe ist die uns schon bekannte, ein Rechteck zu finden, das einem anderen Rechtecke am Umfange gleich, an Inhalt ein Vielfaches desselben sei. Die Auflösung wird in Worten gelehrt, welche in eine Formel umgesetzt $n - 1$ und $n^3 - n$ als die Seiten des einen, $n^2 - 1$ und $n^3 - n^2$ als die Seiten des $n$mal so großen Rechtecks bezeichnen. Bei $n = 4$ entstehen die Seiten 3 und 60, beziehungsweise 15 und 48, welche wir auch im Buche des Landbaues (S. 484) fanden. Die erste Aufgabe ist eine heute gleichfalls sehr bekannte, da sie in ziemlich allen Aufgabensammlungen Platz gefunden hat. Eine Summe Geldes soll dadurch in lauter gleiche Teile zerlegt werden, daß der erste Teilhaber 1 Stück und den $n$ten Teil des Restes, der zweite alsdann 2 Stück und den $n$ten Teil des Restes, der dritte hierauf 3 Stück und den $n$ten Teil des Restes erhalte, und dieses Gesetz der Bildung der Teile bis zum letzten festgehalten bleibe. Als Auflösung wird $(n - 1)^2$ als die zu teilende Summe, $n - 1$ als die Zahl der Teilhaber erklärt. Zunächst ist freilich $n = 7$ gesetzt, doch ist ausdrücklich die Allgemeinheit der Auflösung hervorgehoben, und als Andeutung wie die Auflösung gefunden werde, der Satz bemerklich gemacht, daß immer $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$ sei. Es würde wohl einer besonderen Untersuchung wert sein, Spuren auch dieser Aufgabe zu verfolgen.

Später als Maximus Planudes lebte Nikolaus Rhabda von Smyrna mit dem Beinamen Artabasdes[2]). Er schrieb 1341 (wie man aus einer auf dieses Jahr sich beziehenden Osterrechnung zu

---

[1]) *Ἐπεὶ δὲ ὡς ἐν εἴδει περὶ τῶν συμβαλλομένων εἰς τὸν ἀστέρων ψῆφον διελάβομεν* (ed. Gerhardt) pag. 29, letzte Zeile. [2]) Schöll-Pinder, Geschichte der

entnehmen imstande ist) an einen Theodor Tschabuchen von Klazomenä einen Brief über Arithmetik[1]), welcher aus einer Handschrift der Pariser Bibliothek herausgegeben ist[2]). Fast das Bemerkenswerteste an ihm besteht darin, daß an dessen Schlusse eine Sammlung von Beispielen das erste uns bekannte Vorkommen der Wortverbindung politische Arithmetik[3]) bietet. Es sind Aufgaben, welche mittels Regeldetri gelöst sind. Außerdem kann noch hervorgehoben werden, daß für die Ausziehung von Quadratwurzeln die Näherungsregel $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a}$ ausdrücklich ausgesprochen ist. Wir haben es hier mit einer andern Schrift des Rhabda zu tun, mit der mehrfach, zuletzt in Gemeinschaft mit dem eben erwähnten Briefe gedruckten Abhandlung über das Fingerrechnen[4]), ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου. Wir haben gesehen (S. 130), daß bei den griechischen Zeitgenossen des Lustspieldichters Aristophanes etwa um 420 v. Chr. das Fingerrechnen in Übung war. Wir haben keinerlei Grund anzunehmen, es sei jemals ganz in Vergessenheit geraten, aber doch ist die Darstellung des Rhabda die einzige in griechischer Sprache, in welcher förmlich gelehrt wird, was meistens durch mündliche Überlieferung sich fortgesetzt haben mag. Rhabda schildert aufs ausführlichste, wie man durch Beugung der Finger die einzelnen Zahlen darstellen solle. Die Finger der linken Hand dienen zur Bezeichnung der Einer und Zehner, die der rechten zur Bezeichnung der Hunderter und Tausender, und zwar ist die Aufeinanderfolge des Stellenwertes, wenn wir so sagen dürfen, von links nach rechts derart festgehalten, daß der kleine Finger, der Ringfinger und der Mittelfinger der linken Hand für die Einer, Zeigefinger und Daumen der Linken für die Zehner in Bewegung gesetzt werden, Daumen und Zeigefinger der Rechten für die Hunderter, und endlich die drei letzten Finger der Rechten für die Tausender. Wir brauchen viel-

griechischen Literatur III, 345 stellt die ungeheuerliche Vermutung auf, Artabasdes sei vielleicht aus *abacista* entstanden.

[1]) Gerhardts Einleitung zu seiner Ausgabe des Rechenbuchs des Maximus Planudes S. XII, Anmerkung. [2]) *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction) par* M. Paul Tannery. *Extrait des Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale* etc. Tome XXXII, 1re Partie. Paris 1886. [3]) μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν. [4]) Ein Abdruck z. B. in *Nicolai Caussini de eloquentia sacra et humana libri XVI.* Lib. IX, cap. VIII, pag. 565 sq. Cöln 1681. Vgl. auch Rödiger, Ueber die im Orient gebräuchliche Fingersprache für den Ausdruck der Zahlen, im Jahresbericht der deutsch. morgenländ. Gesellsch. für 1845—46 und H. Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I. Theil (Jenaer Inaugural-Dissertation von 1876) S. 36 flgg.

leicht nicht einmal hervorzuheben, wie sich in dieser Reihenfolge eine Übereinstimmung mit früheren Bemerkungen unserer Einleitung (S. 6—7) zu erkennen gibt. Es können also mittels beider Hände sämtliche Zahlen von 1 bis 9999 bezeichnet werden, vollauf ausreichend für den gewöhnlichen Gebrauch und in Übereinstimmung mit der Sprachgewohnheit der Griechen, für welche 10000 das äußerste einfache Zahlwort darstellt.

Manuel Moschopulus ist wegen einer Anleitung zur Bildung von Quadratzahlen[1]) zu nennen. Dieser ungemein vielseitig gebildete Gelehrte war Schüler und Freund des Maximus Planudes und stand in schriftlichem Verkehr mit Kaiser Andronikos II. Palaeologos (1282—1328), wodurch seine Lebenszeit ziemlich genau bestimmt ist. Manuel Moschopulus hat, sagten wir, die Bildung von Quadratzahlen gelehrt, d. h. er hat gezeigt, wie man magische Quadrate herstelle, wie man die Zahlen von 1 bis zu irgend einer Quadratzahl n^2 in ebensoviele schachbrettartig geordnete Felder verteile, so daß die Summe der Zahlen in jeder Längsreihe, wie in jeder Querreihe und auch in den beiden Diagonalreihen stets dieselbe werde, natürlich $\frac{n^3+n}{2}$, da die Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}$$

in n gleichsummige Reihen geordnet sind. Wenn wir sagten, Moschopulus habe die Herstellung des magischen Quadrates für irgend eine Quadratzahl n^2 gelehrt, so müssen wir von dieser Behauptung einen Teil wieder zurücknehmen. Nur zwei Hauptfälle sind erhalten, der eines ungeraden n und der eines geradgeraden n, d. h. wenn n von der Form $4m$ ist. Der dritte noch übrige Fall eines geradungeraden n, d. h. wenn n von der Form $4m + 2$ ist, fehlt in der uns erhaltenen Handschrift, es ist aber kaum zweifelhaft, daß Moschopulus auch ihn in einer verlorenen Schlußbetrachtung behandelt haben wird, wie er es zum voraus angekündigt hat[2]). Er hat dabei einen Gedanken und ein Wort benutzt, welche in der modernen Mathematik eine bedeutsame Rolle spielen, bei Moschopulus aber zuerst aufgefunden worden sind. Wir meinen den Ausdruck „Herumzählung im Kreise“[3]),

[1]) S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876, Cap IV, Historische Studien über die magischen Quadrate. Der Abdruck des griechischen Textes des Moschopulus nach einer Münchener Handschrift des XV. S. findet sich S. 195—203, dessen Diskussion S. 203—212. Vielfache kritische Bemerkungen zum Texte von A. Eberhard in der Zeitschrift Hermes XI, 434 flgg. Krumbacher S. 546—548.
[2]) Günther l. c. pag. 197 lin. 2—5. [3]) Günther pag. 198, wo auch in einer Note auf die Wichtigkeit der in diesem Ausdrucke enthaltenen Anschauung aufmerksam gemacht ist.

ὥςπερ ἀνακυκλοῦντες, wo ein Kreis eigentlich gar nicht vorhanden ist, sondern an das gedacht werden muß, was man gegenwärtig zyklische Anordnung, zyklische Vertauschung und dergleichen zu nennen pflegt. Es will uns recht zweifelhaft erscheinen, ob wirklich Moschopulus selbst der Erfinder der Methoden zur Auflösung der nichts weniger als leichten zahlentheoretischen Aufgabe war. Wenn er auf Andringen des Rhabda die Niederschrift vollzog, so ist damit keineswegs gesagt, daß er Eigenes niederschrieb, und die Gesellschaft, in welcher wir Moschopulus zu nennen hatten, gibt keinenfalls der Vermutung Unterstützung, einen besonders geistreichen Erfinder mathematischer Dinge hier anzutreffen. Dazu kommt, daß uns ein Anfang fast magischer Quadrate bei Nikomachus (S. 438) begegnet ist, daß jedenfalls im X. S. magische Quadrate eine geheimnisvolle Rolle innerhalb der arabischen Philosophensekte der sogenannten lauteren Brüder spielten[1]), daß insbesondere die Quadrate mit 9, 16, 25, 36, 64 und 81 Feldern denselben bekannt waren, daß also sicherlich damals schon eine Methode vorhanden gewesen sein muß solche zu bilden.

Die Zeit griechischer Mathematik, wir wiederholen es zum letzten Male, und man wird uns am Schlusse dieses Kapitels gern glauben, war vorbei. Wenn im XV. S. die vor dem Osmanentum fliehenden letzten Byzantiner Handschriften altklassischen Wertes mit sich führten, deren Kenntnis im Abendlande zündend auf die Geister wirkte und jene glänzende Flamme entfachte, bei deren Scheine die Meisterwerke der Renaissance entstanden, so haben die Byzantiner selbst daran nicht mehr noch weniger teil als Insekten, welche wertvollen Blütenstaub mit sich führen, während sie an dem Orte der Befruchtung sich verkriechen. Wie es aber kam, daß die Griechen ihre durch Jahrhunderte bewährte mathematische Kraft verloren, das ist eine Frage, zu deren Erörterung weitläufigere Auseinandersetzungen nötig wären, als sie hier im Vorübergehen möglich und gestattet sind. Eine Einwirkung politischer Verhältnisse wird ebensosehr angenommen werden müssen, wie eine weiter und weiter abseits führende Verschiebung des wissenschaftlichen Interesses. Theologie und Jurisprudenz hatten in den Zeiten des Verfalles unserer Wissenschaft sich vorgedrängt. Die letztere insbesondere war die bevorzugte Wissenschaft der nüchtern Denkenden geworden, und daß dem so war, dazu waren wieder politische Verhältnisse die Veranlassung. Die philosophischen Griechen waren die Untertanen eines fremden

---

[1]) Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert S. 42 flgg. Berlin 1865 und Günther l. c. S. 192 flgg.

Reiches geworden, dessen Gepräge sich auch ihnen um so deutlicher aufdrückte, je näher ihnen der Mittelpunkt des Reiches rückte. Die geistige Aufgabe dieses Reiches war eine andere. Ihm war es beschieden, die Rechtswissenschaft zu begründen. Seine leitenden Gedanken gab aber ein anderes Volk als die Griechen an, ein Volk, welches der Mathematik gegenüber gerade den höchstens erhaltenden Charakter an den Tag legte, den wir seit den Neuplatonikern deutlicher und deutlicher sich offenbaren sahen: das Volk der Römer.



IV. Römer.



25. Kapitel.

Älteste Rechenkunst und Feldmessung.

Wenn wir die Geschichte der Mathematik, wie sie auf italienischem Boden geworden ist, zum Gegenstande unserer Untersuchung machen, so müssen wir fast mehr als bei anderen Schauplätzen menschlicher Gesittung uns hüten Verschiedenartiges durcheinander zu mengen. Der Süden Italiens ist es gewesen, wo die hellenische Bildung des Pythagoräismus ihre Blüte hatte. Das geographisch von Italien nicht zu trennende Sizilien hat die mächtige Küstenstadt Syrakus entstehen sehen, und es ist ein halbwegs berechtigter Nationalstolz italienischer Gelehrter, wenn sie Pythagoras und Archimedes ihre Landsleute nennen. Aber freilich mehr als nur halbberechtigt können wir diese Ansprüche auf den Ruhm der größten Mathematiker des Altertums für die eigene Vergangenheit nicht nennen, weil unserer Auffassung gemäß das Volk und die Sprache vor dem Lande die Zugehörigkeit bestimmt, und deshalb waren uns jene Männer Griechen. Zwischen den von Norden kommenden Kriegern, unter deren Streichen Archimedes verblutete, nachdem er seine Vaterstadt gegen sie lange verteidigt hatte, und denen, die im gleichen Dialekte mit Archimed sprachen und schrieben, muß die Kulturgeschichte einen Gegensatz erkennen lassen. Wir denken diesen Gegensatz recht laut zu betonen, wenn wir in diesem Abschnitte unseres Bandes überhaupt nicht von itàlischer, sondern von römischer Mathematik reden. Mag ja auf italischem Boden mancherlei an mathematischem Wissen vorhanden gewesen sein noch bevor Rom entstand. Wir leugnen es so wenig, daß wir den Spuren nachzugehen bemüht sein werden. Immer aber soll, was wir finden, unter dem römischen Sammelnamen vereinigt werden.

Über die älteste Geschichte der Bevölkerung des Landes von Nordosten her sind die Akten noch keineswegs abgeschlossen, wenn man auch gegenwärtig der Annahme zuneigt, eine altitalische Nation habe sich gebildet in der Ebene des Po, nachdem sie vorher von

den Hellenen, dann von den Kelten sich getrennt hatte[1]). Von dort ging der Zug nach Süden und trieb ältere Bewohner vor sich her, vielleicht verwandt mit den Sikulern, den Einwohnern von Sizilien, deren Name in alten ägyptischen Urkunden zu den bekanntesten gehört. Wann diese Ereignisse stattfanden, ob mehr als 1000 Jahre vor unserer Zeitrechnung, wie aus der Zusammenstellung mit Persönlichkeiten des trojanischen Krieges, die vielleicht mehr als eine Sage ist, hervorgehen könnte, darüber schwebt wieder tiefes Dunkel, kaum erhellt seit Auffindung jener alten Totenstadt am Albanersee[2]), deren Graburnen unter einer Aschendecke vulkanischen Ursprungs sich erhalten haben, über welche Jahrhunderte einen Pflanzenwuchs hervorriefen, der selbst wieder in einer einen halben Meter mächtigen Peperinschicht eine zerstörende und zugleich schützende Decke fand. Welche Rolle bei den Wanderungen und Niederlassungen auf der apenninischen Halbinsel die Etrusker spielten, welchem Völkerstamme überhaupt diese angehörten, ist ein weiterer Gegenstand wissenschaftlichen Zweifels, und dieser Zweifel erstreckt sich so weit, daß man nicht einmal darüber einig ist, ob diejenigen Sitten und Gebräuche tatsächlich als etruskisch gelten dürfen, welche römisch-priesterliche Überlieferung uns als etruskisch bezeichnet hat.

Wir können und müssen uns genügen lassen, auf das Vorhandensein dieser vielen Rätselfragen von ausgesuchter Schwierigkeit hinzuweisen, so wichtig deren Lösung gerade für die Geschichte der Mathematik wäre. Den Etruskern nämlich gehören mutmaßlich die Zeichen an, welche als Zahlzeichen den Römern dienten, ihnen wird zugeschrieben, was als praktische Feldmessung der Römer sich erhalten hat.

Wir wollen mit den Zahlzeichen unsere Erörterungen beginnen. Zahlenbezeichnung, wenn auch nicht durch Zahlzeichen, war es, wenn die Etrusker, wenn ihnen folgend die Römer in dem Heiligtume der Minerva alljährlich einen Nagel einschlugen, um die Zahl der Jahre vorzustellen[3]). Zahlzeichen sind diejenigen Charaktere,

---

[1]) H. Nissen, Das Templum, antiquarische Untersuchungen. Berlin 1869. Vgl. besonders Kapitel IV. Italische Stammsagen. [2]) De Rossi in den *Annal. dell' Instit.* 1867, pag. 36 sqq. [3]) Livius VII, 3. Vgl. für andere Stellen Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869, S. 19. Noch andere Analoga wie z. B. einzelne Striche, farbige Steinchen als Zahlenbezeichnung sind mit Beispielen belegt bei Rocco Bombelli, *Studi archeologico-critici circa l'antica numerazione italica Parte I.* Roma 1876, pag. 31.

welche allmählich zu Buchstabenform sich abändernd das bilden, was gegenwärtig als römische Zahlzeichen bekannt ist[1]). Wie die ganze Schrift der Römer und der Etrusker bei hervorragender Ähnlichkeit es doch auch an wesentlichen Unterschieden nicht fehlen läßt, die eine unmittelbare Ableitung der einen aus der anderen zur Unmöglichkeit machen, ist seit einem halben Jahrhundert festgestellt. Schon die linksläufige Schrift der Etrusker gegenüber von der rechtsläufigen der Römer deutet darauf hin, daß der Ursprung jener in eine Zeit zu setzen ist, während deren die Griechen noch nicht durch die Übergangsperiode einer in der Richtung von Zeile zu Zeile wechselnden Schrift hindurchgegangen waren, wogegen die römische Schrift diese Veränderung bereits voraussetzt. Die Annahme nicht unmittelbarer Ableitung auseinander findet noch Bestätigung darin, daß im römischen Alphabete das altgriechische Koppa als Q erhalten ist, welches die Etrusker nicht kennen, während umgekehrt manche Buchstaben dem tuskischen Alphabet angehören, die dem römischen fehlen. Wann das etruskische Alphabet, welches nach Tacitus[2]) durch den Korinther Demaratus nach Italien kam, daselbst zur Einführung gelangte, wissen wir ungefähr. Es wird zwischen 650 und 600 v. Chr. gewesen sein[3]). Die Trennung des römischen Alphabetes von dem gräkoitalischen Mutterstamme ist nicht zeitlich so bestimmt, doch muß sie jedenfalls eingetreten sein, bevor die Benutzung der Buchstaben als Zahlzeichen den Griechen bekannt war, also (S. 121) vor 500 v. Chr., denn bei den Römern sind niemals nach griechischem Muster die aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabetes als Zahlzeichen verwertet worden[4]). Und dennoch sehen die ältesten Zahlzeichen der Römer, sehen die der Etrusker Buchstaben ungemein gleich und ähneln sich untereinander so sehr (vgl. die hinten angeheftete Tafel), daß die vorhandenen Übereinstimmungen unmöglich als Zufälligkeiten erklärt werden können. Zufällig erscheint vielmehr die Verwandtschaft mit den späteren römischen Zeichen I V X L C M, welche aus der Ähnlichkeit mit Buchstaben durch Volksetymologie sich in diese Buchstabenformen selbst verwandelten, noch ein Zeichen D für 500 zwischen C und M und ein Zeichen ꝗ vielleicht aus VI entstanden, für die 6 sich aneignend und C und M mit den Anfangs-

[1]) Ottfried Müller, Die Etrusker Bd. II, S. 312—320. Breslau 1828. Th. Mommsen, Die unteritalischen Dialekte (besonders S. 19—34). Leipzig 1850. Math. Beitr. Kulturl. S. 161 flgg. Friedlein l. c. S. 27 flgg. R. Bombelli l. c. pag. 33. [2]) Tacitus, *Annales* XI, 14. [3]) A. Riese, Ein Beitrag zur Geschichte der Etrusker. Rhein. Museum für Philologie (1865) XX, 295—298. [4]) Über andere Benutzung von Buchstaben als Zahlzeichen bei Römern in vermutlich recht später Zeit vgl. Friedlein l. c. S. 20—21.

buchstaben der Wörter centum und mille vergleichend. Der Ursprung der Zeichen für 5, 50, 500 ist, wie ziemlich allgemein zugestanden wird, in der Halbierung der Zeichen für 10, 100, 1000 zu finden, und nur die Entstehung dieser letzteren bleibt strittig. Am glaubhaftesten dürfte die mit Belegung durch reiches inschriftliches Material wahrscheinlich gemachte Vermutung sein[1]), daß die *Decussatio*, Verzehnfachung, jeweils durch Hinzutreten einer neuen Kreuzung des vorhandenen Zeichens mittels eines hinzutretenden geraden oder gekrümmten Striches hervorgebracht worden sei.

Neben der alphabetischen Reihenfolge ist auch die Benutzung der Anfangsbuchstaben von Zahlwörtern als Zeichen für die Zahlen begreiflich nächstliegend, und so erscheint die Frage nicht müßig, ob vielleicht die Buchstabenähnlichkeit der tuskischen Zahlzeichen so erklärt werden könne? Es ist bisher den Gelehrten, welche mit etruskischen Studien sich beschäftigt haben, nicht möglich gewesen diese Frage vollgültig zu beantworten, doch neigen sie zur Verneinung derselben. Wie schwierig übrigens die Beantwortung ist, geht schon daraus hervor, daß der Wortlaut der etruskischen Zahlwörter keineswegs feststeht. Man hat im Jahre 1848 alte etruskische Würfel gefunden, deren sechs Flächen mit Wörtern beschrieben sind, welche man mach, thu, zal, huth, ki, sa liest[2]). Man hat allseitig diese Wörter für die Namen der sechs ersten Zahlen gehalten, aber man ist uneinig darüber, welche Zahl jedes einzelne Wort bedeute[3]).

Sei nun der Ursprung der tuskisch-römischen Zeichen welcher er wolle, eines tritt bei beiden Völkern hervor, was als hochbedeutsam hervorgehoben werden muß: die subtraktive Bedeutung eines Zeichens kleineren Wertes, sofern es vor einem Zeichen höheren Wertes, also bei den Etruskern rechts, bei den Römern links von demselben auftritt, wie IV = 4, IIX = 8, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, wovon das Zeichen für 8 schon zu den Seltenheiten gehört[4]). Die subtraktive Schreibung kann sehr wohl den Zweck der

[1]) Zangemeister in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 10. November 1887. [2]) *Bullettino dell' Instituto di correspondenza archeologica.* Roma 1848, pag. 60, 74. [3]) Vgl. Zeitschr. Mathem. Phys. XXII, Histor.-literar. Abtlg. S. 55, wo die Ansichten von Isaac Taylor denen der italienischen Gelehrten gegenübergestellt sind. Vgl. auch C. Pauli, Die etruskischen Zahlwörter in den Etruskischen Forschungen und Studien von Deecke und Pauli, 3. Heft (Stuttgart 1882), wo die zehn ersten Zahlwörter heißen: 1 = sa, 2 = zal, 3 = thu, 4 = huth, 5 = mach, 6 = ki, 7 = men, 8 = cezp, 9 = semp, 10 = nurth.
[4]) Die subtraktiven Ziffern sollen bei den Etruskern häufiger als bei den Römern zur Anwendung gekommen sein. Corssen, Ueber die Sprachen der Etrusker I, 39—41 (Leipzig 1874) gibt XIIIXX = 27, ↑III = 47, auch das zweimal subtrahierende ↑XII = 50 — 10 — 2 = 38 als etruskisch an.

Raumersparung gehabt haben. Darum ist IIX statt VIII möglich, IIIX statt VII unmöglich[1]). Ein sprachliches Subtrahieren haben wir (S. 11) auch bei der Bildung der Zahlwörter anderer Völker in Erwägung ziehen dürfen, nirgend aber als bei den Etruskern und Römern findet sich die Subtraktion in den Zeichen versinnlicht, und es gehört zu den weiteren Eigentümlichkeiten, daß Zeichen und Sprache bei den Römern sich nicht decken. Schriftlich ist die Subtraktion nur bis X, nicht bei den späteren Zehnern in Gebrauch, wie sich auch leicht verstehen läßt, weil z. B. IXXX dem Zweifel Raum gäbe, ob 29 (XXX weniger I) oder 11 (XX weniger IX) gemeint sei. Deutlichkeitsgründe waren es auch, welche dafür den Ausschlag gaben, daß auf Schwertklingen VIIII statt IX geschrieben wurde, weil dieses, je nach der Seite, von welcher man die Klinge betrachtete, mit XI verwechselt werden konnte[2]). Dagegen wird sprachlich die Eins wie die Zwei nie von Zehn, sondern nur von den Zehnern: Zwanzig bis 100 abgezogen. Wir fügen hinzu, daß die Römer gleichfalls allein unter allen Völkern subtraktiver Ausdrücke auch bei Datierungen ihrer Monatstage sich bedienten.

Was die schriftliche Darstellung von Zahlen über Tausend betrifft, so ist zu verschiedenen Zeiten wahrscheinlich verschiedentlich verfahren worden. Eine Übereinstimmung in der Auffassung der einzelnen Stellen ist indessen nicht vorhanden[3]), nur die vertausendfachende Wirkung eines über Zahlzeichen hinweggezogenen Horizontalstriches z. B. $\overline{XXX} = 30\,000$, $\overline{C} = 100\,000$, $\overline{M} = 1\,000\,000$ scheint außer Zweifel.

Wenden wir uns zu den Zahlen unterhalb der Einheit, zu den Brüchen, so stehen wir hier vor einem ausgesprochenen Duodezimalsystem. Wir haben es mit einem ähnlichen Gedanken zu tun, wie bei dem Sexagesimalsystem der Babylonier und der griechischen Astronomen. Nur daß dort der jedesmalige Zähler seinerseits angeschrieben wurde, als wenn er als ganze Zahl vorhanden wäre, und der Nenner durch Stellung oder durch ein eigentümliches dem Zähler anhaftendes Zeichen, Strichelchen oder dergleichen sich kund gab; bei den Römern sind dagegen für alle Zwölftel von $\frac{1}{12}$ bis zu $\frac{11}{12}$ besondere Bruchzeichen und Bruchnamen vorhanden. Die Ähnlichkeit beider Systeme zeigt sich beispielsweise in Ausdrücken

[1]) Th. Mommsen, Zahl- und Bruchzeichen. Hermes XXII, 596—614, insbesondere S. 603—605 über die subtraktive Bezeichnung. [2]) Th. Mommsen l. c. [3]) Math. Beitr. Kulturl. S. 162—165. Th. H. Martin in den *Annali di matematica* (1863) V, 295—297. Friedlein l. c. S. 28—31.

wie anderthalb Zwölftel. Unseren Begriffen nach ist das weit umständlicher gesprochen, als wenn wir ein Achtel sagen; dem Römer ist offenbar dieses Umständlichere das Einfachere und Faßlichere, weil er eben ein Zeichen für $\frac{1}{12}$, sowie für die Hälfte von $\frac{1}{12}$ besitzt, ein solches für $\frac{1}{8}$ dagegen nicht hat[1]). Auch der Grieche würde nur von sieben Sechzigsteln und von 30 zweiten Sechzigsteln reden, wenn er nicht neben und vor den Sexagesimalbrüchen die Stammbrüche besäße, die dem Römer fehlen. Eine weitere Ähnlichkeit zwischen den Sexagesimalbrüchen und den römischen Duodezimalbrüchen dürfte darin gefunden werden, daß beide von einer ganz bestimmten Teilung hergenommen sind, also ursprünglich benannte Zahlen waren, bis allmählich der Bruchgedanke über den des kleinen Bogenteiles der Babylonier, des kleinen Gewichtsteiles der Römer die Oberhand gewann. Wie alt freilich die Bruchzeichen bei den Römern gewesen sein mögen, ist nicht genau zu ermitteln. Etruskische Inschriften[2]) von mutmaßlich hohem Alter enthalten das Zeichen ↄ $= \frac{1}{2}$. Andererseits läßt ein Ausspruch von Varro die Deutung zu, als sei die kleinste Brucheinheit von $\frac{1}{288}$ As in der Zeit vor den punischen Kriegen entstanden[3]). Die Frage, wie man zu dem Systeme fortgesetzter Zwölfteilung gekommen sei, läßt sich, gleich vielen ähnlichen Fragen, leichter stellen als beantworten. Möglicherweise ist an die von der Natur gegebene, auf den gegenseitigen Stellungen von Sonne und Mond am Himmel beruhende Zwölfteilung des Jahres in Monate als Ursprung zu denken. Wenn auch Romulus in erster Linie ein Jahr von zehn Monaten einsetzte, so sind doch zwölf Monate von der Sagengeschichte mit dem Namen des Königs Numa oder des älteren Tarquinius in Verbindung gebracht, also vielleicht älter als die römischen Gewichte.

Es erscheint zweckmäßig hier anzuknüpfen, was man über das gewöhnliche Rechnen der Römer weiß mit Ausschluß eines denselben vielleicht bekannten wissenschaftlichen Rechnens, von welchem unter Boethius die Rede sein muß. Das gewöhnliche Rechnen wird wohl auf dreierlei Art geübt worden sein: als Finger-

---

[1]) Auch noch Volusius Maecianus, der in der Mitte des II. S. n. Chr. lebte (vgl. Mommsen in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. III, 281—285. 1853), setzt in seinen Zeichen $\frac{1}{8} = \frac{1\frac{1}{2}}{12}$. [2]) Vgl. Corssen l. c. [3]) Varro, *De re rustica* I, 10: *Habet iugerum scriptula CCLXXXVIII quantum as antiquus noster ante bellum Punicum pendebat.*

rechnen, als Rechnen auf einem Rechenbrett, als Rechnen unter Benutzung vorhandener Tabellen.

Das Fingerrechnen hat die älteste Überlieferung für sich, indem nach Plinius[1]) schon König Numa Zahlendarstellung mittels der Finger kannte. Er ließ nämlich ein Standbild des doppeltbeantlitzten Janus errichten, dessen Finger die Zahl 355 als Zahl der Jahrestage andeuteten. Ein späterer römischer Schriftsteller, Macrobius[2]), weiß von derselben Sitte den Janus mit gekrümmten Fingern abzubilden, nur nennt er nicht König Numa als Urheber und gibt die dargestellte Zahl der Jahrestage zu 365 an, offenbar dem späteren römischen Jahre diese Zahl entnehmend, ohne daß ein altes Bildwerk ihm vor Augen gewesen wäre. Martianus Capella[3]) läßt die als Göttin auftretende Arithmetik die Zahl 717 mittels der Finger darstellen. Neben diesen Angaben ganz bestimmter durch Fingerbeugung angedeuteter Zahlen kann man noch viele Stellen römischer Schriftsteller aus den verschiedensten Zeiten anführen, welche das Fingerrechnen im allgemeinen bestätigen. Die rechte Hand, sagt Plautus[4]), bringt die Rechnung zusammen. Mit Wort und Fingern läßt Suetonius[5]) die Goldstücke abzählen. Bei Quintilian[6]) ist von einer Abweichung von der Rechnung durch unsichere oder unschickliche Bewegung der Finger die Rede, Firmicus Maternus[7]) erinnert daran, daß Anfänger im Rechnen die Finger zu Hilfe nehmen und ähnlich bei anderen[8]). Wir führen nur eine Stelle noch besonders an, weil sie die fortschreitende Reihenfolge von links nach rechts bestätigt, welche wir zuletzt noch bei Nikolaus Rhabda (S. 514) als Regel kennen gelernt haben. Juvenal[9]) läßt nämlich den mehr als Hundertjährigen die Zahl seiner Jahre schon an der rechten Hand zur Darstellung bringen. Eine ausführliche Beschreibung, wie man Zahlen durch Fingerbewegungen kenntlich mache, von Beda Venerabilis, dem schottischen Mönche aus dem VII. und VIII. S., gehört bereits der Literatur des Mittelalters an, und wird uns im 38. Kapitel beschäftigen.

Vielleicht mit jener mittelalterlichen Verbreitung des Finger-

---

[1]) Plinius, *Histor. natur.* XXXIV, 16. [2]) Macrobius, *Conviv. Saturn.* I, 9. [3]) Martianus Capella, *Satura VII init.* [4]) Plautus, *Miles gloriosus Act. II sc. 3: Dextera digitis rationem computat.* [5]) Suetonius, Claudius XXI . . . *ut oblatos aureos voce digitisque numeraret.* [6]) Quintilian I: *si digitorum solum incerto aut indecoro gestu a computatione dissentit.* [7]) Firmicus Maternus I, 5, 14 *Vides ut primos discentes computos digitos tarda agitatione deflectant?* [8]) Eine Zusammenstellung, bei welcher auch die Kirchenväter berücksichtigt sind, bei Rocco Bombelli l. c. pag. 101—107. [9]) Juvenalis, *Sat.* X, v. 248 *suos jam dextra computat annos.*

rechnens, vielleicht aber auch schon mit römischen Gewohnheiten sind Spuren in Verbindung zu setzen, welche bis auf den heutigen Tag sich erhalten haben. In der Walachei[1]) bedient man sich der Finger, um das Produkt zweier einziffriger Zahlen, die größer als 5 sind, zu finden. Die Finger jeder der beiden Hände erhalten vom Daumen zum Kleinenfinger aufsteigend die Werte 6 bis 10. Hat man nun zwei Zahlen, z. B. 8 mal 9 zu multiplizieren, so streckt man den Achterfinger (Mittelfinger) der einen und den Neunerfinger (Ringfinger) der anderen Hand vor. Die nach dem Kleinenfinger hin übrigen Finger beider Hände (2 Finger und 1 Finger) multipliziert man miteinander und hat damit die Einer ($2 \cdot 1 = 2$) des Produktes. Die von den Daumen aus vorhandenen Finger mit Einschluß der ausgestreckten Finger (3 Finger und 4 Finger) addiert man und hat damit die Zehner ($3 + 4 = 7$) des Produktes ($8 \cdot 9 = 72$). Die Richtigkeit dieser komplementären Multiplikation ist einleuchtend. Heißen a und b die zu vervielfältigenden Zahlen, so sind $10 - a$ und $10 - b$ die noch übrigen Finger zum Kleinenfinger hin, $a - 5$ und $b - 5$ die Finger vom Daumen an. Die Regel läßt also $(10 - a) \cdot (10 - b) + 10\,(a - 5 + b - 5) = 100 - 10a - 10b + ab + 10a + 10b - 100 = ab$ bilden. Der Zweck, der erreicht wird, besteht darin, daß hauptsächlich nur der Anfang des Einmaleins bis zu 4 mal 4 auswendig behalten werden muß und die Erlernung der Abteilung, die mit 6 mal 6 beginnt, erspart bleibt.

Wenn wir nun die Mutmaßung wagen, es sei hier römisches Fingerrechnen zu verfolgen, so veranlassen uns dazu die eigentümlichen Tatsachen, daß die römischen Zahlzeichen VI, VII, VIII, oder IIX, VIIII oder IX sehr leicht zur Beachtung der Ergänzungszahlen, die hier benutzt sind, führen konnten; daß ein ganz ähnliches Verfahren auch bei französischen Bauern gefunden worden ist; daß wir im Mittelalter ähnlichen Regeln begegnen werden, die im 40. Kapitel zu besprechen sind; daß auch ein komplementäres Divisionsverfahren unsere Aufmerksamkeit mehrfach in Anspruch nehmen wird, für welches ein anderer Ursprung als ein römischer zunächst nicht zu Gebote steht. Wir sagen zunächst, denn es wäre immerhin möglich, daß auch die komplementären Rechnungsverfahren bis nach Griechenland verfolgt werden müßten, wenn die nötigen Voraussetzungen, wir meinen griechische Lehrbücher der Rechenkunst, vorhanden wären. Wir erinnern an jenes dem Nikomachus

---

[1]) D. Pick in Hoffmanns Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht V, 57 (1874).

zugeschriebene Verfahren die Quadrate von Zahlen zu finden (S. 433), welches zwar mit der komplementären Multiplikation sich nicht deckt, aber eine entschiedene Familienähnlichkeit zu derselben nicht verkennen läßt.

Nächst dem Fingerrechnen war bei den Römern das Rechnen auf dem Rechenbrett üblich und bildete einen Gegenstand des elementaren Unterrichtes. Auch dafür ist eine ganze Anzahl von Stellen gesammelt worden[1]), welche meistens auf einen mit Staub überdeckten Abacus Bezug nehmen, auf welchem man alsdann geometrische Figuren aller Art entwerfen konnte, welche man aber auch imstande war durch Ziehen gerader Striche in Kolumnen abzuteilen, welche mit Steinchen, calculi, belegt zum Rechnen dienten. Die sogenannte Pariser Gemme, wahrscheinlich etruskische Arbeit, zeigt einen Rechner, der in der Linken eine mit Zahlzeichen kolumnenförmig (allerdings ohne abteilenden Strich) bedeckte Tafel hält[2]), während er mit der Rechten Steinchen auf einen Tisch legt. Neben diesem somit für römische Übung gesicherten Kolumnenabacus gab es aber auch einen Abacus mit Einschnitten und in diesen Einschnitten verschiebbaren Knöpfchen. Vier solcher Vorrichtungen[3]) haben sich bis in die neuere Zeit erhalten, darunter wenigstens eine, deren altertümlicher Ursprung von dem Beschreiber ganz besonders hervorgehoben worden ist[4]).

Eine solche römische Rechentafel, eigens zum Rechnen, nicht zu mehrfachem Gebrauche hergerichtet, war von Metall und hatte acht längere und acht kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in gerader Linie. In den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der längeren fünf Stück, in den übrigen vier, in den kürzeren je einer. Jeder längere Einschnitt war oben, also nach der Seite, wo der kürzere Einschnitt ihn fortsetzte, mit einer Überschrift versehen. Der Gebrauch der Rechentafel ergibt sich von selbst. Sie wurde mit zu dem Rechner senkrechten Einschnitten auf eine beliebige Unterlage aufgestellt, zu welchem Zwecke unten an der Tafel Füßchen angebracht waren. Dem Rechner am nächsten waren, wie wir schon andeuteten, die längeren Einschnitte; die kürzeren waren weiter von ihm entfernt. Die Marken in den längeren Einschnitten bedeuteten einzelne Einheiten ihrer Klasse; die in den kürzeren Einschnitten galten fünf

[1]) Rocco Bombelli l. c. pag. 116 sqq. [2]) Zangemeister, Monatsberichte der Berliner Akademie vom 10. November 1887. Die Tafel ist auf S. 11 des Sonderabzuges abgedruckt. [3]) Deren Beschreibung bei Becker-Marquart, Handbuch der römischen Alterthümer V, 100. [4]) Claude du Molinet, *Le cabinet de la bibliothèque de Ste. Geneviève.* Paris 1692, pag. 25.

solcher Einheiten. Nur der erste kürzere Einschnitt von rechts bildete dabei eine Ausnahme, indem dessen einzelne Marke sechs Einheiten bedeutete. Dieser äußerste Einschnitt (sofern man die beiden Einschnitte, den längeren und den kürzeren, nur als Abteilungen eines einzigen in der Mitte unterbrochenen Einschnittes betrachtet) war nämlich mit Θ bezeichnet und enthielt die Unzen, deren 12 auf eine Aß gingen. Die übrigen für die Asse bestimmten Einschnitte trugen in nach links dekadisch aufsteigender Reihenfolge die Bezeichnungen I, X, C usf. bis zu IXI oder einer Million. Der erste Einschnitt von rechts aus konnte danach zur Angabe von 11 Unzen noch dienen, wenn man die ursprünglich so weit als möglich voneinander getrennten Knöpfchen der beiden Abteilungen sämtlich gegen die Mitte des Brettes vorschob, wo die schriftlichen Bezeichnungen standen, und so einander näherte. An diesem Orte erhielten sie den Zählwert von fünf einzelnen Unzen und einer Sechsunzenmarke. Kamen dann noch weitere Unzen hinzu, so ersetzte man ihrer 12 durch eine gegen die Mitte vorgeschobene Marke der nächsten Linie, d. h. der Einheiten der Asse. In den folgenden sieben Einschnitten konnte man durch ähnliches Verfahren bis zu je neun Einheiten in jeder Klasse von den Einern bis zu Millionen von Assen darstellen. So zeigten drei verschobene Knöpfe in einem längeren Einschnitte und der einzelne in dem zugehörigen kürzeren Einschnitte gleichfalls nach der Mitte des Abacus fortgerückt die Zahl 8 in der entsprechenden Klasse an. Neben den Einschnitten der Unzen waren noch drei kleinere Einschnitte, die beiden oberen mit je einer Marke, die unterste mit zwei Marken versehen. Die Bedeutung dieser Einschnitte war den beigeschriebenen Zeichen zufolge von oben nach unten die halbe Unze semuncia, die viertel Unze siciliquus, die drittel Unze duella. Das alles ergibt sich aus der Betrachtung der Rechentafel selbst mit Ausnahme dessen, was wir über die nötige Verschiebung der Knöpfchen bemerkt haben, und wofür wir eine altertümliche Quelle anzugeben allerdings nicht imstande sind. Es muß eben der Natur der Sache nach so oder umgekehrt verfahren worden sein, und da scheint uns, daß die Übersicht wesentlich erleichtert ist, wenn die wirklich zu zählenden Knöpfchen in der Mitte des Brettes vereinigt waren, dicht bei den Zeichen, die den Wert des einzelnen Knöpfchens angaben, daß also, wo die Nützlichkeit den Ausschlag geben durfte, nicht leicht eine andere Wahl getroffen worden sein wird, als die wir andeuteten.

Auf diesem Rechenbrette konnten, wie auf jedem ähnlichen Apparate mit festen Marken, Additionen und Subtraktionen leicht vollzogen werden. Wollte man multiplizieren oder dividieren, so war

es nötig die Zahlen, an welchen jene Operationen vorgenommen werden sollten, besonders, etwa schriftlich, anzumerken, und der Abacus vermittelte nur die Vereinigung der Teilprodukte, beziehungsweise die Subtraktionen der aus den Teilquotienten entstandenen Zahlen.

Dabei war ein Kopfrechnen mit Benutzung des Einmaleins nicht zu umgehen, und bei diesem konnte vielleicht die beschriebene Fingermultiplikation Anwendung finden. Wir wissen, daß römische Knaben in ihren Schulen im Kopfrechnen geübt wurden, daß dem Vorübergehenden die einförmigen Töne des 2 mal 2 sind 4, bis bina quatuor, welches die Knaben gemeinsam herzusingen (decantare) hatten, entgegenzudringen pflegten, daß damit noch andere Mißtöne sich häufig genug vereinigten, das Klatschen der Rute oder der Peitsche und das Heulen der in solcher Weise Unterrichteten.

Kamen freilich Multiplikationen hoher Zahlen, oder gar solche von Brüchen vor, so nutzte dem ungeübten Rechner nicht Rechenbrett noch gewöhnliches Einmaleins, er mußte die Produkte von einem tabellarisch geordneten Rechenknechte hernehmen, und das ist es, was wir weiter oben ein Rechnen unter Benutzung vorhandener Tabellen genannt haben. Ein solcher Rechenknecht hat sich erhalten, dessen freilich sehr später Verfasser überdies nicht auf italischem Boden lebte. Gleichwohl wird ein Zweifel darein nicht gesetzt werden können, daß es Römisches und nur Römisches ist, was hier vorliegt, mag auch darüber gestritten werden können, ob ältere Musterwerke bloß benutzt oder geradezu abgeschrieben sind.

Wir meinen den Calculus des Victorius[1]), eines Schriftstellers, der mitunter aber wahrscheinlich unrichtig auch Victorinus genannt wird. Seine Persönlichkeit bestimmt sich dahin, daß er aus Aquitanien stammte und im Jahre 457 n. Chr. eine sogenannte Osterrechnung, d. h. eine Anleitung zur Auffindung des richtigen Osterdatums verfaßte. Vor oder nach diesem canon paschalis, das eine ist ebensogut möglich als das andere, richtete der als eifriger und gewissenhafter Rechner von seinen Kommentatoren gerühmte Victorius diese Tabellen her, aus welchen Vervielfältigungen sowohl ganzer als gebrochener Zahlen in großer Ausdehnung entnommen werden können. Mathematischer Wert ist den Tabellen selbstverständlich nicht beizulegen. Wir müssen nur bemerken, daß auf ihnen eigentümliche Bruchzeichen sich befinden, verschieden von denen der älteren Schriftsteller, dagegen sich forterbend durch das ganze Mittelalter.

---

[1]) Vgl. Christ in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1863, S. 100—152. Dann Friedlein in der Zeitschr. Math. Phys. XVI, 42—79 (1871) und im *Bullettino Boncompagni* 1871, pag. 443—463, wo der, wie es scheint, zuverlässigste Text aus einer Vatikanhandschrift abgedruckt ist.

Bevor wir das Rechnen der Römer verlassen, fordert die eigentümliche Anwendung eines gewissen Zahlwortes bei ihnen ein Wort der Besprechung: *sexcenti* = sechshundert, welches in der Bedeutung unendlich viele bei Schriftstellern fast jedes Zeitalters, soweit sie sich erhalten haben, erstmalig aber bei Plautus um 200 v. Chr. vorkommt. Wir nehmen keinen Anstand bei einer vor langer Zeit geäußerten Vermutung[1]) zu verharren, dieses sexcenti sei das chaldäische ner. Wenn (S. 45) Chaldäer 139 v. Chr. aus Rom vertrieben wurden, so darf man ihren damals erworbenen schädlichen Einfluß für alt genug halten, daß etwa sechzig Jahre früher ein von ihnen oftmals unbestimmt gebrauchtes Zahlwort sich in weiteren Kreisen einbürgerte.

Wir leiteten diese Erörterungen, welche uns, wie man sieht, chronologisch aber nicht mathematisch sehr weit geführt haben, mit der Behauptung ein, wie die Zahlzeichen der Römer, so werde auch deren praktische Feldmessung auf etruskische Ursprünge zurückgeführt, sei nun die Überlieferung eine berechtigte oder nicht. Wir wenden uns zu diesem zweiten Gegenstande, welcher ebenfalls eine weitläufigere Erörterung fordert.

Der älteste uns bekannte römische Schriftsteller, welcher mit nicht mißzuverstehenden Worten es ausspricht, die Art, wie die Begrenzungen festgestellt werden, rühre von den Etruskern her[2]), ist Varro etwa 50 bis 80 Jahre vor dem Anfange der christlichen Zeitrechnung, und von ihm aus begegnen wir dieser Überlieferung durch Jahrhunderte.

Die Begrenzungen, von denen die Rede ist, sind sehr allgemeiner Natur. Demselben Grundgedanken gehorchend finden sie sich überall, wo es um gesetzliche räumliche Absonderung sich handeln kann, bei der Anlage der Stadt wie des Lagers, bei der Vermessung des angebauten Landes, bei dem Grundrisse des bürgerlichen Hauses wie des Hauses, als dessen Eigentümer eine Gottheit gilt. Diese letztere, der Tempel, führt sogar den Namen nach dem Abschneiden (τέμνειν) aus dem umgebenden Grund und Boden, und ein templum ist bis zu einem gewissen Grade jedes Grundeigentum[3]). Wenn auch der Begriff des Templum in der römischen Religion und allen mit ihr zusammenhängenden Verrichtungen eine maßgebende Rolle spielt, er hat sich gleichwohl so wenig aus dem des Heiligen, Gottgeweihten

---

[1]) Mathem. Beiträge Kulturl. S. 362. [2]) *Limitum prima origo, sicut Varro descripsit, a disciplina Etrusca.* Römische Feldmesser I, 27. [Unter dem Zitate „Römische Feldmesser“ verstehen wir die Schriften der Römischen Feldmesser herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Berlin 1848 und 1852.] [3]) Nissen, Das Templum S. 7, 8, 10, 55 und häufiger.

entwickelt, daß er sich mit diesem nicht einmal deckt. Eines der höchsten Heiligtümer in Rom, das der Vesta, war sogar kein Templum. Die städtische Anlage dagegen gehört unter den genannten Begriff. Die italische Stadt nämlich entsteht nicht gleich der modernen und mittelalterlichen im langsamen Verlaufe der Zeiten von einzelnen Häusern zum Dorf, vom Dorfe zur Stadt anwachsend. Sie wird auf einmal geschaffen durch eine einzige politisch-religiöse Handlung. Sie weiß ihren Gründer, ihr Gründungsjahr, oftmals ihren Gründungstag zu nennen, den man dann alljährlich als städtisches Fest feiert.

Die Bedingung, welche nun solcher Absteckung von Grenzen die Gesetzmäßigkeit verleiht, besteht darin[1]), daß der Gesichtskreis durch zwei senkrecht zueinander stehende Gerade in vier Teile geschnitten werde, und daß die Geraden ein für allemal die Richtungen für die Seiten der rechteckigen Einzelgebilde abgeben, mögen Häuser oder Feldstücke, Zimmer oder Tempelräume diese Einzelgebilde sein. Die beiden Richtungen werden überdies nicht willkürlich angenommen, sondern sollen mit den Verbindunglinien der einander gegenüberliegenden Haupthimmelsgegenden übereinstimmen.

Wir erinnern uns, daß eine derartige Orientierung religiösen Zwecken dienender Baulichkeiten uns auch an anderen Orten bemerklich wurde, daß wir (S. 15) zum voraus ankündigten, wir würden in der häufig vorkommenden Tatsache selbst keinen Grund erkennen, eine Übertragung von einem Volke zum anderen mit Notwendigkeit annehmen zu müssen. Wir finden es angemessen zusätzlich hier zu bemerken, daß eine solche Übertragung für die altitalischen Orientierungen weniger als irgend sonstwo anzunehmen sein wird. Jedenfalls hat hier und nur hier der Orientierungsgedanke eine Entwicklung genommen wie sonst nirgend, hat er die Errichtung fast jedes Gebäudes, fast jeder Verbindung von Gebäuden in so folgerichtiger Weise, wie wir es schon andeuteten, beeinflußt. Nicht bloß ein einzelner Tempel, die römischen Gesetzen unterworfene Welt war nach einem einzigen rechtwinkligen Koordinatensysteme geordnet[2]), und wir werden auf diesen Gedanken noch zurückzugreifen haben.

Die Abszissenachse des gemeinsamen Systems war die Ostwestlinie, dessen Ordinatenachse die Südnordlinie oder Mittagslinie.

---

[1]) Agrimensoren S. 65 flgg. [2]) Nissen, Das Templum S. 165: „Seit Augustus war der Culturkreis des Mittelmeeres zu einem einzigen politischen Ganzen geschlossen worden; das Templum, welches einst auf den palatinischen Hügel beschränkt gewesen war, hatte sich ausgedehnt in immer weiteren Kreisen und anjetzt war das letzte und grösste Templum constituirt worden.“

Allerdings zeigen die Trümmer von Tempeln, von Städteanlagen und dergleichen, welche man genauer auf ihre Lage zu prüfen noch nicht gar lange begonnen hat, nicht ganz unerhebliche Abweichungen von der wahren astronomischen Mittagslinie. Es ist für unsere Zwecke durchaus gleichgültig, ob diese Verschiedenheiten unabsichtlich, ob sie absichtlich entstanden sind; ob sie, wie man früher annahm, aus einem ungeschickten Verfahren derer hervorgingen, welche die Richtungen bestimmten, oder ob, wie eine jedenfalls geistreiche und genaue Prüfung verdienende Vermutung es will[1]), die Richtung nach dem Punkte des Sonnenaufgangs am Gründungstage des betreffenden Tempels in der Abszissenachse festgehalten werden sollte, einem Tage, der selbst keineswegs willkürlich angenommen wurde, sondern der jedesmalige Hauptfeiertag derjenigen Gottheit sein mußte, welcher das Heiligtum geweiht werden sollte.

Wir haben für die Grundrichtungen uns der ganz modernen Namen der Koordinatenachsen bedient. Den Römern hießen dieselben Decimanus und Cardo, offenbar sehr altertümliche Namen, wie man gewiß mit Recht schon daraus gefolgert hat, daß als Abkürzung für Cardo stets ein K benutzt worden ist, ein Buchstabe, der der römischen Schrift im übrigen schon frühzeitig abhanden kam. Die Bedeutung von Decimanus dürfen wir heute wohl nur als unbekannt bezeichnen[2]). Wie die antike Ableitung des Wortes Decimanus von einem selbst mehr als zweifelhaften duocere, zweiteilen, weil der Raum überhaupt in zwei Abteilungen zerfällt worden sei, sprachlich ganz und gar unhaltbar ist, so ruht eine moderne Ableitung, welche Decimanus einfach aus decem entstanden wissen will, sachlich auf gar schwachen Füßen. Die Italiker, sagt man, bedienten sich von uralters her eines Dezimalsystems. Der Zehnte macht daher die Reihe voll, und die Linie, welche eine Flächeneinheit begrenzt, erhielt passend von ihm den Namen, gerade wie diejenige, welche die Flächeneinheit halbiert, die fünfte heißt. Wir vermögen diese Schlüsse als genügend nicht anzuerkennen. Zuerst würde man uns nachweisen müssen, daß die begrenzte Flächeneinheit wenigstens nach einer Richtung die Seitenlänge 10 hatte, und dann müßte man uns noch erklären, wie neben dem Worte via quintana für eine Querstraße auch die Wortverbindung decimana quintaria entstehen konnte, bevor wir jene Deutung als gesichert anerkennen. Um so zweifelloser ist Cardo, die Angel, um welche das Weltall sich dreht, die Weltachse.

[1]) Diese Theorie ist von Nissen in seinem mehrerwähnten Werke über das Templum aufgestellt. [2]) Vgl. Agrimensoren S. 66 mit Nissen, Das Templum S. 12 und 27.

Jedenfalls zog bei irgend einer Gründung der Augur[1]) zuerst einen Decimanus, dann senkrecht zu ihm einen Cardo, und somit sind es zwei praktische Tätigkeiten, welche er von Anfang an auszuüben verpflichtet und folglich auch befähigt sein mußte: die Ostwestlinie zu bestimmen und zu einer gegebenen Geraden auf dem Felde eine Senkrechte zu ziehen.

Für die Bestimmung der Ostwestlinie sind drei verschiedene Methoden durch Hyginus, einen Feldmesser etwa aus dem Jahre 100 n. Chr., beschrieben. Die erste Methode[2]) richtete ein zum Visieren geeignetes Instrument, von welchem wir noch zu reden haben, nach dem Punkte des Horizontes, wo wirklich die Sonne aufging. Diese Richtung wurde als Ostwestlinie, die zu ihr senkrechte als Cardo bestimmt, und, fügte der Beschreiber im stolzen Gefühle seiner Überlegenheit hinzu, um Mittag stimmte diese Mittagslinie nicht mit der Wirklichkeit überein. Die zweite Methode[3]) befestigte auf geebneter Grundlage einen senkrechten Stift als Schattennehmer, sciotherum, und beschrieb um denselben als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Halbmesser kleiner als die größte Schattenlänge des Stiftes gewählt werden mußte. Sowohl des Morgens als des Nachmittags mußte der Schatten einmal so lang werden, daß sein Endpunkt genau in diesen Kreisumfang eintraf, und die beiden Punkte, in welchen solches stattfand, hatte man zu beobachten und anzumerken, endlich zu verbinden. Die Verbindungsgerade war der gewünschte Decimanus. Die dritte Methode[4]) machte von drei ungleichen Schattenlängen Gebrauch, welche in kurz aufeinander folgenden Zeitpunkten, aber sämtlich vormittags, auf der Grundebene des Sciotherums verzeichnet worden waren.

Die letzte Methode, unter deren Vorzügen wir nur den einen hervorheben wollen, daß sie unabhängig davon war, ob die Sonne in einem gewissen Momente unbewölkt am Himmel stand und die vorausbestimmte Schattenlänge wirklich liefern konnte oder nicht, setzt Kenntnisse der Stereometrie in einem Maße voraus, daß wir ihre Entstehung nur bei einem Schriftsteller vermuten dürfen, dessen

---

[1]) Der Name Augur wird (nach Nissen l. c. S. 5, Anmerkung 1) von J. Schmidt mit *aio, auctor, autumari, εὔχεσθαι* in Verbindung gebracht. [2]) *Hygini gromatici de limitibus constituendis* in Römische Feldmesser I, 170. [3]) Hyginus, Römische Feldmesser I, 188—189. [4]) Ebenda 189—191. Vgl. Agrimensoren S. 68—69. Über diese Methode hat schon Cristini geschrieben, von welchem 1605 in Turin ein Druckwerk herauskam: *Methodus inveniendae meridianae lineae ex tribus umbris, simul cum paraphrasi in similem methodum conscriptum ab Hygino Augusto Liberto.* Vgl. *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero etc. con Giovanni Antonio Magini pubblicato ed illustrato da* Antonio Favaro. Bologna 1886, pag. 296, 302 und 304, Note 1.

wissenschaftliche Bildung eine weit höhere war, als Römer sie unserer persönlichen Überzeugung nach je besaßen. Wir meinen, es müsse eine griechische Methode aus der Zeit entwickelter Stereometrie sein, wenn es auch nicht möglich gewesen ist, sie bei irgend einem der uns erhaltenen griechischen Astronomen aufzufinden.

Die von uns als zweite bezeichnete Methode dürfte, wenn auch nicht der ältesten Zeit, doch einem erheblich früheren Zeitalter als dem des Hyginus angehören. Ebendieselbe beschreibt nämlich auch Vitruvius[1]) um das Jahr 15 v. Chr. Andererseits kann sie in Rom nicht früher als frühestens 250 v. Chr. etwa bekannt gewesen sein, wie daraus hervorgeht, daß sie den Gebrauch einer Art von Sonnenuhr als bekannt annimmt, während eine solche nach einer Angabe im Jahre 293, nach einer anderen gar erst 263 erstmalig in Rom aufgerichtet wurde[2]).

So bleibt uns als ältestes italisches Verfahren kein anderes übrig als jenes dem Gedanken nach einfachste Hinschauen nach der Gegend, wo die Sonne zuerst sichtbar wurde, ein Verfahren welches bei aller Unzuverlässigkeit doch eine erträgliche Orientierung liefern kann, wenn es zu einer Jahreszeit vorgenommen wurde, welche nicht gar zu entfernt von der Tagundnachtgleiche lag[3]).

Ihm war nur ein Apparat unentbehrlich, der womöglich zwei Zwecken zu dienen hatte: eine Richtung einzuvisieren, eine andere Richtung senkrecht zur ersteren auf dem Felde zu bestimmen; von einem solchen altitalischen Instrumente sprechen uns aber die Berichterstatter unter dem Namen Groma. Auch dieses Wort ist nach Ursprung und Bedeutung keineswegs über jeden Zweifel erhaben[4]). Die alte Annahme, groma komme von dem griechischen *γνώμων* her, ist unhaltbar, weil nicht bloß die beiden unter diesen Namen bekannten Dinge verschieden sind, sondern auch der griechische Gnomon, die Sonnenuhr, mit dem Namen in römische Schriftsteller Eingang fand. Dagegen ist nicht ausgeschlossen, daß beiden Wörtern ein und dasselbe Stammwort zugrunde liege, ein Stammwort, welches italisch geschrieben vielleicht gnorma hieß, und ein Senkrechtes im allgemeinen bedeutet haben mag, wie früher *γνώμων*. Diese gnorma konnte sowohl in norma als in groma übergehen. Als aber die Römer viel später den Gnomon der Griechen herübernahmen, mochte die Ableitung der Groma längst aus dem Bewußtsein geschwunden gewesen sein, so daß es möglich wurde, daß beide Bezeichnungen,

---

[1]) Vitruvius Lib. I, Kap. 6, § 6. [2]) Agrimensoren S. 71. [3]) Roms Geburtstag wurde durch das Parilienfest am 21. April begangen. Nissen, Das Templum S. 166. [4]) Vgl. Agrimensoren S. 72 flgg. mit Hultschs Rezension in Fleckeisen und Masius, Jahrbücher der Philol.

ursprünglich verwandt, jetzt unbedenklich zur Benennung zweier verschiedener Vorrichtungen gebraucht wurden, nachdem der Heimatsschein des älteren Wortes, wenn wir so sagen dürfen, verloren gegangen war. Gegen diese im allgemeinen sehr annehmbare Auffassung läßt sich, soviel wir sehen, nur der eine nicht unbedenkliche Einwand erheben, daß alsdann der Name, welchen die Groma (oder auch cruma, wie es sich wohl findet) bei den Etruskern, welche eines gleichen Instrumentes sich bedienten, besaß, besessen haben muß, spurlos verloren gegangen wäre, ein etwas mißlicher Umstand gegenüber von den verschiedenen älteren und jüngeren Namen, die sich erhalten haben.

Solche jüngere Namen sind machinula und stella, und wenn von groma der Name der Feldmesser, gromatici, sich hergeleitet hat, eine Art amtlicher Personen, die in ältester wie in jüngster Zeit eine festgegliederte Genossenschaft, fast eine Zunft, bildeten, wenn Groma selbst auch den Platz in der Mitte der Hauptstraße eines Lagers oder einer Stadt bezeichnete, wo bei der Gründung das Instrument aufgestellt worden war, so läßt die Variante stella uns erkennen, welcherlei Gestalt jenes Instrument gehabt haben muß. Es war der Stern, welcher zu Herons Zeiten bereits durch die Dioptra überholt noch immer bei einzelnen in Gebrauch war (S. 382). Was aber aus diesem Namen geschlossen werden konnte, erhielt zuerst Bestätigung in der Abbildung einer Groma (Fig. 80), die bei Ivrea auf dem Grabsteine eines römischen Feldmessers aufgefunden worden ist[1]), und wurde vollends sichergestellt, als eine wirkliche Groma an den Tag kam[2]). Die Groma war ein Winkelkreuz, gebildet durch zwei in horizontaler Ebene sich schneidende Lineale und aufgestellt auf einem mit Eisen beschlagenen Fußgestelle, dem ferramentum. An den Enden der Lineale herabhängende Bleisenkel, vier an der Zahl, wenn auch die Abbildung auf dem Grabsteine nur noch deren zwei erkennen läßt, verbürgten die wagrechte Aufstellung.

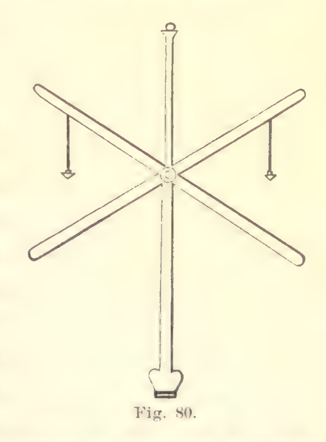


Fig. 80.

[1]) Gazzera hat die betreffende Grabschrift 1854 mit 33 anderen im XIV. Bande der II. Serie der Abhandlungen der Turiner Akademie veröffentlicht. Cavedoni lenkte dann im *Bullettino archeologico napoletano, nuova seria, anno* 1°, die Aufmerksamkeit auf den 11. Stein mit der Abbildung der Groma. Vgl. Giov. Rossi, *Groma e squadro* 1877, pag. 43 und *Figura* 3. [2]) Eine Lichtdruckabbildung der bei Limesgrabungen in Bayern ans Licht gebrachten Groma findet sich in einem Aufsatze von H. Schöne (Jahrbuch des archäolog. Instituts XVI, 1901) und daraus abgedruckt bei Wilh. Schmidt, Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge IV, 234—237 (1903).

Mittels dieses Kreuzes ließen in der Tat die beiden Handlungen sich vollziehen, die wir den Auguren bei Absteckung des Templum zuweisen mußten: es ließ sich das eine Lineal in die Richtung nach dem Aufgange der Sonne bringen, und das andere Lineal zeigte dann von selbst die dazu senkrechte Richtung an. Decimanus und Cardo konnten abgesteckt werden. Noch eine weitere feldmesserische Verrichtung haben wir uns als uralt auf italischem Boden zu denken: die Abmessung von bestimmten Strecken in gegebener Richtung, denn die Ländereien waren in lauter gleiche Rechtecke abgeteilt, deren Seiten ursprünglich wohl von gleicher Länge gewesen sein werden, in späterer Zeit im Verhältnisse von 1 zu 2 standen[1]).

Die Vereinigung der Groma mit der Meßstange genügte alsdann bereits zur Auflösung praktisch nicht unwichtiger Aufgaben, z. B. der Aufgabe: die Breite eines Flusses von einem Ufer aus zu messen ohne den Fluß zu überschreiten, eine Aufgabe, für welche ein bestimmter Name, fluminis varatio, bekannt ist. Bei einem allerdings vermutlich ziemlich späten Schriftsteller hat sich eine Methode zur Lösung dieser Aufgabe erhalten[2]), die wohl mit Recht eine altitalische genannt und in Vergleich zu ganz ähnlichen Verfahrungsweisen gebracht worden ist, zu welchen nordamerikanische Naturvölker unbeeinflußt von europäischer Wissenschaft sich aufzuschwingen vermocht haben. Das Verfahren ist nämlich, wenn auch zutreffend, über die Maßen schwerfällig. Es zeichnet die nicht unmittelbar zugängliche Länge selbst auf das Feld mittels kongruenter Dreiecke und läßt sie in dieser getreuen Wiederholung messen, statt daß Berechnung einträte aus Verhältnissen von Seiten ähnlicher Dreiecke.

Mit diesen Bemerkungen haben wir aber keinenfalls zu wenig der altitalischen Geometrie zugewiesen, welche somit als eine nur dem täglischen Bedürfnisse gewidmete eines wissenschaftlichen Anstriches entbehrende sich kennzeichnet.

26. Kapitel.

Die Blütezeit der römischen Geometrie. Die Agrimensoren.

Was ist bei den Römern im Laufe der Jahrhunderte aus altitalischer Rechenkunst, aus altitalischer Feldmessung geworden? Er-

---

[1]) Stellen dafür vgl. Agrimensoren Anmerkung 260. [2]) Römische Feldmesser I, 285—286. Vgl. Agrimensoren S. 108, Günthers Rezension dieses Buches in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung, 21. März 1876 und *Narrative of the travels and adventures of Monsieur Violet etc. by* Capt. Marryat. Chapter IX (Tauchnitz-Edition, pag. 64—65).

scheint es doch unmöglich, daß eine Stadt, die als weltbeherrschender Mittelpunkt bedeutende Männer aus allen Provinzen des großen Reiches anzuziehen wußte, nicht auch von solchen zum Wohnort gewählt worden sein soll, welche der Mathematik sich befleißigten. Wenn wir nur in Erinnerung bringen, was uns beiläufig begegnete: in Rom hat im Jahre 98 n. Chr. Menelaus Beobachtungen angestellt (S. 412), in Rom hat um 244 Plotinus seine vielbesuchte Schule eröffnet (S. 457), in welcher gewiß auch nach damaligem Geschmacke modernisierte altgriechische Arithmetik einen Gegenstand der Lehre bildete. So mögen zu verschiedenen Zeitpunkten in Rom Persönlichkeiten gelebt und gewirkt haben, die um Mathematik sich kümmerten — Spuren davon werden sich deutlich erkennen lassen — aber sie waren beinahe verstohlenerweise Mathematiker. Was wir (S. 517) schon angedeutet haben, ist jetzt nur stärker zu betonen. Die ganze geistige Anlage des römischen Volkes war nach anderen Gebieten gerichtet als der Mathematik, und das Wort Ciceros, die Geometrie sei bei den Griechen in höchsten Ehren gestanden, deshalb sei nichts glänzender als ihre Mathematiker, bei den Römern aber sei das Maß jener Kunst durch den Nutzen des Rechnens und Ausmessens begrenzt[1]), hat fast für alle Zeiten Gültigkeit. Nur eine kurze Spanne bildet vielleicht eine Ausnahme und gab Anlaß zu Anfängen einer eigenen mathematischen Literatur, die aber bald ausartete, so daß nur Übersetzungen oder handwerksmäßige Vorschriften neben beiläufigen Andeutungen das Material liefern, aus welchem wir Belehrung ziehen.

Jene Ausnahmsperiode eröffnete sich, während ein Mann an der Spitze des römischen Staates sich befand, der selbst mathematischen Sinn besaß und als Schriftsteller in unserem Fache aufgetreten ist: Julius Cäsar. Er hat ein Buch de astris verfaßt[2]), welches in der Mitte des I. S. n. Chr. dem älteren Plinius vielfach als Quelle für das XVIII. Buch seiner Naturgeschichte gedient hat, und welchem um das Jahr 400 Macrobius das Beiwort eines nicht ohne Gelehrsamkeit verfaßten Werkes beilegte. Dasselbe hängt, wie man anzunehmen berechtigt ist, mit einer Aufgabe zusammen, welche Cäsar sich als seiner würdig gestellt hatte, mit der Aufgabe der Kalenderverbesserung.

Das römische Jahr[3]), der Sage nach von König Romulus zu 304 Tagen angenommen, wurde durch Numa auf 355 Tage verlängert,

---

[1]) Cicero, *Tuscul. Quaest.* Lib. I, Cap. 2, § 5. [2]) Agrimensoren S. 78 flgg. [3]) Ludw. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Berlin 1826, Bd. II, S. 67 flgg., 119—124 und 130—132.

womit jenes Janusdenkmal zusammenhängt, dessen gekrümmte Finger eben diese Zahl darstellten. Der noch immer mangelhaften Jahreslänge wurde im Jahre 304 der Stadt durch die Decemvirn, wie es scheint, mittels eines Schaltmonates nachgeholfen, der alle zwei Jahre abwechselnd mit 22 und mit 23 Tagen eingeschoben wurde. Jetzt war das Jahr wieder zu lang, und zwar nahezu um einen Tag, denn $4 \cdot 355 + 22 + 23 = 1465 = 4 \cdot 366\frac{1}{4}$. Es mußte also von Zeit zu Zeit ein Schaltmonat weggelassen werden, erst regellos, dann im 24jährigen Schaltzyklus. So trat allmählich eine heillose Unordnung ein, so zwar, daß die Chronologie hinter dem wirklichen Jahre um volle 85 Tage zurückblieb. Cäsar war eben siegreich aus dem alexandrinischen Feldzuge zurückgekehrt, welcher die Jahre 48 und 47 in Anspruch nahm, als er beraten von Sosigenes die chronologische Frage ins reine brachte, so daß die Vermutung nahe liegt, Sosigenes, der von Simplicius ein Ägypter, von Plinius ein Peripatetiker genannt wird[1]), sei selbst Alexandriner gewesen, und habe noch aus den Schätzen der alexandrinischen Gelehrsamkeit schöpfend von der Kalenderverbesserung aus dem Jahre 238 unter König Ptolemäus Euergetes I. gewußt, deren wir (S. 329) gedacht haben. Jedenfalls war Cäsars Einrichtung die gleiche, welche damals in Alexandria getroffen worden war. Das Jahr 46 war das letzte Jahr der Konfusion, ein Name, welcher ihm geblieben ist. Die 85 fehlenden Tage wurden in ihm eingeschaltet, und nun sollte jedes Jahr aus 365 Tagen bestehen, und zur Ergänzung alle vier Jahre zwischen dem 23. und 24. Februar oder römisch gesprochen zwischen dem dies septimus und sextus ante Calendas Martis ein Tag als bissextus eingeschaltet werden, woraus der Name des bissextilen Jahres für das Schaltjahr entstand.

Noch ein zweiter großer Gedanke war in Cäsars Geiste erwacht oder erweckt worden, der einer Vermessung des ganzen römischen Reiches, wie sie unserer früheren Bemerkung (S. 533) gemäß schon insofern nötig war, als das ganze Reich ein Templum sein mußte, ein wohlorientiertes Eigentum mit gleichmäßig gerichteten, gleichmäßig abgesteckten Grenzen. Auch für diesen Gedanken war Cäsar schriftstellerisch tätig, wenn man einer Aussage trauen darf, welche den Ursprung römischer Feldmeßkunst mit einem Briefe Cäsars in Verbindung setzt[2]). Doch leider ist von diesem Briefe so wenig wie von der astronomischen Schrift ein eigentlicher Überrest

---

[1]) Über Sosigenes vgl. den von Baehr verfaßten Artikel in Paulys Realenzyklopädie. [2]) *Nunc ad epistolam Julii Caesaris veniamus quod ad huius artis originem pertinet.* Römische Feldmesser I, 395.

auf uns gekommen. War der Gedanke der Reichsvermessung durch andere in Cäsar angeregt worden, so müssen offenbar auch hier Alexandriner mit im Spiele gewesen sein. Wenigstens waren es Männer mit durchaus griechisch klingenden Namen, welchen verschiedenen Quellen nach Cäsar die Ausführung seines Gedankens anzuvertrauen gedachte oder schon übertragen hatte, als er am 15. März 44 v. Chr. unter Mörderhand verblutete.

Augustus ließ das Werk nicht unerfüllt[1]). Keinen Geringeren als M. Vipsanius Agrippa betraute er mit der Leitung des ganzen Unternehmens, und unter diesem scheint ein Oberwegemeister Balbus tätig gewesen zu sein, der eine wie der andere vielleicht nur mit ihrem Namen bei der Angelegenheit beteiligt, um dem Unternehmen wenigstens einen römischen Anstrich zu verleihen, wenn es von Römern nicht ins Werk gesetzt werden konnte. Fühlte man auch, daß Griechen allein fähig waren das Gewünschte zu leisten, so trug man doch wohl eine gewisse Scheu sie den Ruhm ihrer Leistung davontragen zu lassen, und so ist von der Reichsvermessung bald des Augustus, bald des Agrippa, bald des Balbus die Rede, welche die Zeit von 37 bis 20 v. Chr. im ganzen in Anspruch genommen haben dürfte. Gehörte, wie wir (S. 366) sahen, ein Heron Metricus zu den tatsächlich an der Arbeit Beschäftigten, was nicht ganz zweifellos ist, und haben wir, was ebensowenig zweifellos ist, in Heron Metricus unseren Heron von Alexandria zu erkennen, so muß man zugestehen, daß der richtige Mann an den richtigen Platz gestellt war. Ergebnis der Reichsvermessung war die verbürgtermaßen einst vorhandene große Landkarte, welche den Namen des Agrippa führte, und welche in einer besonders dazu aufgebauten Säulenhalle „der Welt die Welt als Schauspiel darbot“[2]); Ergebnis die geographischen Kommentarien des Agrippa, auf welche ganze Bücher aus der Naturgeschichte des Plinius sich stützen.

Die gleiche Zeit ungefähr dürfen wir zuversichtlich als diejenige betrachten, während welcher die mathematischen Schriften den Römern einigermaßen bekannt wurden, deren die griechischen Feldmesser sich bei ihren Arbeiten bedienten, und deren Wert auch für den Nichtsachverständigen aus der Trefflichkeit dieser Arbeiten sich erschließen ließ. Was das aber für Schriften waren, ist keinem Zweifel unterworfen. Es war vor allen der „Heron“, das feldmesse-

---

[1]) Die letzte Schrift über die große Reichsvermessung ist die Breslauer Habilitationsschrift von J. Partsch, Die Darstellung Europas in dem geographischen Werke des Agrippa, 1875. Ältere Literatur vgl. Agrimensoren S. 82—84. [2]) Plinius, *Histor. natural.* III, 2: *Orbem terrarum orbi spectandum propositurus erat.*

rische Handbuch des Alexandriners, welches so auf italischem Boden Eingang fand. Es war aus ihm ebensowohl die Feldmeßkunst als die Feldmeßwissenschaft zu erlernen, wenn wir diese beiden unterscheidenden Namen weiter gebrauchen, um durch den ersteren die eigentlichen praktischen Arbeiten auf dem Felde, durch den zweiten die daran anknüpfenden Rechnungen zu bezeichnen, welche letztere wir auch wohl rechnende Geometrie nennen (S. 406). Jetzt verdrängte die vollkommenere Dioptra die altertümliche Groma, jetzt bürgerten sich Regeln zur Ausrechnung der Felder ein, während man bisher vielleicht jede derartige Regel entbehrte, ohne sie zu vermissen, weil das ausgemessene Land in gleichmäßigen Rechtecken von bekannter Größe bestehend einer Flächenberechnung nicht bedurfte, nicht ausgemessenes Land aber seinen Besitzer nicht leicht änderte; wenigstens wurden nur über Besitzstücke mit geradlinigen, zueinander senkrechten Grenzen Flurkarten öffentlichen Glaubens angefertigt.

Um die Zeit, zu welcher unter dem Einflusse des Machthabers die Veränderung römischen Geschmackes stattfand, welche nur zu wenig nachhaltig sich erwies, als daß sie der Mathematik zu Fortschritten hätte verhelfen können, schrieb Marcus Terentius Varro, der Freund des Cicero, des Pompejus, in späterer Zeit des Cäsar, dessen Leben nach der wahrscheinlichsten Annahme die Jahre 116 bis 27 v. Chr. erfüllte. In politischen Kreisen spielte er trotz seiner Beziehungen eine nur selten und wenig hervorragende Rolle. Desto bedeutender war die literarische Tätigkeit, der er sich hingab. Er gebot über fast unerschöpfliches Arbeitsmaterial, da er nicht nur Besitzer der großartigsten Privatbibliothek war, sondern auch von Cäsar einer öffentlichen Büchersammlung vorgesetzt wurde. Wie er aber dieses Material zu benutzen verstand, beweist seine eigene Äußerung[1], nach welcher er am Ende seiner siebziger Jahre 490 Bücher geschrieben hatte, und so kann man wohl dem Urteile des Terentianus Maurus, eines Grammatikers aus den Zeiten der Kaiser Nerva und Trajan, beistimmen, der Varro den Gelehrtesten aller Gegenden nannte. Die erhaltenen Schriften des Varro beziehen sich auf Landwirtschaft und auf Grammatik und nehmen unter den Arbeiten auf diesen beiden Gebieten einen ehrenvollen Rang ein. Um so mehr bedauern wir den Verlust gerade der Werke, welche uns wichtig sein würden[2].

---

[1]) Aul. Gellius, *Noctes Atticae* III, 10, 17: *M. Varro ibi (in primo librorum qui inscribuntur Hebdomades vel De imaginibus) addit se quoque jam duodecimam annorum hebdomadem ingressum esse et ad eum diem septuaginta hebdomadas librorum conscripsisse.* [2]) Gast. Boissier, *Étude sur la vie et les ouvrages de M. T. Varron.* Paris 1861. Über die wissenschaftlichen Schriften, welche zu dem letzten zu gehören scheinen, was Varro schrieb, vgl. pag. 327

Verloren ist eine Schrift über Vermessungen, mensuralia; verloren ist ein Buch Geometrie, in welchem, nach dem Bericht des Cassiodor, die Gestalt der Erde als eirund angegeben war, ein insoweit verdienstlicher Gedanke, als damit in origineller Weise unter Beibehaltung der runden Körpergestalt der Erde ihre Abweichung von der Kugelform gemutmaßt wurde; verloren ist allem Anscheine nach ein arithmetisches Werk Varros, Atticus sive de numeris, welches Vertranius Maurus, der eine Biographie des Varro geschrieben hat, noch im Jahre 1564 in Rom gesehen haben will[1]); verloren ist auch ein Werk aus neun Büchern bestehend, de disciplinis, in welchem, wie man annimmt, enzyklopädisch über die einzelnen Wissenschaften gehandelt war, und welches somit das Urbild für viele ähnliche Sammelwerke abgab, die uns noch begegnen werden, aber selten mehr liefern als einzelne fast nur zufällig verwertbare Notizen. Die Reihenfolge der neun Wissenschaften bei Varro war: 1. Grammatik, 2. Dialektik, 3. Rhetorik, 4. Geometrie, 5. Arithmetik, 6. Astrologie, 7. Musik, 8. Medizin, 9. Architektur, und es ist zweifelhaft, ob nicht die oben erwähnte Geometrie als das hier genannte 4. Buch zu betrachten ist. Würde sich eine bei Plinius vorkommende Notiz[2]) auf das 8. Buch beziehen, so hätte Varro dieses Werk in seinem 83. Lebensjahre verfaßt. Als ganz originell ist übrigens auch bei ihm die Zusammenstellung nicht anzusehen, da die griechische Wissenschaft schon den Begriff der freien Künste ausgebildet hatte, der jetzt in wechselnder Zahl (meistens 7 artes liberales anführend) und in wechselnder Wahl der Gegenstände die ganze Folgezeit bis durch das Mittelalter hindurch beherrscht. Ob freilich Varro, der römisch gesinnte Römer, seine Abhängigkeit von griechischen Mustern nicht teilweise zu verbergen suchte, wird schwerlich mehr zu ermitteln sein. Wir kamen zu dem Gedanken an diese Möglichkeit von der Erwägung ausgehend, daß es Varro vorzugsweise ist, der die Feldmeßkunde der Römer auf etruskische Anfänge zurückgeführt hat.

Der nächste römische Schriftsteller, welchem tiefer gehende mathematische Kenntnisse nicht bloß in allgemeiner Weise zuzutrauen sind, sondern aus dessen Schriften wir Belege dafür zu schöpfen vermögen, ist Vitruvius, der Verfasser von 10 Büchern über Architektur, die vermutlich im Jahre 14 v. Chr. vollendet wurden und dem Augustus zugeeignet sind. Das ist alles, was über die Persönlichkeit des Vitruvius mit Sicherheit gesagt werden kann. Sogar sein Beiname Vitru-

bis 331. Siehe auch Teuffel, Geschichte der römischen Literatur (III. Auflage) S. 288.

[1]) Vossius, *De scientiis mathematicis* pag. 39 (Amsterdam 1650). [2]) Plinius, *Histor. natural.* XXIX, 18, 65.

vius Pollio schwebt einigermaßen in der Luft, indem der Verfasser eines Auszuges aus der vitruvischen Architektur, welcher uns denselben überliefert hat, eine selbst rätselhafte Persönlichkeit von ganz unbekanntem Zeitalter ist, der nur aus sprachlichen Gründen meistens für dem Zeitalter des Vitruvius ziemlich nahestehend und dem entsprechend glaubwürdig gehalten wird. In den Schriften des Vitruvius, sagten wir, stecken mancherlei Belege jenes mathematischen Wissens. In einem Werke über Architektur findet sich an und für sich an den verschiedensten Stellen Veranlassung ein solches Wissen an den Tag zu legen, um wieviel mehr bei Vitruvius, dessen schriftstellerische Eigentümlichkeit es genannt werden kann, daß er mit fast possierlicher Geschwätzigkeit Bemerkungen beizufügen und Geschichtchen zu erzählen liebt, die zu dem behandelten Gegenstande nur in entferntester Beziehung stehen, oft aber uns erwünschte Mitteilungen enthalten. Überall verrät sich dabei Vitruvius als das, als was wir ihn zu finden erwarten mußten, als Schüler der Griechen, wenn auch als einen solchen, der es mitunter wagt von der Ansicht des Lehrers sich zu entfernen. Wir nennen als der Mathematik angehörig[1]) eine Auseinandersetzung über die Größenverhältnisse der einzelnen Körperteile des Menschen; einen Abriß der arithmetischen Harmonielehre nach Aristoxenus; eine Schilderung dessen, was nach Vitruvs Geschmack die drei größten mathematischen Entdeckungen waren: die Irrationalität der Diagonale eines Quadrates, das pythagoräische Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5 und die archimedische Kronenrechnung. Wir nennen Beschreibungen von feldmesserischen Apparaten verschiedener Art und Anweisungen sich derselben zu bedienen. Da ist der Gnomon mit der Bestimmung der Mittagslinie aus zwei Beobachtungen gleicher Schattenlängen am Vor- und Nachmittage. Da sind Nivellierungen mittels der Dioptra und ein Wegemesser. Bei der Beschreibung des letzteren ist gelegentlich der Umfang eines Rades von $4\frac{1}{6}$ Fuß Durchmesser zu $12\frac{1}{2}$ Fuß angegeben, was ein Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser von $3:1$ bezeugt[2]). Wir nennen Berechnungen des Kalibers von Wurfmaschinen aus dem Gewichte der Massen, welche sie zu schleudern bestimmt waren, wobei

[1]) Vitruvius III, 1; V, 4; VIII, 6; IX, 1, 2, 3, 8; X, 14, 15, 17, 21. Vgl. Agrimensoren S. 157 und 86—89. [2]) In älteren Ausgaben des Vitruvius war der Durchmesser des Rades zu 4 Fuß angegeben, was einem $\pi = 12\frac{1}{2} : 4 = 3\frac{1}{8}$ entspräche. Die letzte von V. Rose veranstaltete Ausgabe hat die in unserem Texte angegebene Zahl $4\frac{1}{6}$ als beglaubigte Lesart.

Brüche in Menge vorkommen, allerdings nur ziemlich angenäherte Werte hervorbringend, so daß von der Rechenkunst des Vitruvius auch hierdurch uns keine übermäßig hohe Meinung erweckt wird[1]). Wir haben endlich zu dem (S. 367) zugesagten Nachweise der Abhängigkeit des Vitruvius von Heron überzugehen, eine Abhängigkeit, welche auch die Nivellierungsmethoden in hohem Grade wahrscheinlich machten. Wir glauben es dem Auffinder der betreffenden Beweisstellen schuldig zu sein, seine Schlußfolgerungen im Wortlaute[2]) zu wiederholen, indem wir nur zur Bequemlichkeit unserer Leser die Stellen aus Vitruvius in deutscher Übersetzung geben und vorausschicken, daß Vitruvius sich meistens nur auf die Griechen, *Graeci*, als seine Gewährsmänner bezieht, ohne Aristoteles und Archimedes bestimmt zu nennen, wo sie sicherlich als Quelle dienten:

„Vitruv[3]) schreibt: Ist das kurze Ende (*lingula*) eines eisernen Hebels unter eine Last gebracht, und drückt man dessen langes Ende (*caput*) nicht nach abwärts, sondern hebt es vielmehr aufwärts, so besitzt das auf den Boden der Erde sich stützende kurze Ende diese als Last, die Ecke der Last aber dient dem Drucke. So wird zwar nicht so leicht wie beim Abwärtsdrücken, sondern ihm entgegengesetzt immerhin das Gewicht der Last in die Höhe geschafft.

Die entsprechende Stelle bei Heron[4]) lautet: Nehmen wir zuerst an, er (der Hebel) sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$ und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β (Fig. 81)... Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben..., dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt δ (δ ist die Kante des Körpers γ,

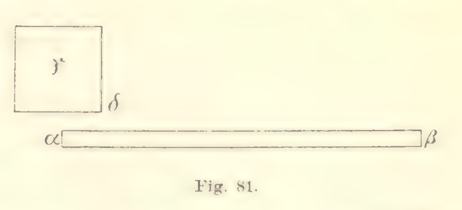


Fig. 81.

gegen welche der Hebel drückt[5])), und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleinen Kreis. Wenn sich nun die Linie $\beta\delta$ zu $\delta\alpha$ verhält wie die Last γ zur Kraft bei β, so hält die Last γ der Kraft β das Gleichgewicht. Ist das Verhältnis $\beta\delta : \delta\alpha$ größer als das der Last zur Kraft, so hat die Kraft das Übergewicht über die Last, weil zwei Kreise um denselben Mittelpunkt vorhanden sind und

[1]) Hultsch, Die Bruchzeichen des Vitruvius in Fleckeisen und Masius, Jahrbücher der Philol. [2]) Edm. Hoppe, Ein Beitrag zur Zeitbestimmung Herons von Alexandria S. 4—5 (Hamburg 1902). [3]) Vitruvius (ed. V. Rose) X, 3, 3 pag. 250. [4]) Heron (ed. L. Nix) II, 114 Z. 30 flgg. [5]) Bei Hoppe steht irrigerweise ς statt δ; übrigens ist der ganze eingeklammerte Satz eine Erläuterung Hoppes und bei Heron nicht vorhanden.

die Last sich am Bogen des kleineren Kreises und die bewegende Kraft sich am Bogen des größeren Kreises befindet usw.

Zunächst ist zu bemerken, daß beide denselben Fehler machen, nämlich diesen einarmigen Hebel als zweiarmigen zu behandeln. Sollte die Heronsche Darstellung richtig werden, müssen die Radien der beiden Kreise $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$ sein, α der gemeinsame Mittelpunkt. Während man aber bei Heron sehr wohl den Grund des Fehlers einsieht, ist bei Vitruv gar nicht abzusehen, wie er auf die Verwechslung gekommen sein sollte, wenn er sie nicht eben aus den auch an dieser Stelle angerufenen „Graeci", d. h. Heron, abgeschrieben hat. Heron hat nämlich vorher die Wellräder beschrieben und da die Gesetze mit Hilfe der Kreisbogen abgeleitet, so führt er auch beim Hebel die Erklärung auf die Welle zurück. Nun hat er die Beobachtung gemacht, daß, wenn unter dem zu hebenden Steine γ das Erdreich weich ist, das Ende α unter dem Steine in dem sandigen Erdboden einen Kreisbogen zu beschreiben scheint, während an der Kante δ scheinbar der Ruhepunkt ist. Diese Beobachtung ist irrig, denn der Stein γ wird nur gehoben, wenn das Ende α schließlich in dem Erdreich doch einen Stützpunkt findet; bis dies geschieht, ist in der Tat das Zusammendrücken der Erde durch α die Wirkung eines zweiarmigen Hebels, dagegen sobald die Last γ gehoben wird, arbeitet der Hebel als ein einarmiger. Der Fehler bei Heron ist also verständlich, der bei Vitruv ist unerklärlich.

Noch an einer anderen Stelle[1]) drückt sich Vitruv sehr zweideutig aus, so daß es mir zweifelhaft ist, ob er Heron verstanden hat. Vitruv beschreibt nach Heron den Windebaum, vergißt zu erwähnen, was bei Heron[2]) ausführlich beschrieben ist, daß der Baum in seinem Unterstützungslager drehbar sein muß, dann sagt er am Schlusse: eine einzige Aufstellung des Windebaums gewährt den Nutzen, daß er durch Neigung die Last soweit man will nach vorn oder nach rechts oder links zur Seite niederlassen kann. Wenn diese „Neigung" (proclinare) erfolgt, ehe die Last an den Kopf des Windebaums gezogen ist, so ist die Vitruvsche Vorrichtung unmöglich, denn beim Heben der Last würde diese sofort nach der Seite hinpendeln, wohin der Balken geneigt ist, und gegen die Mauer oder den Wagen, auf welchen sie gehoben werden soll, schlagen. Heron hat das natürlich gewußt, er schreibt[3]): Hierauf ziehen wir die Seile (der Winden) an, entweder mit den Händen, oder mit sonst einem Werkzeug, und die Last hebt sich alsdann. Wenn man nun einen

---

[1]) Vitruvius (ed. V. Rose) X, 2 pag. 246. [2]) Heron (ed. L. Nix) II, 202.
[3]) Ebenda II, 204.

Stein auf eine Mauer oder an einen beliebigen Ort bringen will, so löst man das Seil[1]) an einem der festen Stützpunkte, welche den Stützbalken, an dem die Rollen befestigt sind, halten und zwar auf der entgegengesetzten Seite als die, nach welcher man den Stein bringen will, und der Balken neigt sich nach jener Seite, dann läßt man das Seil mit der Rolle langsam herab bis zu dem Orte, wo man den Stein einsetzen will. Wenn man aber den Stützbalken, an welchem die Rolle befestigt ist, nicht soviel neigen kann, um die gehobene Last an den beabsichtigten Ort gelangen zu lassen, so bringen wir Walzen darunter an, auf denen wir sie laufen lassen, oder treiben sie mittels Hebels so weit, bis wir sie an die beabsichtigte Stelle bringen.

Ich habe die Heronsche Beschreibung so ausführlich hier angegeben, damit sich jeder überzeugen kann, daß wir es mit der Arbeit eines „Erfinders" oder doch jemandes, der die Werkzeuge genau beobachtet hat, zu tun haben. Es mag sein, daß Vitruv auch meint, man solle erst die Last heben und dann den Balken neigen, gesagt hat er es aber nicht, und seine Leser konnten sehr wohl die umgekehrte Ordnung herauslesen. Die ungenaue Beschreibung macht den Eindruck, als ob Vitruv die Maschine nicht gesehen hätte, sondern nach einer literarischen (unverstandenen) Vorlage gearbeitet habe. Das ist typisch für das Verhältnis Vitruvs zu den von ihm genannten Graeci, d. h. Heron. Und es kann meiner Meinung nach kein Zweifel bestehen, wie das Abhängigkeitsverhältnis zu denken ist."

Wir wissen dieser Auseinandersetzung nichts hinzuzufügen. Höchstens möchten wir deren letzte Worte dahin ergänzen, daß wer die Verwandtschaft zwischen Vitruvius und Herons Mechanik zugibt, nur annehmen kann, Vitruvius habe die Mechanik benutzt und deren Angaben abgekürzt. Daß Heron die undeutliche Schilderung des Vitruvius zu jener klaren Darstellung in der Mechanik erweitert haben könnte, ist uns wenigstens undenkbar, und somit scheint uns die zeitliche Reihenfolge: Heron früher als Vitruvius gesichert. Wer dagegen die erwähnte Verwandtschaft leugnet oder auf gemeinsame Abhängigkeit von einem unbekannten älteren Schriftsteller deutet, wird zunächst als untere Lebensgrenze Herons festzuhalten haben, daß er vor Menelaus von Alexandria gesetzt werden muß.

L. Junius Moderatus Columella[2]) aus Gades (Cadix) war Militärtribun der VI. gepanzerten Legion und lebte als solcher längere Zeit in Syrien. Von dort heimgekehrt widmete er sich mit begeisterter

[1]) Der Windebaum wurde durch drei oder vier Seile aufrechtgestellt.
[2]) Agrimensoren S. 89—93.

Anhänglichkeit der Landwirtschaft, welche er in zwei Werken nacheinander verherrlichte. Von der ersteren kürzeren Ausarbeitung ist nur ein Bruchstück erhalten, die zweite ausführliche Schrift ist dagegen vollständig auf uns gekommen. Die XII Bücher De re rustica, wahrscheinlich 62 n. Chr. geschrieben, sind eine fast unerschöpfliche Fundgrube reichster Art für alle Gebiete, welche zur Landwirtschaft irgendwie in Beziehung gesetzt werden können, da der begabte und gelehrte Verfasser seinen Gegenstand in weitestem Umfange behandelt. Freilich ist damit für ihn die Unbequemlichkeit entstanden, daß man, wie er selbst klagt, über alle möglichen Dinge Auskunft von ihm begehre. Er hilft sich so gut er kann. Er zieht befreundete Fachmänner verschiedener Gattung zu Rate, und so gesteht er auch zu, daß das 2. Kapitel des V. Buches, in welchem er Feldmessung lehrt, kein Erzeugnis seines eigenen Geistes sei[1]). Für Vollständigkeit oder Unvollständigkeit, sowie für die Richtigkeit der gegebenen Vorschriften sind diejenigen verantwortlich, welche ihm hier mit ihrer Erfahrung beigestanden haben.

Zuerst macht Columella seinen Leser mit den unentbehrlichsten Ackermaßen bekannt, dann löst er neun geometrische Aufgaben je an einem bestimmten Zahlenbeispiele. Allgemeine Vorschriften, wie bei anderen Zahlenangaben zu verfahren sei, gibt er nicht; diese soll der Leser sich selbst aus der Musterrechnung entnehmen[2]). Schon an dieser Eigentümlichkeit wird man den Schüler des Heron von Alexandria vermuten, und die Vermutung wird zur Gewißheit, wenn man die Aufgaben des Columella selbst ansieht. Es sind sämtlich Aufgaben, welche mit solchen in Herons Vermessungslehre oder in den Heronischen Sammlungen oder in beiden übereinstimmen, wenn wir von der einzigen Verschiedenheit absehen, daß Columellas Zahlenwerte für die Länge einzelner Strecken dort nicht auftreten. Wir erinnern uns, daß Heron in der Sammlung, welche die Überschrift Geometrie führt, die Fläche des Sechsecks nach zwei Methoden berechnet. Zuerst läßt er das Quadrat der Sechsecksseite 13 mal nehmen und dann durch 5 teilen; anders, heißt es hierauf, in einem anderen Buche, wo die Vorschrift gegeben sei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ des Seitenquadrats 6fach anzusetzen; als Beispiel dient das Sechseck von der Seite 30. Vergleichen wir damit Columellas 9. Aufgabe, so erkennen wir in der Rechnung der Fläche des Sechsecks von der Seite 30 durch die Zahlen 900, 300, 90 und der Summe 390 dieser beiden

[1]) *Ne dubites id opus geometrorum magis esse quam rusticorum, desque veniam, si quid in eo fuerit erratum, cuius scientiam mihi non vindico.* [2]) *Cuiusque generis species subiciemus, quibus quasi formulis utemur.*

letzten hindurch zum 6fachen derselben Summe mit 2340 genau den Gang und die Zahlen Herons. Heronische Formeln bieten nun auch die anderen Aufgaben Columellas, so die 4. Aufgabe, welche das gleichseitige Dreieck als $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ des Seitenquadrats berechnet, die 8. Aufgabe, welche die Fläche eines Kreisabschnittes, der kleiner ist als der Halbkreis, aus der Sehne s und der Höhe h des Abschnittes nach der Formel $\frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$ findet usw. Auch die von uns als nicht anzuzweifelnd gegebene Zeitbestimmung, Heron müsse vor Menelaus gesetzt werden, erleidet höchstens eine Verschiebung um wenige Jahrzehnte, wenn wir Heron gegenwärtig vor das Jahr 62 n. Chr. hinaufzurücken Veranlassung finden.

Etwa gleichaltrig mit Columella war M. Fabius Quintilianus, dessen Lebenszeit ungefähr von 35—95 angesetzt wird. Er verfaßte XII Bücher Vorschriften für Redner, und es ist ein glücklicher Zufall zu nennen, daß im I. Buche dieses Werkes eine Stelle von mathematischer Wichtigkeit sich vorfindet, welche wir um ihrer nach verschiedenen Seiten wirkenden Bedeutung willen in wörtlicher Übersetzung folgen lassen[1]): „Wer wird einem Rechner nicht vertrauen, wenn er vorbringt, der Raum, der innerhalb gewisser Linien enthalten sei, müsse der gleiche sein, sofern jene Umfassungslinien dasselbe Maß besitzen? Doch ist dieses falsch, denn es kommt sehr viel darauf an, von welcher Gestalt jene Umfassung ist, und von den Geometern ist Tadel gegen solche Geschichtsschreiber erhoben worden, welche da glaubten, die Größe von Inseln werde zur Genüge durch die Dauer der Umschiffung gekennzeichnet. Je vollkommener eine Gestalt ist, um so mehr Raum schließt sie ein. Stellt daher jene Umfassungslinie einen Kreis dar, welches die vollkommenste der Gestalten der Ebene ist, so schließt sie mehr Raum ein, als wenn sie bei gleicher Küstenstrecke ein Quadrat bildete. Das Quadrat hinwiederum schließt mehr Raum ein als das Dreieck, das gleichseitige Dreieck mehr als das ungleichseitige. Doch dieses andere mag vielleicht zu dunkel sich erweisen; verfolgen wir dagegen einen auch dem Ungeübten sehr leichten Versuch. Es wird nicht wohl irgend jemandem unbekannt sein, daß das Maß des Jucharts[2]) 240 Fuß in die Länge beträgt, während es nach der Breite um die Hälfte sich öffnet; was also der Umfang ist, und wieviel Feld er in sich schließt ist bequem zusammenzubringen. Aber 180 Fuß an

[1]) Quintilianus, *Institutiones oratoriae* (ed. Halm, Leipzig 1868) I, 10, 39—45 (pag. 62). [2]) *jugerum* ist das römische Doppelfeldmaß, welches z. B. Varro definiert hat: *Jugerum dictum iunctis duobus actibus quadratis.*

jeder Seite bilden dieselbe Ausdehnung der Grenzen, dagegen weit mehr von den vier Linien eingeschlossenen Flächenraum. Wer widerwillig ist das auszurechnen, kann dasselbe an kleineren Zahlen lernen. Je 10 Fuß ins Quadrat sind 40 Fuß ringsum, inwendig 100 Fuß. Sind je 15 Fuß seitlich, je 5 in der Fronte, so wird man bei gleichem Umfange von dem, was eingeschlossen ist, den vierten Teil abziehen müssen. Wenn aber 19füßige Seiten nur um je 1 Fuß voneinander abstehen, so werden sie nicht mehr Quadratfuße in sich fassen, als die Zahl, nach welcher die Länge wird gezogen worden sein. Die Umfassungslinie aber wird von derselben Ausdehnung sein wie die, welche 100 Quadratfuß enthält. Was man also von der Quadratgestalt abzieht, das geht auch von der Menge zugrunde. Es kann folglich auch das erreicht werden, daß mit einem größeren Umfange eine geringere Menge Feldes eingeschlossen sei. So in der Ebene, denn daß bei Hügeln und Tälern die Bodenfläche eine größere ist als die der darüber befindlichen Himmelsdecke, liegt auch für den Unerfahrenen zutage.“ Wir haben diese Stelle wiederholt früher beigezogen. Wir haben (S. 173) mit ihr belegt, daß irrige Meinungen fast zäher festgehalten werden als richtige. Wir möchten beinahe entschuldigend ergänzen, daß Römer, deren Felder, wie wir gesehen haben, tatsächlich gleiche Gestalten besaßen, leichter dem gerügten Irrglauben verfallen konnten. Durften sie doch beinahe dem Beispiele, durch welches Quintilian sie eines Besseren belehren wollte, entgegenhalten, solche Felder von 180 Fuß ins Quadrat kämen nicht vor. Zweitens ist, wie uns scheint, durch die Sätze über den Flächenraum der verschiedenen, weniger vollkommnen und vollkommneren, Figuren der Beweis geliefert (S. 357), daß Zenodorus, welchen man für den Erfinder jener Sätze hält, vor Quintilian gelebt haben muß, wodurch mindestens eine untere Lebensgrenze für denselben gewonnen wird, die weit höher hinaufreicht als das Zeitalter des Pappus. Drittens endlich ist uns Quintilian ein Beispiel fast heimlicher Beschäftigung mit mathematischen Dingen, wie wir sie oben (S. 539) angekündigt haben, er weiß, daß er von seinen Lesern nicht verstanden werden wird, daß er mit seinem Wissen vereinzelt dasteht, aber er kann es doch nicht unterlassen wenigstens nebenbei Sätze zu erwähnen, die für ihn Interesse besitzen.

Dem Geburts- wie dem Todesjahre nach wieder nahe bei Quintilian wird Sextus Julius Frontinus[1]) von 40—103 angesetzt. Er gehörte dem Staatsdienste an, während Vespasianus, Titus, Domitianus, Nerva und Trajanus als Kaiser aufeinander folgten. Unter

[1]) Agrimensoren S. 93 flgg.

Domitianus' Regierung scheint er mit Vorschriften über die Feldmeßkunst erstmalig als Schriftsteller aufgetreten zu sein. Kriegswissenschaftliche Schriften folgten rasch. Ein uns einzig vollständig und unverfälscht durch fremde Zutaten erhaltenes Werk in zwei Büchern über Wasserleitungen[1]), unter Nerva begonnen, unter Trajan etwa im Jahre 98 beendigt, bildet den Schluß seiner schriftstellerischen Tätigkeit. Für die Geschichte der Mathematik bietet es kaum etwas mit Ausnahme von ziemlich zahlreichen Berechnungen von Umfängen von Wasserleitungsröhren aus ihren Durchmessern, bei welchen die Verhältniszahl $\pi = 3\frac{1}{7}$ benutzt ist, soweit die römischen Duodezimalbrüche, mit denen allein operiert ist, es gestatten die Verhältniszahl zu erkennen. Wenn Frontinus in der Vorrede zu dieser Schrift sagt: nachdem Kaiser Nerva ihn dem sämtlichen Wasserwesen vorgesetzt habe, schreibe er dies Büchlein um sich selbst über seine Pflichten klar zu werden, es könne dann möglicherweise auch seinen Nachfolgern im Amte sich nützlich erweisen; was er dagegen früher geschrieben, habe sich stets auf Dinge bezogen, mit welchen er durch lange Übung vertraut war, und sei daher der Hauptsache nach mit Rücksicht auf die Belehrung seiner Nachfolger entstanden, so sind diese Bemerkungen reichlich dazu angetan uns den Verlust des feldmesserischen Werkes bedauern zu lassen. Wir wissen nur aus einer Randbemerkung[2]) eines Schreibers vermutlich zu Anfang des XII. S., daß dieser ein Buch des Frontinus gekannt hat, in welchem Flächeninhalte von Vierecken berechnet wurden. Wir wissen ferner von einzelnen Stellen aus jenem feldmesserischen Werke und von der fast wörtlichen Wiederkehr solcher Stellen in einem berühmten Buche aus dem Anfange des XIII. S.[3]), welche die Vermutung erweckt, gewisse dort beschriebene und, wie der Verfasser sich ausdrückt, alten Weisen zu verdankende feldmesserische Operationen möchten, wiewohl in den Fragmenten des Frontinus selbst fehlend, ursprünglich von ihm beschrieben worden sein.

Die uns erhaltenen Bruchstücke des Frontinus finden sich vereinigt mit anderen für die Geschichte der Mathematik hochwichtigen Fragmenten in einer Sammelhandschrift, welche von 1566—1604 im Besitze von Johannes Arcerius in Gröningen war und deshalb von

---

[1]) Vgl. über dieses Werk eine kleine Druckschrift des New Yorker Wasserbauingenieurs Clemens Herschel, *Frontinus and his two books on the water supply of the city of Rome*, die den Inhalt einer von ihrem Verfasser am 2. Februar 1894 in der Cornell-Universität gehaltenen Vorlesung wiedergibt. [2]) Agrimensoren S. 94 und Anmerkung 186. [3]) Agrimensoren S. 179 flgg. über Frontinus und Leonardo von Pisa.

dem nachfolgenden Eigentümer Petrus Scriverius in einer Beschreibung aus dem Jahre 1607 den Namen der arcerianischen Handschrift erhielt, als welche sie heute noch bekannt ist[1]). Sie ist eine der ältesten größeren Handschriften, welche man überhaupt besitzt, und nach dem Urteile der Fachgelehrten nicht später als im VII., vielleicht schon im VI. S. niedergeschrieben. Man nimmt an, es seien um das Jahr 450 aus älteren Schriften, sämtlich auf Gebietseinteilung, Agrargesetzgebung und dergleichen bezüglich, amtliche Auszüge veranstaltet worden als rechtswissenschaftlich-statistisches Nachschlagebuch für Verwaltungsbeamte des römischen Kaiserreichs, und eine wieder um ein oder anderthalb Jahrhundert jüngere Abschrift dieser Sammlung sei als Codex Arcerianus auf uns gekommen, die sauber und schön geschriebene Arbeit eines vielleicht als Beamter sehr brauchbaren Mannes, der aber von Feldmessung wenig oder gar nichts verstand und daher zu den Fehlern, welche bereits in seiner Vorlage vorhanden gewesen sein mögen, noch weitere nicht seltene eigene Versehen und Schreibfehler hinzufügte. Man sieht, daß es insofern keine sehr reine Quelle ist, aus welcher wir genötigt sind unser Wissen zu schöpfen. Es steht keineswegs fest, daß die verschiedenen Bruchstücke gerade von den Schriftstellern herrühren, welchen sie zugeschrieben sind; es steht keineswegs fest, wie die Namen, welche mitunter in mehrfachen Schreibformen vorkommen, wirklich gelautet haben; es steht keineswegs fest, wann die Träger dieser Namen gelebt haben, ob, wie man aus ihrer Vereinigung und aus manchen anderen Umständen schließen möchte, sie alle etwa der Zeit von 50 bis 150 angehören, d. h. dem Jahrhunderte, in dessen Mitte Kaiser Trajan lebte, unter welchem, wie wir uns wiederholt erinnern wollen, Menelaus von Alexandria in Rom seinen Aufenthalt aufgeschlagen hatte, oder ob man für sie zum Teil wesentlich späterer Datierungen bis um das Jahr 400 sich bedienen muß.

Inmitten dieser Zweifel begnügen wir uns die Namen der Feldmesser Frontinus, Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus, Vitruvius Rufus, die als Verfasser kleinerer oder größerer Bruchstücke[2]) genannt sind, anzugeben, ferner kurz zu berichten, was man

---

[1]) Über den *Codex Arcerianus* der Wolfenbüttler Bibliothek vgl. Agrimensoren S. 95. [2]) Die Bruchstücke des Epaphroditus und Vitruvius Rufus vgl. Agrimensoren und *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus publié d'après le Ms. Latin 13084 de la Bibliothèque Royale de Munich par* Victor Mortet *avec une introduction de* Paul Tannery. *Notices et Extraits etc.* T. XXXV, 2e Partie (Paris 1896); alle übrigen s. Römische Feldmesser I. Übersetzungen wichtiger Teile bei E. Stoeber, Die römischen Grundvermessungen. München 1877.

von den Persönlichkeiten des Hyginus und des Balbus weiß, und schließlich ein Gesamtbild der in jenen Bruchstücken enthaltenen mathematischen Kenntnisse zu geben, ohne eine genauere Zeitbestimmung daran zu knüpfen als diejenige, daß alles vorhanden war, als der Schreiber des Codex Arcerianus es zu Papier brachte.

Der Name Hyginus tritt mehrfach in der römischen Literatur auf. Hyginus, ein Zeitgenosse des Augustus, hat ein astronomisches Werk verfaßt. Ein Militärschriftsteller Hyginus hat über die Anlage von Lagern mutmaßlich zwischen 240 und 267 gehandelt[1]. Von beiden verschieden ist der Feldmesser Hyginus, der unter Trajan lebte und ein größeres feldmesserisches Werk wahrscheinlich im Jahre 103, im Zwischenraume zwischen den beiden dacischen Kriegen verfaßte[2].

Auch der Name Balbus tritt mehrfach auf. Wir haben einen Oberwegemeister Balbus aus der Zeit des Augustus zu nennen gehabt, dem die Aufsicht über die große Reichsvermessung übertragen war. Der Balbus, von welchem uns Bruchstücke überliefert sind, gehört der trajanischen Zeit an[3]. Er begleitete den Kaiser auf seinem dacischen Feldzuge, und nach errungenem Siege, mithin 103 oder wenn der zweite Feldzug gemeint war spätestens 117, nach Hause zurückkehrend, richtete er eine feldmesserische Schrift an einen Celsus, welcher nicht genau bekannt ist, aber den Worten des Balbus gemäß eine erste Autorität des Ingenieurfaches gewesen sein muß.

Die anderen Namen Marcus Junius Nipsus, Epaphroditus, Vitruvius Rufus sind außer in Verbindung mit den ihnen zugeschriebenen Bruchstücken nicht näher bekannt. Den erstgenannten, wahrscheinlich einen griechischen Freigelassenen eines Römers aus dem Hause der Junier, hat man gewichtige Gründe nicht später als in das II. S. zu setzen. Um jene Zeit dürfte nämlich das Geschlecht der Junier erloschen sein, um jene Zeit wurde es auch Sitte vier, fünf, sogar sechs Namen nacheinander zu führen, während Marcus Junius Nipsus wie in guter alter Zeit nur Pränomen, Nomen und Cognomen erkennen läßt.

Fassen wir sämtliche Schriftsteller des Codex Arcerianus zusammen, so läßt sich unschwer bestätigen, was wir schon vorher behaupten durften: auch diese Feldmesser sind als Schüler des Heron von Alexandria anzusehen, daneben vielleicht noch anderer grie-

---

[1]) H. Droysen im Rhein. Museum für Philologie (1875) XXX, 469.
[2]) Lachmann in Römische Feldmesser II, 139 und Hultsch, *Scriptores metrologici* II, *Prolegomena* pag. 6. [3]) Römische Feldmesser I, 91, 93 und II, 146 flgg. (Mommsen).

chischer Schriftsteller; auch sie bedienten sich des andern Buches von Herons Geometrie, sei es im Originale, sei es in einer lateinischen Übersetzung, deren Vorhandensein freilich nur daraus erschlossen ist, daß es unwahrscheinlich gefunden wird, daß Feldmesser untergeordneten Geistes imstande gewesen sein sollten den Urtext zu verstehen. Andrerseits könnte freilich die Art, wie der Text dieser Feldmesser mit dem Herons in Übereinstimmung tritt, eine Übereinstimmung, die mitunter einem Gegensatz ähnelt, zur Vermutung führen, sie hätten ein in fremder Sprache geschriebenes Buch mißverstanden, oder aber, wenn sie selbst griechischen Stammes waren, sie hätten sich in der ihnen fremden lateinischen Sprache nur mangelhaft auszudrücken gewußt.

Es lassen sich bei ihnen allen ähnlich wie bei Heron gewisse Hauptabschnitte erkennen, von welchen freilich bei dem einen Schriftsteller der eine, bei dem anderen der andere bevorzugt wird: sie werden gebildet durch Maßbestimmungen, durch geometrische Definitionen, durch praktisch feldmesserische Vorschriften, durch rechnende Geometrie, wozu noch bei Epaphroditus und Vitruvius Rufus, für welche gemeinschaftlich ein größeres Bruchstück durch den Schreiber des Codex Arcerianus beansprucht ist, ein Abschnitt über Vieleckszahlen und Pyramidalzahlen kommt, wohl einen anderen Ursprung verratend als Heron, in dessen Schriften, wenigstens soweit die uns erhaltenen Sammlungen Aufschluß geben, derartiges nicht vorkam.

Maßbestimmungen und Definitionen waren für jeden notwendig, der ohne Geometer zu sein Geometrisches lesen wollte oder mußte. Sie hier zu treffen kann uns daher nicht in Erstaunen setzen, und wir bemerken nur, weil gerade die Gelegenheit sich bietet, daß Parallellinien durch *lineae ordinatae* übersetzt sind[1]), das Wort, welches viele Jahrhunderte später für die einer bestimmten Richtung parallelen Geraden (Ordinaten) in Anwendung blieb und uns als einem schon bei den Griechen insbesondere bei Apollonius (S. 337) vorkommenden Ausdrucke nachgebildet erscheint. Dem Charakter des Verwaltungshandbuches gemäß, welchem es nicht auf die Auffindung von Entfernungen, nicht einmal auf die Ausmessung von Grundstücken, sondern auf die Rechtsverhältnisse schon ausgemessener Felder und etwa auf die Berechnung ihres Rauminhaltes aus gegebenen Ausdehnungen zum Zwecke von Versteuerung und dergleichen ankam, sind die Stücke über das, was wir Feldmeßkunst nennen, am kärglichsten vertreten, und wir wissen aus dem Vorhandenen kaum mehr,

[1]) Agrimensoren S. 98.

als daß Entsprechendes aus der Feder eines Frontinus, eines Balbus, eines Celsus einstmals vorhanden gewesen sein muß. Schon um dieser wichtigen Gemeinsamkeit des Inhaltes willen und wegen des vereinigten Vorkommens der Bruchstücke in dem mehrgenannten Codex Arcerianus wollen wir für die Verfasser derselben uns eines häufig benutzten Sammelnamens bedienen und sie die Agrimensoren nennen.

Die Schüler des Heron erkennen wir in ihnen ferner an einer ziemlichen Anzahl von Wörtern, die als genaue Übersetzungen erscheinen[1]). Die Scheitellinie insbesondere heißt, wie wir uns erinnern, bei Heron *κορυφή*, bei den Agrimensoren *vertex* oder *coraustus*, letzteres eine offenbare Verstümmelung von *κορυστὸς* (sc. *γραμμή*)[2]). Wird in einem Dreiecke eine Senkrechte aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, und trifft sie dieselbe zwischen ihren Endpunkten, so bildet sie einen Abschnitt, der bei Heron *ἀποτομή*, bei den Agrimensoren *praecisura* heißt. Trifft die Senkrechte jenseits des Endpunktes auf die Grundlinie, so entsteht eine Überragung, bei Heron *ἐκβληθεῖσα*, bei den Agrimensoren *eiectura*. Wenn die Aufgabe gestellt ist, leitet Heron die Auflösung mitunter durch die Worte *ποίει οὕτως*, die Agrimensoren durch *sic quaeres* ein, häufig abgekürzt in S. Q., wiewohl man auch versucht hat S. Q. als Abkürzung von *sequitur* zu deuten[3]) und sich darauf stützt, daß in einem dem IX. oder X. S. angehörenden Münchner Manuskripte dieses Wort an Stelle des S. Q. mannigfach abgekürzt erscheint. Wenn Heron das rechtwinklige Dreieck *ὀρθογώνιον*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *ὑποτείνουσα*, einen Schenkel des rechten Winkels *κάθετος*, den Flächeninhalt *ἔμβαδον*, die Ausmessung nach Fußen *ποδισμός* nennt, so schreibt ein Agrimensor fast die gleichen Wörter nur mit lateinischen Buchstaben, so daß sie bei ihm *hortogonium*, *hypotenusa*, *chatetus*, *embadum*, *podismus* lauten.

Gleichwie bei Heron findet sich die Berechnung der Fläche des Dreiecks aus seinen drei Seiten. Aufgaben über Dreiecke, in welchen eine Höhe gezogen ist, sind geradezu wörtlich aus Herons Geometrie übersetzt. Wie bei Heron sind rationale rechtwinklige Dreiecke angegeben, ausgehend von ungeraden sowie von geraden Zahlen. Die heronische Berechnung des gleichseitigen Dreiecks findet sich zwar nicht vollständig, aber doch ist dessen Einwirkung unverkennbar.

---

[1]) Genauere Beweisführung des hier Behaupteten in unseren „Agrimensoren". [2]) Diese Ableitung wurde 1840 durch Gottfried Hermann gegeben. Vgl. Zeitschr. Math. Phys. XX. Histor.-liter. Abtlg S. 68. [3]) Tannery in einer Fußnote zu *Un nouveau texte d'arpentage etc.* *Notices et extraits* XXXV, 2e Partie, pag. 532 (pag. 26 des Sonderabdrucks).

Das gleichseitige Dreieck von der Seite 30 habe, heißt es nämlich, als Quadrat der Seite 900, als Quadrat der halben Seite 225, als Höhe 26 und darin liegt eingeschlossen, daß nach der Ansicht des Verfassers $26 = \sqrt{900 - 225} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$ sei, also $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ wie bei Heron. Wir bedürfen wohl nicht einer noch genaueren Beweisführung für die Abhängigkeit der Agrimensoren von Heron von Alexandria und wollen vielmehr auf einige Dinge aufmerksam machen, welche in unserem Heron nicht ermittelbar, doch ohne Zweifel griechischen Ursprungs gewesen sein müssen.

Unter dem Namen Nipsus ist die Aufgabe überliefert, aus der Fläche $\triangle$ und der Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks die Katheten c_1 und c_2 zu finden. Die Auflösung wendet die Formeln $c_1 + c_2 = \sqrt{h^2 + 4\triangle}$, $c_1 - c_2 = \sqrt{h^2 - 4\triangle}$ an. Dabei ist dem Schreiber das Versehen begegnet bei dem Satze „der Podismus der Hypotenuse beträgt 25 Fuß“ das wichtigere Wort Hypotenuse zu vergessen und nur zu schreiben „der Podismus beträgt 25 Fuß“. Wir werden uns diesen interessanten Schreibfehler zu merken haben, welcher uns im 39. Kapitel dienen wird, im Codex Arcerianus die Quelle eines Werkes aus dem X. S. zu erkennen.

In dem als von Epaphroditus und Vitruvius Rufus herrührend bezeichneten Bruchstücke ist der Durchmesser des in ein rechtwinkliges Dreieck beschriebenen Kreises als der Rest berechnet, welcher bei Abziehung der Hypotenuse von der Summe der beiden Katheten übrig bleibt.

Ebenda wird die Oberfläche von Bergen nach einer Näherungsmethode berechnet, welche derjenigen nahe verwandt ist, von der (S. 489) unter dem Namen des Patrikius die Rede war, welche aber, da sie, wie wir dort bemerkten, fast wahrscheinlicher uralt ist, zur Datierung des Epaphroditus nichts beitragen kann, auch wenn wir genau wüßten, welcher Patrikius in der betreffenden Stelle gemeint ist. Die Berechnung erfolgt, indem das arithmetische Mittel von drei, ein andermal von zwei Kreisperipherien als durchschnittlicher Umfang des Berges das eine Mal mit dessen Höhe, das andere Mal mit der halben Summe zweier an Abhängen von verschiedener Steilheit zu messenden Höhen vervielfacht wird.

Wieder in einer anderen Aufgabe ist mit Hilfe eines massiven gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, längs dessen Hypotenuse man bei horizontaler Lage der einen Kathete den Gipfel eines Baumes einvisiert, eine der vertikalen Höhe des Baumes gleiche Entfernung von seinem Fuße bestimmt, die alsdann abgemessen werden kann

und somit eine Höhenmessung liefert[1]), welche von der Benutzung des Schattens absieht; eine Methode, welche sowohl an sich bemerkenswert ist, als auch dadurch, daß sie durch die in einem Zwischensatze hervorgehobene Ausschließung der Schattenbeobachtung bestätigt, daß die Höhenmessung aus dem Schatten, das Verfahren also, welches man bis auf Thales zurückzuführen liebt, die Regel bildete.

Am merkwürdigsten sind einige Paragraphe des gleichen Fragmentes, welche mit arithmetischen Sätzen sich beschäftigen, und zwar merkwürdig nach zwei Richtungen: erstlich dadurch, daß sie erkennen lassen, was einzelne in Rom aus offenbar griechischer Quelle einmal gewußt haben, zweitens dadurch, daß sie bezeugen, wie spätestens zur Zeit der Abfassung der Sammlung, welche uns als Quelle dient, die Dinge bereits mißverstanden wurden. Wir haben (S. 361) bei Hypsikles um 180 v. Chr. die Definition der $r$ten $m$eckszahl kennen gelernt als $p_m^r = 1 + (m-1) + (2m-3) + \cdots + (1 + (r-1)(m-2))$. Wir haben (S. 486) bei Diophant um 300 n. Chr. vielleicht allerdings aus früherer Quelle die beiden Gleichungen auftreten sehen $p_m^r = \frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2-(m-4)^2}{8(m-2)}$ und $r = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(m-2)p_m^r+(m-4)^2}-2}{m-2}+1\right]$. Diese beiden Formeln nun, welche bei bekannter Ordnung m einmal die Vieleckszahl aus ihrem oberen Index r, das andere Mal jenen Index r aus der $r$ten Vieleckszahl ableitet, kommen in unserem Fragmente vor, zwar nicht wie bei Diophant als in Worte gekleidete allgemeine Formeln, aber in ihrer Anwendung auf die Vieleckszahlen aufeinanderfolgender Ordnung von der Dreieckszahl bis zur Zwölfeckszahl, mit zwei Rechenfehlern, wo es um Fünf- und Sechseckszahlen sich handelt. Dort wäre nämlich richtig $p_5^r = \frac{3r^2-r}{2}$, $p_6^r = \frac{4r^2-2r}{2}$, während die irrigerweise statt der Subtraktionen in den betreffenden Zählern vorgenommenen Additionen die falschen Formeln $p_5^r = \frac{3r^2+r}{2}$, $p_6^r = \frac{4r^2+2r}{2}$ hervorbrachten, nach welchen gerechnet ist. Es ist gewiß berechtigt, daraus den Schluß zu ziehen[2]), daß dabei die allgemeinen Wortformeln den Ausgangspunkt bildeten, denn es ist unendlich viel wahrscheinlicher, daß zwei Fehler mangelhafter Substitution vorkommen, als daß bei der Einzelbetrachtung der aufeinander folgenden Vieleckszahlen zwei in Rechenfehler ausartende

[1]) *ut sine umbras solis et lunae mensuris* (Agrimensoren S. 215, lin. 8—9).
[2]) Agrimensoren S. 126.

Schreibfehler just bei niedrigem Werte von m sich hätten einschleichen sollen. In der Tat sind in der Münchner Handschrift die richtigen Formeln an dieser Stelle benutzt.[1])

Auch eine merkwürdige Formel für Pyramidalzahlen läßt aus den Einzelfällen sich erkennen, deren Ableitung freilich nirgend gegeben ist, aber nachträglich sich leicht erraten läßt, ohne irgend Kenntnisse in Anspruch zu nehmen, welche nicht bei den Griechen sich nachweisen ließen. Nennt man die Summe der r ersten $m$ecks-zahlen die $r$te $m$eckige Pyramidalzahl und schreibt dafür P_m^r, so ist die Definitionsgleichung $P_m^r = p_m^1 + p_m^2 + \cdots + p_m^r$. Nun nehmen wir an, es sei ausgehend von dem bekannten Satze

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

die Umformung vorgenommen worden:

$$\frac{[(m-2)(2r-1)+2]^2 - (m-4)^2}{8(m-2)}$$

$$= \frac{[(m-2)(2r-1)+2+(m-4)] \cdot [(m-2)(2r-1)+2-(m-4)]}{8(m-2)}$$

$$= \frac{(m-2)\,2r\,[(m-2)\,2r+8-2m]}{8(m-2)} = \frac{m-2}{2} \cdot r^2 - \frac{m-4}{2} \cdot r.$$

Setzt man die entsprechenden Werte in alle Vieleckszahlen von p_m^1 bis p_m^r ein, so erhält man

$$P_m^r = \frac{m-2}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + r^2) - \frac{m-4}{2}(1 + 2 + \cdots + r).$$

Aber spätestens zu Archimeds Zeiten (S. 313—314) war bekannt

$$1 + 2 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2} \text{ und } 1^2 + 2^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

wenn auch letzteres noch nicht in der kurzen Form, deren wir uns bedienen. Diese Werte liefern

$$P_m^r = \frac{m-2}{2} \cdot \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} - \frac{m-4}{2} \cdot \frac{r(r+1)}{2}$$

beziehungsweise

$$P_m^r = \frac{r+1}{6}\left[\frac{m-2}{2} \cdot 2r^2 + \frac{m-2}{2} \cdot r - \frac{m-4}{2} \cdot 3r\right]$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[\frac{2(m-2)}{2} r^2 - \frac{2(m-4)}{2} \cdot r + \frac{m-2}{2} \cdot r - \frac{m-4}{2} \cdot r\right]$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[2p_m^r + r\right]$$

und dieser letzteren Formel bedient sich der römische Schriftsteller.

Ja er kennt sogar die Summierung der r ersten Kubik-

[1]) *Un nouveau texte d'arpentage etc. Notices et Extraits* XXXV, 2ᵉ Partie, pag. 540—541 (pag. 34—35 des Sonderabdrucks).

zahlen: $1^3 + 2^3 + \cdots + r^3 = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2$. Auch hier ist die Auffindung des Weges, auf welchem ein Grieche zu dieser Formel gelangen konnte, mag er nun geheißen und gelebt haben wie und wann er wolle, nicht allzuschwierig. Nikomachus, sagten wir (S. 432), habe um 100 n. Chr. die Beziehung zwischen den Kubikzahlen und aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen erkannt, welche dahin sich ausspricht, die erste Kubikzahl sei gleich der ersten ungeraden Zahl, die zweite gleich der Summe der zwei darauf folgenden ungeraden Zahlen, die dritte gleich der Summe der darauf wieder folgenden drei ungeraden Zahlen usw. Über sämtliche r erste Kubikzahlen ausgedehnt liefert das als deren Gesamtsumme die Summe der $1 + 2 + \cdots + r$ d. h. der $\frac{r(r+1)}{2}$ aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen von der 1 anfangend. Die alten Pythagoräer wußten aber schon (S. 160), daß diese das Quadrat ihrer Anzahl bilden. Die Gesamtsumme ist mithin $1^3 + 2^3 + \cdots + r^3 = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2$, und genau so rechnet unser Schriftsteller[1]).

Diese arithmetischen Kenntnisse: eine Darstellung der Vieleckszahl aus ihrer Seite, der Seite aus der Vieleckszahl, der Pyramidalzahl aus Vieleckszahl und Seite, endlich die Summierung der aufeinanderfolgenden Kubikzahlen einem griechischen Schriftsteller auch ohne Beweis entnommen zu haben, würde schon ein gewisses mathematisches Verdienst der Männer voraussetzen, welche es verständnisvoll unternahmen die interessanten Formeln aufzubewahren. Ob wir aber dem Epaphroditus und Vitruvius Rufus das Beiwort des Verständnisses zuerkennen dürfen? Eine Figur, welche in den Text hineingeraten ist, läßt daran gerechte Zweifel entstehen.

Figuren finden sich auch bei griechischen Arithmetikern, wie wir wissen, zur Versinnlichung der Vieleckszahlen, ja diese Zahlen selbst haben von Anfang an ihre Namen von dieser Versinnlichung her bekommen, und so wird die Quelle unserer Römer mit an Gewißheit streifender Wahrscheinlichkeit die Figuren des regelmäßigen Fünfecks, Sechsecks, . . . Zwölfecks enthalten haben, welche neben den Formeln übernommen werden durften, wenn nicht mußten. Aber bei der Ausrechnung der Achteckszahl ist nicht bloß das regel-

[1]) Herr P. Tannery hat bemerkt, daß diese Formel, von der es langezeit unbeachtet geblieben war, daß sie den Alten bekannt gewesen, doch im XVII. S. der Aufmerksamkeit Pascals nicht entging, sonst könnte er zu Anfang seines Aufsatzes *Potestatum numericarum summa* nicht gesagt haben: *Datis ab unitate quotcumque numeris continuis invenire summam quadratorum eorum tradiderunt veteres; imo etiam et summam cuborum eorumdem. Oeuvres de Pascal.* Paris 1872. Vol. III, pag. 303.

mäßige Achteck, es ist auch in einen Kreis eingezeichnet die Figur zweier sich symmetrisch durchsetzender Quadrate vorhanden, die wir früher um einige vom Kreismittelpunkte gezogene Hilfslinien vermehrt und mit einer Buchstabenbezeichnung einiger Punkte versehen kennen gelernt haben (Fig. 66). Diese Figur ist unter keinen Umständen arithmetischen Charakters. Sie kann sich nur auf die geometrische Entstehung des regelmäßigen Achtecks aus dem Quadrate beziehen, und ihr Vorkommen bei Epaphroditus gewährt unseren früher (S. 401) ausgesprochenen Vermutungen über die Anwendung jener Figur eine nicht geringfügige Unterstützung. Wer aber die beiden Figuren, das arithmetische und das geometrische Achteck, wenn wir so sagen dürfen, um unsere Meinung in recht scharfe sprachliche Gegensätze zu kleiden, nebeneinander abbildete, der bewies damit, daß er die arithmetische Figur nicht verstand, daß er glaubte beidemal mit geometrischen Dingen zu tun zu haben. Wir fürchten, es waren jene Römer, welche dem Mißverständnisse unterlagen, und sollten Epaphroditus und Vitruvius, oder wenigstens einer derselben, an der Vermengung dieser Dinge unschuldig sein — die Vermutung liegt ja nahe, daß von jenen beiden Männern der eine eine geometrische, der andere eine arithmetische Schrift verfaßte, aus welchen nur ein Auszug vorliegt, dessen Blätter einigermaßen durcheinandergekommen sind — so hat jedenfalls der Schreiber des Codex Arcerianus unter dem Banne der vermengenden Verwechslung gestanden. Läßt sich doch schon zum voraus, und ohne des uns triftig erscheinenden Beweisgrundes der beiden Achtecke sich zu bedienen, die Behauptung aussprechen, Arithmetisches als solches habe in der Sammlung eines Verwaltungsbeamten keinen Platz gefunden. Es konnte sich dort überhaupt nur einschleichen, wenn man wähnte, es handle sich um Geometrisches, also nicht um Vieleckszahlen, sondern um den Flächeninhalt regelmäßiger Vielecke, und bei den Pyramidalzahlen, bei den Kubikzahlen, welche dort vorkommen, mag der Schreiber sich wohl gar nichts gedacht haben. Diese Behauptungen finden auch ihre Bestätigung in den vielen bei den arithmetischen Sätzen auftretenden Schreibfehlern.

Fassen wir also das bisher Gewonnene zusammen, so wird das Ergebnis sich gestalten wie folgt: Die Römer sind, wenn sie auch eine uralte Feldmeßkunst besaßen und des Rechnens zum täglichen Gebrauche nicht entbehren konnten, zur Mathematik schlecht genug veranlagt gewesen. Ein bis anderthalb Jahrhunderte lang, von Cäsar bis nach Trajan etwa, war eine verhältnismäßige Blütezeit römischer Geometrie und vielleicht auch römischer Arithmetik, beide auf griechische Quellen zurückgehend, unter welchen sich jedenfalls Schriften

des Heron von Alexandria befanden. Allmählich jedoch verschwand sogar das Verständnis des damals ins Lateinische Übersetzten.

27. Kapitel.

Die spätere mathematische Literatur der Römer.

Die Behauptung, daß die Römer in den Zeiten Cäsars bis Trajans auch arithmetischer und damit bei den Griechen schon enge verbundener algebraischer Leistungen bis zu einem gewissen Grade fähig waren, ist außer aus dem Bruchstücke des Codex Arcerianus, welches wir zu diesem Zwecke verwandt haben, auch aus den Rechtsquellen zu bestätigen.

Zinszahlungen, also auch Zinsberechnungen sind bei den Römern ungemein alt[1]), so daß von anderen Erleichterungen überbürdeter Schuldner abgesehen schon im Jahre 342 v. Chr. die freilich nicht eingehaltene Lex Genucia gegen jede Zinsverleihung Gesetzeskraft gewann. Noch zu Ciceros Zeit war 48 Prozent nichts Unerhörtes, wenn auch eigentlich nicht gestattet. In der Kaiserzeit galt ein Zinsfuß von 12, später von 6 Prozent als gesetzlich. Dichterstellen, besonders bei Horaz, beweisen, daß das Zinsrechnen zu den täglich notwendigen und darum immer geübten Kenntnissen gehörte[2]). Auch eine entsprechende Verminderung für vorzeitigen Genuß eines erst später zu erlangenden Besitzes, das sogenannte Interusurium oder die Repräsentation, wie der Römer sagte, ist alt, wenn auch die Größe der Verminderung und die Regeln, nach welchen sie abgeschätzt wurde, weit entfernt davon sind, im klaren zu sein. Ulpian, der am Ende des II. und Anfang des III. S. n. Chr. lebte, stellte bereits Berechnungen ähnlicher Art unter Voraussetzung einer wahrscheinlichen Lebensdauer an[3]), allerdings wieder ohne daß wir eine Ahnung haben, wie jene wahrscheinliche Lebensdauer gewonnen wurde.

Zu anderen Rechnungsaufgaben gab das Erbrecht der Römer, gaben die vielfach ungemein verzwickten letztwilligen Verfügungen Anlaß, die geradezu Regel bei ihnen waren. Im Jahre 40 v. Chr. stellte die Lex Falcidia fest, daß dem eigentlichen Erben mindestens ein Viertel des hinterlassenen Vermögens verbleiben mußte. Waren also Vermächtnisse im Gesamtbetrage von mehr als Dreiviertel des

---

[1]) Gustav Billeter, Geschichte des Zinsfußes im griechisch-römischen Altertum bis auf Justinian. Leipzig 1898. [2]) Hultsch im Jahrbuch für klassische Philologie 1889. S. 335—343. [3]) *Ad legem Falcidiam* XXXV, 2, 68

Vermögens testamentarisch verheißen, so mußten diese mittels einer Gesellschaftsrechnung herabgemindert werden, so daß die sogenannte falcidische Quart nicht angegriffen wurde.

Ein für die Geschichte der Mathematik in seiner Eigentümlichkeit, welche eine Übertragung von einem Werke zum andern sichert, höchst bedeutsamer Fall ist der eines Erblassers, der seine Witwe in schwangerem Zustande hinterläßt und Bestimmungen für die beiden Möglichkeiten getroffen hat, daß sie einem Knaben oder einem Mädchen das Leben schenkt, während der tatsächlich eintretende Fall, daß Zwillinge, und zwar Zwillinge von verschiedenem Geschlechte, geboren werden, nicht vorgesehen war. Ein daran sich knüpfender Rechtsstreit ist durch Salvianus Julianus[1]), einen Juristen, der unter den Kaisern Hadrian und Antoninus Pius wirkte, berichtet; ein zweiter verwandter Fall kommt bei Cäcilius Africanus[2]), ein dritter bei Julius Paulus[3]), einem glänzenden Juristen des III. S., vor, der unter Kaiser Alexander Severus der römischen Rechtswissenschaft zur Zierde gereichte. Die älteste Entscheidung des Julianus lautet folgendermaßen: „Wenn der Erblasser so schrieb: Wenn mir ein Sohn geboren wird, so soll dieser auf $\frac{2}{3}$ meines Vermögens, meine Frau aber auf die übrigen Teile Erbe sein; wird mir aber eine Tochter geboren werden, so soll diese auf $\frac{1}{3}$, auf das Übrige aber meine Frau Erbe sein, und ihm nun ein Sohn und eine Tochter geboren wurden, so muß man das Ganze in 7 Teile teilen, so daß von diesen der Sohn 4, die Frau 2 und die Tochter 1 Teil erhält. Denn auf diese Weise wird nach dem Willen des Erblassers der Sohn noch einmal soviel erhalten als die Frau, und die Frau noch einmal soviel als die Tochter. Denn obgleich nach den Bestimmungen des Rechtes ein solches Testament umgestoßen werden sollte, so verfiel man doch aus rein vernünftigen Gründen auf die genannte Entscheidung, da ja nach dem Willen des Erblassers immer die Frau etwas erhalten soll[4]), mag ihm ein Sohn oder eine Tochter geboren werden. Auch Juventius Celsus stimmt hiermit vollkommen überein.“ Dieser letztere Jurist, auf welchen Julianus sich bezieht, der die Aufgabe also jedenfalls kannte, lebte unter Trajan um das Jahr 100 n. Chr., war also sicherlich ein Zeitgenosse jenes Celsus,

[1]) *Lex* 13 *principio. Digestorum* lib. XXVIII, tit. 2. [2]) *Lex* 47, § 1. *Digestorum* lib. XXVIII, tit. 5. [3]) *Lex* 81 *principio. Digestorum* lib. XXVIII, tit. 5. [4]) Wäre nämlich das Testament umgestoßen und somit als nicht vorhanden zu betrachten, so würden nach römischem Rechte die Kinder allein geerbt haben, die Witwe aber leer ausgegangen sein.

an welchen, wie wir uns erinnern, Balbus sein feldmesserisches Werk gerichtet hatte. Unmöglich erscheint es daher nicht, daß diese beiden Persönlichkeiten mit Namen Celsus in eine verschwimmen müßten, daß der gelehrte Jurist Celsus auch Ingenieur gewesen, auch in der Geometrie als Schriftsteller aufgetreten wäre, daß von ihm auch jene Erbteilungsaufgabe herrührte, welche ebensogut in einem mathematischen Buche als in einer Sammlung von Rechtsfällen einen Platz einnehmen konnte.

Zeitgenosse des Julianus um die Mitte des II. S. war ein Schriftsteller, der uns gleichfalls für das unter den Antoninen noch vorhandene Interesse an arithmetischen Dingen Bürge ist. Appuleius, geboren zu Madaura, einer blühenden Kolonie an der Grenze Numidiens gegen Gätulien hin, machte seine Studien vornehmlich zu Athen, begab sich aber alsdann zu weiterer Ausbildung auf größere Reisen. Von schönschriftstellerischer Seite ist er als Verfasser eines witzigen Romans bekannt. Aber auch als mathematischer Schriftsteller ist er aufgetreten. Cassiodor[1]) im zweiten Drittel des VI., Isidor von Sevilla[2]) am Anfang des VII. S. bezeugen ausdrücklich, die Arithmetik des Nikomachus sei erstmalig durch Appuleius, dann zum zweiten Male durch Boethius ins Lateinische übertragen worden. Unmittelbare Überreste der Bearbeitung durch Appuleius sind nicht erhalten, so daß ein Urteil darüber nicht gefällt werden kann, inwieweit die Behauptung, Appuleius habe auch Rechenbeispiele in größerer Anzahl gelehrt, nur auf einem Mißverständnisse beruht, indem die betreffenden Gewährsmänner seine Arithmetik gleichfalls nur vom Hörensagen kannten und aus dem Titel ihre falschen Schlüsse zogen, oder aber Wahrheit ist. Im XV. und XVI. S. wurde mit Sicherheit an die Wahrheit geglaubt. Ein Rechenbuch, algorithmus linealis genannt, aus jener Zeit, der Erlanger Universitätsbibliothek angehörig, beginnt ausdrücklich mit den Worten: „Um die vielen Irrtümer der Kaufleute und die Schwierigkeiten des andern Teiles der Arithmetik zu vermeiden, ist bei Appuleius, dem in allen Wissenschaften hocherfahrenen Manne, eine andere Anschauung dieser Kunst erfunden, welche ebenso viel berühmter als leichter und den Geisteskräften eines jeden angepaßter ist als die erste; bei uns heißt sie Rechnung auf den Linien“[3]). Ein 1540 in Paris anonym erschienenes Rechenlehrbuch sagt: „Die ganze Kraft dieser Disziplin ruht in den Beispielen der Addition und Subtraktion; wer das ganze

[1]) Cassiodor, *Opera* (ed. Garet). Venedig 1729, Bd. II, pag. 555, col. 2, lin. 14 v. u. [2]) Isidor Hispalensis, *Origines* Lib. III, Cap. 2. [3]) Friedlein, Zahlzeichen und elementares Rechnen usw. S. 48.

Kapitel vollauf kennen lernen will, der lese den Appuleius, welcher zuerst den Römern diese Dinge beleuchtete"[1]). Es hält so bestimmten Äußerungen gegenüber schwer, des Glaubens sich zu erwehren, daß, wer so sprach, die Schrift des Appuleius selbst vor Augen gehabt habe. Nicht minder schwer freilich fällt die Annahme, Appuleius habe die Arithmetik des Nikomachus, die wir im Originale wie in der Bearbeitung des Boethius zur Genüge kennen, so selbstständig oder unter Zuziehung anderer Quellenschriften behandelt, daß er Rechenbeispiele einfügen konnte. Oder sollen wir annehmen, Nikomachus habe neben der Arithmetik ein ganz verschollenes Rechenbuch verfaßt? Auf dieses beziehe sich der Ausspruch Lucians: Du rechnest wie Nikomachus? Dieses habe Appuleius übersetzt, und das Mißverständnis rühre von Cassiodor und dem ihn ausschreibenden Isidor her, welche die Übersetzungen zweier verschiedener Werke des Nikomachus ins Lateinische vermengten? Wir fühlen wohl, wie viele Gründe sich auch dieser Annahme entgegentürmen, wollten aber keinesfalls versäumen, jede der verschiedenen Möglichkeiten jene Äußerungen später Zeit zu erklären anzuführen. Unterstützend für unsere Annahme ist jene Berufung des Nikomachus auf eine von ihm verfaßte Einleitung in die Geometrie (S. 432). Es ist uns wenigstens gar nicht undenkbar, daß diese einen wesentlich rechnenden Charakter hatte. War doch seit Herons rechnender Geometrie gerade eine diese Vorkenntnisse umfassende Einleitung Bedürfnis geworden, während zu einer wahrhaft geometrischen Einleitung in die Geometrie Anlaß kaum vorhanden war.

Auch auf geometrischem Gebiete ist die wenn nicht selbstschöpferische doch an Übertragungen griechischer Schriftsteller sich übende Tätigkeit der Römer keineswegs mit den Zeiten Trajans abgeschlossen. Neben den im Codex Arcerianus vereinigten, wie wir sahen, um die Mitte des V. S. schon zusammengestellten vielleicht zum Teil später als Trajan, sogar später als Diophant zu datierenden Stücken ist uns ein sehr bedeutsames Fragment aus dem IV. S. erhalten, welches zeigt, daß nicht bloß der „Heron" der Praktiker, sondern auch der „Euklid" der Theoretiker der römischen Sprache mächtige Liebhaber besaß. Dieses Fragment[2]), auf welches zuerst 1820 hingewiesen worden ist, und welches seitdem unausgesetzt die

[1]) Math. Beitr. Kulturl. Anmerkung 351. [2]) Vgl. die von Niebuhr 1820 in Rom herausgegebenen Bruchstücke der Reden Ciceros für Fonteius und Rabirius pag. 20. Blume, *Iter Italicum* I, 263. Keil auf pag. XI der Vorrede zu seiner Ausgabe des Probus. Reifferscheid, Sitzungsber. d. philol. Abtlg. der Wiener Akademie XLIX, 59. Mommsen, Abhdlg. der Berliner Akademie 1868, S. 153, 156, 158.

Aufmerksamkeit philologischer Forscher in Spannung erhielt, gehört der unteren Schrift eines Palimpsestes an, der in der Kapitelbibliothek zu Verona früher unter der Nummer 38, jetzt unter der Nummer 40 aufbewahrt wird. Die jüngere dem IX. S. angehörende Schrift enthält einen Teil der „Moralischen Betrachtungen zum Buch Hiob“ vom Papst Gregor dem Großen († 604). Die darunter erkennbare ältere Schrift stammt nach dem Dafürhalten aller neueren Sachkundigen unter Beachtung aller Merkmale der Schrift wie der Sprache, welche zur Entscheidung beitragen können, aus dem IV. S. Kaum mit bloßem Auge erkennbar, gab sie mühevollster Entzifferung ihren Inhalt kund. Es sind Bruchstücke des Vergilius, des Livius und Geometrisches, welche im IX. S. würdig schienen theologisch-moralischen Betrachtungen den Platz zu räumen. Das geometrische Fragment[1]) gibt sich selbst als dem XIV. und XV. Buche des Euklid entstammend an. Seine Numerierung ist aber keineswegs mit der gebräuchlichen gleichlaufend. Als XIV., als XV. Buch der euklidischen Elemente bezeichnet man bekanntlich (S. 358 und 501) jene von mindestens zwei verschiedenen Schriftstellern herrührenden stereometrischen Abhandlungen, welche, man weiß nicht recht wie und wann, an die dreizehn Bücher der Elemente angehängt worden sind. Diesen Abhandlungen gleicht das lateinische Bruchstück nicht im geringsten. Ohne Satz für Satz und Figur für Figur mit dem griechischen Euklidtexte zur Deckung gebracht werden zu können, ist es doch unter allen Umständen den echt euklidischen mit Stereometrie sich beschäftigenden Büchern, dem XII. und XIII. Buche unserer griechischen Texte entnommen. Es ist entweder Auszug, oder Übersetzung eines Auszuges, jedenfalls Arbeitsexemplar des Unbekannten, von welchem es herrührt, wie der Entzifferer mit großem Scharfsinne aus der Tatsache geschlossen hat, daß einzelne Wörter durchstrichen und durch anders lautende Synonyma ersetzt sind. Das kann selbstverständlich nur auf den Schriftsteller, beziehungsweise den Übersetzer selbst zurückgeführt werden, und zwar in einer Zeit, in welcher seine Arbeit noch in Vorbereitung, noch nicht abgeschlossen war.

Die andere Seite unserer zum Schlusse des vorigen Kapitels ausgesprochenen Behauptung, daß das Verständnis der aus Griechenland überkommenen mathematischen Kenntnisse der Römer mehr und

---

[1]) Der Entzifferer, Prof. W. Studemund, hat längst eine Herausgabe zugesagt. Er ist leider gestorben, ohne seine Zusage erfüllt zu haben. Unser Bericht entstammt den mündlichen Mitteilungen, welche er so freundlich war, unter Vorzeigung seines vorbereiteten Materials uns zu machen, und deren Veröffentlichung er uns gestattet hat.

mehr schwand, findet gleichfalls Bestätigung, wenn wir die Magerkeit uns betrachten, zu welcher im Laufe der Jahrhunderte die römische Mathematik zusammenschrumpfte.

Theodosius Macrobius, ein vielleicht aus Afrika stammender Schriftsteller, von welchem uns Kommentare erhalten sind[1]), die um 400 entstanden sein dürften, und in welchen hier und da zerstreut auch einige mathematische Erläuterungen vorkommen, ist noch bei weitem der dürftigste nicht. Wir denken auch nicht an den kurz vor oder nach 457 entstandenen Calculus des Victorius, dessen Notwendigkeit wir oben (S. 531) eingesehen haben, begründet in der Schwierigkeit mit den römischen Duodezimalbrüchen Rechnungen auszuführen. Wir denken zunächst an Martianus Mineus Felix Capella. Er war in der ersten Hälfte des V. S. in Karthago geboren und stieg bis zur Würde eines römischen Prokonsuls empor. Er hat uns ein aus neun Büchern bestehendes enzyklopädisches Werk, welches den Gesamtnamen *Satira* führt, hinterlassen[2]), dessen Entstehung etwa auf das Jahr 470 fällt. Die beiden ersten Bücher führen den besonderen Titel der Vermählungsfeier der Philologie mit Merkur und stellen ein kleines Ganzes dar, eine Art von philosophischem und allegorischem Romane, der als Einleitung dient. Zur Vermählung erscheinen alsdann die sieben Jungfrauen, welche Merkur zu Gesellschafterinnen seiner jungen Frau bestimmt, nämlich die sieben Wissenschaften, welche, um den Ausspruch Quintilianus' zu benutzen, den Kreis der freien Lehre ausmachen[3]). Es sind dieselben freien Künste, in derselben Reihenfolge, wie wir sie durch Varros Werk kennen, dessen Einteilung uns wenigstens erhalten blieb (S. 543). Jede Wissenschaft bringt ihr Symbol mit. Nach der Grammatik, der Dialektik und der Rhetorik tritt die Geometrie auf. Sie hat den mit blauem Sande bestreuten Abacus in Händen[4]), auf welchen also diesmal die Figuren gezeichnet werden sollen, mit welchen die Geometrie sich abgibt. Freilich eine sonderbare Geometrie, deren räumlicher Hauptbestandteil in geographischen Begriffen, in einer Aufzählung historisch interessanter Orte, deren Gründer zugleich genannt werden, aufgeht. Dann kommen Definitionen von Linien, Figuren, Körpern, dann die notwendigsten Forderungen, alles nach Euklid und unter Benutzung der griechischen Benennungen. Sind aber die Vorbereitungen erst soweit getroffen, daß die Göttin auf dem Abacus eine gerade Linie zieht und die Frage stellt: Wie läßt sich über einer ge-

---

[1]) Macrobius, *Opera* (ed. v. Jan), Quedlinburg und Leipzig 1848—52.
[2]) *Martiani Capellae De nuptiis philologiae et Mercurii de septem artibus liberalibus libri IX* (ed. Ulr. Kopp). Frankfurt a. M. 1836. [3]) Quintilianus I, 10, 1. [4]) *Hyalini pulveris respersione coloratam mensulam.*

gebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten, da erkennen sofort die in dichtem Haufen sie umstehenden Philosophen, sie wolle den ersten Satz der euklidischen Elemente bilden, brechen in lautes Klatschen und Hochrufen auf Euklid aus . . .[1]) und das VI. Buch und mit ihm die Geometrie ist zu Ende. Von Feldmessung, von rechnender Geometrie, mit einem Worte von Heronischem ist in keiner Weise die Rede. Im VII. Buche macht die Arithmetik ihre Aufwartung mit ihren Fingern die Zahl 717 darstellend, durch welche sie den Gott der Götter begrüßt. Wir haben dieses Zeugnis für die auch damals bekannte Fingerrechnung (S. 527) anrufen dürfen. Wir fügen hinzu, daß Pallas auf die Frage der Philosophie, was jene Zahl zu bedeuten habe? erwidert: die Arithmetik grüße Jupiter mit seinem eigenen Namen. Diese Stelle ist jedenfalls richtig dahin erklärt worden, Jupiter sei der Anfang der Dinge und ἡ ἀρχὴ stelle durch den Zahlenwert der Buchstaben $8 + 1 + 100 + 600 + 8$ die Zahl 717 vor. Auch Pythagoras ist bei den der Vermählung wegen versammelten Gästen und tritt nun näher hinzu, er, der bisher bei den Zeichnungen auf dem Abacus als Zuschauer gestanden hatte. Der kundige Leser ist durch die symbolische Begrüßung, durch das persönliche Auftreten des Pythagoras zur Genüge auf das vorbereitet, was er im VII. Buche nun entwickelt finden wird: eine wesentlich pythagoräische Arithmetik nach dem Muster des Nikomachus, wie sie den Römern, wenn nicht schon seit Appuleius, jedenfalls seit Plotinus unter ihnen gelebt hatte, geläufiger geworden war, wie sie jetzt in einer Zeit, während welcher mancher von den tonangebenden vornehmsten Römern zu den Füßen des Proklus in den Vorlesungsräumen von Athen gesessen hatte, gewiß auf Verständnis zählen durfte. Wir sind mit der Bemerkung, daß diese Erwartung nicht getäuscht wird, einer genaueren Berichterstattung über das VII. Buch überhoben. Wir machen nur auf die negativ eigentümliche Erscheinung aufmerksam, daß der vieleckigen Zahlen, die bei Nikomachus eine so wichtige Rolle spielen, kaum gedacht ist. Wohl heißt es, die Ebene habe verschiedene Gestaltungen, nach welchen die Zahlen geordnet werden können[2]), aber nach einer arithmetisch vernünftigen Ausführung dieses Gedankens fahndet man vergeblich. Es kann unsere Aufgabe nicht sein zu erörtern, wie viel oder wie wenig im VIII. Buche der Astronomie, im IX. Buche der Musik in den Mund gelegt wird. Wir sind von der Mühe befreit die Geschichte

---

[1]) *Quo dicto cum plures philosophi, qui undiquesecus constipato agmine consistebant, primum Euclidis theorema formare eam velle cognoscerent, confestim acclamare Euclidi plaudereque coeperunt.* [2]) *Ipsa autem planities varias formas habet, numeris ad similitudinem figurarum ordinatis.*

auch dieser Wissenschaften zu verfolgen, und ohne irgendwelchen Zwang der Durchforschung wird man die schwülstigen und zugleich langweiligen Auseinandersetzungen des Martianus Capella sich lieber schenken.

In die Blütezeit des eben besprochenen Schriftstellers etwa auf 475 fällt die Geburt eines anderen Mannes, zu welchem wir uns nun zu wenden haben, Magnus Aurelius Cassiodorius Senator[1]). Er war im südlichen Italien in Bruttien geboren, unweit von Scyllacium, an einer von Naturschönheiten so reich erfüllten Stelle, daß er sie später von allen aussuchte, sein Leben dort zu beschließen. Noch in sehr jugendlichem Alter von kaum 20 Jahren trat er in den Staatsdienst, frühestens im Herbst 500[2]), zu einer Zeit, wo Theodorich eben den gotischen Staat in Italien gegründet hatte, und zu diesem Fürsten trat Cassiodorius in die Stellung eines Geheimschreibers, äußerlich genommen Theodorichs Dolmetscher, in Wirklichkeit sein einflußreicher Ratgeber. Die vielseitigen, wenn auch nicht überall tiefen Kenntnisse des Ministers — als solchen dürfen wir ihn vielleicht bezeichnen — machten ihn dem Könige unentbehrlich, sowohl in den Geschäften der Regierung, als in den verschiedensten Privatbeziehungen, und erst der Tod Theodorichs 526 löste das Band, welches Gewohnheit und gegenseitige Zuneigung um beide Männer geschlungen hatte. Auch unter den Nachfolgern Theodorichs blieb Cassiodorius, so verhaßt ihm Persönlichkeiten und einzelne Handlungen oft sein mochten, der gotischen Sache getreu, um von dem Staatsbaue seines königlichen Freundes zu retten, was noch zu retten war. Man besitzt Staatsschriften von 538, die Cassiodorius unterzeichnet hat. Am Hofe erlebte er noch den Ausbruch des Krieges gegen die Byzantiner, und erst 540 etwa, nachdem Ravenna schon in Belisars Händen war, zog Cassiodorius sich in das von ihm selbst gestiftete Kloster in seiner Heimat zurück, dort eine reiche literarische Tätigkeit zu entfalten. Cassiodorius war einer der ersten, welche dem Beispiele folgend, das Benedikt von Nursia in seinem 529 zu Monte Casino bei Neapel gestifteten Kloster so

[1]) A. Thorbecke, *Cassiodorus Senator.* (Heidelberger Lyceumsprogramm von 1867.) V. Mortet, *Notes sur le texte des Institutiones de Cassiodore* in der *Revue de Philologie, de Littérature et d'Histoire ancienne* XXIV (1900) pag. 103 bis 118 und 272—281, XXVII (1903) pag. 67—78 und 139—150. Die Lesart Cassiodorius hat Usener, *Anecdoton Holderi* (Festschrift zur 32. Philologenversammlung. Wiesbaden 1877), S. 16, wie wir glauben, sichergestellt. [2]) Nach Usener l. c. S. 70 datiert sich der erste bekannte Brief des Cassiodorius von 501. Dafür, daß Cassiodorius damals noch am Anfange der zwanziger Jahre gestanden haben muß, vgl. Thorbecke S. 7—10, Usener S. 4.

segensreich aufstellte, dem klösterlichen Leben einen anderen Inhalt als den der bloßen Zurückgezogenheit und Beschaulichkeit gaben. Eine Bibliothek entstand, lernende und forschende Tätigkeit entfaltete sich. Ein stärkerer Gegensatz als der gegen die Kulturentwicklung im byzantinischen Reiche ist kaum denkbar. Dort befinden Religion und Wissenschaft sich in fast fortwährendem Kampfe, bei welchem die weltliche Macht meist auf Seite der Kirche steht (S. 503). Hier ist das Kloster, also eine Gründung religiösen, wenn nicht kirchlichen Ursprunges, Stätte der Wissenschaft und bleibt es, so lange die Regel des heiligen Benedikt allein die Ordensbrüder beherrscht. Das Theologische stand naturgemäß obenan, aber auch die weltlichen Wissenschaften, als nützliche Vorbereitungsschule zu Höherem, wurden keineswegs vernachlässigt. Tag und Nacht wurden von emsigen Händen in schönen Zügen Schriften von mitunter zweifelhaftem mitunter wirklichem Werte zu Pergament gebracht. Preist doch Cassiodor im 30. Kapitel seines Buches *De institutione divinarum literarum* das Bücherabschreiben als die verdienstlichste körperliche Arbeit in begeisterten Worten, hat er doch Lampen eigener Art für die Nachtarbeit erfunden, Sonnen- und Wasseruhren aufgestellt, um Zeit und Tätigkeit zu ordnen. Daß er aber im Fleiße sich von keinem seiner Untergeordneten übertreffen ließ, beweist neben anderen Schriften eine Abhandlung über Orthographie, welche er bereits 93 Jahre alt noch verfaßt hat. Es ist anzunehmen, daß dies seine letzte Arbeit war und daß er um 570 gestorben ist. Cassiodorius hat 12 Bücher Briefe[1]) hinterlassen, aus welchen auch für die Geschichte der Mathematik unterschiedliche Notizen gewonnen worden sind. Teils sind es unveränderte Abschriften früherer staatlicher oder privater Schreiben, welche Cassiodor für Theodorich zu fertigen hatte, teils neue Redaktionen solcher Schreiben, in wenig angenehmer Weise durch Schwulst und Überladung ausgezeichnet, welche dem VI. S. im allgemeinen, welche aber vorzugsweise unserem Schriftsteller eigentümlich sind.

Von seinen übrigen Werken nennen wir eine kurzgefaßte Enzyklopädie, *De artibus ac disciplinis liberalium literarum*, welche in ähnlichen 7 Abteilungen, wie wir sie bei Martianus Capella teilweise zu schildern hatten, die Wissenschaften behandelt. Die Einteilung in 7 Wissenschaften war für Cassiodorius geradezu verführerisch. Er besaß eine im letzten Grunde mutmaßlich den Ausläufern des Neuplatonismus entstammende Verehrung für heilige Zahlen[2]). Er hatte die Zwölfzahl der Bücher seiner Briefe nur um der zahlreichen

---

[1]) *Variarum (epistolarum) libri XII.* [2]) Thorbecke l. c. S. 52.

Vergleichspunkte willen gewählt; er witterte, wie sein Psalmenkommentar beweist, hinter der Ordnungszahl eines jeden Psalmen tiefere Beziehungen; so war ihm die Zahl der 7 Wissenschaften Symbol der Ewigkeit. Die Reihenfolge hat Cassiodorius gegen Varro und Martianus Capella geändert. Ihm folgen jetzt Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie aufeinander. Ein weiterer einigermaßen wesentlicher Unterschied gegen Martianus Capella besteht darin, daß bei diesem die griechischen Wortformen teilweise sogar in griechischen Schriftzügen vorherrschen, während Cassiodorius hier mit mitunter recht ungeschickten Übersetzungen als lateinischer Sprachreiniger auftritt. Er beabsichtigt nicht das Ausführliche dieser Wissenschaften zu lehren. Er will vielmehr die Schriftsteller der Griechen und Römer bezeichnen, bei welchen man sich mit den einleitenden Kenntnissen versehen ausführlicher unterrichten könne[1]). So ist es gewissermaßen entschuldigt, wenn Arithmetik und Geometrie, auf die wir wieder allein unser Augenmerk richten, noch mehr zu einer bloßen Sammlung von Definitionen geworden sind. Eine solche Definition wollen wir besonders hervorheben: *Magnitudines rationales et irrationales sunt, rationales quarum mensuram scire possumus; irrationales vero, quarum mensurae quantitas cognita non habetur*, d. h. Größen sind rational oder irrational, rational wenn ihr Maß erkannt werden kann, irrational wenn ihre Messungsgröße nicht erkannt werden kann. Es will scheinen, als ob hier zum ersten Male die Kunstausdrücke rational und irrational im Gegensatze zueinander gebraucht worden wären, deren Erfinder mithin Cassiodorius gewesen sein dürfte[2]). Seinem Versprechen getreu empfiehlt er Pythagoras, Nikomachus und die Übersetzer des letzteren Appuleius und Boethius, aus deren Schriften, wie man sage — *ut aiunt* — man sich mit den klarsten Anschauungen durchdringen könne, eine Ausdrucksweise, welche in Zweifel setzt, ob er selbst diese Schriften kannte und somit dem, was wir über eine mögliche Vermengung verschiedener durch Appuleius und Boethius übersetzten Schriften (S. 564) andeuteten, nicht im Wege steht. Dem Abschnitte über Geometrie fügt er bei, in dieser Wissenschaft seien bei den Griechen Euklid, Apollonius, Archimed und andere annehmbare Schriftsteller aufgetreten, von welchen Euklid durch denselben großartigen Mann Boethius in die römische Sprache übertragen worden sei, *ex quibus Euclidem translatum in Romanam linguam idem vir magnificus*

[1]) *Nec illud quoque tacebimus quibus auctoribus tam Graecis quam Latinis, quae dicimus, exposita claruerunt: ut qui studiose legere voluerit, quibusdam compendiis introductus, lucidius Majorum dicta percipiat.* [2]) V. Mortet in der *Revue de Philologie etc.* XXIV, 280.

Boethius dedit. Allerdings haben einige gute Handschriften nicht *translatum* sondern *adlatum,* wonach Boethius weniger eine Übersetzung als eine Bearbeitung des Euklid geliefert haben würde, aber dem steht wieder gegenüber, daß in einem Briefe[1]) an Boethius die Worte vorkommen: *Translationibus tuis .... geometricus Euclides audiuntur Ausoniis,* dem steht besonders der in der Enzyklopädie unmittelbar nachfolgende Schlußsatz des Cassiodorius gegenüber: *Qui si diligenti cura relegatur* etc., d. h. man solle die Euklidübersetzung wieder und wieder lesen. Für die Musik wird auf die Griechen Euklid, Ptolemäus und so weiter, in lateinischer Sprache auf Appuleius von Madaura verwiesen. Aus dem astronomischen Abschnitt endlich erwähnen wir der Empfehlung der Schriften von Ptolemäus. Der Name des Boethius kommt in diesen beiden letzten Abschnitten nicht vor, einer lateinischen Übersetzung des Ptolemäus ist überhaupt nicht gedacht.

Wir verweilen etwas länger, als der Gegenstand und die enzyklopädische Behandlung desselben es eigentlich verdienen, bei Cassiodorius und seiner Wissenschaftslehre, um zugleich ein Bild mönchischen gelehrten Treibens zu entwerfen, wie es von diesem Zeitpunkte an uns jeden Augenblick wieder begegnen wird. Diesem Bilde würde ein nicht unwesentlicher Strich fehlen, und uns zugleich die Gelegenheit entgehen, hier schon eines regelmäßigen Arbeitsstoffes mittelalterlicher Gelehrten zu gedenken, wenn wir nicht noch über einen ganz kurzen Aufsatz redeten, der unter den Werken des Cassiodorius abgedruckt worden ist. Wir meinen einen *Computus paschalis* vom Jahre 562.

Man hat Einsprache dagegen erhoben, daß diese Osterrechnung von Cassiodor herrühren könne. In der Vorrede zur Abhandlung über Orthographie, welche Cassiodorius, wie wir schon sagten, mit 93 Jahren schrieb, sind die Schriften desselben aufgezählt, und unter diesen ist kein Computus enthalten. Sollte derselbe daher später geschrieben sein, etwa im 94. Lebensjahre, so müßte durch Rückwärtsrechnung Cassiodor im Jahre 500 bei seiner ersten Anstellung mindestens 32 Jahre alt gewesen sein im Widerspruch gegen die früher angeführte wohlbegründete Annahme, er habe damals am Anfange der zwanziger Jahre gestanden. Diesen Widerspruch zu heben und zugleich den Computus für Cassiodor zu retten hat man die Vermutung ausgesprochen, dieses Schriftstück sei bereits mehrere Jahre vor der Abhandlung über Orthographie entstanden und um seiner geringfügigen Ausdehnung willen in dem genannten Verzeich-

[1]) Cassiodorius, *Varia* I, 45.

nisse eigener Schriften ausgelassen worden. Sei dem nun, wie da wolle, sicher ist, daß im Jahre 562 ein Computus paschalis möglicherweise durch Cassiodor verfaßt wurde, wie wir auch schon (S. 531) gelegentlich gesehen haben, daß Victorius von Aquitanien 457 eine solche Anleitung zur Auffindung des richtigen Ostertages schrieb[1]).

Solche theologisch-chronologische Abhandlungen waren wesentlich durch das auf dem Concilium von Nicäa, 325, ergangene Verbot der mit den Juden gleichzeitigen Feier des Osterfestes hervorgerufen worden. Das Passahfest, d. h. das Fest der Verschonung, womit die Verschonung von den Plagen in Ägypten gemeint war, fand bei den Juden stets vom 14. bis zum 21. des Monats Nisan statt, und zwar wurde dieser Monat dem Mondjahre der jüdischen Zeitrechnung gemäß immer so durch periodisch eingeschobene Schaltmonate bestimmt, daß der 14. auf die Frühlingstagundnachtgleiche fiel. Das christliche Osterfest mit seiner ganz anderen Bedeutung war zunächst auf dem althergebrachten Datum des 14. Nisan verblieben. Erst das nicäanische Konzil faßte, wie gesagt, diese Zeitbestimmung als ketzerisch auf, und man verfolgte die, welche bei den alten Ostertagen blieben, als Quatuordecimani oder Tessareskaidekasiten. Ostern solle von den strenggläubigen Bekennern der christlichen Religion stets am Sonntage nach dem ersten Vollmonde seit der Frühlingstagundnachtgleiche gefeiert werden, niemals an diesem Tage selbst, auch nicht wenn der Vollmond auf die Frühlingstagundnachtgleiche und diese auf einen Sonntag fiel; dann mußte der folgende Sonntag als Ostersonntag gewählt werden, damit das Zusammentreffen mit dem Passahfest unter allen Umständen vermieden blieb. Es kam also darauf an, den Tag der Frühlingstagundnachtgleiche im Sonnenjahre, den des nächsten Vollmondes im Mondjahre genau zu kennen, beziehungsweise eine Ausgleichung zwischen dem Sonnen- und Mondjahre zu treffen, welche auf gewissen Zyklen beruhte, in welchen beide Jahresgattungen genau enthalten waren. Das nicäanische Konzil nahm an: 19 Sonnenjahre seien genau 235 Mondsmonate. Damit war ein Irrtum verbunden, da nach strenger Rechnung zu den 235 Mondsmonaten noch etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden hinzuzufügen sind. Die Notwendigkeit anderer genauerer Zyklen wurde eingesehen, und nach Auffindung solcher Gleichungen zwischen Sonnen- und Mondzeit die Berechnung des Ostertages für jedes Jahr vorzunehmen, die sogenannte goldene Zahl, die Epakte zu finden[2]), zu finden ob

[1]) Über den *Computus* des Victorius vgl. L. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie II, 275—284. [2]) Ebenda II, 239 und

das Jahr Schaltjahr sei oder nicht und dergleichen, das ist der algebraisch ziemlich dürftige Inhalt derjenigen Schriften, welche sämtlich den gleichen Titel des *Computus paschalis* führen.

Unter den von Cassiodorius zum genaueren Studium empfohlenen Schriftstellern ist uns wiederholt der Name des Boethius erschienen. Anicius Manlius Severinus Boethius[1]) stammte aus einer der reichsten und berühmtesten Patrizierfamilien Roms, deren Mitglieder längst gewohnt waren, hohe Staatsstellen zu bekleiden, aber auch den Wechsel der Schicksale durch fürstliche Ungnade zu empfinden. Er war zwischen 480 und 482 etwa geboren[2]) und verlor kurz darauf seinen Vater, so daß seine Erziehung von Fremden geleitet werden mußte. Wahrscheinlich und zum Glück für die geistige Ausbildung des begabten Jünglings wurde er der Sorge des Patriziers Symmachus[3]) anvertraut, der vollständig geeignet war Vaterstelle an ihm zu vertreten. Später wurden aus den Beziehungen beider enge Familienbande, indem Boethius die Tochter des Symmachus heiratete. Boethius war schon Lehrer in dem Alter, wo andere zu lernen pflegen[4]). König Theodorich forderte in einem selbstverständlich durch Cassiodor geschriebenen und in dessen Briefsammlung uns aufbewahrten Briefe ihn auf, auch für den Burgunderkönig Gundobad eine Wasser- und Sonnenuhr zu besorgen. Im Jahre 507 entbrannte Krieg zwischen Theodorich und Gundobad. Jener ein freundliches Verhältnis beider voraussetzende Brief kann demnach nur vor oder kurz nach diesem Kriege geschrieben sein[5]), vor 507 oder etwa um 510, wahrscheinlicher in der zuletzt genannten Zeit. Wir werden aus jenem Briefe, den wir schon (S. 571) anführten, nachher noch entnehmen, welche schriftstellerische Tätigkeit als Übersetzer aus dem Griechischen Boethius damals schon entfaltet hatte. Fürs erste ist er uns ein Zeugnis für das Ansehen, in welchem Boethius bei dem Könige stand, und dieses ebenso wie das des Symmachus wuchs beständig. Allein mit der steigenden Bedeutung des Boethius stieg auch sein eifriges Bemühen die Freiheit und das Ansehen des römischen Senates wieder herzustellen, wodurch er den Höflingen, die schon

häufiger. F. J. Brockmann, System der Chronologie (Stuttgart 1883), Kap. IV. Die christliche Osterrechnung.

[1]) Usener, *Anecdoton Holderi* pag. 37—66. Ältere Quellen sind benutzt in Math. Beitr. Kulturl. S. 176—230. Samuel Brandt, Entstehungszeit und zeitliche Folge der Werke von Boethius im Philologus LXII, 141—154 und 234 bis 275. [2]) Usener pag. 40. [3]) Über Symmachus vgl. Usener pag. 17—37. [4]) Ennodius sagt von ihm: *Boethius patricius, in quo vix discendi annos respicis et intelligis peritiam sufficere iam docendi.* [5]) Usener pag. 39. Brandt l. c. 146—147 mit Berufung auf Mommsens Ausgabe des Cassiodor.

lange neidisch auf ihn waren, Gelegenheit gab ihn beim Könige zu verdächtigen. Untergeschobene Briefe mußten die Ansicht begründen helfen, als habe Boethius aus Ehrgeiz sich zum Verrate verleiten lassen. Schuldig befunden, weil man ihn schuldig wollte, wurde er seines Vermögens beraubt, seiner Würden entsetzt und wahrscheinlich nach Pavia, dem damaligen Ticinum, verwiesen. Dort wurde er wenigstens nach längerer Gefangenschaft enthauptet, vermutlich 524, der Kirchensage nach am 23. Oktober, welcher zu Pavia, Brescia und an anderen Orten wohl schon seit dem VIII. S. als Tag des heiligen Boethius gefeiert wurde. Symmachus konnte seinem Schmerze über den gewaltsamen Tod seines Schwiegersohnes nicht gebieten. Seine Äußerungen darüber, denen es an berechtigter Schärfe nicht gefehlt haben mag, wurden dem Könige hinterbracht, der sie ebenso ahndete wie das angenommene Verbrechen dessen, dem die Klagen des Symmachus galten. Symmachus wurde in Fesseln nach Ravenna gebracht und im Gefängnisse getötet. Auch dafür gibt die Sage einen bestimmten Tag, den 8. Mai. Theodorich folgte seinen Opfern, deren Geister sein zerrüttetes Nervensystem ihm unaufhörlich vor die Augen zauberte, noch 526 nach. Wie viel theologische Streitigkeiten zwischen dem formell rechtgläubigen Boethius und dem arianischen Hofe Theodorichs zu der Entwicklung beigetragen haben mögen, ist unklar. Daß Boethius die ihm eine Zeitlang abgesprochenen theologischen Schriften wirklich verfaßt hat, dürfte nach Auffindung eines Zeugnisses des Cassiodor nicht länger zweifelhaft erscheinen[1]). Ein Widerspruch gegen das Werk „über die Tröstungen der Philosophie", welches Boethius im Gefängnisse zu seiner eigenen Geistesberuhigung verfaßte, ist nur scheinbar, keinesfalls so groß, um Boethius nicht als möglichen Verfasser auch der theologischen Abhandlungen erkennen zu lassen. Die Geistesrichtung des Boethius, der an griechischen Schriftstellern sich durchweg gebildet hatte, war, trotz formaler Strenggläubigkeit im Christentum, eine dem Heidnischen nicht abgeneigte, und überdies lehnt sich jenes Werk der Tröstungen an griechische Vorbilder an, an Schriften von Aristoteles verquickt mit spätplatonischen Kommentatoren. War doch fast die ganze schriftstellerische Tätigkeit des Boethius gerade diesen Männern gewidmet. Sind es doch wesentlich Übersetzungen von und Erläuterungen zu aristotelischen Schriften und deren Kommentatoren, welche Boethius zum großen Manne machten, während daneben auch seine Lebens-

[1]) Usener pag. 48—59 über die theologischen Schriften des Boethius, namentlich auch über deren scheinbaren Widerspruch gegen die Bücher *De consolatione*.

schicksale ihm den Strahlenkranz des unschuldig Verfolgten verliehen. Man muß sich ganz im allgemeinen wohl davor hüten bei Boethius viele eigene Gedanken zu suchen, oder aus der Hochschätzung der Zeitgenossen und der Nachkommen eine zu große Meinung von der Bedeutung des Mannes sich zu machen, dessen Übersetzungsarbeiten selbst nicht auf die Höhe ihrer Aufgabe gelangt sind, und der darum noch lange kein Riese war, wenn er Zwerge überragte. Die Regel der Kombinationen zu je zweien aus beliebig vielen Elementen, man soll die Hälfte des Produktes der Elementenzahl in ihre um 1 verminderte Anzahl nehmen, wird Boethius vermutlich, wie vieles sonst, aus Ammonius (S. 501) entlehnt haben. Er hat sie im fünften Buche seiner *Commentaria in Porphyrium* sowie in seinem Kategorienkommentare ausgesprochen[1]).

Uns interessieren namentlich diejenigen Übersetzungen, welche Boethius, wie wir gesehen haben, in seinem 28. Lebensjahre etwa schon vollendet haben muß. In jenem Briefe des Theodorich an Boethius[2]) heißt es: „In Deinen Übertragungen wird die Musik des Pythagoras, die Astronomie des Ptolemäus lateinisch gelesen. Nikomachus der Arithmetiker, der Geometer Euklid werden von den Ausoniern gehört. Plato der Forscher göttlicher Dinge, Aristoteles der Logiker streiten in der Sprache des Quirinals. Auch Archimed den Mechaniker hast Du lateinisch den Sikulern zurückgegeben, und welche Wissenschaften und Künste auch das fruchtbare Griechenland durch irgendwelche Männer erzeugte, Rom empfing sie in vaterländischer Sprache durch Deine einzige Vermittlung.“ Vorzugsweise Wichtigkeit besitzen für uns von diesen Übersetzungen die der Arithmetik und Geometrie; daneben kann die der Musik, der Astronomie, der Mechanik uns gelegentliche Notizen liefern, die sich vielleicht wertvoll erweisen.

Der Musik haben wir uns (S. 165) als Quelle bedienen dürfen.

Von den mechanischen Schriften nach Archimed ist uns freilich außerhalb der hier angeführten Briefstelle keinerlei Erwähnung bekannt.

Was die Astronomie und Musik betrifft, die Boethius lateinisch schrieb, so erinnern wir daran, daß von ihnen in der Enzyklopädie des Cassiodorius keine Rede ist. Doch ist für die Astronomie wenigstens mehr als ein späteres Zeugnis vorhanden. Wir werden später sehen, daß Gerbert in einem vermutlich im Sommer 983 in Bobbio

---

[1]) Heiberg im Philologus XLIII, 475—476. Brandt l. c. 148 und private Mitteilungen über die Benutzung des Ammonius durch Boethius. Die Stelle findet sich in der Baseler Folioausgabe der Werke des Boethius von 1570 auf pag. 104 und 105. [2]) Cassiodorius, *Varia* I, 45.

geschriebenen Briefe seine Freude darüber kundgibt, daß er acht Bücher gefunden habe: Boethius über Astronomie, über Geometrie und anderes nicht weniger Bewundernswertes[1]). In mittelalterlichen Handschriftenverzeichnissen wird gleichfalls die Astronomie des Boethius genannt[2]), und noch 1515 war die Astronomie nach aller Wahrscheinlichkeit vorhanden, wenigstens beruft sich ein in jenem Jahre zu Augsburg gedrucktes Buch auf deren Benutzung[3]). Möglicherweise ist bei jener Berufung ein 1503 in Paris gedruckter von Faber Stapulensis herausgegebener Band gemeint, der den ausführlichen Titel[4]) führt: „Boetius Sev. Epitome compendiosaque introductio in libros arithmeticos Sev. Boetij: adjecto familiari commentaria dilucidata. Praxis numerandi. Introductio in Geometriam. Liber de quadratura circuli. Liber de cubicatione sphere. Perspectiva introductio. Insuper Astronomicon." Wenn dem aber so wäre, so stünde die Meinung auch das Astronomicon müsse von Boethius verfaßt gewesen sein, freilich auf recht schwachen Füßen.

Dafür daß Boethius eine Arithmetik und eine Geometrie schrieb, ist das unabwendbarste Zeichen vor allen Dingen die Enzyklopädie des Cassiodorius. Dieser konnte nicht auf beide Werke und am bestimmtesten auf die Geometrie verweisen, wenn sie nicht vorhanden waren. Die Ausflucht, mit welcher man wohl gegen die ältere Briefstelle Mißtrauen zu erregen gesucht hat, Cassiodorius habe Schriften, die schon verfaßt waren, aber auch solche genannt, welche noch zu erwarten waren, hat keine Wirksamkeit für die Zeit, als Cassiodorius ins Kloster zurückgezogen seine Enzyklopädie schrieb. Boethius war damals längst tot. Von ihm ließ sich nichts mehr erwarten. Von einem „vermeintlichen" Faktum[5]) kann aber bei so ausdrücklicher Verweisung desjenigen, der sich genauer unterrichten wollte, auf die genannten Bücher unmöglich die Rede sein. Ein gewissenhafter, pünktlicher Lehrer — und pünktlich war Cassiodorius durchaus — verweist nicht auf Schriften, die er nur von Hörensagen kennt, geschweige denn von deren Vorhandensein er kaum weiß, ohne einschränkende Bemerkung. Wir würden daher allenfalls begreifen können, wenn man nach den Worten Cassiodors bezweifeln wollte, daß Boethius wirklich die Arithmetik des Nikomachus übersetzt habe;

---

[1]) *Reperimus octo volumina Boethii de astrologia praeclarissima quoque figurarum geometriae aliaque non minus admiranda.* [2]) Brandt l. c. 236 Note 3 unter Berufung auf Schepss (Festschrift für W. v. Christ S. 113). [3]) M. Curtze in dem *Bullettino Boncompagni* 1868, pag. 140. [4]) Wir verdanken die Kenntnis des Titels H. Karl Bopp, welcher ihn einem antiquarischen Kataloge entnahm. [5]) Weißenborn, Die Boetiusfrage im Supplementheft zur Histor.-literar. Abtlg. der Zeitschr. Math. Phys. XXIV, S. 190.

an das Vorhandensein der Übersetzung der euklidischen Geometrie ist ihm gegenüber jeder Zweifel unstatthaft. Andere Zeugnisse kommen dazu. Für die Arithmetik gilt als sicherstes Zeugnis, daß nach Briefen, welche zwischen Gerbert und Otto III. gegen 994 gewechselt wurden, ersterer dem letzteren ein Exemplar der Arithmetik des Boethius zugeschickt hat. Für die Geometrie wird der vorerwähnte Brief Gerberts von 983 angerufen, während andere die Berechtigung in Abrede stellen, den Namen des Boethius, der als Verfasser der Astronomie bezeichnet ist, auch auf die Geometrie zu beziehen. Ferner beruft man sich auch für beide Werke noch auf ein der Zeit nach früheres Zeugnis. Der Bibliothekar Regimbertus auf Reichenau hat nämlich 821 einen Katalog der damals unter seiner Obhut vorhandenen Handschriften hinterlassen, und darin ist von Boethius die Arithmetik in zwei Büchern, die Geometrie in drei Büchern genannt[1]), wogegen freilich abermals der Einwand erhoben worden ist, nur für die Arithmetik sei Boethius als Verfasser gemeint, nicht auch für die Geometrie. Man findet endlich in einem um 1025 geschriebenen Briefe die Worte[2]): Boethius sagt in seinem geometrischen Werke, *in Geometrico dicit Boethius*, um welche man sich nicht herumdeuten kann.

Zu diesen verschiedenen mittelbaren Zeugnissen kommt noch, daß eine ganze Anzahl von Handschriften sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat, in welchen den Titeln nach die Arithmetik, die Musik, die Geometrie des Boethius aufgezeichnet sind. Die älteste Handschrift der Arithmetik soll dem IX. bis X. S. entstammen[3]), die älteste Handschrift der Musik dem IX. S.[4]), endlich die älteste Handschrift der Geometrie dem IX. S.[5]).

Diese Tatsachen fassen sich also dahin zusammen, daß jedenfalls Boethius über die vier genannten Wissensgebiete nach griechischen Mustern sich verbreitet hat, und daß noch erhaltene Handschriften der drei ersten Werke mit Ausschluß der den Schluß bildenden

---

[1]) Agrimensoren, Anmerkung 245. [2]) *Une Correspondance d'écolâtres du XI. Siècle* in den *Notices et Extraits* XXXVI, 525 lin. 2 (pag. 43 des Sonderabdrucks). [3]) Boetius (ed. Friedlein) Leipzig 1867, pag. 2: *codex r.* [4]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 175: *codex g.* [5]) G. Schepss, Zu Boethius (in den *Commentationes Woelfflinianae.* Leipzig 1891) pag. 279 nennt drei Pariser Codices, deren ältester dem IX. S. angehört, während die beiden anderen im X. S. entstanden sein müssen. In ihnen wird ausdrücklich das Ganze als Eigentum des Boethius in Anspruch genommen. Dem XI. S. entstammt die Erlanger Handschrift. Boetius (ed. Friedlein) pag. 372: *codex e.* Friedlein gibt ferner dem *codex n = cod. Vatican.* 3123 ein höheres Alter, indem er ihn in das X. S. setzt, aber Usener (pag. 47) rückt nach eigener Anschauung diesen Kodex herunter in das XI.—XII. S.

Astronomie um das Jahr 900 vorhanden gewesen sind und damals für von Boethius verfaßt galten.

In der Einleitung zur Arithmetik bestätigt Boethius gleichfalls, was wir aus anderen Quellen erfahren haben, daß er über die vier verwandten Gegenstände schreiben wolle. Er bezieht sich in dem Widmungsschreiben an Symmachus darauf, daß er von den vier mathematischen Wissenschaften die Arithmetik, welche die erste sei, vollendet habe[1]), und wenn auch die Stelle, in welcher die Reihenfolge, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie angedeutet ist, weil die Menge an und für sich betrachtet in der Arithmetik, die Menge bezogen auf andere in der Musik, die unbewegte Größe in der Geometrie, die bewegte in der Astronomie behandelt werde, sowie eine andere, in welcher noch näher erklärt wird, weshalb von der Arithmetik ausgegangen werden solle, nur freie Übersetzungen aus dem Nikomachus sind[2]), so kann auch darauf für die Absicht des Boethius Bezug genommen werden. Er hätte jene Stellen der Einleitung, wenn sie nicht seine eigenen Pläne ausdrückten, unzweifelhaft beiseite gelassen, denn gerade hier hat sich Boethius mit größter Unabhängigkeit seines Stoffes bedient. Bei dieser Gelegenheit findet sich z. B. zum ersten Male das Wort quadruvium benutzt, um den Kreuzweg der viergeteilten mathematischen Wissenschaften zu bezeichnen, welche von Cassiodorius mit anderem Bilde die vier Pforten der Wissenschaft genannt wurden[3]). Wir bemerken, daß das von Boethius gewählte Wort als Gemeingut sich forterbte, daß dem Quadruvium noch das Trivium zugesellt wurde, um die Gesamtheit der sieben freien Künste in ihren beiden großen Gruppen zu benennen. In der Musik hat alsdann Boethius den einmal eingeschlagenen Weg weiter für den richtigen erklärt. Er gibt nämlich wiederholt den Unterschied der vier Wissenschaften und ihre Reihenfolge in gleicher Weise an, wie er es nach Nikomachus getan hatte[4]). Eine Widmung ist der Musik nicht vorausgeschickt. Die Geometrie dagegen beginnt mit der Anrede „mein Patricius", *mi Patrici*, was ohne jede Schwierigkeit auf den Rhetor Patricius gedeutet werden kann, welchem Boethius auch ein anderes Werk, seinen Kommentar zu Ciceros Topik, mit derselben am Anfang des zweiten

---

[1]) *Cum igitur quattuor matheseos disciplinarum de arithmetica, quae est prima, perscriberem, tu tantum dignus eo munere videbare.* [2]) Darauf hat Th. H. Martin aufmerksam gemacht: *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-age. Annali de matematiche* V. Roma 1864, Cap. XIII, pag. 44 der Separatausgabe. [3]) Cassiodorius, *Varia* I, 45: *Tu artem praedictam ex disciplinis nobilibus natam per quadrifarias Mathesis ianuas introisti.* [4]) Boetius (ed. Friedlein) *Musica* Lib. II, Cap. 3, pag. 228—229.

Buches vorkommenden Anrede *mi Patrici* gewidmet hat[1]). In der Geometrie ist sodann von der Arithmetik des gleichen Verfassers die Rede[2]). Wieder in der Geometrie ist von der Arithmetik und der Musik gesagt, daß dort gewisse Dinge zur Genüge besprochen seien.[3]). Auf die Arithmetik wird für den Satz verwiesen, daß die Einheit keine Zahl sei, sondern Quelle und Ursprung der Zahlen.[4]) Das sind lauter Kennzeichen, daß die Geometrie von Boethius herrührt, oder daß wer sie verfaßte für Boethius gehalten sein wollte.

Dieser Satz mag mit Recht dem Leser auffallen. Wir bemerken deshalb einschaltend, auch um die Tragweite der folgenden Untersuchung zum voraus erkennen zu lassen, daß gegen die Echtheit der Arithmetik und Musik, wie sie uns handschriftlich als von Boethius herrührend überliefert sind, ein Zweifel nie erhoben worden ist, daß dagegen die Geometrie, deren Echtheit oder Unechtheit eine geschichtliche Bedeutung ersten Ranges besitzt, von weitaus den meisten für untergeschoben gehalten wird[5]).

Wir müssen nun den Inhalt sowohl der Arithmetik als der Geometrie prüfen, welcher uns erst die Berechtigung geben soll, die Frage zu einigem Abschlusse zu bringen. Die Arithmetik ist das, was sie nach der Erklärung des Cassiodorius, was sie aber auch nach den eigenen Worten des Boethius[6]) sein soll, eine Bearbeitung der Arithmetik des Nikomachus, wobei bald Weitläufigeres zusammengezogen, bald Dinge, die rascher durchlaufen dem Verständnis einen allzuengen Zugang boten, einigermaßen erweitert wurden. Man wird daher bei Boethius die auffälligsten Dinge wiederfinden, welche aus dem griechischen Texte uns schon bekannt sind, Sätze dagegen, die mathematisch von Wichtigkeit sind, nicht selten vermissen. Die Einmaleinstabelle fehlt so wenig[7]), wie die figurierten Zahlen, deren hier ausgesprochener Name *numeri figurati*[8]), die wörtliche Übersetzung von *ἀριθμοὶ σχηματογραφθέντες*, seit Boethius immer allgemeiner in Gebrauch gekommen ist. Wir bemerken fast überflüssigerweise, daß sich Boethius auch der Ausdrücke *numeri primi* und

[1]) Diese Lösung der früher vorhandenen Schwierigkeit, die Widmung der Geometrie zu verstehen, rührt von S. Brandt l. c. 234 Note 1 her. [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 390, 3—5. [3]) Ebenda pag. 396, 3—6. [4]) Ebenda pag. 397, 20—398, 1. [5]) So namentlich von Friedlein, von Weißenborn: Die Boetiusfrage in dem Supplementheft zur Histor.-literar. Abtlg. der Zeitschr. Math. Phys. XXIV (1879) und: Zur Boetiusfrage, Osterprogramm 1880 des Eisenacher Realgymnasiums. Am kräftigsten und vollständigsten hat Heiberg die Gründe gegen die Echtheit der Geometrie zusammengestellt in der Zeitschrift Philologus XLIII, 507—519. [6]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 4, 30 bis 5, 4. [7]) Ebenda pag. 53. [8]) Ebenda pag. 101 in der Überschrift von *Arithmetica* II, 17.

numeri compositi bedient. Die Proportionenlehre ist ausführlich gelehrt, und damit ist vielleicht die Sage in Verbindung zu bringen, welche übrigens wohl auch auf Wahrheit beruhen kann, Boethius habe im Gefängnisse zu seiner Unterhaltung ein Zahlenkampf genanntes Spiel ausgedacht, welches wesentlich auf Anwendung von Zahlenverhältnissen beruht[1]). Bemerkenswert erscheint dem gegenüber, daß unter den weggebliebenen Dingen jener Satz des Nikomachus enthalten ist, der von der Entstehung der Kubikzahlen aus der Summe ungerader Zahlen handelt, und ebenso der Satz, daß die $n$eckszahl von der Seite r und die Dreieckszahl von der Seite $r-1$ zusammen die $n+1$eckszahl von der Seite r bilden (S. 432). Wir sehen an solchen Dingen bewahrheitet, was wir ankündigten, sehen bestätigt, was wir weiter oben (S. 575) behauptet hatten. Es ist kein ebenbürtiger Bearbeiter, der sich an den griechischen Zahlentheoretiker gewagt hat. Gerade den feinsten arithmetischen Dingen ist er aus dem Wege gegangen. Sein Griechisch reichte aus zur Übersetzung, seine Mathematik nicht, und wenn den Namen Boethius bis in das späte Mittelalter hin ein gewisser Nimbus umgibt, so ist dieser Glanz zum Teil der allgemeinen Dunkelheit zuzuschreiben, zum Teil Wiederstrahl der Märtyrerkrone, mit welcher, wie wir schon sahen, die Kirche ihn bedacht hat.

Wir wenden uns zur Geometrie des Boethius, wie sie von den Handschriften uns überliefert ist. Zwar sind und waren die Handschriften weder in bezug auf die Anzahl der Bücher noch auf den Text durchweg übereinstimmend. Es gibt und gab Geometrien des Boethius in fünf Büchern[2]), in vier Büchern[3]), in drei Büchern[4]), in zwei Büchern.

Indessen sind diese verschiedenen Gestaltungen wesentlich auf deren zwei zurückzuführen, von denen sich eine aus 5, eine aus 2 Büchern zusammensetzt. Jene längere wird kaum von irgend jemand für die echte Geometrie des Boethius gehalten werden können. Ihre beiden ersten Bücher sind zwar in alte Druckausgaben des Boethius zu einem Buche vereinigt als Geometrie aufgenommen, aber sie enthalten ein buntes Allerlei, worunter nicht zum wenigsten Auszüge aus der Arithmetik des Boethius, die noch obendrein in Unordnung geraten sind. Die beiden folgenden Bücher enthalten eine Boethius zugeschriebene Übersetzung aus den 4 ersten Büchern des Euklid. Im fünften Buche, welches im Drucke noch nicht herausgegeben ist, zeigt

[1]) R. Peiper in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 167—227 (1880). [2]) Math. Beitr. Kulturl., Anmerkung 399. [3]) Friedleins Münchner Kodex *m* aus dem XI.—XII. S. [4]) Z. B. das alte Exemplar, welches im Reichenauer Bibliothekskatalog von 821 beschrieben ist.

sich neuerdings ein Allerlei, aus welchem sich ein sehr interessantes, den Begleitstücken in keiner Weise ähnelndes Fragment *Altercatio duorum geometricorum* hervorhebt, ein katechetisches Zwiegespräch, dessen Ursprung in tiefstes Dunkel gehüllt ist. Das Ganze — wir meinen die fünf hier geschilderten Bücher — hat die Benennung als Pseudoboethius[1]) erhalten, um sie von den zwei Büchern zu unterscheiden, und von dieser Geometrie in zwei Büchern allein ist die Rede, wenn Untersuchungen über Echtheit oder Gefälschtsein der Geometrie des Boethius angestellt werden. Die älteste Handschrift dieser Geometrie ist die Erlanger aus dem XI. S.

Wir wollen jetzt an die Schilderung dieser Geometrie herantreten und in die Schilderung verweben, was für die Echtheit angeführt worden ist, damit unseren Lesern die Möglichkeit einer Meinungsverschiedenheit begreiflich werde. Die zwei Bücher der Geometrie leiden nun allerdings auch an einer Buntheit, welche auffallen muß, und welche keineswegs mit dem übereinstimmt, was ein moderner Bearbeiter des Euklid liefern würde. Sind wir aber berechtigt, dem Ähnliches zu erwarten? Wir glauben nicht. Griechische Arithmetik war, wie wir gesehen haben, den Römern nicht gerade neu. Griechischer Geometrie in irgend gegliederter Aufeinanderfolge, euklidischer Strenge der Beweise sind wir noch nicht begegnet. Auch jene Bearbeitung der Stereometrie in dem Veroneser Palimpseste (S. 565) schließt sich vermutlich nur an ein Exzerpt des Euklid, nicht an den wirklichen Euklid an, und ein Exzerpt muß Boethius vor sich gehabt haben, denn wie wollte er sonst die gesamten Elemente in zwei, drei, vier, fünf Bücher fassen, wenn wir die Gliederung zulassen wollen, welche die meisten Bücher der Geometrie des Boethius angibt? Es kann also die Geometrie des Boethius zu der des Euklid gewiß nicht in dem gleichen Verhältnisse gestanden haben, wie die Arithmetik desselben zu der des Nikomachus. Auch Boethius selbst in der Einleitung zur Geometrie gestattet uns keineswegs solche Ansprüche zu erheben: „Da ich, mein Patricius, auf Dein Ansuchen, da Du von den Geometern wohl die meiste Übung besitzest, auf mich genommen habe, das, was von Euklid über die Figuren der geometrischen Kunst dunkel vorgetragen wurde, auseinanderzusetzen und für einen leichteren Eingang zuzubereiten, so glaube ich zuerst den Begriff des Messens erläutern zu müssen“[2]). Die Figuren geometrischer Kunst, das ist es, was Boethius auseinandersetzen will,

---

[1]) Tannery, *Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce* in der *Bibliotheca Mathematica*. 3. Folge I, 39—50 (1900). [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 373, 21—24.

und über die Figuren der Geometrie handelte, was Gerbert gemeinschaftlich mit der Astronomie des Boethius in Bobbio fand (S. 575), und was gerade durch diese Benennung die Urheberschaft des Boethius näher legt. Wenn dann Cassiodorius, der noch weniger Mathematiker war als Boethius, daraus entnimmt, es sei eine Übersetzung des Euklid gewesen, die jener verfaßte, wenn ein Abschreiber in der Überschrift sagt: „Es beginnt die Geometrie des Euklid von Boethius einleuchtender ins Lateinische übersetzt“[1]), eine Überschrift, die schon ihrem Wortlaute nach nicht von Boethius herrührt, wie überhaupt auf eine Überschrift niemals ein größeres Gewicht zu legen ist als nach der Richtung, daß sie die Ansicht der Zeit der Abschrift uns kundgibt; so ist Boethius uns an beidem unschuldig. Er wollte nur die Figuren geometrischer Kunst auseinandersetzen. Er tat es, indem er nach Definitionen den Inhalt des I. Buches der Elemente und weniges aus dem III. und IV. Buche aussprach[2]), ohne daß der geringste Beweis die Wahrheit des Ausgesprochenen bestätigte. Dann sagt er[3]), er wolle das bisher wörtlich aus Euklid Übersetzte teilweise wiederholen, um in der Beleuchtung einzelner Beispiele dem Leser Freude zu bereiten. Wesentlich aus dieser Stelle ist der Schluß gezogen worden[4]), die Vorlage des Boethius sei selbst schon ein recht dürftiger griechischer Auszug aus den Elementen gewesen, und dieser Meinung schließen wir uns an. Was alsdann Boethius als seine Zusätze liefert, ist freilich eigentümlicher Art. Es ist die Auflösung der drei Aufgaben: über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben; von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade von gegebener Länge zu ziehen; von einer größeren Strecke eine kleinere abzuschneiden. Das sind die drei ersten Sätze des I. Buches der Elemente, und der Text stimmt fast wörtlich mit dem Euklidischen überein. Welcher wirklichen Euklidausgabe Boethius diese Stücke entnahm, das können wir nicht entscheiden. Die Annahme[5]), es sei die Theonsche Ausgabe gewesen, und Boethius habe den Euklid nur für den Erfinder der Sätze, Theon dagegen für den der Beweise gehalten, die um so unbedenklicher zu entnehmen seien, hat jedoch viel für sich. Jedenfalls hat er ohne weiteres sein genannt, was nur aus einer anderen Quelle stammte, als das unmittelbar vorher Übersetzte, eine Unbefangenheit, welche bei Boethius fast als schriftstellerische Eigentümlichkeit gelten kann, wie sein Werk über die Tröstungen beweist[6]). An

[1]) *Incipit geometria Euclidis a Boetio in latinum lucidius translata* (ed. Friedlein, pag. 373). [2]) Eine genauere Vergleichung bei Weißenborn l. c. S. 196 und 204. [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 389, 18—23. [4]) Von H. Th. Martin. [5]) Weißenborn l. c. S. 206 flgg. [6]) Usener l. c. pag. 51—52.

die drei Aufgaben schließt sich nun die merkwürdige Stelle an[1]): „Doch es ist Zeit zur Mitteilung der geometrischen Tafel überzugehen, welche von Architas, einem nicht gemeinen Schriftsteller dieser Wissenschaft für Latium zurecht gemacht wurde, wenn ich zuerst wieviele Gattungen von Winkeln und Linien es gebe vorausgeschickt und weniges über Flächen und Grenzen gesagt haben werde.“ Er erfüllt letzteres Versprechen wieder durch einige Definitionen und kommt dann zu der berühmt gewordenen Stelle vom Abacus.

Fingerzahlen, digiti, wurden nach ihm von den Alten alle Zahlen unterhalb der ersten Grenze, limes, d. h. bis 9 genannt[2]). Gelenkzahlen, articuli, heißen die Zahlen, welche in der Ordnung der Zehner und so fort ins Unendliche sich befinden. Zusammengesetzte Zahlen sind alle zwischen der ersten Grenzzahl 10 und der zweiten Grenzzahl 20 gelegenen und die übrigen der Reihe nach mit Ausnahme der Grenzzahlen selbst. Diese nebst den Fingerzahlen heißen nichtzusammengesetzt, incompositi[3]).

Er fährt dann fort: „Männer von alter Einsicht, welche der pythagoräischen Schule angehören, und als Forscher über platonische Weisheit mit merkwürdigen Spekulationen sich beschäftigen, haben den Gipfelpunkt der ganzen Philosophie in die Eigenschaften der Zahlen gesetzt. In der Tat, wer wird die Masse des musikalischen Einklangs verstehen, wenn er glaubt, sie hingen nicht mit Zahlen zusammen? Wer wird unbekannt mit der Natur der Zahlen die aus Sternen zusammengesetzten Sternbilder der Himmelsfeste erkennen oder den Aufgang und Untergang der Thierzeichen erfassen? Was endlich soll ich von der Arithmetik und Geometrie sagen, die selbst nicht in nichtnennenswerter Gestalt erscheinen, so wie die Eigenschaften der Zahlen verloren gehen? Doch davon ist in der Arithmethik und in der Musik zur Genüge die Rede gewesen, kehren wir daher zu dem zurück, was jetzt zur Sprache kommen soll. Die Pythagoräer haben sich, um bei Multiplikationen, Divisionen und Messungen nicht in Irrtümer zu verfallen (wie sie in allen Dingen voller Feinheiten und Einfälle waren) einer gewissen gezeichneten Figur bedient, welche sie ihrem Lehrer zu Ehren die pythagoräische Tafel, mensa Pythagorea, nannten, weil die ersten Lehren in den so dargestellten Dingen von jenem Meister ausgegangen waren. Von den Späteren wurde die Figur Abacus genannt. Sie beabsichtigten

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 6—10. [2]) Die Engländer nennen in ihren Lehrbüchern der Rechenkunst heute noch die Einer *digits*. [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 395, 3—16.

damit das, was tiefsinnig erdacht worden war, leichter zur allgemeinen Kenntnis zu bringen, wenn man es gewissermaßen vor Augen sähe und gaben der Figur die hier folgende merkwürdige Gestalt"[1]).

Wir haben diese ganze Stelle wörtlich aufgenommen, um jeden Zweifel verschwinden zu lassen, wie Boethius, der sich hier wiederholt auf seine früheren Schriften bezieht, über den Ursprung der von ihm gezeichneten Figur denkt: es ist eine pythagoräische Erfindung, aber freilich keine altpythagoräische, denn sonst würde nicht der Forschungen über platonische Weisheit jener Angehörigen der pythagoräischen Schule gedacht sein können. Also Neuplatoniker oder vielleicht Neupythagoräer haben nach der Ansicht unseres Schriftstellers die Figur gebildet, welche zuerst Tafel des Pythagoras, dann Abacus genannt wurde. Sie wurde Abacus genannt, unterschied sich mithin von dem früher als solcher vorhandenen Rechenbrette, und der Unterschied liegt in der Art der Benutzung.

Kolumnen, feste oder gezeichnete, hatten zwar auch die alten und ältesten Rechenbretter, aber deren Ausfüllung beim Rechnen erfolgte mittels Marken, deren jede die Einheit der betreffenden der Kolumne oder der Kolumnenabteilung angehörenden Rangordnung bezeichnete. Jetzt war eine wesentliche Änderung eingetreten. „Man hatte Apices (Kegelchen?) oder Charaktere von verschiedener Gestalt"[2]).

Jede dieser Marken war mit einer Bezeichnung versehen, welche ihr den Wert einer der neun Fingerzahlen beilegte, und diese Bezeichnung wird nun im fortlaufenden Texte genau so abgebildet wie es auf dem vorher gezeichneten Abacus der Fall war. Damit ist also widerspruchslos bewiesen, daß die Zeichen gleichen Alters und gleichen Ursprunges wie der sie umgebende Text sind, und nicht erst nachträglich auf die vorher von derartigen Zeichen freigewesene Tafel eingeschmuggelt werden konnten. Wohl aber wäre es möglich, daß es sich so mit gewissen eigentümlichen Wörtern verhielte, die nicht im Texte, sondern einzig und allein auf der Figur sich finden.

Wir würden der ganzen Untersuchung einen selbst für die Wichtigkeit, welche ihr innewohnt, unverhältnismäßig großen Raum widmen müssen, wenn wir fortführen wörtlich zu übersetzen oder gar zu erläutern. Wir wollen nur kurz berichten, daß Regeln der Multiplikation und der Division nachfolgen, jene breiter und deut-

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 395, 25—396, 16. [2]) Ebenda pag. 397, 2—3.

licher angelegt, diese dunkler, wie der Verfasser selbst fühlt, wenn er sagt: „Ist es irgendwie dunkel gehalten, so müssen wir dem fleißigen Leser die Einübung überlassen"[1]). Bei der Multiplikation kommen die Einzelfälle zur Sprache, welches Produkt also entstehe, wenn Zehner mit Hunderten, mit Tausenden usw. vervielfacht werden. Bei der Division erscheint die komplementäre Divisionsmethode, von der ankündigend (S. 528) die Rede war. Das Komplement, die Differentia des Boethius, ist die Zahl, um welche ein Divisor kleiner ist als die nächste nichtzusammengesetzte Zahl, letzteres Wort in dem oben definierten Sinne genommen. Der Divisor 16 z. B. hat bis zu 20 die Differenz 4, der Divisor 78 bis zu 80 die Differenz 2, der Divisor 623 hätte bis zur nächsten nichtzusammengesetzten Zahl 700 die Differenz 77. Nun wird mit dem vergrößerten Divisor dividiert, und jedesmal dem Reste das Produkt des Quotienten in die Differenz ergänzend wieder beigefügt, bis man fertig ist. Man wird leicht erkennen, daß diese Methode, wenn auch mehr Teildivisionen als die gewöhnliche erfordernd, weit zuverlässiger ist, weil hier, wo mit einer einfachen Zahl die Teildivision vorgenommen wird, niemals der Fall eintreten kann, daß irrtümlich ein zu großer Quotient angesetzt würde. Eine etwas abgeänderte Anordnung der komplementären Division tritt ein, wenn der Divisor aus Hundertern und Einern besteht. Man soll alsdann die Einer des Divisors zunächst unberücksichtigt lassen, dagegen auch vom Dividenden eine Einheit höchster Ordnung beiseite lassen, damit nachträglich das Produkt des Quotienten in die Einer des Divisors bis zu jener Einheit ergänzt und die Ergänzung dem erstgewonnenen Divisionsreste beigefügt werde.

Fragen wir nun wiederholt, woher diese Dinge stammen mögen, so sollte man vermuten, wir würden in erster Linie die auf den Apices befindlichen Zahlzeichen über ihren Ursprung befragen. Wir werden diese Frage jedoch erst im 33. Kapitel stellen. Jetzt bemerken wir, daß die Apices selbst ungemein an die Pythmenes oder Stammzahlen des Apollonius erinnern, und das Multiplizieren der verschiedenen Rangordnungen an die von jenem gegebenen Einzelvorschriften (S. 347—348). Ein Fortschritt ist ja in der Benutzung der Apices unbedingt enthalten, aber doch ein solcher, den wir späteren Alexandrinern zutrauen dürfen. Ob das Divisionsverfahren Erfindung eines Römers war? Wir wissen es nicht, wenn auch unser Gefühl sich dagegen sträubt, einen römischen Geist als so erfinderisch in mathematischen Dingen annehmen zu sollen. Wir können nur wieder-

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 400, 28—30.

holt auf die Dinge hinweisen, welche wir zur komplementären Multiplikation (S. 528) in Beziehung gesetzt haben, daß subtraktive Zeichen entschieden römisch sind, daß von Nikomachus mutmaßlich Rechnungsvorteile gelehrt wurden, welche dem komplementären Verfahren ähneln. Boethius selbst, beziehungsweise der unter dem Namen des Boethius Schreibende, scheint alles einer und derselben Vorlage entnommen zu haben, einem lateinisch schreibenden Architas. Auch von diesem soll erst weiter unten die Rede sein, wenn wir die Geometrie des Boethius zu Ende besprochen haben.

Jetzt nämlich, nachdem das Rechnen d. h. Multiplizieren und Dividieren gelehrt worden, kommt der Verfasser zum zweiten Buche und in ihm zur rechnenden Geometrie, zu welcher der Abschnitt vom Abacus eine Einleitung bildete, vielleicht nach dem entfernten Muster des Nikomachus (S. 564). Wir finden uns auf völlig bekanntem Boden. Wir haben die Geometrie der römischen Feldmesser vor uns, in einigen Dingen wieder etwas tiefer gesunken und von den wenigst genauen heronischen Vorschriften Gebrauch machend. So z. B. finden wir die Flächenberechnung des gleichseitigen Dreiecks[1] durch die nicht verstandene Formel $a^2 - \frac{17}{30}a^2$. Wir finden Gebrauch gemacht von der schlechten Annäherung zur Fläche eines unregelmäßigen Vierecks[2] durch Bildung des Produktes der arithmetischen Mittel von je zwei einander gegenüberliegenden Seiten. Auch die Vieleckszahlen als Vielecksflächenräume kommen hier vor. Bei dem Achtecke ist nur die aus zwei Quadraten verschränkte Figur gezeichnet. Bei dem Fünfeck und Sechseck sind falsche Formeln angewandt. Dagegen ist hier die deutliche Spur der allgemeinen Formel für die $r$te $m$eckszahl vorhanden, welche wir bei Epaphroditus (S. 557) nur mutmaßten[3]. Die Vorlage für dieses zweite Buch scheint im allgemeinen Frontinus verfaßt zu haben[4]. Als Ausnahme wohl ist der Satz vom Durchmesser des Innenkreises des rechtwinkligen Dreiecks (S. 556) dem Architas zugeschrieben, nachdem er vorher durch Euklid hinzuerfunden worden sei[5].

Auf eben diesen Architas bezieht sich Boethius noch einmal zum Schlusse des zweiten Buches, um nach den Regeln der rechnenden Geometrie die Bruchrechnung zu erörtern. Die ganze Stelle gehört samt der Tabelle, welche ihr beigefügt ist, noch immer zu dem Dunkelsten, was man besitzt. Nur eins ist einleuchtend: warum nämlich gerade am Schlusse der Geometrie diese Lehre vorgetragen

---

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 404, 14—405, 10. [2]) Ebenda pag. 417, 16—28. [3]) Ebenda pag. 423, 1—7. [4]) Ebenda pag. 402, 27—403, 2 und 428, 16—19. [5]) Ebenda pag. 412, 20—413, 9.

wird[1]). Das geschieht und muß geschehen, weil nunmehr die Astronomie folgte, in welcher Bruchrechnungen in größter Menge notwendig wurden. Wie der Abacus zwischen den beiden Büchern der Geometrie den Übergang von der eigentlichen theoretischen Geometrie zur Feldmeßwissenschaft bildete, so bildet jetzt die Bruchrechnung den weiteren Übergang zu den uns verloren gegangenen Büchern der Astronomie. Es zeigt sich somit, daß die Geometrie des Boethius nach vorwärts und rückwärts Beziehungen zu den drei anderen mathematischen Schriften desselben Verfassers darbietet.

Es ist daher nur eine einzige Wahl gestellt: entweder die ganze Geometrie des Boethius mit dem Inhalte, über welchen wir berichtet haben, ist echt oder aber sie ist das Werk eines Fälschers, der mit vollbewußter Absicht den Anschein sich gab, als sei er Boethius. Man hat diese letztere Meinung zu verteidigen gewußt[2]) und sich dabei auf Einzelheiten gestützt. Man hat nämlich zu zeigen gesucht, daß die Redeweise der Arithmetik zu der der Geometrie in Widerspruch stehe, daß somit wenn erstere von Boethius herrühre, letztere nur untergeschoben sein könne. Solche Widersprüche sind, wir geben es zu, vorhanden, aber sie sind ganz von der gleichen Natur wie derjenige, welchen wir (S. 435) bei Theon von Smyrna nachzuweisen imstande waren, der sich in einem und demselben Werke nicht scheut die Einheit keine Zahl zu nennen und als Zahl zu benutzen. Will man Boethius dessen für unfähig halten, so muß man seine geistige Bedeutung zu einer Höhe hinaufschrauben, auf welche er nach unserer wiederholt ausgesprochenen Überzeugung nie gelangte. Wir geben ferner zu bedenken, daß man zur Möglichkeit einer Fälschung, die spätestens im XI. S. vollzogen worden sein mußte — denn aus dieser Zeit rühren unsere ältesten Handschriften, welche die Stelle vom Abacus enthalten, her — anzunehmen gezwungen ist, daß damals bereits die echte Geometrie des Boethius verloren gegangen war, trotz der übertriebenen Wertschätzung, die man dem Manne zu zollen nie aufgehört hatte, oder daß man falls solches nicht stattfand Wahrscheinlichkeitsgründe dafür geltend zu machen hätte, warum nur Abschriften der gefälschten Geometrie und daneben keine der echten sich erhielten.

Wir denken nicht daran, ferner unserer früher lange festgehaltenen Meinung von der Echtheit der Geometrie des Boethius anzuhaften, nachdem die gewiegtesten Kenner des Mittelalters, die am

---

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 228—229. [2]) Zuletzt und am scharfsinnigsten Weißenborn in der schon wiederholt angeführten Abhandlung „Die Boetiusfrage“.

meisten damit vertraut sein müssen, was man jener Zeit an Fälschungen zumuten darf, die entgegengesetzte Meinung als einzig mögliche hingestellt haben[1]), aber eines dürfen wir betonen: das Schlußergebnis ist und bleibt, daß der Verfasser der sogenannten Geometrie des Boethius, der Fälscher, wie man ihn unter dieser Voraussetzung zu nennen hat, wesentlich feldmesserische Quellen benutzt haben muß, daß er auf dem Boden griechischer Bildung steht, und somit, wenn auch unter Herabrückung der Zeit, in welcher seine Schrift entstanden ist, für die Geschichte späterer römischer Mathematik Verwendung finden darf.

Gehen wir nach dieser Zwischenbemerkung noch einmal und mit vermehrter Sicherheit zum I. Buche der Geometrie des Boethius zurück, und zwar zu der Stelle, wo die Übersetzung des Auszuges aus den Elementen des Euklid aufhört. Die letzten Sätze, die ausgesprochen sind, lauten[2]): „Um einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck zu zeichnen lehren die Geometer. In einen gegebenen Kreis ein Fünfeck zu zeichnen, welches gleichseitig und gleichwinklig sei, ist nicht unpassend.“ Die Fortsetzung wagen wir nicht zu übersetzen. Sie begründet die unmittelbar hervorgehende Behauptung mittels gewisser auf das Verhältnis von Zahlen herauskommenden Rücksichten, aus denen wir einen guten Sinn nicht mit Sicherheit zu entnehmen vermögen. Gleichwohl ist an der Echtheit der floskelhaften Begründung nicht zu zweifeln, da sie sich wortgetreu in 28 darauf hin untersuchten Handschriften, die in anderen Punkten Unterschiede gegeneinander zeigen, wiederfindet[3]). Dagegen hat keine dieser Handschriften eine Figur damit verbunden, während die älteren Druckausgaben der Geometrie des Boethius, wir wissen nicht aus welcher Quelle[4]), ein in den Kreis eingezeichnetes regelmäßiges Fünfeck mit seinen sämtlichen fünf Diagonalen beigegeben haben. Zumeist aus dieser nichts weniger als authentischen Figur hat man einen Sinn jener dunkeln Worte abgeleitet, als wenn neben dem gewöhnlichen Fünfeck das Sternfünfeck beschrieben werden sollte[5]), welches Boethius danach ge-

[1]) Wir verweisen für ihre Begründung wiederholt auf Heiberg im Philologus XLIII, 507—519. [2]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 389, 8—16: *Circum datum circulum quinquangulum aequilaterum et aequiangulum designare geometres praecipiunt. Intra datum circulum quinquangulum, quod est aequilaterum atque aequiangulum designare non disconvenit. Nam omnia, quaecunque erint, numerorum ratione sua constant et proportionabiliter alii ex aliis constituuntur circumferentiae aequalitate multiplicationibus suis quidem excedentes atque alternatim portionibus suis terminum facientes.* [3]) Boncompagni im *Bullettino Boncompagni* 1873, 341—356. [4]) Etwa aus einem griechischen Euklid IV, 11? [5]) Chasles, *Aperçu hist.* 477, deutsch 545—546.

kannt haben würde. Wir sind gegenwärtig nicht geneigt diese Meinung aufrecht zu halten. Nicht als ob es uns unmöglich schiene, daß Boethius das schon alte Sternfünfeck gekannt hätte, aber wir trauen ihm so wenig Geometrie zu, daß er wohl nicht aus eigenen Gedanken das Pentagramm mit dem regelmäßigen Sehnenfünfeck in Verbindung brachte und bei Euklid konnte er entschieden keine Anregung dazu erhalten, weder in dem Auszuge noch in dem vermeintlichen Kommentare des Theon. Dort fand er höchstens, daß die Winkel eines aus zwei Diagonalen und einer Fünfecksseite gebildeten Dreiecks sich wie 1 : 2 : 2 verhalten, und das soll möglicherweise in den dunkeln Worten ausgesprochen sein.

Wir kommen ferner auf ein Anderes zurück, wovon erst andeutungsweise die Rede war. Architas, ein nicht gemeiner Schriftsteller dieser Wissenschaft, hat nach dem sogenannten Boethius die geometrische Tafel, d. h. den Kolumnenabacus mit seinen Kegelchen, für Latium zurecht gemacht. Wer war dieser Architas, welcher in dem Zwischenstücke zwischen dem I. und II. Buche und in dem II. Buche der Geometrie, im ganzen an fünf Stellen[1]) genannt ist: für die geometrische Tafel und für die Bruchrechnung; für den Satz vom Durchmesser des Innenkreises des rechtwinkligen Dreiecks und für die Bildung rationaler Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks von der geraden Zahl ausgehend, also für die Methode, welche sonst Platon zugeschrieben wird; endlich für eine falsche Berechnung der Fläche eines Dreiecks als doppeltes Quadrat seiner Höhe? Auch hier stehen zwei Meinungen einander gegenüber. Die einen halten Architas für den alten tarentiner Pythagoräer, auf welchen die Überlieferung gar vieles mit Recht und mit Unrecht zurückgeführt habe, und welcher auch in der Arithmetik und in der Musik des Boethius mehrfach vorkam, so daß Boethius oder der seinwollende Boethius ihn anzuführen Gründe hatte. Die anderen meinen Architas, der lateinisch schrieb, der nach der Stelle vom Kreisdurchmesser später als Euklid gelebt habe, könne nicht der Tarentiner sein. Es sei vielmehr ein römischer Schriftsteller, ein Feldmesser oder dergleichen gewesen, der alsdann sicherlich vor Verfassung der Geometrie, in welcher er genannt ist, aber unbestimmt wann gelebt haben muß. Mit dieser Annahme ist die Geschichte der Mathematik bei den Römern um einen Namen reicher, um den Architas Latinus, aber die Schriften des Mannes bleiben auch denen, die an ihn glauben, unbekannt.

Wir selbst zählten früher zu den letzteren, sind aber durch eine neuere Entdeckung zur entgegengesetzten Meinung bekehrt worden.

---

[1]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 7; 408, 14; 412, 20; 413, 22; 425, 23.

Man hat nämlich bemerkt[1]), daß der so auffallende Ausdruck *non sordidus auctor*, der von Architas gebraucht wird, von Horatius in seiner Ode auf Archytas von Tarent angewandt wurde[2]), daß mithin nur eine Erinnerung an diesen bekannten Vers in jenem Ausdrucke zu finden ist, und diese ist undenkbar, wenn nicht die Persönlichkeit, von der die Rede ist, die gleiche wäre. Die Schwierigkeit, daß Architas nach Euklid gesetzt wird, löst sich durch die seit der Zeit des Kaisers Tiberius (S. 261) übliche Verwechslung des Mathematikers Euklid mit Euklides von Megara, der ein älterer Zeitgenosse des Archytas von Tarent wirklich war. Ob endlich die platonische Formel für rationale rechtwinklige Dreiecke nicht wirklich ursprünglich dem Archytas angehörte, ist eine Frage, deren Verneinung nicht durch zwingende Gründe gefordert wird. Wenn wir also gegenwärtig annehmen, ein Architas Latinus als Persönlichkeit sei aus der Geschichte zu streichen, wenn die Meinung, Boethius habe lateinisch zugestutzte Schriften des Tarentiners vor sich gehabt, als er die Worte *Latio accommodatam*[3]) gebrauchte, daran strandet, daß nie und nirgend die leiseste Spur einer solchen Bearbeitung nachzuweisen ist, so bleibt die fortgesetzte Berufung auf Architas für uns diejenige Klippe, von der aus wir am leichtesten zur Fälschungstheorie gelangen.

Wir haben nun von einigen bekannten Schriften völlig unbekannter Verfasser zu reden. Der älteste von ihnen wird vermutlich derjenige sein, den wir anderwärts den Anonymus von Chartres genannt haben[4]), den man auch wohl für Julius Frontinus gehalten hat. Bei ihm tritt die Dreiecksberechnung aus den drei Seiten nach der sogenannten heronischen Formel auf, bei ihm die Formel für rationale Seiten rechtwinkliger Dreiecke, bei ihm der Satz vom Innenkreise des rechtwinkligen Dreiecks, bei ihm die Berechnung der Kugeloberfläche gleich der vierfachen Fläche des größten Kreises, bei ihm das Verhältnis $22:7$ des Kreisumfangs zum Durchmesser, kurzum richtige Dinge, welche den Verfasser wohl noch mehr als die bei ihm gerühmte Latinität in die Blütezeit römischer Feldmeßwissenschaft hinaufrücken, während der Römer an den als Flächenformeln benutzten Formeln für Vieleckszahlen mitten zwischen geometrischen Betrachtungen kenntlich bleibt.

Ein anderes Stück, in demselben Sammelbande in Chartres enthalten, aber wohl nicht von dem Anonymus verfaßt[5]), hat eine

---

[1]) Allman, *Greek Geometry from Thales to Euclid* pag. 110. [2]) Horatius, Lib. I, Ode 28: *iudice te non sordidus auctor naturae verique.* [3]) Boetius (ed. Friedlein) pag. 393, 8. [4]) Agrimensoren S. 132. Vgl. Chasles, *Aperçu hist.* 457—459, deutsch 517 flgg. [5]) Das hat Weißenborn l. c. S. 223 gegen uns, mit Berufung auf Chasles, den wir hierin mißverstanden hatten, mit Recht betont.

Abhandlung über das Abacusrechnen zum Inhalte, welche der des Boethius sehr ähnlich ist, aber noch weniger als die Geometrie des Anonymus sich datierungsfähig erweist.

Eine andere geometrische des Namens ihres Verfassers entbehrende Schrift ist diejenige, welche die Überschrift führt: Von der Ausmessung der Jucharte, *de iugeribus metiundis*. Sie ist in der sogenannten Gudianischen Handschrift der Wolfenbüttler Bibliothek enthalten, mithin im IX. bis X. S. jedenfalls vorhanden gewesen[1]). Mehr wissen wir nicht zu sagen. Der Verfasser, zu seiner Zeit vielleicht als großer Mathematiker anerkannt, hat unverstandene Bruchstücke aus den verschiedensten Vorlagen vereinigt, alte Mängel getreu übernehmend, neue hinzufügend. Wir haben nicht nötig auf dieses bunte Allerlei einzugehen, nur das wollen wir uns bemerken, daß die Vierecksfläche als Produkt der arithmetischen Mittel gegenüberstehender Seiten erhalten wird, daß sogar der Kreis quadratisch gedacht ist, indem dessen Fläche sich aus der Vervielfältigung des vierten Teiles des Umfanges mit sich selbst bildet. Es ist ja nicht schwer, in den laienhaften Gedanken sich zurückzuversetzen, welcher den Kreis als krummliniges Viereck mit den vier Quadranten als Seiten auffaßte und weiter annahm, die Fläche verändere sich nicht, wenn nur die Seitenlängen dieselben bleiben (S. 549), man habe also nur eben jene Kreisquadranten als Gerade rechtwinklig aneinander zu setzen, um die Quadratur des Kreises zu vollziehen. Mathematisch gesprochen lief dieses Verfahren vermöge $\left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 = \pi r^2$ auf $\pi = 4$ hinaus, oder darauf den Kreisdurchmesser dem vierten Teile des Kreisumfanges gleich zu setzen. Gerade dieses so ungenaue Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser wird uns nötigen der dasselbe enthaltenden Schrift noch einmal zu gedenken, wenn wir mit den mittelalterlichen Schriftstellern uns beschäftigen, zu welchen dieser weise Anonymus jedenfalls hinüberführt, vielleicht gehört.

Für jetzt verlassen wir den europäischen Boden. Wir müssen unter allen Umständen zusehen, was in der Heimat älterer Kultur, in Asien, aus der Mathematik geworden ist, und daß wir gerade diesen Augenblick dazu wählen, jene Umschau zu halten, hat seinen vollwichtigen Grund. Wir haben in diesem Kapitel immer deutlicher den Untergang geometrischen Verständnisses bei römischen Schriftstellern verfolgt. Wir haben zu unserem Erstaunen daneben die Überbleibsel einer entwickelteren Rechenkunst erscheinen sehen, verbunden mit Zahlzeichen, aus welchen, wie wir jetzt verraten wollen, die gegenwärtig in Europa gebräuchlichen als bloße Umformungen

[1]) Agrimensoren S. 135—138.

sich herleiten lassen. Wir haben die Vermutung durchblicken lassen, jene Rechnungsweisen könnten vielleicht griechischen Ursprunges sein. Nach Griechenland, nach dem geistigen Mittelpunkte griechischer Mathematik in Alexandria würden wir daher versuchen müssen auch jene Zeichen rückwärts zu verfolgen, wenn nicht laute Einsprache zu gewärtigen wäre.

Die Anfechter der Echtheit der Geometrie des Boethius sind zu diesem von beiden Seiten hartnäckig geführten Streite eigentlich nur durch die Abacusstelle vermocht. Sie können und wollen, von ihrer Fälschungstheorie aus, derselben kein höheres Alter als etwa bis in das X., frühestens IX. S. verstatten. Sie leiten alsdann die Zahlzeichen und deren Benutzung auf dem Kolumnenabacus aus dem Oriente her: von den Indern erdacht, durch Araber verbreitet sollen die Zeichen in Europa sich eingebürgert haben.

Dieser Möglichkeit gegenüber müssen wir die Heimat der Null, durch deren Vorhandensein das Ziffernrechnen sich wesentlich vom Kolumnenrechnen, auch von dem mit Apices, unterscheidet, aufsuchen. Wir begeben uns zu diesem Zwecke nach Indien.

V. Inder.



28. Kapitel.

Einleitendes. Elementare Rechenkunst.

Zu einer selbst möglicherweise aus zweierlei Völkern, deren eines die krausen Haare der Australneger besaß, gemischten Ureinwohnerschaft des heutigen Dekkans wanderte vielleicht 1400 Jahre v. Chr. der Stamm der Arier ein, die niedriger stehenden Besitzer des Landes teils vertreibend, teils unterjochend[1]). In der späteren Kasteneinteilung des indischen Volkes sind die Nachkommen der alten Besiegten als die dienende, verachtete Kaste der Çûdras übrig geblieben, deren Berührung schon befleckte, und die streng ausgeschlossen waren von den Segnungen einer Bildung, deren Träger freilich zumeist in den beiden oberen Kasten der Brâhmaṇas und Kshattriyas, der Priester und Krieger, zu suchen sind, während sie kaum noch auf die Vaiçyas, den bürgerlichen Kern des Volkes sich erstreckte. Die Sprache der Arier, der Trefflichen nach der späteren Bedeutung des Namens, ist dieselbe, welche man Sanskrit zu nennen pflegt. Sie wurde die herrschende Sprache von ganz Vorderindien, vermochte aber in dieser Ausdehnung sich nicht zu erhalten. Das Sanskrit verblieb nur als Gelehrtensprache in den Priesterschulen der Brahmanen, während es als Volkssprache ausstarb, beziehungsweise durch Töchtersprachen verdrängt wurde.

Zwei Momente mögen bei dieser Verdrängung wirksam gewesen sein. Einmal die Seltenheit schriftlicher Überlieferung, welche soweit ging, daß Fremde, welche nur kurze Zeit im Lande verweilten, an den Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung glauben durften, zweitens die jene Seltenheit selbst wohl verschuldende mehr und mehr hervortretende Zentralisation der Gelehrsamkeit bei den Brahmanen.

[1]) Für die allgemeinen Verhältnisse waren unsere Quellen der Artikel „Indien" von Benfey in Ersch und Grubers Encyklopädie 1840. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* in den *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-lettres* XVIII, 2. Paris 1849. Albr. Weber, Vorlesungen über indische Literaturgeschichte. 2. Auflage. Berlin 1876. Herr E. Windisch unterstützte uns bei der Drucklegung der ersten Auflage wesentlich durch Ratschläge für die Rechtschreibung indischer Namen und Wörter.

Das Volk lebte unter einem heftigen Drucke, welchem die Einführung einer neuen Religion entsprang, des Buddhismus, etwa seit der Mitte des VI. S. v. Chr. Rasch um sich greifend nach mühseligen Anfängen wurde der Buddhismus durch den König Açoka am Beginn des III. S. zur Staatsreligion erhoben, und diese herrschende Stellung besaß er auch noch zur Zeit des Königs Kanishka um 50 v. Chr., eines zweiten indischen Fürsten von in der Erinnerung der Nachkommen sich fast sagenhaft mehrendem Ruhme. Um die Zeit von Christi Geburt etwa gelang es dem Brahmanismus in den Ländern westlich vom Ganges wieder die Oberhand zu gewinnen, während der Buddhismus weiter nach Osten siegreich fortschritt, beziehungsweise sich dort erhielt.

Der Buddhismus war ebenso schreibselig wie der alte Brahmanismus der schriftlichen Arbeit abgeneigt. Eine reiche buddhistische Literatur hatte sich erzeugt, aber der neu erwachende Brahmanismus vertilgte schonungslos, wessen er nur habhaft werden konnte, und das bot eine neue Veranlassung, die Sanskritsprache in Indien selbst zur Unverständlichkeit zu bringen. Sie behielt nur noch das Wesen und den Charakter einer heiligen Sprache, als solche allen höheren Zwecken dienstbar. Religion und Wissenschaft waren an sie geknüpft, und auch was wir von der Mathematik der Inder wissen, ist wesentlich aus Sanskrittexten geschöpft, wenn nicht aus Schriftstellern anderer Völker erschlossen.

Ein Verkehr Indiens mit dem Westen wie mit dem Osten ist nämlich für fast alle Zeiten von den ältesten an gesichert. Sind es insbesondere sprachliche Gründe, welche für die alleräitesten Zeiten den Ausschlag geben müssen, so treten bestimmte Überlieferungen seit dem IV. S. v. Chr. bestätigend hinzu. Nach dem Alexanderzuge entstanden dicht an den Grenzen Indiens griechische Königreiche, welche Verbindungen mit dem Mutterlande ununterbrochen aufrecht erhielten, und mittels deren herüber und hinüber auch Wissenschaft und wissenschaftliche Berufstätigkeit in Austausch treten mußten. Kanishka, den wir vorher erwähnten, schloß ein Bündnis mit dem Triumvirn Marcus Antonius, und von seinen Truppen befanden sich unter den Geschlagenen bei Aktium. Indische Gesandtschaften erschienen, wie wir in dem griechischer Entwicklung gewidmeten Abschnitte (S. 456) zu erwägen gaben, an dem Kaiserhofe in Rom wie später in Byzanz. Augustus, Claudius und Trajan, Constantinus und Julian durften die aus dem fernen Osten kommenden Botschafter begrüßen. Und keineswegs weniger gesichert ist der Verkehr zwischen Indien und der Ostküste Ägyptens über das indische Meer hin. In den beiden Jahrhunderten, welche zwischen der Regierung Trajans

und dem Jahre 300 liegen, scheint insbesondere der Handel auf dieser durch Passatwinde begünstigten Wasserstraße stetig an Ausdehnung gewonnen zu haben, so daß eine Schwierigkeit die Art und Weise der Übertragung zu erklären keineswegs besteht für den Fall, daß indische Bildungselemente in griechischen, griechische in indischen Werken sich nachweisen ließen. Beides ist aber der Fall.

Philosophie und Theologie der alexandrinischen Neuplatoniker und Gnostiker haben indische Gedanken sich angeeignet. Daß auch umgekehrt indische Literatur vielfach von griechischen Quellen zeuge, ist eine Tatsache, welche gegenwärtig wohl von keinem Sanskritologen mehr in schroffe Abrede gestellt wird. Nur über den Grad der Beeinflussung, stellenweise über die Richtung derselben findet ein Zwiespalt statt, da ja an und für sich betrachtet Dinge, die an zwei Orten gefunden werden, falls man an ein selbständiges doppeltes Auftreten aus diesem oder jenem Grunde zu glauben nicht geneigt ist, eben so leicht von dem östlichen Fundorte nach dem westlichen gelangt sein können als umgekehrt.

Wir werden nunmehr prüfen müssen, welcherlei mathematisches Wissen bei den Indern sich nachweisen läßt, und wie sich dasselbe zur griechischen Wissenschaft verhält.

Eins schicken wir voraus: die Form indischer Wissenschaft darf uns, wenn sie von der griechischen noch soweit abweicht, nicht als Beweis der Selbständigkeit derer gelten, die sich ihrer bedienten. Ein arabischer Schriftsteller, Albîrûnî, hat am Anfange des XI. S. die Erfahrung gemacht, daß Auszüge aus Euklid und Ptolemäus, welche er indischen Gelehrten mitteilte, von diesen sofort in Verse so dunkeln Verständnisses umgesetzt wurden, daß er kaum mehr wiedererkannte, was er selbst sie gelehrt hatte[1]). Nicht viel anders scheint das Verhältnis der indischen Heilkünstler des Mittelalters zu Hippokrates aufzufassen[2]).

Wir haben von dunkeln Versen gesprochen. Es ist das eine besondere Eigentümlichkeit indischer Gelehrten, daß sie wissenschaftliche Werke in Versen zu verfassen liebten. Es hängt das offenbar mit der brahmanischen Neigung zusammen dem Gedächtnisse zu vertrauen und Aufzeichnungen zu vermeiden. Nicht unwichtige Folgen ergeben sich aber daraus. Einmal ist die indische Prosodie eine auf sehr feste Regeln gegründete, so daß Irrtümer in einem alten Texte unter Umständen außer aus dem Sinne auch aus holperndem Versmaße erkannt werden können. Zweitens aber hat, wie wir schon

[1]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 334, Anmerkung 2. [2]) E. Haas in der Zeitschr. der deutschen morgenländischen Gesellsch. XXXI, 647—666.

sagten, die Versform häufig Dunkelheit erzeugt und so die Nötigung zu ausführlichen Erklärungen der für die Schüler fast unverständlichen Schriften mit sich getragen, Erklärungen, die selbst dazu dienen den älteren Text in unzweifelhafter Reinheit zu bewahren, weil sie fortlaufende Kommentare bilden, Wort für Wort des Textes wiederholen, zur Sache selbst aber meistens recht wenig bieten, indem sie sich mit bloßen Umschreibungen zu begnügen pflegen.

Die indische Prosodie, sagten wir, sei auf sehr feste Regeln gegründet. In der Tat besitzt sie Versmaße sehr verschiedener Natur, von denen wir zwei nennen müssen, das Sloka- und das Ârya-Metrum. Letzteres diente den Mathematikern seit Âryabhaṭṭa, dessen Zeitalter wir gleich angeben werden, ausschließlich. Früher soll man des Sloka-Metrums sich bedient haben, und dieser Umstand ist zur Datierung eines arithmetischen Bruchstückes benutzt worden, welches im Mai 1881 in Bakhshâlî, in dem nordwestlichsten Indien, in der Erde vergraben aufgefunden worden ist. Es wird angenommen, das Rechenbuch von Bakhshâlî[1]), wie wir es nennen wollen, sei im dritten oder vierten nachchristlichen Jahrhundert verfaßt, wenn auch die aufgefundene Niederschrift auf Birkenrinde erst zwischen den Jahren 700 und 900 entstanden sein dürfte. Von dem Inhalte des Rechenbuches von Bakhshâlî reden wir am Anfange des 29. Kapitels.

Eigentlich mathematische Schriftsteller scheint es nach der gegenwärtigen Kenntnis, die wir von der Sanskritliteratur besitzen, in Indien nicht gegeben zu haben. Astronomie und Astrologie fanden dagegen ihre berufsmäßigen Vertreter, und da diese genötigt waren mathematische Vorkenntnisse vorauszusetzen, so entwickelten sie das, was ihnen unentbehrlich war, in Einleitungskapiteln oder in gelegentlichen Abschweifungen. So hielten es wenigstens die drei vorwiegend mathematischen Astronomen, deren Werke wir besitzen.

Âryabhaṭṭa geboren 476 n. Chr. in Pâtaliputra am oberen Gangeslaufe schrieb ein Werk Âryabhâṭṭîyam betitelt, dessen dritter Abschnitt der Mathematik gewidmet ist[2]).

Brahmagupta geboren 598 schrieb „das verbesserte System des Brahma“, *Brâhma-sphuṭa-siddhânta*, aus welchem das 12. und 18. Kapitel der Mathematik angehören.

Bhâskara Âcârya, d. h. Bhâskara der Gelehrte, schrieb „die Krönung des Systems“ *Siddhântaçiromaṇi*, dessen zwei für uns wichtige Kapitel mit besonderer Überschrift *Lîlâvatî* (die Reizende)

---

[1]) *The Bakshali Manuscript* von Rudolf Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, 33—48 und 275—279 (Bombay 1888). [2]) Eine Übersetzung von L. Rodet im *Journal Asiatique* von 1879. (Série 7, T. XIII.)

und *Vîjagaṇita* (Wurzelrechnung) genannt sind[1]). Bhâskara ist 1114 geboren.

Die Geburtsdaten dieser drei Schriftsteller sind vollständig sicher, da sie aus eigenen Angaben der betreffenden Männer, welche in ihren Werken aufgefunden worden sind, hergestellt werden konnten[2]). Wir fügen dem hinzu, daß andere Astronomen oder Mathematiker, welche wir noch nennen werden, insgesamt viel jüngeren Datums als Âryabhaṭṭa sind, daß ein astronomisches Werk, von dem wir sogleich reden wollen, auch nicht älter als frühestens aus dem IV. oder V. S. nachchristlicher Zeitrechnung ist.

Wir meinen den Sûrya Siddhânta oder das Wissen der Sonne[3]), indem Sûrya (die Sonne) ihre Siddhânta (Erkenntnis, Wissenschaft, System) dem Asura Maya d. h. dem Dämon Maya offenbart, der es niederschreibt. Wer dieser dämonische Schriftsteller selbst sei, wann er gelebt hat, ist nur durch eine ziemlich kühne Vermutung erschließbar. In dem Werke selbst kommen nämlich unzweifelhaft griechische Ausdrücke vor, welche in der indischen Verkleidung leicht erkannt worden sind. Wenn Kendra die Entfernung eines Planeten von einem Störungsmittelpunkte bedeutet, so ist das eben das griechische ἡ ἐκ κέντρου, wenn *liptâ* oder *liptikâ* die Winkelminute heißt, so ist das λεπτόν das Geschabte, der Bruchteil, Ableitungen, die trotz der Stammverwandtschaft indischer und griechischer Sprache angenommen werden müssen, indem für *kendra* und *liptâ* eine unmittelbar indische Herkunft nicht zu ermitteln ist. Dazu kommt, daß einzelne Lehren des Sûrya Siddhânta griechisches Gepräge tragen. Die Ostwestlinie für einen Punkt wird mittels der zwei Schattenbeobachtungen gleicher Länge am Vormittage und am Nachmittage gewonnen, welche wir bei Vitruvius und Hyginus (S. 535—536) kennzeichnen mußten. Anderes scheint auf den ptolemäischen Almagest hinzuweisen. Gerade diese Annahme vereinigt sich sodann mit einer höchst merkwürdigen Tatsache: daß nämlich ägyptische Könige aus der Ptolemäerfamilie in indischen Inschriften als Turamaya vorkommen mit eigentümlicher Verketzerung des Namens. Man

---

[1]) Die mathematischen Kapitel von Brahmagupta und von Bhâskara sind in einer englischen Übersetzung vorhanden, welche wir als Colebrooke zitieren: *Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara translated by* H. Th. Colebrooke. London 1817. [2]) Bhaû Dajî, *On the age and authenticity of the works of Varâhamihira, Brahmegupta, Bhattotpala and Bhaskarâchârya* in dem *Journal of the Asiatic society* 1865 (New Series I, pag. 292—418). [3]) Herausgegeben mit englischer Übersetzung von Burgess und Anmerkungen von Whitney in dem *Journal of the American Oriental Society* Vol. VI (New Haven 1860).

hat deshalb vermutet[1]), auch der Astronom Ptolemäus sei zu einem Turamaya geworden, der volkstümlich sich weiter in einen Asura Maya verketzerte. Zu einer solchen sagenhaften Personenveränderung bedarf es einiger Zeit und so kann der Sûrya Siddhânta nicht allzurasch nach Ptolemäus' Leben d. h. nach dem II. S. n. Chr. verfaßt sein. Andererseits hat Varâhamihira von dem Sûrya Siddhânta Gebrauch gemacht und dessen Blütezeit fällt nach der Aussage eines noch späteren Astronomen Bhaṭṭa Utpala nach 505, dessen Tod einem anderen Berichterstatter Âmarâja zufolge auf 587. Beide Daten vereint lassen uns im Varâhamihira einen jüngeren Zeitgenossen von Âryabhaṭṭa finden, und der Sûrya Siddhânta muß dem entsprechend zwischen Ptolemäus und Varâhamihiras Lebzeiten d. i. etwa im IV. oder V. S. entstanden sein.

Varâhamihira[2]) gibt übrigens den Ursprung mancher seiner Kenntnisse mit ehrlicherer Gewissenhaftigkeit an, als es sonst bei Indern der Fall zu sein pflegt. Er bezieht sich für die Namen der Sternbilder, welche er benutzt, geradezu auf den Yavaneçvarâcârya, d. h. auf den ionischen oder griechischen Meister, indem die Yavana sicherlich Griechen bedeuten. Bei ihm und anderen Astronomen und Astrologen ist sodann von Romaka Pura, d. h. von Rom und von Yavana Pura, d. h. der Stadt der Ionier nämlich von Alexandria die Rede, lauter Momente, welche den alexandrinisch-indischen Beziehungen entstammen und die Abhängigkeit indischer Astronomie auch von alexandrinischem Wissen bestätigen, wie anderenteils ein Zusammenhang ältester indischer Sternkunde mit Babylon (S. 39) nicht abzuweisen sein dürfte.

Wir haben außerordentlich wenig für uns Brauchbares dem Sûrya Siddhânta entnehmen können, eigentlich nichts weiter, als daß ein griechischer Einfluß auf indische Wissenschaft damals schon, mithin vor Âryabhaṭṭa feststeht. Wir haben daneben einige weitere Namen indischer Astronomen kennen gelernt. Wir lassen hier andere folgen. Von einiger Bedeutung dürften Çrîdhara und Padmanâbha gewesen sein. Beide sind bei Bhâskara erwähnt, bei Brahmagupta noch nicht, haben daher vermutlich in der Zwischenzeit zwischen diesen beiden gelebt. Es kommt dazu Paramâdîçvara, der Kommentator Âryabhaṭṭas, welcher später als Bhâskara gelebt hat, welchen er kennt. Ferner kommen Bhâskaras Kommentatoren hinzu, wie Gangâdhara, der 1420 lebte, Sûryadâsa um 1540, Ganeça um

[1]) Albr. Weber, Zur Geschichte der indischen Astrologie in den Indischen Studien II, 243. [2]) *The Pañchasiddhântikâ of Varâha Mihira* ed. by G. Thibaut and Mahâmahopâdhyâya Sudhâkara Dvivedî. Benares 1889.

1545, Ranganâtha um 1640, Râma Krishna vielleicht um dieselbe Zeit, jedenfalls nicht viel älter, und andere. Sie alle lassen uns ratlos in der wichtigsten Frage, welche wir ihnen so gern vorlegen würden, in der Frage: Und was war vor Âryabhaṭṭa?

Sollen die Inder mit mathematischen Kenntnissen erst zu einer Zeit vertraut geworden sein, welche später liegt als diejenige, in welcher die Nachblüte alexandrinischer Wissenschaft unter Pappus und Diophant bereits zu Grabe getragen war? Es genügt, die gestellte Frage von der Höhe der allgemeinen Bildungsstufe aus, welche das Volk der Inder erreicht hat, sich wiederholt zu vergegenwärtigen, um zur Verneinung zu gelangen. Aber worin die älteren Kenntnisse bestanden haben, davon wissen wir ungemein wenig. Sogar wo uns in nicht-mathematischen Schriften Aufgaben berichtet werden, deren Altertum kaum bezweifelbar ist, zwingt die Jugend des Berichtes zum Eingeständnis, daß die Methoden der Auflösung jener Aufgaben möglicherweise um viele Jahrhunderte später entstanden oder eingeführt sein können als die Aufgaben selbst. Wir haben in Rom es gesehen, daß die Festlegung der Ostwestlinie, eine altertümliche Aufgabe, ein geradezu priesterliches Geschäft, bald so, bald so vorgenommen wurde; wir haben durch einen günstigen Zufall, das Bestreben eines Schriftstellers Hyginus nach Vollständigkeit, von drei Methoden offenbar aus verschiedenen Zeiten stammend Kenntnis gewonnen; wir haben eine Datierung der drei Methoden versucht, versuchen können. Wie aber, wenn Hyginus uns nur das jüngste Verfahren mitgeteilt hätte, wenn Vitruvius ganz darüber schwiege, würden wir die berichtete Methode als die der ältesten Zeiten anerkennen müssen? Vergegenwärtigen wir uns nun noch die schon berührte Fähigkeit der Inder, Fremdländisches rasch in die einheimische Form zu gießen, so kommen wir notgedrungen zu der Überzeugung, es werde in vielen Fällen nur spät Eingeführtes oder mindestens durch Einführungen wesentlich Verändertes sein, wovon uns berichtet wird, soweit wir auch in Aufsuchung mathematischen Stoffes zu greifen geneigt sind.

Daraus folgt aber die Unmöglichkeit eine chronologische Übersicht der indischen Mathematik zu geben, und wir werden in jeder Beziehung uns besser stehen, wenn wir versuchen eine Gruppeneinteilung des indischen mathematischen Wissens nach dem Inhalte vorzunehmen. Es wird dabei in ein helleres Licht treten, was als Leitfaden durch diesen ganzen Abschnitt benutzt werden kann: ein gewisser Gegensatz zwischen griechischer und indischer Denkungsart und schöpferischer Kraft.

Die Griechen waren das vorzugsweise geometrische Volk,

sie waren es in solchem Maße, daß wir den einengenden Zusatz: des Altertums uns füglich erlassen dürfen. An den Indern werden wir die vorzugsweise rechnerische Begabung zu bewundern haben. Bei ihnen ist dem entsprechend mutmaßlich die Heimat einer staunenerregenden Entwicklung der Rechenkunst zu suchen. Und umgekehrt tritt uns mit der einzigen Ausnahme einer selbst auf Rechnung gegründeten Trigonometrie wenige vorläufig rätselhafte indische Geometrie gegenüber, deren Spuren wir nicht mit Leichtigkeit nach Alexandria zurückverfolgen könnten. Mit der Algebra endlich wird sich uns ein Gebiet eröffnen, das beiden Begabungen zugänglich war. Die Griechen gingen von einer geometrisch eingekleideten Algebra aus, welche sie bis zur Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen fortführten, nur allmählich des geometrischen Gewandes sich entäußernd. Spuren griechischer Algebra müssen mit griechischer Geometrie nach Indien gedrungen sein und werden sich dort nachweisen lassen. Aber entweder stieß die griechische Algebra in Indien auf eine einheimische oder vielleicht aus Babylon frühzeitig eingedrungene Schwesterwissenschaft, mit der sie sich vereinigte, oder sie entwickelte sich dort rechnerisch, also recht eigentlich algebraisch bis zu einer Höhe, die sie in Griechenland niemals zu erreichen vermocht hat.

Bei der nunmehr zu beginnenden Besprechung indischer Rechenkunst tritt uns vor allem das Zifferrechnen gegenüber, welches nach vielfach verbreiteter Überlieferung indischen Ursprungs ist. Ein arabischer Schriftsteller des X. S., Masʿûdî, erzählt[1]), unter Brahmas, des ersten indischen Königs, Regierung habe die Wissenschaft ihre größten Fortschritte gemacht. Man habe damals in den Tempeln Himmelskugeln abgebildet; die Regeln der Astrologie, des Einflusses der Sterne auf Menschen und Tiere seien festgestellt worden; die vereinigten Gelehrten verfaßten den Sindhind (d. h. den Siddhânta), das Buch der Zeit der Zeiten; astronomische Tafeln wurden zusammengestellt; endlich erfand man die neun Zeichen, mit welchen die Inder rechnen. In diesem Berichte spukt offenbar indischer Nationalstolz, welcher den Sûrya Siddhânta wie alles was mit Sternkunde in engerer oder weiterer Verbindung steht als einheimisch betrachtet wissen und darum in ein graues Altertum hinaufrücken will. Noch deutlicher zeigt sich die gleiche Eigenschaft in der Fortsetzung des Berichtes, der Masʿûdî von indischer Seite zugetragen wurde, so daß er nur als Sprachrohr uns erscheint. Die Inder, heißt es nämlich weiter, hätten nach Âryabhaṭṭa einen Almagest verfaßt, aus welchem Ptole-

---

[1]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 324.

mäus sein Werk gleichen Titels entnommen habe, eine Umkehrung der Tatsachen, die ihresgleichen sucht. Gegenwärtig haben wir es indessen mit den Ziffern zu tun, und da scheint gegen das, was man Masʿûdî erzählt hat, kein Widerspruch sich zu erheben. Ähnlich lauten auch andere Berichte. So heißt es in einer um 950 an der Nordküste von Afrika entstandenen rabbinischen Abhandlung[1]: die Inder haben neun Zeichen erfunden um die Einheiten anzuschreiben. Weitere Bestätigung finden wir bei dem Byzantiner Maximus Planudes, dessen bezügliche Äußerungen (S. 511) mitgeteilt worden sind, in welchen auch der Erfindung der Null besonders gedacht ist.

Ob freilich die Null gleichen Alters ist mit den anderen Zahlzeichen, diese Frage möchte eher zu verneinen als zu bejahen sein. Es scheint fast nachweisbar, daß die ältere indische Zahlenschreibung der Null noch entbehrte, welche erst später hinzuerfunden wurde. Das erste bekannte Vorkommen der Null in einer Urkunde ist erst aus dem Jahre 738 bekannt[2]. Wir wollen nicht versäumen hier in Erinnerung zu bringen, daß in Babylon ein Stellungswert von Zahlzeichen bestand, und daß in einer verhältnismäßig späten Zeit (S. 31), welche aber immer noch ein Jahrtausend vor der urkundlich nachgewiesenen indischen Null liegt, dort ein Zeichen vorhanden war, welches eine Lücke ausfüllen sollte.

Die Insel Ceylon hat ihre Kultur von Indien her erhalten, sei es schon im V. S. v. Chr., sei es im III. S., als König Açoka den Buddhismus auch dorthin über das Meer trug. Auf Ceylon wurde aber im Gegensatze zum Festlande, wo ein Fortschritt wenigstens in manchen Jahrhunderten mit größter Deutlichkeit hervortritt, die Bildung vollständig stationär, und eine am Anfange des XIX. Jahrhunderts noch auf Ceylon bei den Gelehrten übliche Zahlenschreibart kann sehr wohl ältesten indischen Ursprungs sein[3]. Während das Volk sich der gewöhnlichen europäischen Ziffern bedient, welche mit den Kolonisten der letzten Jahrhunderte eingewandert in der veränderten Gestalt, welche sie durch diese erhalten hatten, sich unweit der alten Heimat wie fremd neu einbürgerten, haben die Gelehrten

---

[1] Es ist ein Kommentar von Abu Sahl ben Tamim in hebräischer Sprache zu der bekannten kabbalistischen Schrift *Sepher Yecira* und handschriftlich in Paris vorhanden. Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 565. [2] E. Clive Bayley, *On the genealogy of modern numerals* in dem *Journal of the royal asiatic society*. New series XIV, 335—376 (1882) und XV, 1—72 (1883). Über die Urkunde von 738 vgl. XV, 27. [3] Die Untersuchungen des dänischen Gelehrten Rask über diesen Gegenstand stammen aus dem Jahre 1821. Vgl. Brockhaus, Zur Geschichte des indischen Zahlensystems in der Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes IV, 74—83.

folgendes Verfahren aufbewahrt. Sie besitzen neun Zeichen für die verschiedenen Einer, ebensoviele für die Zehner, ein Zeichen für Hundert, eins für Tausend und schreiben mittels dieser 20 Zeichen sämtliche Zahlen von 1 bis 9999, indem die Hunderter und Tausender dadurch ausgedrückt werden, daß man die Anzahl derselben vervielfachend den Zeichen für 100 und 1000 vorsetzt. So schreibt man z. B. 7248 mit sechs Zeichen, nämlich 7, 1000, 2, 100, 40, 8. Vier Zeichen nämlich 7000, 200, 40, 8 würden genügen, wenn man auch für die einzelnen Hunderter und für die einzelnen Tausender wie für die Zehner besondere Zeichen, im ganzen demnach 36 Zeichen besäße, und das wird auch den allergelehrtesten Einwohnern nachgerühmt. Das ist freilich ein Verfahren, welches dem, was man indische Rechenkunst zu nennen pflegt, weit weniger gleicht, als z. B. altägyptischer hieratischer Zahlenbezeichnung.

Eine Ähnlichkeit gibt sich nur darin zu erkennen, daß jene singhalesischen Zeichen nichts anderes sein sollen als abgekürzte Zahlwörter. Auch die alten indischen Ziffern, d. h. die Zeichen von eins bis neun, wie sie ursprünglich aussahen und nicht wie sie in der späteren indischen Schrift sich verändert haben, sollen nichts anderes gewesen sein als die Anfangsbuchstaben der betreffenden neun Zahlwörter, wobei wohl zu beachten ist, daß im Sanskrit eine Verschiedenheit der neun Anfänge obwaltet, wie sie in anderen indogermanischen Sprachen nicht stattfindet, so daß in diesen ein einfacher Anfangsbuchstabe nicht genügen würde, das Zahlwort unzweideutig zu bestimmen. Man denke nur an die deutschen Zahlwörter sechs und sieben; an die lateinischen *sex* und *septem*, aber auch an *quatuor* und *quinque*; an die griechischen ἕξ und ἑπτά. Allerdings wechselten im Laufe der Jahrhunderte auch die Buchstaben ihre Formen, und es scheint[1]), als ob Buchstaben des II. S. n. Chr. vorzüglich zur Ziffernbildung gedient hätten. Aus ihnen leiten sich am ungezwungensten die Zeichen ab, welche für uns (S. 584) Apices heißen, welche auch bei den Westarabern uns noch begegnen werden. (Siehe die lithographierte Tafel am Ende des Bandes.) Freilich ist diese Meinung nicht die allgemeine, und wir dürfen nicht verschweigen, daß andere Forscher von hoher Glaubwürdigkeit[2]) nicht viel von jener Buchstabenableitung halten. Die Apices seien allerdings indischen Ursprungs, stammten aber von nichtalphabetischen Zahlzeichen aus Höhleninschriften des II. S. n. Chr. Für uns geht mithin als ge-

---

[1]) So hat Woepcke im *Journal Asiatique* von 1863, pag. 75 bemerkt.
[2]) Burnell, *Elements of South-Indian Palaeography*. Mangalore 1874, pag. 47 bis 48.

sichert hervor, was beiden widersprechenden Annahmen gemeinschaftlich ist: daß im II. S. Zahlzeichen, gleichviel welcher ursprünglichen Entstehung, in Indien vorhanden waren, und von da nach Alexandria gekommen sein können, welche zur Ableitung der Apices vollkommen genügen.

Die Inder bedienten sich sehr verschiedener Bezeichnungsarten der Zahlen, von denen wir reden müssen. Eine solche wird von Âryabhaṭṭa berichtet, der sich ihrer im ersten Kapitel, und nur im ersten Kapitel des Âryabhaṭṭîyam bediente[1]). Zu deren Verständnis, wie überhaupt für das Folgende sind wir genötigt, weniges über das Alphabet der Sanskritgrammatik einzuschalten.

Es besteht aus 25 Konsonanten in fünf Abteilungen, deren jede als ein Varga bezeichnet zu werden pflegt. Es sind das die Kehllaute, die Gaumenlaute, die Zungenlaute, die Zahnlaute, die Lippenlaute. Die fünf Buchstaben, aus welchen jeder Varga besteht, sind der harte und der weiche, jeder von beiden ohne und mit Aspiration sich unmittelbar folgend, und der Nasenlaut, Unterschiede, die dem europäischen Ohre fast unmerklich sind, insbesondere was die Nasenlaute betrifft, da wir den Lippennasenlaut allerdings als *m* zu unterscheiden wissen, die Nasenlaute der vier ersten Vargas dagegen sämtlich als *n* hören. Nach den 25 Konsonanten kommen vier Halbvokale *y*, *r*, *l*, *v*. Als 30. bis 32. Buchstabe erscheinen drei Zischlaute, das Gaumen-*ç*, das Zungen-*sh*, das Zahn-*s*. Als 33. Buchstabe wird das *h* gezählt. Dazu treten 14 Vokale und Diphthongen gleichfalls von unseren europäischen Gewohnheiten weit abweichend. Vokale sind nämlich *a*, *i*, *u*, *ṛi*, *ḷi*, ein jeder in kurzer und in gedehnter Aussprache vorhanden. Diphthonge sind *e*, *ai*, *o*, *au*. Von diesen Buchstaben werden die Vokale und Diphthongen nur dann durch den anderen Lauten gleichberechtigte Zeichen geschrieben, wenn sie für sich allein eine Silbe ausmachen, also in der Regel nur am Anfange eines Wortes oder gar einer Zeile. Folgt hingegen der Vokal auf einen Konsonanten, so wird er durch kleinere Nebenzeichen ausgedrückt, welche über oder unter dem Konsonanten angebracht werden, etwa wie in den semitischen Sprachen. Das kurze *a* bedarf jedoch keines Zeichens, indem es ein für allemal inhäriert, d. h. indem jeder der Buchstaben von *k* bis *h*, wenn kein anderer Vokal ihm folgt, er aber der letzte Konsonant einer Silbe ist, als mit kurzem *a* behaftet ausgesprochen wird. Stehen zwischen zwei Vokalen, die einem oder auch zwei Wörtern angehören können, mehrere Konsonanten, so werden

---

[1]) Lassen in der Zeitschr. f. d. Kunde des Morgenlandes II, 419—427. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhatta* (*Journal Asiatique* 1879) pag. 8.

diese in zusammengesetzter Form geschrieben, indem Teile eines jeden einzelnen Konsonanten zu einem oft sehr fremdartig aussehenden Buchstaben vereinigt werden.

Âryabhaṭṭa gibt nun den Konsonanten durch ihre fünf Vargas hindurch die Zahlenwerte 1 bis 25. Ihm ist also $k = 1$, $kh = 2$, $g = 3$, ... $m = 25$. Die Halbvokale, die Zischlaute und das h bedeuten die hier sich anschließenden Zehner, also $y = 30$, $r = 40$, ... $h = 100$. Diese Bedeutungen finden statt, wenn der betreffende Buchstabe mit nachfolgendem kurzen oder langen a verbunden ausgesprochen wird. Die weiteren Vokale des Alphabets, ohne Rücksicht auf Länge und Kürze, und dann noch die vier Diphthonge vervielfachen den Konsonanten, welchem sie angehängt sind, mit aufeinanderfolgenden Potenzen von 100. So ist also $ga = 3$, $gi = 300$, $gu = 30000$, *ge* ist eine 3 mit 10 Nullen, *gau* eine 3 mit 16 Nullen. Zwei verbundene Konsonanten sind als mit demselben Vokale begabt anzusehen, und ihr Wert ist zu addieren. So ist *kvi* z. B. aufzulösen in $ki + vi = 1 \cdot 100 + 60 \cdot 100 = 6100$.

Die Ähnlichkeit mit dem Systeme der singhalesischen Gelehrten ist nicht zu verkennen. Die Vokale und Diphthonge stellen hier die Zeichen für Einheiten höheren Ranges vor, welche durch vorausgehende Konsonanten gewissermaßen als Koeffizienten vervielfacht werden. Positionsarithmetik dagegen ist diese Bezeichnung nicht, und wenn wir bei unserer Schilderung von Nullen sprachen, so geschah dieses, um uns unseren Lesern in kürzester Form verständlich zu machen, nicht aber weil die Methode selbst es verlangte. Es wäre übrigens falsch, wenn man die Folgerung ziehen wollte, Âryabhaṭṭa habe überhaupt die Positionsarithmetik nicht gekannt. Das Gegenteil geht vielmehr, wie wir sehen werden, aus seinen im zweiten Kapitel des Âryabhaṭṭîyam enthaltenen Vorschriften für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln hervor[1]).

Positionsarithmetik ist auch die Grundlage zweier anderer Systeme. Das eine soll den Mathematikern des südlichen Indiens angehören, ein Erfinder wird jedoch nicht angegeben[2]). Die einzelnen Ziffern werden hier durch Buchstaben ausgedrückt, und zwar jede einzelne nach Belieben durch verschiedene Buchstaben. Die Ziffern 1 bis 9 entsprechen nämlich der Reihe nach erstens den neun ersten Konsonanten, also dem Varga der Kehllaute und den vier ersten Gaumenlauten; zweitens dem 11. bis 19. Konsonanten, also dem Varga der Zungenlaute und den vier ersten Zahnlauten; drittens den vier Halbvokalen, den drei Zischlauten, dem h und einem in Südindien

[1]) Rodet l. c. pag. 19. [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 68.

noch vorkommenden konsonantischen *lr*. Der Varga der Lippenlaute bedeutet die Ziffern 1 bis 5. Endlich die noch übrigen Buchstaben, nämlich der Nasenton der Gaumenlaute und der Zahnlaute, sowie alle initiale Vokale und Diphthonge sind Nullen. Völlig bedeutungslos dagegen sind durch Nebenzeichen geschriebene oder inhärierende Vokale und Diphthonge, ebenso wie die zuerst auszusprechenden Teile zusammengesetzter Konsonanten, deren letzter allein als wertgebend in Geltung tritt. Die so geschriebenen Zahlen werden alsdann gemäß der hier wirklich vorkommenden Nullen nach den Regeln des Stellungswertes gelesen. Die Möglichkeit, eine und dieselbe Zahl nach dieser Methode auf verschiedene Weise darzustellen, ist eine fast unbegrenzte und gewährt durch den Sinn der jedesmal gewählten Worte nicht bloß eine wahre Gedächtnishilfe, sondern auch die Benutzbarkeit im fortlaufenden Versmaß unter Einhaltung der strengen Regeln indischer Prosodie.

Noch geeigneter zu solcher Benutzung in Versen erscheint die zweite hier zu erwähnende Methode einer symbolischen Positionsarithmetik[1]), die ziemlich weite Verbreitung erlangt hat, da sie bei den Indern, wie in Tibet, wie bei den Eingeborenen der Insel Java vorkommt. Es werden dabei für die Einer und auch für manche zweiziffrige Zahlen gewisse symbolische Wörter gewählt, welche alsdann mit Positionswert zusammengesetzt werden. Die Reihenfolge ist die der Sprache in den Zahlen unter Hundert, nicht die der Schrift. Das Zahlenschreiben befolgt, wie wir wissen, das Gesetz der Größenfolge. Die Sprache ist nicht immer so folgerichtig, und so läßt sie im Sanskrit wie im Deutschen, wie im Arabischen, in dem Gebiete unterhalb von Hundert das kleinere Element dem größeren vorausgehen z. B. dreiundsiebzig, *trisaptati*. Ebenso macht es diese symbolische Bezeichnung, welche wir um dieser Eigentümlichkeit willen lieber eine Aussprache der Zahlen mit Stellungswert, als eine Schreibweise nennen möchten. So heißt *abdhi* (der Ozean, deren es vier gibt) die Zahl 4, *sûrya* (die Sonne mit ihren zwölf Wohnungen) die Zahl 12, *açvin* (die beiden Söhne des Sûrya) die Zahl 2 und *abdhisûryâçvinas* in seiner Zusammensetzung 2124. Da mehr als ein Wort für jede einzelne Zahl zur Verfügung steht, für 4 z. B. auch *krita* (die erste der vier Weltperioden), außerdem die mehrziffrigen Zahlen auch nach verschiedenen Gruppen geteilt werden können (z. B. $2124 = 2 \cdot 12 \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 24 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$) so ist hier die Kombinationsfähigkeit eine gleichfalls außerordentliche, und die Ein-

[1]) *Nouveau Journal Asiatique* XVI, 12, 25 und 34—40, sowie *Journal Asiatique* 6. série, I, 284—290 und 446.

fügung in das Versmaß ist damit so erleichtert, daß man es begreiflich findet, daß Astronomen wie Brahmagupta mit Vorliebe gerade der symbolischen Zahlenbenennung in ihren didaktischen Gedichten sich bedienten.

Ein derartiges bewußtes Spielen mit den Begriffen der Stellungsarithmetik mit Einschluß der Null erklärt sich am leichtesten in der Heimat dieser Begriffe, für welche uns Indien gilt und gelten darf, selbst wenn es sich um eine zweite Heimat handelt, wir meinen, wenn beide Begriffe, was große Wahrscheinlichkeit besitzt, in Babylon geboren waren und noch wenig ausgebildet nach Indien einwanderten. Als mit der Stellungsarithmetik in offenbarem Zusammenhange stoßen wir in Indien auf eine Reihe eigentümlicher Zahlennamen, wie keine andere Sprache der Erde sie besitzt, die westlicher als Indien sich entwickelte. Bei den Griechen waren Namen für 1, 10, 100, 1000, 10000 vorhanden, aus denen die der höheren Einheiten sich zusammensetzten. Bei den Römern war die Anzahl selbständiger Namen noch beschränkter, da 10000 bereits zur Zusammensetzung nötigte. Das Gleiche findet, wie wir vorausschickend bemerken, im Arabischen statt. Das Sanskrit besitzt dagegen von 100 Millionen an die Gewohnheit durch Beifügung des Wortes *mahâ* (groß) eine Verzehnfachung vorzunehmen, z. B. *arbuda* = 100 Millionen, *mahârbuda* = 1000 Millionen; *padma* = 10000 Millionen, *mahâpadma* = 100000 Millionen usw., aber sonstige wirkliche multiplikative Zusammensetzungen wie *decem millia*, ἑκατοντακισμύριοι kommen nicht vor, und die eigentümlich gebildeten Wörter erstrecken sich[1]) bis zur Bezeichnung der 1 mit 20 Nullen *akshauhinî* und der 1 mit 21 Nullen *mahâkshauhinî*. Es ist mit Recht bemerkt worden, daß diese Aussprechbarkeit jeder einzelnen Rangordnung deren Gleichberechtigung ganz anders zu Bewußtsein bringe, als die griechischen und römischen Zusammenfassungen in Tetraden und Triaden es gestatten, daß hier eine Wurzel der Stellungsarithmetik zutage trete[2]). Aber freilich müßte man, um ein vollgültiges Urteil fällen zu können, genau wissen, wie alt jene Sanskritwörter sind, wie alt dann wiederum die Kenntnis der Null, und beides wissen wir nicht. Was die Wörter betrifft, so erstreckt sich Zweifel über ihre Anzahl wie über ihren Klang, da Bhâskara z. B. in der Lîlâvatî ganz andere Zahlwörter als die obigen angibt, die sich bis zur 1 mit 17 Nullen erstrecken, und auch andere Formen noch berichtet werden[3]). Noch zweifelhafter stehen wir der

---

[1]) Pihan, *Exposé des signes de numération usités chez les peuples orientaux anciens et modernes.* Paris 1860, pag. 59. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, pag. 443, Anmerkung 1. [3]) Colebrooke pag. 4, Note 4 und Albr.

zweiten Frage gegenüber, wann die Null erfunden worden sei. In Indien selbst haben wir keinen Beleg für das Vorhandensein der Null, der höher hinaufreichte als der Sûrya Siddhânta. Fremde Quellen reichen gleichfalls nicht sehr viel höher hinauf, da eine babylonische Null nicht vor dem dritten vorchristlichen Jahrhundert bekannt ist (S. 31) und die Zeit ihres Eindringens in Indien, vorausgesetzt daß wir nicht an selbständige Nacherfindung zu denken hätten, nun gar in tiefstem Dunkel liegt. Eine negative Erscheinung läßt uns an viel älterem Vorkommen überhaupt zweifeln. Wenn die indischen Zahlzeichen es waren, wie wir annehmen, die um das II. S. n. Chr. durch indisch-alexandrinischen Verkehr nach Westen drangen, um dort zu Apices zu werden, so ist undenkbar, daß die Null und mit ihr die Positionsarithmetik nicht auch zugleich herübergekommen wären, falls sie vorhanden waren. Das Kolumnenrechnen mit den Apices setzt alsdann notwendig voraus, daß in Indien selbst die Null erst nach dem II. S. landläufiger Besitz war. Ist aber dieser Schluß richtig, dann ist es auch wahr, daß die der frühesten religiösen Literatur, den sogenannten vedischen Schriften bereits angehörenden hohen Zahlwörter älter als Null und Stellungswert sind und vielleicht wenn nicht zu deren Erfindung so doch zu deren leichter Einbürgerung hinüberleiteten. Gesichert freilich, und damit schließen wir diese Bemerkungen, ist nur das Vorkommen der Null etwa seit 400 n. Chr. Eine äthiopische Inschrift aus dem II. oder III. S. n. Chr., in welcher man die Zahlen 6383 und 11103 erkannt haben will[1]), ist zu undeutlich, um als sicheres Beweismittel für ein so altes Vorkommen der Null gelten zu können.

Wie die Inder rechneten, bevor das Stellensystem ihnen bekannt war, würde in mancher Beziehung sich als von geschichtlicher Bedeutung erweisen können. Leider befinden wir uns hier im dichtesten Dunkel. Nicht die leiseste Andeutung ist zu unserer Kenntnis gelangt, daß bei den Indern vor Zeiten ein Fingerrechnen oder ein instrumentales Rechnen stattgefunden hätte. Sollen wir daraus den Schluß ziehen, daß ähnliche Hilfsmittel dem Inder fremd waren? daß die Inder vielmehr, unterstützt durch die bequemen Zahlennamen, und ihrer Natur nach zu in sich gekehrtem, von der Außenwelt abgewandtem Grübeln geneigt, wesentlich Kopfrechnen übten, welches naturgemäß sich nicht zu verändern brauchte, als die dem gesprochenen Worte abgelauschte Positionsarithmetik erfunden

Weber, Vedische Angaben über Zeittheilung und hohe Zahlen in der Zeitschr. der deutsch. morgenländ. Gesellsch. XV, 132—140.

[1]) *Corpus Inscriptionum Graecarum* III, 5108.

ward? Das ist nicht unmöglich und findet vielleicht Unterstützung in gewissen Verfahren, von welchen wir noch zu reden haben, und welche an das Zahlengedächtnis ziemlich hohe Anforderungen stellen. Es ist aber auch ein Anderes möglich, worauf wir weiter oben bereits einmal hingewiesen haben. Unvollkommeneres kann bis zur Vergessenheit durch Vollkommeneres verdrängt werden, und bei den Indern fand vielleicht diese Verdrängung bezüglich der Rechnungsverfahren statt, so zähe die Überlieferung auch die Aufgaben festgehalten haben mag, deren Ausführung verlangt wurde.

Das Rechnen der Inder seit Einführung des Stellenwertes ist teils aus indischen Werken selbst bekannt, teils und zwar hauptsächlich aus dem Rechenbuche des Maximus Planudes, welches ausdrücklicher Angabe des Verfassers gemäß nach indischen Quellen bearbeitet ist. Wir kommen jetzt auf die Dinge zu reden, an welchen wir bei unserer ersten Besprechung jenes Werkes (S. 511) rascher vorübergehen durften. Wir heben in erster Linie die Ausführung der Subtraktion hervor, welche unter der Voraussetzung, daß eine Stelle des Subtrahenden einen höheren Wert als die entsprechende Stelle des Minuenden besitzt, nach zwei Regeln gelehrt wird. Man borgt entweder die zur Ergänzung des Minuenden notwendigen 10 Einheiten des betreffenden Ranges von der nächsthöheren Stelle, oder man gleicht die Vergrößerung des Minuenden dadurch aus, daß man auch den Subtrahenden, und zwar in der nächsthöheren Stelle um 1 vergrößert. Um also 821 − 348 zu finden sagt man entweder: 8 von 11 läßt 3, 4 von 11 läßt 7, 3 von 7 läßt 4, also Rest 473 oder aber: 8 von 11 läßt 3, 5 von 12 läßt 7, 4 von 8 läßt 4 mit demselben Ergebnis wie vorher.

Die Multiplikation wird in sehr unterschiedenen Verfahren gelehrt. Wir erwähnen nur beiläufig der Zerlegung des Multiplikators in Faktoren, mit welchen nacheinander multipliziert wird, der Auffassung des Multiplikators als Summe aber auch als Differenz von Zahlen, die eine im Verhältnisse leichtere Vervielfältigung zulassen, Methoden also, welche dem Kopfrechnen vorzugsweise dienen. Beim schriftlichen Rechnen ist darauf Rücksicht genommen, daß der Inder vielfach mit einem Griffel auf einer mit Sand bestreuten Tafel rechnete und rechnet, daß also das Weglöschen einer Zahl und ihr Ersetzen durch eine andere nicht dem ganzen Exempel ein unreinliches, häßliches Aussehen verschafft. Die einzelnen Teilprodukte können demzufolge beginnend mit der höchsten Stelle des Multiplikandus, über welche das erste und hauptsächlichste Teilprodukt geschrieben wird, gebildet werden. Jedes hinzutretende folgende Teilprodukt vereinigt sich mit dem schon dastehenden Ergebnis zu einem

neuen, dessen Ziffern an die Stelle der rasch verwischten früheren Ziffern treten, bis schließlich das Produkt über dem Multiplikandus, oder gar statt dessen erscheint, da man auch wohl so weit geht, die Ziffern des Multiplikandus selbst wegzulöschen, sobald jede derselben so weit in Betracht gezogen wurde, als es für das Gesamtergebnis notwendig ist. Eine die nachträgliche Kontrolle nicht zur Unmöglichkeit machende Multiplikation wurde wahrscheinlich gerade so ausgeführt, wie wir noch heute in Europa verfahren. Meistens jedoch wurden dabei alle Zwischenoperationen dem Gedächtnisse überlassen. Das gab dasjenige Verfahren, welches Tatstha (es bleibt stehen) oder Vajrâbhyâsa (blitzbildend d. h. zickzackförmig) genannt wurde[1]. An einem Beispiele mit allgemeinen Buchstabensymbolen erläutert sich dieses Verfahren wie folgt. Es ist

$$(a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 \cdot \cdot) \times (b_0 + 10 \cdot b_1 + 100 \cdot b_2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + 10(a_0 b_1 + a_1 b_0) + 100(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots.$$

Nach dem so zutage tretenden Gesetze verschaffte man sich jede Rangziffer sogleich vollständig genau und mit Zurechnung dessen, was von früheren Ziffern hinzutreten mußte, also ohne irgend weitere Verbesserung nötig zu machen. Eine andere Methode möchten wir das gerade Gegenteil der eben geschilderten nennen, insofern sie dem Gedächtnisse auch gar nichts außer dem gewöhnlichen Einmaleins zumutet. Die Vorbereitung besteht in der Herstellung einer schachbrettartigen Figur[2], deren einzelne Felder durch gleichlaufende von rechts oben nach links unten geneigte Diagonalen nochmals in je zwei Dreiecke abgeteilt sind, in welche dann die Einer beziehungsweise Zehner jedes Einzelproduktes zu stehen kommen. Die Additionen erfolgen nach den durch jene Diagonalen gebildeten schrägliegenden Kolumnen. Die Multiplikation $12 \times 735 = 8820$ sieht mithin folgendermaßen aus:

	7	3	5
1	/7	/3	/5
2	1/4	/6	1/0
8	8	2	0

Bei der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation findet die sogenannte Neunerprobe statt, welche in dem zahlentheoretischen Satze begründet ist, daß die Ziffernsumme einer Zahl durch 9 geteilt den gleichen Rest wie die Zahl selbst liefert. Wir sind ihr neben der Siebenerprobe bei einem Griechen des III. S. be-

[1]) Colebrooke pag. 6, Note 1 und pag. 171, Note 5. [2]) Ebenda pag. 7, Note 1.

gegnet (S. 461), wir kommen im 35. und im 37. Kapitel auf beide zurück.

Die Division ist wenigstens in den uns überkommenen Quellen sehr stiefmütterlich behandelt. Bei dem Abziehen der den einzelnen Quotientenziffern entsprechenden Teilprodukte wird vom Wegwischen vorhandener Ziffern, vom Ersetzen derselben durch andere Gebrauch gemacht. Am wichtigsten erscheint die freilich nur negative also nicht unzweifelhaft feststehende durch neue Entdeckungen möglicherweise umzuwerfende Tatsache, daß noch keine Spur eines Verfahrens angetroffen worden ist, welches den komplementären Operationen der Römer zu vergleichen wäre.

Ist schon an und für sich zu vermuten, daß das Rechnen mit ganzen Zahlen historisch weit hinaufreiche, so ist es sagenmäßig, und zwar an sehr großen Zahlen geübt, bis in die Jugendzeit des Reformators der indischen Religion zurückzuverfolgen. Der Lalitavistara, dessen Abfassungszeit freilich durchaus unbekannt ist, beschäftigt sich mit der Jugend des Bodhisattva. Er bewirbt sich bei Dandapâni um dessen Tochter Gopâ, deren Hand ihm aber nur unter der Bedingung zugesagt wird, daß er einer Prüfung in den wichtigsten Künsten sich unterziehe. Die Schrift, der Ringkampf, das Bogenschießen, der Sprung, die Schwimmkunst, der Wettlauf, vor allem aber die Rechenkunst liefert den Inhalt dieser von dem Jünglinge mit glänzendem Erfolge bestandenen Prüfung. In der Arithmetik erweist er sich sogar geschickter als der weise Arjuna und gibt Zahlennamen an bis zu tallakshana d. i. eine 1 mit 53 Nullen. Das sei aber nur ein System, und über dieses System gehen noch fünf oder sechs andere hinaus, deren Namen er gleichfalls angibt. Jetzt fragt man ihn, ob er die Zahl der ersten Elementarteilchen berechnen könne, welche aneinandergelegt die Länge eines Yôjana erfüllen, und er berechnet die Zahl mittels folgender Verhältniszahlen: 7 Elementarteilchen geben ein sehr feines Stäubchen, 7 davon ein feines Stäubchen, 7 davon ein vom Winde aufgewirbeltes Stäubchen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Hasen, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Widders, 7 davon ein Stäubchen von der Fußspur des Stieres, deren 7 auf einen Mohnsamen gehen; 7 Mohnsamen geben einen Senfsamen, 7 Senfsamen ein Gerstenkorn, 7 Gerstenkörner ein Fingergelenk; 12 von diesen bilden eine Spanne, 2 Spannen eine Elle, 4 Ellen einen Bogen, 1000 Bögen einen Kroça, deren endlich 4 auf einen Yôjana gehen. Letzterer besteht also in unserer modernen Schreibweise aus $7^{10} \cdot 32 \cdot 12000$ Elementarteilchen, d. h. aus 108470495616000 solchen Teilchen. Wenn nun auch die im Lalita-

vistara angegebene Zahl von dieser richtigen abweicht, so hat doch nachgewiesen werden können[1]), daß eine Entstehung der falschen Zahl aus der richtigen wahrscheinlich sei, und es ist auch die stoffliche Verwandtschaft der Aufgabe zur Sandrechnung des Archimed gebührend hervorgehoben worden. Wäre also gesichert, was freilich nicht der Fall ist, daß der Lalitavistara vor 300 v. Chr. entstand, so bekäme damit die (S. 322) angedeutete weitere Annahme Wahrscheinlichkeit, Archimed sei mit seiner Aufgabe als einer schon älteren bekannt geworden, die er dann aber immerhin nicht unwesentlich veränderte.

Nächst den ganzen Zahlen kommen Brüche in den Rechnungen vor. Wir begegnen bei den Indern Brüchen mit beliebigen ganzzahligen Zählern und Nennern. Die Schreibweise besteht darin, daß der Zähler über dem Nenner steht, ohne daß sich ein horizontaler Bruchstrich dazwischen befände. Bei dem Rechnen mit Brüchen kommt es hauptsächlich auf die Einführung eines gemeinsamen Nenners an, bei dessen Auffindung mancherlei Vorteile zur Übung kommen. Natürlich fällt die Notwendigkeit der Zurückführung auf gemeinsamen Nenner bei den Sexagesimalbrüchen weg, welche vorzugsweise den indischen Astronomen gedient haben und ihnen wohl nicht minder als den Griechen unmittelbar aus der babylonischen Heimat zugeflossen sein dürften, so daß ein gräko-indischer Einfluß hier nicht notwendig anzunehmen ist.

29. Kapitel.

Höhere Rechenkunst. Algebra.

Wir haben im vorigen Kapitel uns mit dem Inhalte des gewöhnlichsten, allgemeinst bekannten Rechnens der Inder beschäftigt. Wenn wir zu ihren höheren Kenntnissen uns wenden, haben wir zuerst das (S. 598) gegebene Versprechen einzulösen und von dem Rechenbuche von Bakhshâlî zu reden. Leider ist es in jeder Beziehung Bruchstück. Es fehlen, man weiß nicht wieviele, aber vermutlich zahlreiche Rindentafeln am Anfang wie am Ende, auch einige solche in der Mitte, und die vorhandenen Tafeln sind auch nichts weniger als wohlerhalten, so daß nur Mangelhaftes mitzuteilen ist, ein so glänzendes Zeugnis es auch für den Ordner des Fundes bildet, daß es ihm überhaupt gelang, einen gewissen Zusammenhang herzustellen. Der Name des Verfassers fehlt. Die Aufgaben sind Text-

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, pag. 260—266.

aufgaben. Das Zahlenrechnen ist bei ihrer Behandlung als bekannt vorausgesetzt. Brüche werden so geschrieben, daß der Zähler über dem Nenner ohne trennenden Bruchstrich steht, wie es auch bei anderen, späteren Schriftstellern (s. oben) der Fall blieb. Ganze Zahlen werden als Brüche mit dem Nenner 1 geschrieben. Bei gemischten Zahlen tritt die ganze Zahl als solche über den Bruch, also $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1\frac{1}{3}$. Die Zahlen, welche zu einer Operation vereinigt werden, sind meistens durch gerade Linien eingerahmt; dann folgt das unserem Gleichheitszeichen entsprechende Wort *phalam* oder abgekürzt *pha* und dann das Ergebnis.

Beim Addieren steht *yuta*, abgekürzt *yu*, hinter den Summanden

$$\text{z. B. } \boxed{\begin{matrix}5 & 7 & \\ 1 & 1 & \text{yu}\end{matrix}} \text{ pha } 12 \quad \text{heißt } \frac{5}{1} + \frac{7}{1} = 12.$$

Beim Subtrahieren steht das Subtraktionszeichen hinter dem Subtrahenden, und zwar in Gestalt eines Kreuzes $+$. Es ist als alte Form von *ka* gedeutet worden, der Abkürzung von *kanita* = vermindert.

Multiplikation wird nicht bezeichnet. Das Nebeneinanderstehen von Zahlen zeigt an, daß ihr Produkt gemeint ist; z. B.

$$\boxed{\begin{matrix}5 & 32\\ 8 & 1\end{matrix}} \text{ pha } 20 \quad \text{heißt } \frac{5}{8} \times \frac{32}{1} = 20.$$

Ferner heißt $\boxed{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3+ & 3+ & 3+\end{matrix}}$, die Zahl $1 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ solle dreimal als Faktor auftreten und $\frac{8}{27}$ hervorbringen.

Die Division fordert das dem Divisor nachgesetzte Wort *bhâga* = Teil abgekürzt *bhâ*.

Die Einheit heißt immer *rûpa*, die unbekannte Zahl *sunya*, und letztere wird durch einen ziemlich starken Punkt • bezeichnet. Das gehört zum Merkwürdigsten im ganzen Rechenbuche. Sunya bedeutet nämlich wörtlich leer und wird auch für die gleichfalls durch einen Punkt dargestellte Null gesagt. Der der doppelten Anwendung von Wort und Zeichen zugrunde liegende Gedanke ist offenbar richtig in folgendem erkannt worden[1]): Eine Stelle muß ein für allemal leer bleiben, wenn ihre Ausfüllung nicht vorhanden ist; sie muß also auch zunächst leer bleiben, wenn und so lange ihre Ausfüllung noch unbekannt ist, so lange es sich noch um eine Lücke handelt. Wir

[1]) Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, pag. 35.

gebrauchen dieses Wort absichtlich um auch hier an die Lückenzeiger der Babylonier zu erinnern.

Die Auflösungen der gestellten Aufgaben erfolgen mitunter durch Zurückführung auf die Einheit. Wir führen ein Beispiel an[1]). B gibt 2 mal so viel als A, C 3 mal so viel als B, D 4 mal so viel als C; sie geben zusammen 132; was gab A? Man setze 1 (rûpa) für die Unbekannte (sunya). Nun ist $A = 1$, $B = 2$, $C = 6$, $D = 24$, ihre Summe $= 33$. Durch diese angenommene Summe 33 wird die wirkliche Summe 132 dividiert; der Quotient 4 läßt erkennen, was A gab. Man könnte die Behandlung auch als durch falschen Ansatz vermittelt bezeichnen, ebenso den falschen Ansatz im Rechenbuche des Ahmes (S. 79) eine Zurückführung auf die Einheit nennen. Ein Einfluß altägyptischer Methoden ist in Indien nicht viel weniger möglich als der babylonische, wenn er auch nicht mit gleicher Sicherheit behauptet werden will.

Arithmetische Reihen und deren Summierung sind bekannt. Ein Reisender[2]) legt am ersten Tage 2 Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 3 mehr. Ein zweiter Reisender legt am ersten Tage 3 Wegeinheiten zurück, jeden folgenden Tag 2 mehr. Wann treffen sie zugleich an einem Punkte ein? Seien a_1, d_1 für den ersten, a_2, d_2 für den zweiten Reisenden Anfangsgeschwindigkeit und tägliche Vermehrung derselben, x die Zahl der Tage bis zur Begegnung. Die Forderung der Aufgabe lautet:

$$a_1 + (a_1 + d_1) + \cdots + (a_1 + (x-1)d_1)$$
$$= a_2 + (a_2 + d_2) + \cdots + (a_2 + (x-1)d_2)$$

oder

$$[2a_1 + (x-1)d_1]\frac{x}{2} = [2a_2 + (x-1)d_2]\frac{x}{2},$$

woraus sofort $x = \frac{2(a_1 - a_2)}{d_2 - d_1} + 1$ folgt, und so scheint auch die ohne vorhergegangene Herleitung ausgesprochene Regel des Rechenbuches es vorzuschreiben.

Neben bestimmten Aufgaben sind unbestimmte vorhanden. Wir führen wieder ein Beispiel an[3]). Man sucht eine Zahl, welche um 5 vermehrt oder um 7 vermindert jeweils ein Quadrat gebe. Aus $x + 5 = y^2$ und $x - 7 = z^2$ folgt $12 = y^2 - z^2 = (y - z)(y + z)$. Für $y - z$ und $y + z$ werden nun irgend zwei Faktoren des Produktes 12 gesetzt, z. B. $y - z = 2$ und $y + z = \frac{12}{2} = 6$. Daraus folgt $y = 4$, $z = 2$, $x = 11$, wie es im Rechenbuche unter Andeutung der vollzogenen Rechnung auch herauskommt.

[1]) Hoernle im *Indian Antiquary* XVII, pag. 45. [2]) Ebenda pag. 42. [3]) Ebenda pag. 44.

Wir wenden uns nun zu dem höheren arithmetischen Wissen derjenigen Schriftsteller, deren Namen und Zeitalter wir genau zu bestimmen imstande waren. Etwas höher steht schon das Erheben einer Zahl zur zweiten und dritten Potenz, sowie die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Den Indern gehörte freilich Potenzerhebung und Wurzelausziehung noch zu den elementaren Operationen, deren sie demzufolge 6 zählten, *shadvidham* die sechs Rechnungsverfahren[1]). Die zugrunde liegenden Formeln waren, wie nicht anders zu erwarten steht, die der Binomialentwicklungen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

Âryabhaṭṭa weiß schon von den zwei-, beziehungsweise dreistelligen Abschnitten zu reden, in welche man die Zahlen zum Zwecke der beiden Wurzelausziehungen zu teilen habe[2]), was uns gestattete zu behaupten (S. 606), er müsse die eigentliche Stellungsarithmetik gekannt haben. Wurzel überhaupt, auch in der Bedeutung der Wurzel einer Pflanze, heißt *mûla* oder *pada*; *varga* bedeutet eine Reihe gleicher Gegenstände, dann ein Quadrat im geometrischen wie im arithmetischen Sinne des Wortes; *ghana* ist ein Körper; und durch Zusammensetzung dieser Ausdrücke gewann man die Namen Quadratwurzel, *varga mûla*, und Kubikwurzel, *ghana mûla*[3]).

Ist nach unserem Dafürhalten die Erfindung der Null eine babylonische, die Vertiefung des Begriffes eine indische, so ist das Rechnen mit der Null schon zu Brahmaguptas Zeit Gegenstand besonderer Vorschriften gewesen[4]). Null geteilt durch Null ist nichts. Zahlen geteilt durch Null geben Brüche mit Null als Nenner. Das sind freilich dürftige Bestimmungen, mit welchen nicht viel zu machen ist. Ganz anders weiß Bhâskara Bescheid, wenn er sagt: Diese Größe, nämlich der Bruch, dessen Nenner Null ist, läßt keine Änderung zu, mag auch vieles hinzugesetzt oder weggenommen werden. Findet doch gleichermaßen in der unendlichen und unveränderlichen Gottheit kein Wechsel statt zur Zeit wo Welten zerstört oder geschaffen werden, wenn auch zahlreiche Ordnungen von Wesen aufgenommen oder hervorgebracht werden[5]). Der Kommentator Krishṇa erläutert den Gegenstand mit den Worten: Je mehr der Divisor vermindert wird, um so mehr wird der Quotient vergrößert. Wird der Divisor aufs äußerste vermindert, so vergrößert sich der Quotient

[1]) Vgl. L. Rodet in der Abhandlung: *L'algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grècque. Journal Asiatique.* 7ième série XI, 21 (1878). [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 9 und 18 flgg. [3]) Colebrooke pag. 9, Note 3 und pag. 12, Note 1. [4]) Ebenda pag. 339—340. [5]) Ebenda pag. 138.

aufs äußerste. Aber so lange er noch angegeben werden kann, er sei so und so groß, ist er nicht aufs äußerste vergrößert; denn man kann alsdann eine noch größere Zahl angeben. Der Quotient ist also von unbestimmbarer Größe und wird mit Recht unendlich genannt[1]). Es ist auffallend genug, daß bei so verständiger Auffassung Bhâskara an anderer Stelle[2]) das Rechnen mit der Null in haarsträubender Weise mißbraucht und daß auch seine Erklärer nichts dabei zu erinnern wissen. Eine Zahl soll nämlich aus folgenden Angaben gefunden werden: Ihr Quotient durch Null vermehrt um die Zahl selbst und vermindert um 9 wird zum Quadrat erhoben, alsdann die Wurzel dieses Quadrates hinzugefügt und die Summe mit Null vervielfacht, so soll 90 herauskommen. Die Rechnung ist folgende: $\frac{x}{0} + x - 9$ ist immer noch $\frac{x}{0}$, das Quadrat $\frac{x^2}{0}$. Dazu $\frac{x}{0}$ addiert gibt $\frac{x^2}{0} + \frac{x}{0}$ und nach Vervielfältigung mit der Null $x^2 + x = 90$, woraus $x = 9$ folgt!

Wir sind mit diesem Beispiele schon zur Algebra der Inder übergegangen, welche trotz des wenig bestechenden Einganges, den wir gewählt haben, sich uns in überraschender Entfaltung vorstellen wird. Doch bevor wir uns mit ihr beschäftigen, haben wir zu bemerken, daß die Inder Rechnungsaufgaben mitunter auch in nicht algebraischer Weise lösten, und daß für einzelne Regeln besondere Namen üblich waren, teils auf das Verfahren, teils aber auch weit weniger folgerichtig auf den Inhalt der Aufgaben sich beziehend.

Unter den ersteren nennen wir die Umkehrung, *vilôma kriyâ*, bei welcher die Reihenfolge der Operationen, welche vorzunehmen waren um zur gegebenen Zahl zu gelangen, geradezu umgekehrt wird. Âryabhaṭṭa gibt in der 28. Strophe seines mathematischen Kapitels[3]) die Regel in seiner lakonischen Weise: „Multiplikationen werden Divisionen, Divisionen werden Multiplikationen; was Gewinn war wird Verlust, was Verlust Gewinn; Umkehrung." Um dieser Kürze die poetisch anmutende Form gegenüberzustellen, welche Bhâskara namentlich in dem Lîlâvati überschriebenen Kapitel anzuwenden liebt, lassen wir ein Beispiel aus diesem Kapitel folgen[4]): „Schönes Mädchen mit den glitzernden Augen sage mir, so du die richtige Methode der Umkehrung verstehst, welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um $\frac{3}{4}$ des Produktes vermehrt, durch 7 geteilt, um $\frac{1}{3}$ des Quotienten vermindert, mit sich selbst vervielfacht, um 52 ver-

[1]) Colebrooke pag. 137, Note 2. [2]) Ebenda pag. 213. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 37—38. [4]) Colebrooke pag. 21.

mindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 hervorbringt." Die Rechnung nimmt hier den Gang

$$(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196, \quad \sqrt{196} = 14 \text{ und } 14 \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot \tfrac{4}{7} : 3 = 28$$

als Anfangszahl.

Eine zweite Regel ist das Verfahren mit der angenommenen Zahl, *ishta karman*; es ist genau dasselbe Verfahren, welches wir (S. 76 und 79) als Methode des falschen Ansatzes bei den Ägyptern kennen gelernt haben, mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt als bewußte Methode auftritt, was ehedem fast instinktiv geübt wurde. So sollen[1]) 68 erhalten werden, indem man eine Zahl verfünffacht, $\frac{1}{3}$ des Produktes abzieht, den Rest durch 10 dividiert und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Zahl addiert. Im Rechenbuche von Bakhshâlî wäre versuchsweise 1 für die ursprüngliche Zahl gesetzt worden, Bhâskara wählt versuchsweise 3 und erhält so 15, 10, 1 und

$$1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}.$$

Man muß also mit $\frac{17}{4}$ in 68 dividieren und den Quotient 16 mit 3 multiplizieren um die Zahl 48 zu finden. Der Kommentator Gaṇeça bemerkt dazu ganz richtig, daß bei dieser Methode nur Multiplikationen, Divisionen und Additionen oder Subtraktionen von Bruchteilen der Ergebnisse vorkommen dürfen.

Die Regeldetri kommt bei Âryabhaṭṭa vor[2]), dann in mehreren Regeln direkten und indirekten Ansatzes zerspaltet und zur Regel mit mehreren Verhältnissen erweitert bei Brahmagupta, bei Çrîdhara, bei Bhâskara. Wir geben wieder einige Beispiele. „Eine weiße Ameise bewegt sich in einem Tage um die Länge von 8 Gerstenkörnern weniger $\frac{1}{5}$ eines solchen vorwärts; sie kriecht in 3 Tagen um $\frac{1}{20}$ Finger zurück; in welcher Zeit wird sie unter diesen Verhältnissen ein Yôjana weit vorrücken"[3])? Die Verhältniszahlen sind 8 Gerstenkörner = 1 Finger, 24 Finger = 1 Elle, 4 Ellen = 1 Stab, 8000 Stab = 1 Yôjana und so findet man 98042553 Tage. Die Aufgabe: „Eine 16jährige Sklavin kostet 32 Nishkas, was wird eine 20jährige kosten"[4])? wird nach umgekehrter Proportion behandelt, weil „der Wert lebender Geschöpfe (Sklaven und Vieh) sich nach deren Alter regelt". Das ältere ist das billigere.

---

[1]) Colebrooke pag. 23. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 37. [3]) Colebrooke pag. 283, Note 2. [4]) Ebenda pag. 34.

Von den Regeln, deren Name an die behandelten Gegenstände erinnert, nennen wir die Zinsrechnung, bei welcher ebensowohl die Anrechnung von Zinseszinsen[1]) als der Zinsfuß von 5 Prozent monatlich[2]) auffallen mag.

Wir nennen ferner die Mischungsrechnung von Eßwaren[3]), wo um eine gegebene Summe etwa Reis und Bohnen im Verhältnisse von 2 zu 1 Maßteilen gekauft werden will, während der Preis dieser Gegenstände einzeln bekannt ist. Dem Gedanken nach können wir eben dazu auch die Aufgaben rechnen, welche wir Brunnenaufgaben genannt haben (S. 391), die aber bei den Indern keinen ähnlichen Namen führen[4]).

Hierher sind auch die Aufgaben über Reihen zu zählen[5]). Âryabhaṭṭa, Brahmagupta und Bhâskara lehren die Summierung der arithmetischen Reihe sowie auch der von 1 an aufeinander folgenden Quadratzahlen und Kubikzahlen. Mit geometrischen Progressionen hat Bhâskara, hat auch Pṛithûdaka, ein Erklärer des Brahmagupta, sich beschäftigt[6]). Die Ergebnisse gehen in keiner Beziehung über diejenigen hinaus, welche wir bei den Griechen teils genau nachweisen konnten, teils voraussetzen mußten, weil wir sie bei Epaphroditus in offenbar erst nachgeahmter Form wiederfanden, während kein Zweifel obwalten kann, daß schon Epaphroditus mehr als ein Jahrhundert früher als Âryabhaṭṭa gelebt haben muß.

Eine besondere Gruppe von Aufgaben bilden endlich die Versetzungen. Wenn man nicht als älteste Spur derselben bei den Indern die 24 Namen gelten lassen will, welche den Abbildungen des Vischnu je nach der Ordnung, gemäß welcher er in seinen vier Händen die Keule, die Scheibe, die Lotosblume und die Muschel hält, beigelegt wurden[7]), so muß man jedenfalls jene Kapitel der indischen Prosodie hierher rechnen[8]), in welchen die verschiedenen Möglichkeiten gezählt werden, welche bei Versen von gegebener Silbenmenge in bezug auf Länge und Kürze der einzelnen Silben auftreten, eine Aufgabe, welche auf Versetzungen teilweise untereinander gleicher Elemente führt. Formeln der Kombinatorik ohne Beweise zusammengestellt finden sich bei Bhâskara[9]). Dort ist die Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung zu bestimmter Klasse angegeben, dort

---

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14 und 36—37. [2]) Colebrooke pag. 39. [3]) Ebenda pag. 43. [4]) Ebenda pag. 42 und 282, Note 1. [5]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 12—13 und 32—36. Colebrooke pag. 290 flgg. und 51 flgg. [6]) Ebenda pag. 55 und 291, Note. [7]) Ebenda pag. 124, Note 1. [8]) Albr. Weber, Ueber die Metrik der Inder. Indische Studien VIII, besonders S. 326—328 und 425 flgg. [9]) Colebrooke pag. 49 und 123—127.

die Zahl der Permutationen mit lauter ungleichen oder teilweise gleichen Elementen, dort die Summe, welche entsteht, wenn man alle Permutationsformen als dekadisch geschriebene Zahlen betrachtet und zueinander addiert, lauter Dinge, welche in dieser Vollkommenheit gewiß keinem Griechen jemals bekannt waren, wenn auch, wie wir gezeigt haben, die Meinung aufzugeben ist, als sei den Griechen die Kombinatorik überhaupt durchaus fremd gewesen.

Gehen wir nun zu der eigentlichen Algebra der Inder über, so haben wir erstens von ihren Bezeichnungen und Benennungen, zweitens von ihrer Auflösung bestimmter Gleichungen, drittens von ihren zahlentheoretischen Kenntnissen zu reden.

In den Bezeichnungen und Benennungen ist bei den Indern selbst ein Fortschritt zu erkennen, welcher sie von unvollkommenen Anfängen zu einer Höhe führt, welche die Entwicklung, zu welcher Diophant diese Dinge brachte, ziemlich tief unter sich läßt. Âryabhaṭṭa[1]) nennt die unbekannte Größe einer Aufgabe: Kügelchen, *gulikâ*, die bekannte Größe: mit Zeichen versehene Münzen, *rûpakâ*. Das letztere Wort ist ohne die Anhängsilbe *kâ*, welche im Sanskrit sehr häufig wiederkehrt, als *rûpa* geblieben, das gleiche Wort, welches im Rechenbuche von Bakhshâlî die Einheit bedeutete; für die Unbekannte tritt bei Brahmagupta schon das allgemeinere Wort: so viel als (*quantum tantum*), *yâvattâvat* ein. Einen Vergleich mit dem ägyptischen *hau*, dem Diophantischen ἀριθμός unterlassen wir, als zu unbestimmter Natur. Die Inder besaßen für beide Gattungen von Größen, für die bekannte wie für die unbekannte, Zeichen, die in den Anfangssilben jener Wörter *rû* und *yâ* bestanden, mithin erst eingeführt worden sein dürften, als *gulikâ* zugunsten von *yâvattâvat* abgängig geworden war. Sollten derartige Größen addiert werden, so wurden die zu vereinigenden Ausdrücke ohne weiteres einander nachgesetzt, wie es von Diophant auch geschah. Bei der Subtraktion ist ein Unterschied zwischen der griechischen und der indischen Bezeichnung, welcher zugunsten der letzteren ausschlagen möchte. Wir wissen, daß Diophant das Subtraktionszeichen ⋔ dem Abzuziehenden vorsetzte, daß bei ihm nur von Differenzen, von abzüglichen aber keineswegs von negativen Größen die Rede war (S. 471). Anders die Inder. Bei der Subtraktion wird über den Zahlenkoeffizient des Abzuziehenden, seien es *rû* oder *yâ* um die es sich handelt, ein Pünktchen gemacht. Das ist ein so wesentlicher Fortschritt gegen das Kreuz der Subtraktion, von welchem (S. 614) die Rede war, daß er nicht genug hervorgehoben werden kann. Das jüngere

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 39—40.

Pünktchen ist kein Zeichen der Operation, sondern der Zahlenart. Es verwandelt die Subtraktion in eine Addition anders gearteter, entgegengesetzter Größen. Es sind wirklich positive und negative Zahlen, mit denen man operiert. Die positiven Zahlen heißen *dhana* oder *sva,* die negativen *ṛiṇa* oder *kshaya,* erstere mit der Bedeutung Vermögen, letztere Schulden bedeutend[1]). Ja die Erläuterung des Gegensatzes positiver und negativer Zahlen durch den Gegensatz der Richtung einer Strecke ist dem Inder nicht fremd[2]). Diophant blieb bei der Bezeichnung der ersten Potenz der Unbekannten nicht stehen. Ebensowenig tut es der Inder. Allein auch hier ist eine sehr wesentliche Verschiedenheit zwischen beiden Bezeichnungen. Diophant addiert (S. 470) seine Exponenten; die Inder multiplizieren sie, wenn nicht das Wort *ghaṭâ* besonders anzeigt, daß eine Addition vorgenommen werden soll. Die zweite Potenz wird durch *varga* abgekürzt in *va,* die dritte durch *ghana* abgekürzt zu *gha* bezeichnet, Wörter, die uns oben bei der Wurzelausziehung schon bekannt geworden sind. Dann heißt der angedeuteten Regel gemäß *va va, va gha, va va va, gha gha* die $2 \cdot 2 = 4$te, $2 \cdot 3 = 6$te. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$te, $3 \cdot 3 = 9$te Potenz, und die zwischenliegenden 5. und 7. Potenz der Unbekannten führen die Namen und Zeichen *va gha ghata, va va gha ghata.* Über diese Potenzbezeichnung hinaus hat sich aber der Inder auch noch zu einer Bezeichnung der irrationalen Quadratwurzel einer Zahl mit Hilfe des Wortes *karaṇa,* geschrieben *ka,* emporzuschwingen gewußt. Die Bedeutung dieses Wortes, welches mit dem Zeitwort machen in Verbindung steht, deutet allerdings darauf hin, daß hier das indische Zeichen einem griechischen Begriffe nachgebildet sei, daß man die Länge sucht, welche eine gewisse Oberfläche als ihr Quadrat macht; denn wenn der Grieche hier auch können zu sagen liebt, so steht dem doch der Ausdruck ὁ ἀπὸ τῆς $\overline{\alpha\beta}$ d. h. das von der Strecke $\alpha\beta$ gemachte Quadrat zur Seite[3]). Der Inder hat ferner ein Zeichen der Multiplikation in dem den Faktoren nachzusetzenden Worte *bhâvita,* das Hervorgebrachte, geschrieben *bhâ.* Dieselbe Silbe war (S. 614), als Anfang eines anderen Wortes, Divisionszeichen. Er hat endlich eine unterscheidende Bezeichnung für mehrere Unbekannte, indem nur die erste, häufig alleinige Unbekannte *yâvattâvat* heißt, während die übrigen nach Farben unterschieden werden[4]): die schwarze *kâlaka,* die blaue *nîlaka,* die gelbe *pîtaka,* die rote *lohitaka,* die grüne *haritaka* regelmäßig durch die Anfangssilbe bezeichnet, eine Bezeichnungs-

---

[1]) Colebrooke pag. 131, Note 1. [2]) Ebenda pag. 71, § 166. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 31. [4]) Colebrooke pag. 139 und 348 flgg.

weise, deren ganz allgemeine Übung zu dem Rückschlusse geführt hat, es müßten auch die indischen Zahlzeichen ursprünglich Anfangssilben der betreffenden Zahlwörter gewesen sein. Als Beispiel der eben erwähnten mehrere Unbekannte umfassenden Schreibweise mag *yâ kâ bhâ* gelten d. h. die Unbekannte mit der Schwarzen in Vervielfachung oder x mal y. Die Gleichsetzung zweier Zahlen vollzog Diophant durch das Wort ἴσοι, mitunter zu ι abgekürzt. Auch dem Inder fehlt nicht ein Wort dieser Bedeutung: in Gleichgewicht, *tulyau*, heißen die beiden Glieder, *pakshau*[1]), aber sie bedürfen dessen beim Schreiben nicht. Sie setzen die einander gleichen Ausdrücke unmittelbar untereinander ohne jedes vermittelnde Wort, allerdings auch ohne Gleichheitszeichen. Sie scheuen es dabei nicht eine negative Zahl allein die eine Seite einer Gleichung bilden zu sehen, wenn sie auch freilich rein sinnlich genommen dieselbe selten allein sehen, indem meistens die nicht vorkommenden Glieder mit dem Koeffizienten 0 behaftet angeschrieben werden. Soll also bei Brahmagupta aus $10x - 8 = x^2 + 1$ die Folgerung $-9 = x^2 - 10x$ gezogen werden[2]), so schreibt er $0x^2 + 10x - 8 = 1x^2 + 0x + 1$ und dann erst $-9 = x^2 - 10x$ oder in indischer Weise

yâ va 0 *yâ* 10 *rû* $\dot{8}$ und dann *rû* $\dot{9}$
yâ va 1 *yâ* 0 *rû* 1 *yâ va* 1 *yâ* $\dot{1}0$.

Negative Wurzeln einer Gleichung waren, wenn auch nicht streng verpönt, doch auch nicht gestattet; man darf vielleicht sagen, sie wurden mit Bewußtsein ihres Vorkommens beseitigt: „Absolute negative Zahlen werden von den Leuten nicht gebilligt“[3]).

Damit sind wir aber schon bei der Auflösung bestimmter Gleichungen angelangt. Die Inder behandelten solche von verschiedenen Graden. Eine Grundoperation ging immer voraus. Nachdem nämlich der Ansatz vollzogen war, zog man entsprechende Teile voneinander ab; Vielfache des Quadrats der Unbekannten, Vielfache der Unbekannten, Bekanntes wurden bei der dafür ungemein bequemen indischen Anordnung voneinander subtrahiert, und man nannte dieses *sâma çôdhanam* d. h. Abziehung des Ähnlichen. Mit Fug und Recht hat man diesen Ausdruck neben das diophantische „Gleichartiges von Gleichartigem“ (S. 472) gestellt[4]). Es ist gewiß nicht zu weit gegangen, wenn man behauptet von den Wörtern *sâma çôdhanam* und ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια sei das eine die Übersetzung des andern, und warum wir geneigt sind Diophant als selbständigen

[1]) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 17. [2]) Colebrooke pag. 346 bis 347, § 49. [3]) Ebenda pag. 217, § 140. [4]) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 49.

Schriftsteller zu betrachten, haben wir früher (S. 465) erörtert. Hier wäre somit schon eine von den verheißenen Spuren griechischer Algebra auf indischem Boden, hier eine Spur indischen Fortschrittes in Gestalt ihrer Anordnung. Âryabhaṭṭa hat in seiner 31. Strophe ein merkwürdiges Beispiel aufgestellt[1]: „Teile bei entgegengesetzter Bewegung die Entfernung durch die Summe der Geschwindigkeiten, bei übereinstimmender Bewegung teile die Entfernung durch die Differenz der Geschwindigkeiten; die zwei Quotienten sind die Begegnungszeiten der beiden in der Vergangenheit oder Zukunft", das ist die allgemein gestellte Aufgabe der beiden Kuriere, wie richtig erkannt worden ist. Hat aber Âryabhaṭṭa diese Aufgabe gleichungsweise gelöst in der Weise, wie wir soeben zu erörtern angefangen haben, oder hat er nur eine von auswärts erhaltene Regel wiederholt? Eine bestimmte Antwort läßt sich noch nicht geben. Jedenfalls ist bei Brahmagupta die Gleichung als solche vorhanden. Viermal der zwölfte Teil einer um 1 vermehrten Zahl wird um 8 vergrößert, um die um 1 vermehrte Zahl zu finden[2]. Die Zahl *yâ* wird um 1 vermehrt zu *yâ* 1 *rû* 1. Dann teilt man durch 12 und vervielfacht mit 4 zu $\frac{yâ\ 1\ rû\ 1}{3}$, vermehrt um 8 zu $\frac{yâ\ 1\ rû\ 25}{3}$. Das soll aber dem *yâ* 1 *rû* 1 gleich sein, mithin ist:

yâ 1 *rû* 25
yâ 3 *rû* 3.

Der Ansatz ist soweit vollendet und nun heißt es weiter: Der Unterschied der Unbekannten ist *yâ* 2; hierdurch der Unterschied der bekannten Zahlen nämlich 22 geteilt gibt die Zahl 11. Bhâskara hat mit Vorliebe Textaufgaben behandelt, deren Form dem poetischen Gewande, in welchem das Ganze erscheint, sich trefflich anpaßt. Wie er das Kapitel der Rechenkunst Lîlâvatî, die Reizende, genannt hat, und von den glitzernden Augen der Schönen (S. 617) im Zusammenhang mit dem Umkehrungsverfahren zu reden wußte, so stellt er auch folgende auf eine Gleichung ersten Grades führende Frage[3]: „Von einem Schwarm Bienen läßt $\frac{1}{5}$ sich auf einer Kadambablüte, $\frac{1}{3}$ auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten eines Kuṭaja, eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und herschwebte gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage

[1] L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 41—42. [2] Colebrooke pag. 344, § 45. [3] Ebenda pag. 24—25, § 54.

mir, reizendes Weib, die Anzahl der Bienen.“ Er ahmt übrigens selbst nur Çridhara darin nach, auf welchen folgende Aufgabe ihrer wesentlichen Form nach zurückzuführen ist[1]): „Bei verliebtem Ringen brach eine Perlenschnur; $\frac{1}{6}$ der Perlen fiel zu Boden, $\frac{1}{5}$ blieb auf dem Lager liegen, $\frac{1}{3}$ rettete die Dirne, $\frac{1}{10}$ nahm der Buhle an sich, 6 Perlen blieben aufgereiht; sage, wie viele Perlen hat die Schnur enthalten?“

Bisher trat nur eine Unbekannte auf. Eine Aufgabe, welche mehrere Unbekannte bestimmt wissen will, ist diejenige, welche Âryabhaṭṭa in seiner 29. Strophe uns erhalten hat[2]): „Die Summe einer gewissen Anzahl von Größen je um eine derselben vermindert, alle vereinigt, man teilt durch die um 1 verringerte Anzahl der Größen, man hat die Summe.“ Wir fürchten keinen Widerspruch, wenn wir in dieser Aufgabe und in dem Epantheme des Thymaridas (S. 158) so nahe Verwandte erkennen, daß an einen Zufall nicht zu denken ist. Vollkommen ist zwar die Übereinstimmung nicht. Nennen wir s wieder die Summe der n Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ und die Differenzen $s - x_1 = d_1$, $s - x_2 = d_2$, $\cdots s - x_n = d_n$, so behauptet Âryabhaṭṭa, es sei $s = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n - 1}$ und fügt hinzu, daß durch einzigweise Subtraktion von $d_1, d_2, \cdots d_n$ von dem so gefundenen s die Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_n$ erhalten werden können; aber nur um so wahrscheinlicher wird dadurch, was auch durch die selbst nur mangelhaft bekannte, jedenfalls aber sehr frühe (S. 158) anzusetzende Lebenszeit des Thymaridas an die Hand gegeben wird, daß dieser Pythagoräer der Erfinder war, als welchen Jamblichus ihn ausdrücklich nannte, daß Âryabhaṭṭa in echt indischer Weise, genau so wie Albîrûnî es uns schildert (S. 597), das Erlernte unkenntlich zu machen wußte. Ist aber diese Folgerung gerechtfertigt, so ist eine neue Spur griechischer Algebra in Indien aufgedeckt, und damit immer größere Sicherheit gewonnen, daß wirklich auf diesem Gebiete die Inder von den Griechen lernten, keineswegs aber umgekehrt, und daß die Inder alsdann nur, wie wir wiederholt erklären, in dem ihrer Geistesrichtung besonders zusagenden Gedankenkreise überraschende Fortschritte auf eigenen Füßen machten.

So glauben wir auch deutlich die griechische Auflösung der quadratischen Gleichung, wie Heron (S. 405), wie Diophant

---

[1]) Colebrooke pag. 25, Note 5. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 14—15 und 38—39.

(S. 474) sie übte, in der mit ihr nicht bloß zufällig übereinstimmenden Regel des Brahmagupta zu erkennen[1]): „Zu der mit dem Koeffizienten des Quadrates vervielfachten absoluten Zahl füge das Quadrat des halben Koeffizienten der Unbekannten. Die Quadratwurzel dieser Summe weniger dem halben Koeffizienten der Unbekannten geteilt durch den Koeffizienten des Quadrates ist die Unbekannte.“ D. h. aus

$$ax^2 + bx = c \text{ folgt } x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Bei Âryabhaṭṭa ist die gleiche Auflösungsmethode wenigstens vorausgesetzt[2]), da die in seiner 20. Strophe gelehrte Auffindung der Gliederzahl einer arithmetischen Reihe aus Summe, Differenz und Anfangsglied die vorhergehende Möglichkeit eine unreine quadratische Gleichung auflösen zu können in sich schließt.

Çridhara hat Brahmaguptas Regel verbessert[3]), indem er die gegebene Gleichung statt mit a sogleich mit $4a$ vervielfachen läßt, wodurch die Möglichkeit Brüche unter dem Wurzelzeichen zu erhalten verschwindet; aus $ax^2 + bx = c$ erhält er nämlich

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac \text{ oder } (2ax)^2 + 2b \cdot (2ax) = 4ac,$$

also auch $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$ und $x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$. Die Ergänzung des quadratischen Teiles, welche in Wirklichkeit dahin führt statt eines quadratischen Gliedes und eines Gliedes mit der ersten Potenz der Unbekannten nur das Quadrat eines Binoms ersten Grades als unbekannt aber bestimmungsfähig zu erhalten, wird seit Brahmagupta „Wegschaffung des mittleren Gliedes“, *madhyama haraṇam*, genannt[4]).

Der wichtigste Fortschritt, welchen die Lehre von den unreinen quadratischen Gleichungen schon bei Brahmagupta vollzogen hat, besteht aber darin, daß die drei verschiedenen Formen (S. 473)

$$ax^2 + bx = c, \quad bx + c = ax^2, \quad ax^2 + c = bx$$

verschwunden sind, wie es vermöge der Gewohnheit mit negativen Zahlen zu rechnen gestattet war.

Nun ist Bhâskara noch wesentlich über Brahmagupta hinausgegangen. Er kennt die bei den Quadratwurzeln sich ergebenden Doppelsinnigkeiten und Unmöglichkeiten. Er faßt sie in die Regel[5]): „Das Quadrat einer positiven wie einer negativen Zahl ist

[1]) Colebrooke pag. 346, § 48. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 13 und 33. [3]) L. Rodet, *L'algèbre d'Al-Khârizmi* pag. 71. [4]) Ebenda pag. 76. [5]) Colebrooke pag. 135.

positiv, und die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist zwiefach, positiv und negativ. Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl, denn diese ist kein Quadrat.“ Dementsprechend kennt er die paarweise auftretenden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, gibt sie aber aus dem oben angegebenen Grund, daß „absolute negative Zahlen von den Leuten nicht gebilligt werden“, nur dann an, wenn beide Wurzelwerte positiv ausfallen und keinen Durchgang durch ein Negatives voraussetzen; er folge dabei Padmanâbha[1]). Folgende Beispiele mögen die Meinung der einschränkenden Klausel erläutern[2]). „Der 8. Teil einer Herde Affen ins Quadrat erhoben hüpfte in einem Haine herum und erfreute sich an dem Spiele, die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen. Wie stark war die Herde?“ Hier gibt es zwei Auflösungen: 48 und 16. „Das Quadrat des um 3 verminderten 5. Teiles einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen, 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war. Wieviele waren es im ganzen?“ Bhâskara sagt 50 oder 5, aber der zweite Wurzelwert dürfe nicht genommen werden. Ein Kommentar erklärt uns, wie das gemeint sei. Man könne den 5. Teil von 5, oder 1, nicht um 3 vermindern, ohne daß, wenn auch nur vorübergehenderweise, die absolute negative Zahl -2 auftrete.

Bhâskara hat auch an anderer Stelle[3]) gezeigt, wie mit Hilfe der Formel

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Quadratwurzeln aus Summen rationaler und irrationaler Zahlen gezogen werden können, und hat die Wurzelausziehung auf noch verwickelter zusammengesetzte Größen wie

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

ausgedehnt. Er erklärt diese Darstellung ausdrücklich für seine Erfindung, welche aber einer sehr behutsamen Benutzung bedürfe, widrigenfalls man zu falschen Ergebnissen geführt werde; die Erzielung eines solchen beweise alsdann, daß eine Wurzelausziehung eben nicht gelinge, und alsdann müsse man sich damit begnügen statt der einzelnen vorkommenden Irrationalitäten deren Näherungswerte in Rechnung zu haben.

Das Rechnen mit Irrationalgrößen führt Bhâskara ferner zu der Aufgabe, Brüche rational zu machen[4]). Man soll Zähler und Nenner

---

[1]) Colebrooke pag. 218, § 142. [2]) Ebenda pag. 215—217. [3]) Ebenda pag. 149—155. Die Bemerkung über falsche Ergebnisse pag. 155, § 51. [4]) Ebenda pag. 147, § 34—35.

mit einem dem Nenner ähnlichen Ausdrucke vervielfachen, bei welchem nur das Vorzeichen einer Irrationalzahl entgegengesetzt gewählt wird, und soll dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis man wirklich imstande sei die noch geforderte Division zu vollziehen.

Endlich ist bei Bhâskara noch ein letzter großer Fortschritt vorhanden. Er hat auch Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade in Angriff genommen[1]). So z. B. $x^3 + 12x = 6x^2 + 35$. Er zieht $6x^2 + 8$ auf beiden Seiten ab und gewinnt so

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27,$$

wo beiderseits vollständige dritte Potenzen erscheinen, nämlich $(x-2)^3 = 3^3$. Die Kubikwurzelausziehung gibt ihm $x - 2 = 3$, woraus endlich $x = 5$ folgt. Ähnlich behandelt er

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999.$$

Er addiert auf beiden Seiten $4x^2 + 400x + 1$ und gewinnt dadurch nach vollzogener Umformung $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$. Quadratwurzelausziehung führt zu der selbst noch quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 2x + 100$, aus welcher $x = 11$ folgt. „In diesem Falle bedarf es des Scharfsinnes“ sagt Bhâskara, und man kann ihm diese kleine Ruhmredigkeit nicht verargen. Es ist nicht unmöglich, daß Diophant, welcher gleichfalls eine kubische Aufgabe gelöst hat (S. 478), den Anstoß auch zu diesen Untersuchungen gab, aber wieder ist ein ungeheures Mehr auf seiten Bhâskaras zu verzeichnen. Er hat einen Kunstgriff erdacht, den er uns ausdrücklich kennen lehrt, und der richtig gehandhabt zu einer Methode der Gleichungsauflösung werden konnte.

So ist wohl nach beiden Seiten hin gerechtfertigt, was wir über die Algebra bestimmter Gleichungen angekündigt haben: daß manches davon griechischer Herkunft zu sein scheint, daß die Inder mit dem ihnen fremd Zugetragenen staunenswerte eigene Leistungen zu verbinden wußten.

Noch bedeutender ist es, was die Inder in der Zahlentheorie leisteten, in welcher sie uns zum ersten Male Gelegenheit geben werden, wirkliche allgemeine Methoden kennen zu lernen. Zwei Bemerkungen müssen wir vorausschicken. In den indischen Schriften, welche uns bekannt sind, kommen die altpythagoräischen Zahlenbetrachtungen nicht vor. Den vermutlich späteren Begriff vollkommener oder befreundeter Zahlen aufzustellen, ist, soviel wir wissen, keinem Inder in den Sinn gekommen. Auch figurierte Zahlen kommen

[1]) Colebrooke pag. 214—215.

als solche kaum vor, jedenfalls nicht in der Ausdehnung, in welcher Diophant sich mit ihnen beschäftigte. Nur die Summierung

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

als Anzahl der Kugeln in einem dreieckigen Haufen ist seit Âryabhaṭṭas 21. Strophe[1]) bekannt, aber von Fünfeckszahlen oder gar $m$eckszahlen ist nirgend die Rede. Einen Griechen und Indern gemeinschaftlichen Gegenstand der Untersuchung bildet nur die Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke[2]). Das ist das eine, was wir uns merken wollten. Zweitens aber ist ein noch viel grundsätzlicherer Widerstreit zwischen indischer und griechischer Zahlentheorie vorhanden. Für die unbestimmte Analytik ist nämlich die Bedingung ganzzahliger Auflösungen maßgebend, eine Forderung, welche Diophant (S. 478) niemals stellt und nur ausnahmsweise erfüllt. Das sind so wesentliche Gegensätze, daß wir auf diesem Gebiete fast nur selbständige Leistungen im Westen wie im Osten zu erwarten haben.

Gehen wir jetzt darauf aus, einen Überblick über die indischen Leistungen in der unbestimmten Analytik zu gewinnen, und beginnen wir mit den unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Schon Âryabhaṭṭa hat sich in der 32. und 33. Strophe seines mathematischen Kapitels mit solchen Gleichungen beschäftigt[3]) und dabei eine Methode in Anwendung gebracht, der Brahmagupta wahrscheinlich den Namen Zerstäubung, *kuṭṭaka*, beigelegt hat, unter welchem sie sich auch bei Bhâskara auseinandergesetzt findet[4]). Bhâskara beginnt ihre Darstellung mit der Aufgabe, das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden. Diese löst er, wie sie eben gelöst werden muß, wie Euklid verfuhr, wie auch Bhâskara sehr wohl selbständig erdacht haben oder von selbständigen indischen Vormännern übernommen haben kann. Er vollzieht fortlaufende Divisionen des früheren Divisors durch den bei Teilung mittels desselben verbliebenen Rest, und der letzte dieser Reste ist der gesuchte größte gemeinsame Divisor der beiden gegebenen Zahlen. Durch ihn verkleinert werden sie feste Zahlen, *dṛidha*, oder teilerfremd, ein Begriff, den Brahmagupta durch die Namen *niccheda* oder *nirapavarta* dem deutschen Worte entsprechender bezeichnet[5]). Soll nun eine Zerstäubungsaufgabe gelöst werden, so muß vor allen Dingen Dividend, Divisor

---

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 13 und 35. [2]) Colebrooke pag. 306, § 35 und pag. 340, § 38. [3]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 42—46. [4]) Colebrooke pag. 112 flgg. [5]) Ebenda pag. 330, Note 3.

und Additive durch dieselbe Zahl verkleinert werden können. „Mißt die Zahl, welche für Dividend und Divisor das Maß ist, die Additive nicht, so ist die Aufgabe schlecht gestellt." Die Meinung dieses Satzes, von welchem übrigens so wenig wie von der eigentlichen Methode ein Beweis gegeben ist, besteht darin, daß wenn $ax + b = cy$ in ganzen Zahlen lösbar sein soll, jeder Teiler des Dividenden a und des Divisors c auch in der Additiven b enthalten sein muß, daß es also möglich sein muß, durch Verkleinerung der vorgelegten Gleichung mittels des größten gemeinsamen Teilers von a und c diese beiden Koeffizienten teilerfremd zu machen. Denkt man sich diese Vorbereitung getroffen, so muß bei der nunmehr erfolgenden Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers der neuen a und c nach dem euklidischen Kettenbruchverfahren schließlich der Rest 1 auftreten. Die einzelnen Quotienten der aufeinanderfolgenden Divisionen seien $q_1, q_2, \ldots q_n$, die entsprechenden Reste $r_1, r_2, \ldots r_n$, wo also $r_n = 1$ sein muß. Man schreibt die Quotienten in ihrer Reihenfolge in eine Zeile und fügt am Schlusse noch die Additive b und eine Null bei, so daß diese letztere eingeschlossen $n + 2$ Zahlengrößen in einer Zeile nebeneinander stehen. Nun vervielfacht man das drittletzte Glied mit dem vorletzten und addiert das letzte, streicht das letzte ganz und ersetzt das drittletzte durch die eben gefundene Zahl. Man hat mithin jetzt eine Zeile von $n + 1$ Zahlengrößen vor sich, an welcher man das eben erläuterte Verfahren, welches die Anzahl wieder um eins verringert, wiederholt. Das setzt man so fort bis schließlich nur zwei Zahlen in der Zeile sich befinden, und nun hat man zwei Fälle zu unterscheiden. War n gerad, so ist von beiden Zahlen die erste y, die zweite x. War n ungerad, so muß man die erhaltenen Werte von a und von c abzählen, um die richtigen y und x zu finden. Eine Verminderung des gefundenen y um den Betrag eines Vielfachen von a, während von x das Gleichvielfache von c abgezogen wird, ist in beiden Fällen gestattet.

Ein Beispiel, welches zu einem geraden n führt, ist[1])

$$100x + 90 = 63y.$$

Die Division $100 : 63$ gibt den Quotienten $q_1 = 1$ und den Rest $r_1 = 37$. Die folgenden Quotienten und Reste sind $q_2 = 1$, $r_2 = 26$; $q_3 = 1$, $r_3 = 11$; $q_4 = 2$, $r_4 = 4$; $q_5 = 2$, $r_5 = 3$; $q_6 = 1$, $r_6 = 1$, mithin $n = 6$. Die zu bildenden Zahlenreihen sind:

---

[1]) Colebrooke pag. 115, § 255.

1, 1, 1, 2, 2, 1, 90, 0.	$1 \cdot 90 + 0 = 90$
1, 1, 1, 2, 2, 90, 90.	$2 \cdot 90 + 90 = 270$
1, 1, 1, 2, 270, 90.	$2 \cdot 270 + 90 = 630$
1, 1, 1, 630, 270.	$1 \cdot 630 + 270 = 900$
1, 1, 900, 630.	$1 \cdot 900 + 630 = 1530$
1, 1530, 900.	$1 \cdot 1530 + 900 = 2430$
2430, 1530.	$x = 1530 \quad y = 2430.$

Nun zieht man $24 \cdot 100$ von y, $24 \cdot 63$ von x ab und erhält die kleineren Werte $x = 18$, $y = 30$.

Zu einem ungeraden n führt[1]): $60x + 16 = 13y$. Hier ist nämlich $q_1 = 4$, $r_1 = 8$; $q_2 = 1$, $r_2 = 5$; $q_3 = 1$, $r_3 = 3$; $q_4 = 1$, $r_4 = 2$; $q_5 = 1$, $r_5 = 1$ und $n = 5$. Die Rechnung stellt sich daher folgendermaßen:

4, 1, 1, 1, 1, 16, 0.		$1 \cdot 16 + 0 = 16$
4, 1, 1, 1, 16, 16.		$1 \cdot 16 + 16 = 32$
4, 1, 1, 32, 16.		$1 \cdot 32 + 16 = 48$
4, 1, 48, 32.		$1 \cdot 48 + 32 = 80$
4, 80, 48.		$4 \cdot 80 + 48 = 368$
368, 80.	$13 - 80 = -67 = x$	$60 - 368 = -308 = y$

Diesmal addiert man $6 \cdot 60$ zu y, $6 \cdot 13$ zu x und erhält die Werte $x = 11$, $y = 52$.

Die Zerstäubungsmethode stimmt, wie vielfach bemerkt worden ist, in ihrem ganzen Gange mit der Methode der Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades durch Kettenbrüche überein, wie sie in jedem Lehrbuche der Zahlentheorie erörtert ist; wir können den Nachweis ihrer Richtigkeit füglich übergehen. Wir übergehen auch die unbestimmten Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten, welche Âryabhaṭṭa wie Brahmagupta schon kannten[2]) und in wesentlich der gleichen Art behandelten, wie die Zerstäubungsmethode es für zwei Unbekannte vorschreibt.

Wir gehen zu den unbestimmten Gleichungen zweiten Grades über. Brahmagupta behandelt hier zuerst solche Gleichungen, welche nur das Produkt der beiden Unbekannten unter sich als quadratisches Glied enthalten und dann erst solche, in welchen die Quadrate der Unbekannten vorkommen[3]). Bhâskara schlägt den ent-

---

[1]) Colebrooke pag. 116, § 257. [2]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 15 und 43. Colebrooke pag. 348—360: *Equation of several colours.* [3]) Ebenda pag. 361—362: *Equation involving a factum* und 363—372: *Square affected by coefficient.*

gegengesetzten Weg ein, indem er zuerst mit Aufgaben von der Form $ax^2 + b = cy^2$, dann erst mit solchen wie $xy = ax + by + c$ sich beschäftigt[1]). Bei der Auflösung dieser letzteren bedient er sich entweder des Verfahrens die eine Unbekannte, etwa y, ganz willkürlich anzunehmen und alsdann $x = \frac{by + c}{a - y}$ zu setzen, wobei freilich ganzzahlige Lösungen nur infolge günstigen Zufalles auftreten, oder aber er geht von einer auffälligen Verbindung geometrischer und algebraischer Anschauungen aus, die zugleich Methode und Beweis derselben enthalten (Fig. 81).

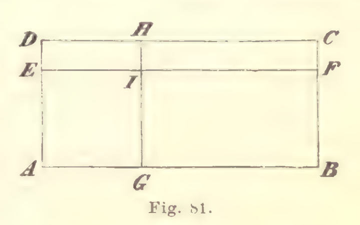


Fig. 81.

In dem Rechtecke $ABCD$ sei die Basis $AB = x$, die Höhe $BC = y$, so ist die Fläche xy. Ist nun $DE = a$, $AG = b$, so ist $CDEF = ax$, $AGHD = by$ und $ax + by$ = Gnomon $CFIGADC + DEIH$, oder da $DEIH = ab$, so ist Gnomon $CFIGADC = ax + by - ab$. Zieht man diesen Gnomon von dem ursprünglichen Rechtecke $ABCD = xy$ ab, so bleibt das Rechteck $BFIG = xy - ax - by + ab$, welches als aus den Seiten $x - b$ und $y - a$ bestehend auch die Fläche $(x - b) \cdot (y - a)$ besitzt. Nach dem Wortlaute der Aufgabe ist aber $xy - ax - by + ab = c + ab$, mithin ist auch $(x - b) \cdot (y - a) = c + ab$. Man hat also nur nötig $c + ab$ in zwei Faktoren, etwa m und $\frac{c + ab}{m}$ zu zerlegen und den einen mit $x - b$, den anderen mit $y - a$ zu identifizieren. So entsteht entweder $x - b = \frac{c + ab}{m}$, $y - a = m$ oder $y - a = \frac{c + ab}{m}$, $x - b = m$; beziehungsweise entweder $x = \frac{c + b(a + m)}{m}$, $y = a + m$ oder

$$x = b + m, \quad y = \frac{c + a(b + m)}{m}$$

und die Lösungen werden ganzzahlig, wenn m ein ganzzahliger Faktor von $c + ab$ ist.

Wir haben bei dieser Auseinandersetzung des griechischen Wortes Gnomon uns bedient. Bei Bhâskara entspricht demselben kein eigentümlicher indischer Ausdruck. Er spricht vielmehr nur von dem Unterschiede der Rechtecke $ABCD$ und $BFIG$. Wir haben die nicht unbedeutende Abweichung von dem Urtexte uns gestattet, um damit unsere Auffassung kund zu geben, daß wir nicht umhin können,

[1]) Colebrooke pag. 170—184: *Affected square*, 245—267: *Varieties of quadratics*, 268—274: *Equation involving a factum of unknown quantities.*

in diesem nichts weniger als indischen Verfahren griechische Erinnerungen zu vermuten.

Die indische Auflösung der Gleichungen von der Form $ax^2 + b = cy^2$ hier ausführlich mitzuteilen, würde uns viel zu weit führen. Wir begnügen uns mit wenigen Andeutungen. Bhâskara kennt das, was wir quadratische Reste[1]) und das, was wir kubische Reste[2]) nennen, insofern als er weiß, daß es Zahlen von gewissen Formen gibt, die Quadrate und Kuben sein können, und andere, bei welchen das Entgegengesetzte stattfindet. Er lehrt in der zyklischen Methode[3]), wie die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ gelöst werde, ausgehend von einer beliebigen empirisch gegebenen Gleichung $aA^2 + B = C^2$, welche nur so gewählt worden ist, daß die keinen quadratischen Faktor enthaltende Zahl B so klein als möglich ausfällt, ein Verlangen, zu dessen Erfüllung es genügte $\sqrt{a}$ näherungsweise in Bruchgestalt etwa als $\frac{C}{A}$ zu suchen, und Zähler und Nenner dieses Bruches in der versuchsweise aufzustellenden Gleichung ihren Platz anzuweisen. Aus der für B ausgesprochenen Bedingung folgt von selbst ihre Teilerfremdheit gegen A. Besäßen nämlich A und B einen gemeinsamen Teiler δ, so müßte derselbe wegen $aA^2 + B = C^2$ auch in C enthalten sein. In A^2 wäre δ^2, ebendasselbe auch in C^2 und schließlich auch in B enthalten. Nun setzt man $\frac{Az_1 + C}{B} = A_1$, wobei durch Zerstäubung z_1 nebst A_1 ganzzahlig gefunden werden, und zwar wählt man von den unendlich vielen möglichen Werten von z_1 einen solchen, der $z_1{}^2 - a$ kleinstmöglich macht. Setzt man hierauf $\frac{z_1^2 - a}{B} = B_1$, so ist B_1 eine ganze Zahl. Der indische Schriftsteller gibt allerdings dafür so wenig wie für die vorhergehende Teilerfremdheit zwischen A und B einen Beweis, aber die Sache ist richtig. Aus $\frac{Az_1 + C}{B} = A_1$ folgt nämlich

$$z_1 = \frac{BA_1 - C}{A}, \quad z_1^2 - a = \frac{B^2A_1^2 - 2BCA_1 + C^2 - aA^2}{A^2}$$

$$= \frac{B^2A_1^2 - 2BCA_1 + B}{A^2} = \left(\frac{BA_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2}\right) \cdot B.$$

Nun ist $z_1^2 - a$ eine ganze Zahl, also muß das Gleiche für den zuletzt erhaltenen Ausdruck gelten, und das kann, weil, wie wir sahen,

---

[1]) Colebrooke pag. 262—263, § 202—204. [2]) Ebenda pag. 265, § 206. [3]) Ebenda pag. 175 flgg. H. Konen, Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ (Leipzig 1901).

B gegen A teilerfremd ist, nur dann der Fall sein, wenn A^2 in $BA_1^2 - 2CA_1 + 1$ ganzzahlig enthalten ist. D. h.

$$\frac{z_1^2 - a}{B} = B_1 = \frac{BA_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2}$$

ist eine ganze Zahl. Ersetzt man rechts B wieder durch $C^2 - aA^2$, so zeigt sich

$$B_1 = \frac{C^2A_1^2 - aA^2A_1^2 - 2CA_1 + 1}{A^2} = \left(\frac{CA_1 - 1}{A}\right)^2 - aA_1^2$$

oder

$$aA_1^2 + B_1 = \left(\frac{CA_1 - 1}{A}\right)^2 = C_1^2.$$

Auch $C_1 = \frac{CA_1 - 1}{A}$ muß als rationale Quadratwurzel der ganzen Zahl $aA_1^2 + B_1$ selbst ganzzahlig sein. Somit ist aus der lauter ganze Zahlen enthaltenden Gleichung $aA^2 + B = C^2$ eine neue Gleichung $aA_1^2 + B_1 = C_1^2$ hervorgegangen, in der wieder nur ganze Zahlen vorkommen. Man kann nun in gleicher Weise andere und andere ähnlich geformte Gleichungen ableiten, man kann aber auch gewonnene Gleichungen nach einem anderen Satz vereinigen. Dieser Satz lautet[1]), daß $au_1^2 + b_1 = v_1^2$ und $au_2^2 + b_2 = v_2^2$ die Folgerung $au_3^2 + b_3 = v_3^2$ gestatten, wo $u_3 = u_1v_2 + u_2v_1$, $b_3 = b_1b_2$, $v_3 = au_1u_2 + v_1v_2$. Durch solche Veränderungen und Divisionen, wo immer sie möglich sind, kann man bis auf eine Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ geführt werden und hat alsdann die Aufgabe gelöst. Allerdings wird dieses indische Verfahren nicht stets zum Ziele führen, namentlich nicht nach ganz vorschriftsmäßigen Regeln die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ finden lassen. Vieles bleibt dem Takte des Auflösenden überlassen. Mit Recht sagt auch Bhâskara an einer anderen Stelle[2]): „Die Regeldetri ist Arithmetik, die Algebra aber ist makelloser Verstand. Was wäre dem Scharfsinnigen unbekannt?" Wird übrigens bei der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ kein Gewicht auf die Ganzzahligkeit der Lösungen gelegt, so kann immer ohne weiteres ein genügendes Wurzelpaar angeschrieben werden[3]). Aus $aA^2 + B = C^2$ in Verbindung mit der noch einmal gesetzten unveränderten Gleichung ergibt sich nämlich nach der erwähnten Vereinigungsregel: $a \cdot (2AC)^2 + B^2 = (aA^2 + C^2)^2$ und daraus

$$a \cdot \left(\frac{2AC}{B}\right)^2 + 1 = \left(\frac{aA^2 + C^2}{B}\right)^2.$$

Überblicken wir alle diese Untersuchungen, welche natürlich, so algebraisch begabt wir die Inder uns denken mögen, die Kraft der bedeutendsten Geister in um Jahrhunderte weit auseinander liegenden

[1]) Colebrooke pag. 171, § 77—78. [2]) Ebenda pag. 276. [3]) Ebenda pag. 172, § 80—81.

Zeiten in Anspruch genommen haben können, so ist ein nicht unbedeutendes Interesse mit der Frage verknüpft, wo denn die Wurzel aller zahlentheoretischen Untersuchungen für die Inder lag[1])? Die unbestimmten Gleichungen zweiten und höheren Grades sind wohl nichts weiteres gewesen als siegreiche Erfolge einer Spekulation, welche wachgerufen war durch Aufgaben, die nur auf unbestimmte Gleichungen vom ersten Grade geführt hatten. Diese aber waren vermutlich astrologisch-chronologischer Natur.

Die Astronomen, welche, wie wir uns erinnern, alle diese Gegenstände in eingeschalteten Kapiteln ihrer Astronomien zu behandeln pflegten, haben wenigstens, je weiter wir im Datum zurückgehen können, um so ausschließlicher die Zerstäubungsrechnung auf umgekehrte Kalenderaufgaben angewandt, auf die Frage, wann gewisse Konstellationen am Himmel eintreten, wann also bedeutungsvolle Übereinstimmung verschiedener Zyklen erreicht wird? Das sind, wie man leicht einsieht, Fragen, bei denen es darauf ankommt, aus gegebenen Resten, welche eine unbekannte ganze Zahl bei Division durch bekannte ganze Zahlen gibt, jene Zahl selbst zu erkennen.

Ist aber diese ganze Klasse von Aufgaben indisch? Wir können die Frage weder bejahen noch verneinen. Zu beidem fehlt die nötige Reichhaltigkeit gesicherter altertümlicher Quellen. Wir können nur darauf hinweisen, daß die Beantwortung dieser Frage nicht früher wird gegeben werden können, als bis man entschieden haben wird, ob die altindische Sternkunde lange bevor griechische Einflüsse sich geltend machen konnten landesursprünglich oder fremden Ursprunges, ob sie, wenn letzteres der Wahrheit entsprechen sollte, chinesischer oder babylonischer Herkunft war. Wir fühlen uns nicht befugt in dieser hochwichtigen Streitfrage das Urteilsrecht uns anzumaßen. Nur auf einige wenige Punkte sei aufmerksam gemacht, die unter den Entscheidungsgründen keinenfalls fehlen dürfen. Fehlen darf nicht die Berücksichtigung der Sexagesimalbrüche, welche mit Wahrscheinlichkeit unmittelbar aus Babylon nach Indien herüberkamen (S. 613). Verschwiegen darf nicht werden, daß astrologische Deutungen, daß Amulette und Talismane gerade in Babylon zu Hause waren, daß andererseits Zahlenspielereien den Babyloniern ebenso angehörten. Und dieser letzte Gedanke wird auch nicht in den Hintergrund gedrängt werden dürfen, wenn wir anknüpfend an diese Bemerkungen jetzt noch einige Worte über eine Spielerei zu sagen gedenken, welcher immerhin einiger mathematische Wert innewohnt.

---

[1]) Mit dieser Frage hat sich Hankel S. 197 beschäftigt, wenn auch nicht unter Ziehung aller Folgerungen, die sich ergeben können.

Wir meinen die magischen Quadrate, bhadra gaṇita. Über diesen Gegenstand[1]) schrieb Nârâyana, ein von Gaṇeça zitierter Schriftsteller; Gaṇeça selbst verfaßte 1545 seinen Kommentar zu Bhâskara. Das sind freilich recht späte Daten, aus welchen auch nur Vermutungen auf eine ältere Zeit sich nicht stützen lassen. Solchen liegt nur die Tatsache zugrunde, daß in Indien das Schachspiel erfunden worden ist[2]), während die Zerlegung in schachbrettartige Felder der Bildung magischer Quadrate, deren Wesen wir (S. 515) erörtert haben, notwendig vorausgehen mußte. Die einzige ausführliche Mitteilung ist um anderthalb Jahrhunderte jünger als selbst Gaṇeça. Sie findet sich in einem 1691 gedruckten Berichte über das Königreich Siam[3]). Allerdings ist sie in ihrer Ausführlichkeit von großer Zuverlässigkeit, indem sie die Methode kennen lehrt, nach welcher die Inder ein magisches Quadrat von ungerader Felderzahl anzufertigen wußten. Daß sie auch magische Quadrate von gerader Zellenzahl zu bilden verstanden, behauptet Laloubère, der Verfasser jenes Reiseberichtes, ebenfalls, gibt aber die betreffende Methode nicht an[4]). Bei der mathematisch nicht gar hoch anzuschlagenden Tragweite des Gegenstandes verzichten wir, wie schon früher, auf nähere Darlegung.

30. Kapitel.

Geometrie und Trigonometrie.

Als Quellen für indische Geometrie dienen nicht bloß die wiederholt von uns benutzten Zwischenkapitel der astronomischen Schriften des Âryabhaṭṭa, des Brahmagupta und Bhâskara, sondern auch Schriften von geometrisch-theologischem Charakter, wie sie, abgesehen von einigen ägyptischen Inschriften, in keiner Literatur sich wiederfinden. Wir meinen die Çulvasûtras. Der indische Gottesdienst, peinlich genauen Vorschriften folgend, kann der geometrischen Regeln nicht entbehren. Wenn der Altar nicht genau in der anbefohlenen Gestalt erbaut ist, wenn eine Kante nicht rechtwinklig zur anderen steht, wenn in der Orientierung nach den Himmelsgegenden ein Fehler stattfand, so nimmt die Gottheit das ihr dargebrachte Opfer nicht an, ein dem Inder schrecklicher Gedanke, da für ihn jedes Opfer ein

[1]) Colebrooke pag. 113, Note *. [2]) Lassen, Indische Alterthumskunde IV, 905. Bonn 1862. [3]) La Loubère, *Du royaume de Siam,* Tom. II, pag. 237, 266 sqq., 273. Amsterdam 1691. [4]) S. Günther, Vermischte Untersuchungen z. Geschichte d. mathemat. Wissenschaften Kap. IV, S. 188—191. Leipzig 1876.

förmlicher Vertrag mit der betreffenden Gottheit, eine Art von Tauschgeschäft ist, und er somit auf Erfüllung seines bei dem Opfer gehegten Wunsches sich nicht die geringste Rechnung machen kann, sofern seine Gabe verschmäht würde. Die rituellen Vorschriften, soweit sie auf die Opfer überhaupt sich beziehen, sind in den sogenannten Kalpasûtras enthalten, und zu jedem Kalpasûtra scheint als Unterabteilung ein Çulvasûtra gehört zu haben, welches eben jene geometrischen Vorschriften lehrte, und deren zwei in auszugsweiser, eines in vollständiger Übersetzung zugänglich gemacht sind[1]).

Die Verfasser derselben heißen Baudhâyana, Âpastamba und Kâtyâyana. Leider ist deren Lebenszeit noch ziemlich im Dunkeln. Es scheint zwar, daß die Reihenfolge, in welcher wir sie nannten, der Zeitfolge ihres Lebens entspricht, aber ob z. B. Baudhâyana zwei Jahrhunderte früher als Âpastamba zu setzen ist, ob die Zeitbestimmung des IV. oder V. S. v. Chr. auf Âpastamba zu deuten ist oder auf die Niederschrift des ältesten Çulvasûtra, darüber suchen wir vergebens nach einer unzweideutig ausgesprochenen Meinung. Nur einer bestimmten Behauptung[2]) begegnen wir: daß der Satz vom Quadrate der Hypotenuse spätestens im VIII. S. vor Chr. in Indien bekannt gewesen sein müsse, eine Behauptung, welche diejenigen zu vertreten haben, die sich berufsmäßig mit indischer Sprache und Geschichte beschäftigen, und welche wir zum Ausgangspunkte unserer weiteren Untersuchungen machen müssen.

Unter den auf die Errichtung von Altären bezüglichen Aufgaben handelt es sich, wie wir schon andeuteten, zunächst um deren Orientierung und deren genau rechtwinklige Herstellung. Die ostwestliche Linie, welche dabei abgesteckt werden muß[3]), führt den Namen *prâcî*, und wir haben (S. 599) schon berührt, daß deren Richtung im Sûrya Siddhânta[4]) genau nach der Methode gefunden wird, welche wohl aus griechischer Quelle zu Vitruvius und zu den römischen

---

[1]) *The S'ulvasûtras by G. Thibaut. Reprinted from the Journal of the Asiatic Society of Bengal, Part I for* 1875. Calcutta 1875. Außer auf diese (als Thibaut zu zitierende Schrift) verweisen wir auf unsere daran anknüpfende Abhandlung: Gräkoindische Studien, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-literar. Abteilung (1877). Ferner vgl. L. v. Schroeder, Pythagoras und die Inder (Leipzig 1884), Albert Bürk, Das Âpastamba — Sulba — Sûtra herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch. LV, 543—591 (Einleitung und Urtext) und LVI, 327—391 (deutsche Übersetzung 1901), unsere Abhandlung: Über die älteste indische Mathematik. Archiv d. Math. u. Phys. 3. Reihe, VIII, 63—72 (1904), Zeuthen, *Théorème de Pythagore. Comptes Rendus du II. Congrès internat. de Philosophie à Genève, Septembre* 1904, pag. 833—854 (1905). H. Vogt, *Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 6—23 (1906). [2]) Bürk l. c. LV, 556. [3]) Thibaut S. 9—10. [4]) Sûrya Siddhânta S. 239.

Feldmessern gelangte. Selbstverständlich ist diese späte Angabe ohne jede überzeugende Kraft für die Zeit der ersten Vorschriften zur Herstellung richtig orientierter Altäre. Wie damals die Prâcî abgesteckt wurde ist uns unbekannt. Die Çulvasûtras schweigen darüber. Ist die Prâcî gefunden, so werden rechte Winkel abgesteckt, und zwar mit Hilfe eines Seiles. Die Länge dieser ostwestlich gezogenen Strecke sei 36 Padas. An ihren beiden Endpunkten wird je ein Pflock in den Boden eingeschlagen[1]). An diese Pflöcke befestigt man die Enden eines Seiles von 54 Padas Länge, in welches zuvor, 15 Padas von einem Ende entfernt, ein Knoten geschlungen wurde. Spannt man nun (Fig. 82) das Seil auf dem Erdboden, indem man den Knoten festhält, so entsteht ein rechter Winkel am Ende der Prâcî. Daß das Verfahren richtig ist, und auf dem rechtwinkligen Dreiecke von den Seiten 15, 36, 39, oder in kleinsten Zahlen ausgedrückt 5, 12, 13 beruht, ist einleuchtend. Einleuchtend ist aber auch, daß es in der Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes wurzelt, daß es die Seilspannung genau in der gleichen Weise anwendet, wie Heron dieselbe benutzte (S. 384 Fig. 64), wie wahrscheinlich die altägyptischen Harpedonapten bei Lösung der gleichen Aufgaben verfuhren (S. 106).

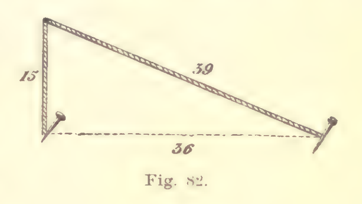


Fig. 82.

Nächst der richtigen Orientierung und Scharfkantigkeit des Altars hat seine Gestalt eine hohe Wichtigkeit. Sie hat allerdings im Laufe der Zeiten gewechselt, Formen annehmend, welche für jeden nichtindischen Geist an das Lächerliche streifen. Welcher Europäer kann sich hineindenken, einen Altar in der Figur eines Falken oder irgend eines anderen Vogels, eines Wagenrades usw. zu errichten? Dabei treten jedoch zwei mathematische Gesetze auf[2]), jedes eine besondere Gruppe von Aufgaben erzeugend.

Wird ein Altar von gegebener Gestalt vergrößert, so muß die Gestalt selbst in allen ihren Verhältnissen dieselbe bleiben. Man muß also **erstens** verstehen eine geometrische Figur zu bilden, einer gegebenen ähnlich und zu derselben in gegebenem Größenverhältnisse stehend.

Die Fläche des Altars von normaler Größe ist ferner ohne Rücksicht auf seine Gestalt stets dieselbe. Man muß also **zweitens** verstehen eine geometrische Figur in eine andere ihr flächengleiche zu verwandeln.

---

[1]) Albr. Weber, Indische Studien X, 364 und XIII, 233 flgg. und Âpastamba Kap. I, 32, vgl. Bürk l. c. LVI, 327. [2]) Thibaut S. 5.

Gleich das erste Gesetz mahnt uns mit Entschiedenheit an die Würfelgestalt, welche das Grabmal für Glaukos besitzen sollte, während es auf Geheiß des Königs Minos in doppelter Größe aufzuführen war (S. 211). Euripides hat, wie wir uns erinnern, das vielleicht sagenhafte Geheiß in einer Tragödie verwertet, und Euripides lebte 485—406, mehr als 70 Jahre bevor der Alexanderzug geregeltere indisch-griechische Beziehungen hervorrief. Wir fügen hinzu, daß eine indische astronomische Handschrift den Ursprung ihrer Wissenschaft nicht bloß auf einen ionischen Meister Yavaneçvarâcârya zurückführt (S. 600), sondern neben diesem eine Persönlichkeit des Namens Mînarâja anführt[1]) ein Name, der täuschend an den König Minos zu erinnern geeignet ist.

Ein wesentlicher Unterschied besteht allerdings zwischen der Aufgabe, welche König Minos seinem Architekten stellte, und der Aufgabe, welche bei der Inhaltsveränderung indischer Altäre vorkommt. Jener sollte den Kubikraum verdoppeln, hier kommt es nur auf die Oberfläche an, soweit die Çulvasûtras uns Auskunft geben. Es galt also nur eine Vervielfachung einer ebenen Figur zu vollziehen, oder mit anderen Worten eine Quadratwurzel zu finden, was bei Griechen wie bei Indern ebensowohl geometrisch als arithmetisch geschah. Die Würfelvervielfältigung hätten die Inder arithmetisch gleichfalls vollziehen können, da, wie wir gesehen haben, Âryabhaṭṭa Kubikwurzeln auszuziehen wußte; geometrisch dagegen überstieg diese Aufgabe indische Kräfte bei weitem, indem die Kurven, mittels welcher die Würfelvervielfachung geleistet werden kann, die Kegelschnitte, die Konchoide und wie sie alle heißen, den Indern durchaus unbekannt geblieben zu sein scheinen.

Für die geometrische Ausziehung der Quadratwurzel gibt Baudhâyana folgende Regeln[2]): Das Seil, quer über das gleichseitige Rechteck gespannt, bringt ein Quadrat von doppelter Fläche hervor. Das Seil, quer über ein längliches Rechteck gespannt, bringt beide Flächen hervor, welche die Seile längs der größeren und kleineren Seite gespannt hervorbringen. Diesen zweiten Fall erkenne man an den Rechtecken, deren Seiten aus 3 und 4, aus 12 und 5, aus 15 und 8, aus 7 und 24, aus 12 und 35, aus 15 und 36 Längeneinheiten bestehen.

Das ist nun offenbar der pythagoräische Lehrsatz, erläutert an Zahlenbeispielen. Das zuletzt genannte Dreieck mit den Katheten 15 und 36 ist vorher schon einmal in den kleineren Zahlen 12 und 5

[1]) Brockhaus in den Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog.-histor. Klasse IV, 18—19 (1852). [2]) Thibaut S. 7, 8, 9. Bürk LVI, 340—341.

genannt, offenbar ohne daß Baudhâyana dieser Wiederholung sich bewußt war, ein Zeugnis dafür, daß er den Gegenstand seiner Darstellung nicht durchaus beherrschte, sondern mindestens teilweise Hergebrachtes vortrug, welches er nicht verstand. Der pythagoräische Lehrsatz ist aber nicht als einheitlicher Satz vorgetragen, sondern in zwei Unterfällen, je nachdem die beiden Katheten gleicher Länge sind oder nicht. Es ist wahrscheinlich (S. 185), daß Pythagoras bei dem Beweise seines Satzes ebenso verfuhr.

Die Anwendung dieser Sätze in den Çulvasûtras ist der doppelten Gattung von Aufgaben entsprechend, welche bei Herstellung eines Altars sich darbieten, eine doppelte. Es kann eine Strecke verändert werden sollen, so daß ihr Quadrat sich im Verhältnisse $1:n$ vergrößert, es kann auch eine Figur in eine andere gleichen Inhaltes umgewandelt werden sollen. Die Auffindung der Seite eines 2, 3, 10, 40 mal so großen Quadrates, als ein gegebenes ist, geschieht durch allmähliche, sich wiederholende Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes, indem von dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen und die Hypotenuse eines Dreiecks immer als die eine Kathete eines folgenden Dreiecks benutzt wird, dessen andere Kathete der des zuerst betrachteten Dreiecks gleich ist. Dabei erscheinen Namen für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ usw., gebildet durch Zusammensetzung der Zahlwörter mit dem von uns früher (S. 621) erörterten Worte *karaṇa*[1]), also *dvikaraṇî* $= \sqrt{2}$, *trikaraṇî* $= \sqrt{3}$, *daçakaraṇî* $= \sqrt{10}$, *catvarinçatkaraṇî* $= \sqrt{40}$ usw.

Bei den Verwandlungen von Figuren ineinander ist die Auffindung des einem Rechtecke gleichen Quadrates[2]) sehr interessant, weil sie nur des pythagoräischen Lehrsatzes sich bedient, dagegen von Anwendung des Hilfsmittels, welches im 14. Satze des II. Buches der euklidischen Elemente geboten ist, d. h. von der Fällung einer Senkrechten aus einem Punkte einer Kreisperipherie auf den Durchmesser, absieht (Fig. 83). Von dem Rechtecke $ABCD$ wird zunächst vermittels $AE = AD$ ein Quadrat $ADFE$ abgeschnitten. Der Rest $EFCB$ wird durch GH halbiert und die obere Hälfte $GHCB$ unten rechts als $DFIK$ angesetzt. So ist $ABCD$ in einen Gnomon $AGHFIKA$ verwandelt, oder, wie Baudhâyana sagt, der des Wortes Gnomon sich so wenig bedient wie Bhâskara, bei welchem wir (S. 631) die gleiche Figur

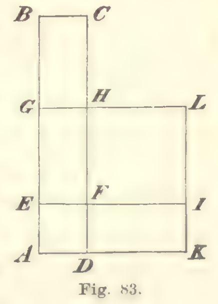


Fig. 83.

[1]) Thibaut S. 16. [2]) Ebenda S. 19. Âpastamba Kap. II, § 7, vgl. Bürk LVI, 333.

nachwiesen, in den Unterschied der beiden Quadrate *AKLG* und *FILH*, und dieser Unterschied ist mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes leicht in die Gestalt eines Quadrates zu bringen.

Die Quadratwurzelausziehung, welche geometrisch genau erfolgt, muß arithmetisch sich mit einer Annäherung begnügen, und zwar wird, wenn die Quadratwurzel zum Zwecke praktischer Ausmessungen gezogen worden ist, eine solche Annäherung genügen, welche auf dem Felde keinen bemerklichen Unterschied gegen die strenge Wahrheit mehr hervorbringt. So benutzten Baudhâyana und Âpastamba $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Erinnern wir uns hier an die bei Theon von Smyrna (S. 436) angegebenen Näherungswerte für $\sqrt{2}$. Sie heißen der Reihe nach $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$, und dieser letztere Wert kommt uns hier in der Form $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$ also durch eine Summe von Stammbrüchen dargestellt wieder zu Gesicht. Wir sagten damals, er habe auf außergriechischem Boden eine Rolle gespielt, und wir erkennen diese Rolle nunmehr darin, daß er Veranlassung gab, eine von ihm als Voraussetzung ausgehende größere Annäherung zu erzielen. Die Quadrierung $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2\frac{1}{144}$ läßt nämlich erkennen, daß $\frac{17}{12}$ zu groß ist. Soll aber das Quadrat um $\frac{1}{144}$ kleiner werden, so muß $\frac{1}{144}$ das doppelte Produkt des gefundenen Teiles $\frac{17}{12}$ der Quadratwurzel aus 2 in die negative Ergänzung sein, falls man von dem Quadrate jener Ergänzung absehen zu können glaubt, und nun ist $\frac{1}{144}$ geteilt durch 2 mal $\frac{17}{12}$ nichts anderes als $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$, welches Baudhâyana wirklich abzieht, so daß hiermit die Entstehung des Wertes $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ hinlänglich erklärt sein dürfte[1]).

Arithmetisch und zugleich geometrisch interessant sind die Auflösungsversuche der Çulvasûtras für die Aufgabe, Flächengleichheit zwischen quadratischen und kreisrunden Figuren hervorzubringen[2]), eine Aufgabe, die noch mehr als andere geeignet erscheint, geschichtliche Zusammenhänge nachweisen zu lassen, weil eben hier vermöge der Natur der Aufgabe von vornherein auf volle Genauigkeit verzichtet werden muß, und bei bloßen Annäherungen — mögen die Er-

[1]) Dem Grundgedanken nach stimmt diese Darstellung ziemlich genau mit der von Thibaut zuerst versuchten Wiederherstellung überein. Thibaut S. 13—15. [2]) Ebenda S. 26—28.

finder sie als Annäherungen oder als genau richtige Werte betrachtet haben — eine Notwendigkeit gerade dieses oder jenes bestimmte Ergebnis zu erhalten nicht vorhanden ist. In den Çulvasûtras ist ebensowohl die Quadratur des Kreises gelehrt als auch unmittelbar vorher umgekehrt die Aufgabe gestellt, ein gegebenes Quadrat in einen Kreis zu verwandeln, eine Aufgabe, welche man füglich Zirkulatur des Quadrates wird nennen können. Die Lösung ist folgende[1]) (Fig. 84). Die Diagonalen AC, BD des Quadrates $ABCD$ werden gezogen und durch ihren Durchschnittspunkt E die Gerade KI parallel zu den Seiten AD und BC des Quadrates. Von E als Mittelpunkt aus wird mit der halben Diagonale EA als Halbmesser ein Bogen beschrieben, der die über I hinaus verlängerte KI in F schneidet. Nun wird das Stück IF in G und H in drei gleiche Teile zerlegt und EH als Halbmesser des gesuchten Kreises betrachtet. Es lohnt sich zuzusehen, ob es nicht möglich wäre, diese Konstruktion in ein Rechnungsresultat umzusetzen.

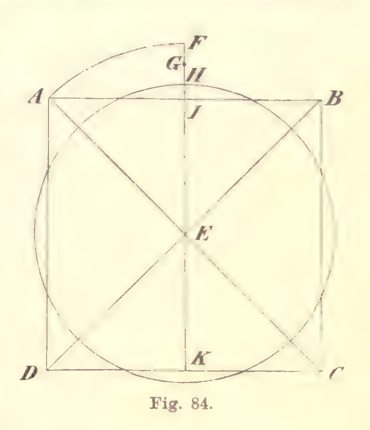


Fig. 84.

Wir gehen davon aus, daß, indem FI in drei gleiche Teile zerlegt wird, dadurch die Wahrscheinlichkeit entsteht, es sei $FI = 3$ angenommen worden, oder es sei $EA = EI + 3$ gesetzt, d. h. $EI \cdot \sqrt{2} = EI + 3$ und daraus $EI^2 - 6EI = 9$, $EI = 3 + \sqrt{18}$. Das ist annähernd $EI = 7$ und $EA = 10$ oder $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$, ein in der Tat gar nicht übler Wert, wenn es auch noch nicht gelungen ist, ihn bei irgend einer anderen Gelegenheit, sei es bei Indern, sei es bei Griechen, nachweisen oder auch nur mutmaßen zu können. Ist aber diese Meinung richtig, dann ist die Seite des Quadrates 14, seine Diagonale 20, der Durchmesser des gleichflächigen Kreises 16, und die Kreisfläche demnach $14^2 = (16 - 2)^2 = \left(16 - \frac{16}{8}\right)^2$. Darin ist aber eine doppelte Regel enthalten. Erstens: Die Zirkulatur des Quadrates benutzt als Kreisdurchmesser $\frac{8}{10}$ der Diagonale des Quadrates[2]). Zweitens: Die Quadratur des Kreises benutzt als Quadratseite $\frac{7}{8}$ des Kreisdurchmessers. Freilich stehen diese aus der

[1]) Thibaut S. 26—28. Âpastamba Kap. III, § 2 und 3 vgl. Bürk LVI, 335. [2]) Genau diese Regel wird uns bei Albrecht Dürer wieder begegnen.

Zirkulatur des Quadrates hergeleiteten Werte, wie wir uns sehr bald überzeugen werden, nicht im Einklang mit dem, was bezüglich der Quadratur des Kreises gelehrt wird, doch zunächst verweilen wir noch einen Augenblick bei unseren gegenwärtigen Folgerungen. Deren erste heißt zur Ausrechnung von π benutzt: $2r = \frac{8}{10}$ Diagonale, $r = \frac{2}{5}$ Diagonale, $r^2 = \frac{4}{25}$ Diagonalenquadrat $= \frac{8}{25}$ Quadrat, Quadrat $= \frac{25}{8} r^2$, mithin $\pi = 3\frac{1}{8}$. Die zweite heißt: Kreis $= \left(\frac{7}{8} d\right)^2 = \left(\frac{7}{4} r\right)^2 = \frac{49}{16} r^2$, mithin $\pi = 3\frac{1}{16}$, also im Widerspruch zu der eben gezogenen ersten Folgerung, ein Widerspruch, der darauf beruht, daß wir bei unserer Rechnung vermeiden konnten, mit dem nur näherungsweise bekannten $\sqrt{2}$ uns abfinden zu müssen.

Wir erinnern daran, daß schon das altägyptische Handbuch des Ahmes eine ähnliche Vorschrift, allerdings, was man gewiß nicht außer Augen lassen darf, mit anderen Zahlen enthält, indem dort als Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers gilt. Wir erinnern uns um so mehr daran, als der Versuch nahe liegt durch andere Annahme des Näherungswertes für $\sqrt{2}$ die indische Konstruktion mit der ägyptischen Zahl in Einklang zu bringen. Diese Übereinstimmung läßt sich aber nur mittels $\sqrt{2} = \frac{11}{8}$ erzielen, eine uns sehr unwahrscheinliche Annahme. Unsere Hypothese, die Quadratseite sei bei den Indern $\frac{7}{8}$ des Kreisdurchmessers gewesen, gewinnt aber selbst eine Bestätigung in einer arithmetischen Kreisquadratur, welche Baudhâyana lehrt, allerdings mit der Zahl $\frac{7}{8}$ sich nicht begnügend, sondern ihr eine Korrektur beifügend.

Baudhâyana schreibt nämlich vor, den Kreisdurchmesser mit $\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$ zu vervielfachen, um die Seite des dem Kreise gleichflächigen Quadrates zu erhalten. Die Korrektur $\frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$ stammt daher, daß Baudhâyana offenbar nicht von $\sqrt{2} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7}$ seinen Ausgangspunkt zur Umsetzung der Konstruktion in eine Formel nahm, sondern von dem oben erörterten Werte $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408}$. Es war $EA = EI \cdot \sqrt{2}$, $FI = EI\,(\sqrt{2} - 1)$, $HI = EI \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$,

$EH = EI + IH = EI \cdot \frac{\sqrt{2}+2}{3}$, $EI = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \cdot EH$, und für die doppelten Strecken d. h. Quadratseite und Kreisdurchmesser gilt derselbe Zahlenfaktor $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$. Mit Hilfe von $\sqrt{2} = \frac{577}{408}$ geht derselbe aber über in

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393},$$

dessen letzter Teil als nahezu $\frac{1}{34}$ des ihm vorangehenden selbst schon sehr kleinen Bruches vernachlässigt ist[1]).

Eine andere Zahlenregel für die Quadratur des Kreises findet sich übereinstimmend bei Baudhâyana, Âpastamba und Kâtyâyana: „Teile [den Durchmesser] in 15 Teile und nimm 2 weg, das [was übrig bleibt] ist ungefähr die Seite des Quadrates“, oder mit Âpastamba zu reden „ist genau die Seite des Quadrates“. Setzen wir diese Vorschrift in Zahlen um. Sei wieder d der Kreisdurchmesser, r der Kreishalbmesser, so ist $\left(\frac{13}{15}d\right)^2 = \left(\frac{26}{15}r\right)^2 = 3\frac{1}{225}r^2$ die Quadratur des Kreises. Darin liegt die Annahme $\pi = 3\frac{1}{225}$, welche nahezu mit $\pi = 3$ übereinstimmt und genau damit übereinstimmen würde, wenn $\frac{26}{15} = \sqrt{3}$ gesetzt werden müßte. Beide hier hervorgehobenen Werte sind uns aber keineswegs unbekannt. $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ ist uns auf griechischem und auf römischem Boden begegnet. $\pi = 3$ ist in Indien selbst aus sehr altertümlichen Schriften bestätigt worden[2]), gehört überdies allen von uns der Besprechung unterzogenen Kulturstätten an mit Ausnahme des alten Ägypten, wo wir ihm nicht begegnet sind. Wir haben wahrscheinlich zu machen gesucht, $\pi = 3$ habe ursprünglich den Babyloniern angehört.

Mit diesen Werten haben wir eine neue Frage angeschnitten, die Frage nach dem Ursprunge der in den Çulvasûtras aufbewahrten ältesten indischen Geometrie. Die Meinung, welche wir selbst ehedem für die wahrscheinlichste hielten, Heronisches sei seit dem ersten vorchristlichen Jahrhunderte den oftbetretenen Pfaden des Handelsverkehrs folgend von Alexandria aus nach Indien vorgedrungen, ist natürlich von dem Augenblicke an unhaltbar geworden, in welchem das einstimmige Urteil der Indologen den Çulvasûtras ein so

[1]) Der Gedanke, die Konstruktionsregel mit der Zahlenformel in Einklang zu bringen, rührt von Thibaut her. [2]) Thibaut, *On the S'uryaprajñapti. Journal of the Asiatic Society of Bengal*, Vol. XLIX, Part. I, pag. 120 Note * (1880).

hohes Alter beilegte als wir (S. 636) berichtet haben. Nicht haltbarer scheint uns, beiläufig bemerkt, die Meinung Pythagoras sei Schüler altindischer Weisheit, und insbesondere der Satz vom Quadrate der Hypotenuse, die Lehre von den rationalen rechtwinkligen Dreiecken, die Lehre vom Irrationalen usw. sei ihm aus Indien bekannt geworden. Es ist wahr, daß manche Bestandteile der pythagoräischen Lehren, die Seelenwanderung, das Verbot des Bohnenessens, sich nach der Aussage von Indologen leicht aus indischen, schwer oder gar nicht aus ägyptischen Einflüssen erklären lassen. Es ist nicht minder wahr, daß ein Bericht[1]) über die Wanderungen des Pythagoras zu erzählen weiß, er habe von den Brahmanen gelernt, ein Bericht, welchen wir im 6. Kapitel gleich demjenigen, der Pythagoras zu den Galliern führte (S. 176) vernachlässigten, weil wir seiner zum Nachweis eines einheitlichen Ursprunges des mathematischen Wissens des Pythagoras — und zu einem Urteile über seine sonstigen Lehren fehlt uns jede persönliche Berechtigung — nicht bedurften noch bedürfen. Der Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten kann keinem Zweifel unterworfen sein, und er genügt, um die Entstehung der pythagoräischen Mathematik zu verstehen, deren Grundbestandteile (wir erinnern nur an das Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5) sich in Ägypten um viele Jahrhunderte früher nachweisen lassen als die Zeit ist, welche als weitest entlegene Ursprungszeit der in den Çulvasûtras vorgetragenen Lehren in Anspruch genommen wird. Aber verhalte es sich mit dem indischen Einflusse auf Pythagoras wie es wolle, so lohnt es sich an und für sich über die Kenntnisse der Çulvasûtras von rationalen rechtwinkligen Dreiecken zu berichten.

Âpastamba sagt[2]): „Es folgt nun eine allgemeine Regel für die Vergrößerung eines gegebenen Quadrates. Man fügt das, welches man mit der jedesmaligen Verlängerung umzieht, an zwei Seiten hinzu und an der Ecke das Quadrat, welches durch die betreffende Verlängerung hervorgebracht wird". Unter Beiziehung von späten Kommentaren ist es gelungen, die an und für sich recht dunkle Vorschrift zu verstehen. Sie will ein Quadrat a^2 zu einem größeren Quadrate $(a+b)^2$ werden lassen, indem man an zwei aneinanderstoßenden Quadratseiten je ein Rechteck ab und an der Ecke das Quadrat b^2 hinzufügt, wieder ein Gnomon, wie es (S. 639 Fig. 83) schon aufgetreten war.

Es ist nun ganz richtig, daß, wenn $2ab + b^2 = c^2$ eine Quadratzahl ist, die Gleichung $a^2 + c^2 = (a+b)^2$ entsteht und zur Auffindung

[1]) Alexander Polyhistor in seiner Schrift über die Pythagoraeischen Symbole. Vgl. L. v. Schroeder, Pythagoras und die Inder S. 24 Note 1.
[2]) Âpastamba Kap. III, 39. Bürk LVI, 336.

der Seiten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks führen kann. Man könnte mit modernem Denken aus $2ab + b^2 = c^2$ zu $a = \frac{c^2 - b^2}{2b}$ gelangen, von da zu $\left(\frac{c^2 - b^2}{2b}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{c^2 + b^2}{2b}\right)^2$, aber so dachten, so rechneten weder die uralten Inder noch Pythagoras, wenn auch von dem letzteren ebenso wie von Plato Formeln für ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke berichtet werden, die uns (S. 186 und 224) bekannt geworden sind, und an die wir noch in diesem Kapitel zu erinnern haben werden.

Aber wenn man sogar, was wir nicht mittun, zugibt, Pythagoras sei Schüler der Inder, wessen Schüler waren die Inder? Haben sie alles selbst erdacht? Wir hegen daran den größten Zweifel. Erinnern wir uns, wie vieles an Babylon mahnt! Babylon als mutmaßliche Heimat der Null, als mutmaßliche Heimat der Quadrat- und Kubikwurzeln aus Zahlen, welche zwischen ganzen Quadrat- und Kubikzahlen liegen, als bekannt mit dem zu Messungszwecken benutzten Seil *tim*, als Ort, an welchem der längste Tag die Dauer wirklich besaß, welche die Inder ihm zuschrieben, als wahrscheinliche Heimat von $\pi = 3$, das alles drängt dazu mit doppelter Wachsamkeit auf künftige Entdeckungen zu warten, welche das Zweistromland uns noch bieten kann. Einige Punkte möchten wir überdies noch hervortreten lassen. *Çulva* bedeutet Seil, kommt aber in den Çulvasûtras nicht vor. Dort ist für das Seil ein anderes Wort im Gebrauch *rajju*, gleichsam als wenn in einer Seilvorschrift nur von einem Strick die Rede wäre. Das mutet fast an, als wenn Titel und Text nicht gleichzeitig entstanden wären, als wenn der Text eine spätere Umarbeitung erlitten hätte. Ferner kommen in den Vorschriften für rechnerische Ausziehung von $\sqrt{2}$ und für die Kreisquadratur Stammbrüche vor, wie sie in anderen indischen Schriften allerdings wesentlich jüngeren Ursprunges uns nicht bekannt geworden sind. Endlich zeugt die spätere indische Geometrie, mit Ausnahme der Trigonometrie, keineswegs für besondere geometrische Begabung.

Sehen wir uns doch Âryabhaṭṭas geometrisches Wissen an. Der Körper mit sechs Kanten, d. h. die dreieckige Pyramide, ist bei ihm das halbe Produkt aus der Grundfläche in die Höhe[1]). Wir vermuten als Ursprung dieser grundfalschen Formel, der Verfasser habe das arithmetische Mittel zwischen der Grundfläche und der als Nulldreieck betrachteten Spitze als ein Mitteldreieck betrachtet, über welchem ein Prisma gleicher Höhe mit der Pyramide gebildet den gewünschten

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 10 und 20.

Körperinhalt darstellte, eine Anschauung, welche der ägyptischen Dreiecksflächenberechnung ähnelt. Der Kugelinhalt ist bei ihm Produkt der Fläche des größten Kreises in die Quadratwurzel derselben[1]), wieder ein Unsinn, welcher in der kaum halbgeometrischen Auffassung wurzelt, der Würfel derselben Seite, welche als Quadrat die Kreisfläche darstellt, müsse den Inhalt der körperlichen gleichmäßigen Rundung, das ist eben der Kugel liefern. Daneben weiß aber Âryabhaṭṭa, daß 62832 : 20000 das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser ist[2]), oder er kennt $\pi = 3{,}1416$. Ist es denkbar, daß derartige Anschauungen mit einem Näherungswerte, der den archimedischen an Genauigkeit übertrifft, zugleich vorkommen und sämtlich einheimisch sein sollen? Die Berechnung des Paralleltrapezes wird gelehrt, dessen parallele Seiten genau so wie im Handbuche des Ahmes (S. 97) zur Rechten und Linken, nicht oben und unten gezeichnet sind[3]), und unmittelbar anschließend wird in allerdings etwas dunklem von dem indischen Kommentator mißverstandenem[4]) Wortlaute verlangt, jede auszumessende Figur der Ebene solle in Trapeze zerlegt werden, ein Verfahren, welches Ahmes, welches die Tempelpriester von Edfu übten (S. 110). Wir denken, das sind wieder einige Bausteine zur Herstellung dessen, was von auswärtiger Geometrie nach Indien gelangt war, Bausteine, denen ihr Ursprung deutlich anzusehen ist.

Wir kommen zur weit umfangreicheren Geometrie Brahmaguptas[5]). Sie ist eine rechnende Geometrie, eine Sammlung von Vorschriften, Raumgebilde zu berechnen wie bei Heron von Alexandria. Zu Anfang heißt es, die Fläche des Dreiecks und Vierecks werde in rohem Überschlag gewonnen als Produkt der Hälften von je zwei Gegenseiten. Das ist die alte ägyptisch-heronische Formel, ist zugleich die Auffassung des Dreiecks als Viereck mit einer verschwundenen Seite und geht nur in einer allerdings wesentlichen Beziehung weiter darin, daß die Ungenauigkeit des Verfahrens ausdrücklich betont wird, welche Heron ohne allen Zweifel auch erkannte, aber in dem uns erhaltenen Texte nicht hervorgehoben hat. Damit man ja an dem Ursprung nicht zweifle, gibt der gleiche Paragraph die genaue Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten nach der heronischen Formel. Als genau gilt auch die Formel für das Viereck, wenn von den Faktoren unter dem Wurzelzeichen jeder die um eine Seite verminderte halbe Seitensumme darstellt, wenn also $\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 10 und 20—21. [2]) Ebenda pag. 11 und 23. [3]) Ebenda pag. 10 und 21. [4]) Ebenda pag. 22. [5]) Colebrooke pag. 295—318.

gebildet wird, wo $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet und a, b, c, d die Vierecksseiten sind. Im folgenden Paragraphen lehrt Brahmagupta aus den Seiten eines Dreiecks die Abschnitte finden, welche eine gezogene Höhe auf der Grundlinie bildet. Genau so lehrt Heron dasselbe. Wir können unmöglich so fortfahrend alle einzelnen Paragraphe der Reihe nach durchgehen. Wir begnügen uns mit einzelnen Bemerkungen.

Eine Rechtecksseite wird Seite, die andere Aufrechtstehende genannt, die Diagonale vollendet mit beiden ein rechtwinkliges Dreieck, auf welches der pythagoräische Lehrsatz Anwendung findet; das ist heronisch. Die obere Seite eines Vierecks wird als Scheitellinie mit besonderem Namen belegt[1]); das ist wieder ägyptisch-heronisch. Der Name selbst *mukha* oder *vadana* bedeutet Öffnung, Mund. Der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ist der Quotient des Produktes zweier Seiten geteilt durch die auf der dritten Seite errichtete Höhe; das stimmt wieder mit Heron[2]). Die Figuren sind nicht an den Ecken mit Buchstaben bezeichnet, sondern mit den die Längen angebenden Zahlen an den Seiten selbst. Ähnliches finden wir zwar nicht in Herons Vermessungslehre, aber in den sogenannten Heronischen Sammlungen im Gegensatze zu allen anderen griechischen Geometrien. Der Kreisdurchmesser beziehungsweise das Quadrat des Halbmessers mit 3 vervielfacht sind für die Praxis Umfang und Inhalt des Kreises; die genauen Werte werden durch die Quadratwurzel aus den 10fachen zweiten Potenzen jener Zahlen gefunden[3]). Das will sagen, in roher Weise ist $\pi = 3$ und genau $\pi = \sqrt{10}$.

Den ersteren Wert haben wir oben (S. 643) besprochen. Der zweite kommt uns hier zum ersten Male vor. Es ist der Versuch gemacht worden, zu ermitteln, wie man auf diesen Näherungswert gekommen sein mag[4]). Die Seite des regelmäßigen Sechsecks in dem Kreise von dem Durchmesser 10 war von alters her als 5, der ganze Umfang somit als 30 bekannt. Nun wird behauptet, der Umfang des demselben Kreise einbeschriebenen Zwölfecks sei als $\sqrt{965}$, der des 24ecks als $\sqrt{981}$, der des 48-, des 96ecks als $\sqrt{986}$, als $\sqrt{987}$ gefunden worden, und so habe man sich veranlaßt gefühlt, die Grenze $\sqrt{1000} = 10 \cdot \sqrt{10}$ als nach unendlich oft wiederholter Verdoppelung der Seitenzahl erreichbar anzusehen. Diese Wiederherstellung wäre eine ungemein glückliche zu nennen, wenn es gelänge ebenso, wie in den Kommentaren zu Brahmagupta an dieser Stelle

[1]) Colebrooke pag. 72, Note 4 und pag. 307, § 36. [2]) Ebenda pag. 229, § 27 = *Heron Liber Geoponicus* cap. 58 (ed. Hultsch) pag. 214. [3]) Ebenda pag. 308, § 40. [4]) Hankel S. 216—217.

der Kreisdurchmesser mehrfach als 10 angenommen ist, auch jene Wurzelgrößen, von denen behauptet wird, sie seien für die Umfänge der Vielecke von immer verdoppelter Seitenzahl gesetzt worden, in indischen Schriften nachzuweisen. Solange aber dieses nicht geschieht, bleibt jener Wert $\pi = \sqrt{10}$ so rätselhaft wie er allen Geschichtsforschern zu erscheinen pflegte, und wir teilen zur Bestätigung dieser Behauptung noch drei Erklärungsversuche mit. Da ist behauptet worden[1]), entsprechend dem Näherungswerte

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a+1} \text{ sei } \sqrt{10} = 3\frac{1}{7},$$

bei Archimed aber sei $\pi = 3\frac{1}{7}$, und so sei $\pi = \sqrt{10}$ zustande gekommen. Das heißt doch: man ersetzte $3\frac{1}{7}$ durch $\sqrt{10}$, einen rationalen Wert durch einen irrationalen, und das kommt in der ganzen Geschichte der Mathematik nirgends vor. Die zweite Erklärung[2]) geht davon aus, daß Brahmagupta wußte[3]), daß der Pfeil h_n, welcher zwischen der Seite s_n und dem Kreisumfang sich befindet, durch die Formel $h_n = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d^2 - s_n^2}\right]$ gegeben ist. Im Sechsecke insbesondere ist

$$h_6 = \frac{1}{2}\left[d - \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}}\right] = \frac{d}{4}\left[2 - \sqrt{3}\right]$$

und hätte man das Recht, $\frac{5}{3}$ als Näherungswert für $\sqrt{3}$ anzunehmen, so wäre $h_6 = \frac{d}{12}$. Da ferner allgemein $s_{2n}^2 = h_n^2 + \frac{1}{4} s_n^2$, so wäre auch $s_{12}^2 = h_6^2 + \frac{1}{4} s_6^2 = \frac{10d^2}{144}$ und $(12 s_{12})^2 = 10d^2$. Aber $12 s_{12} = u_{12}$ ist der Umfang des Sehnenzwölfecks, und so hätte man erhalten $u_{12} = d\sqrt{10}$, d. h. $\pi = \sqrt{10}$ bedeutet, man habe den Kreis als mit dem Sehnenzwölfeck zusammenfallend angesehen. Sehr sinnreich, wenn nur $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$ irgendwo Beglaubigung fände. Die dritte Vermutung ist folgende[4]). Bei Heron kommt der Näherungswert $\sqrt{54} = \frac{22}{3}$ vor. Da nun bei Archimed $\pi = \frac{22}{7}$, so kann

$$\pi = \frac{3}{7} \cdot \frac{22}{3} = \frac{3}{7}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{486}{49}}$$

---

[1]) L. Rodet, *Sur les méthodes d'approximation chez les anciens* in dem *Bulletin de la Société mathématique de France* T. VII (1879). [2]) Hunrath, Über das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Hadersleben 1883, S. 25. [3]) Colebrooke pag. 310, § 42. [4]) Briefliche Mitteilung von Max Curtze.

gesetzt worden sein und, weil $\frac{486}{49}$ nur wenig von 10 abweicht, auch $\pi = \sqrt{10}$. Diese Vermutung ähnelt in ihrem Grundgedanken der Ersetzung eines rationalen Wertes durch eine Irrationalzahl der ersten der drei hier geschilderten Vermutungen, dürfte also von der gleichen Einwendung wie jene bedroht sein.

Heronisch ist es wieder, wenn unter Anwendung von Proportionen Höhen mit Hilfe von Schattenlängen gemessen werden[1]). Von Interesse ist uns dann noch die stereometrische Aufgabe, den Rauminhalt einer abgestumpften quadratischen Pyramide zu finden, für welche Brahmagupta drei Lösungen angibt, eine für Praktiker, eine für annähernde, eine für genaue Rechnung[2]). Der Praktiker begnüge sich mit dem Produkte der Höhe in das Quadrat des Mittels zwischen den Seiten an der unteren und oberen Fläche des Stumpfes. Annähernd richtig, fährt Brahmagupta fort, sei das Produkt der Höhe in das Mittel der Grundflächen. Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir darin eine Bestätigung unserer oben ausgesprochenen Vermutung über die Entstehung der falschen Formel für den Rauminhalt der dreieckigen Pyramide bei Âryabhaṭṭa erkennen. Richtig sei, wenn man den Inhalt des Praktikers um den dritten Teil des Unterschiedes der Inhalte des Praktikers und des annähernd Rechnenden vergrößere. Dieser letzte Ausspruch ist vollkommen wahr. Heißen a_1 und a_2 die Seiten der beiden quadratischen Grundflächen und ist h die Höhe des Pyramidenstumpfes, so ist richtig dessen Inhalt $= h \cdot \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3}$. Der Praktiker rechnet aber nach Brahmagupta $h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$; annähernd richtig sei $h \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$ und nun ist

$$h \cdot \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3} = h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[h \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - h \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2\right].$$

Wir sind oben mit sehr kurzen Worten über die Flächenformel Brahmaguptas für das Viereck hinweggegangen, welche als besonderen Fall die heronische Dreiecksformel einschließt. Daß die Vierecksformel als eine allgemeine nicht gelten kann, ist ersichtlich. Gleichwohl hat Brahmagupta in jenem ersten Paragraphen seiner geometrischen Lehren in keiner Weise ausgesprochen, daß er der Formel nur bedingte Zulässigkeit für gewisse Vierecke, *caturaçra*, zuschreibe. Man hat in verschiedener Weise sich dieser Schwierigkeit gegenüber einen Ausweg zu bahnen gesucht. Man hat angenommen, Brahmagupta, ein hervorragend geometrischer Geist, habe

[1]) Colebrooke pag. 317. *Section IX, Measure by shadow.* [2]) Ebenda pag. 312—313, § 45—46.

eigentlich nur vom Sehnenviereck reden wollen; auf dieses bezögen sich auch einige andere Sätze, deren wir hier Erwähnung zu tun unterlassen, und Brahmagupta sei nur aus Kürze dunkel geblieben[1]. Man hat im schroffen Gegensatze dazu und an dem Wortlaute der Regel bei Brahmagupta festhaltend ihn beschuldigt, er habe die Regel, die er an einem besonderen Vierecke entdeckt habe, wirklich auf alle bezogen[2]. Man hat dagegen wieder von anderer Seite in Brahmaguptas Text alles finden wollen, was zum Verständnis nötig sei. Im 26. Paragraphen lehre nämlich Brahmagupta die Berechnung des Durchmessers des Umkreises, und darin liege ausgesprochen, daß die gemeinten Vierecke einen Umkreis besäßen; im 38. Paragraphen definiere er „die Aufgerichteten und die Seiten zweier rechtwinkliger Dreiecke wechselweise mit der Diagonale vervielfacht sind vier unähnliche Seiten eines Trapezes; die größte ist die Grundlinie, die kleinste die Scheitellinie, die beiden anderen sind die Seiten", und diese Definition, der man trotz ihrer Dunkelheit einen guten Sinn abzugewinnen wußte, bilde einen zweiten Kern der ganzen Untersuchung, welche aber nur für Vierecke von den Gattungen stichhaltig sei, wie sie hier näher bestimmt wurden[3]. Auch dieser Meinung ist man entgegengetreten: Brahmagupta werde doch nicht in § 38 erst definieren, was er seit § 21 benutze; er werde den Gang seiner Untersuchung doch nicht so eingerichtet haben, daß man besser daran tue, sie von hinten nach vorn als in der Folge zu lesen, wie er sie niederschrieb; er werde doch endlich nicht als Formel für das Tetragon, das Viereck also, aussprechen, was er vom Trapeze meinte; und nach diesen freilich nicht ungewichtigen Einwürfen hat man versucht zu zeigen, wie Brahmagupta rechnend und durch Induktion von der ihm bekannten Dreiecksformel aus zu der entsprechenden Vierecksformel gelangte, deren bedingte Gültigkeit ihm nur nach und nach klar wurde[4]. Diese sehr verschiedenen Auffassungen können uns nur bestimmen, die Dunkelheit des ganzen Kapitels bei Brahmagupta von § 21 bis § 38 als eine bisher noch nicht vollständig vernichtete zu erklären. Wir glauben dabei noch immer an die Richtigkeit einiger aus der Formel von § 26 und der Definition von § 38 gezogenen Schlüsse, möchten aber doch nicht so zuverlässig behaupten, jede Schwierigkeit sei damit verschwunden.

Wir meinen freilich, ein Teil der Schwierigkeiten sei durch unglückliche Übersetzung entstanden, welche das Wort Trapez anwandte,

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 420 sqq., deutsch 465 flgg. [2]) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik S. 145 flgg. (Stuttgart 1852). [3]) Hankel S. 210—215. [4]) Weißenborn, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmagupta in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik II, 169—184 (1879).

wo es nach dem Sinne, welchen man diesem Worte beizulegen gewohnt ist, nicht angewandt werden durfte. Caturveda Prithûdakasvâmin, ein Scholiast des Brahmagupta, der selbst vor Bhâskara lebte, der ihn anführt[1]), gibt zu dem die Flächenformel enthaltenden § 21 eine wichtige zu wenig berücksichtigte Erläuterung[2]): Dreierlei Dreiseite gebe es, fünferlei Vierecke und als neunte ebene Figur den Kreis; die Dreiseite seien gleichseitig, gleich für zwei Seiten und ungleichseitig; die Vierecke seien gleiche, paarweis gleiche, mit zweien gleiche, mit dreien gleiche und ungleiche Vierecke. Man sieht wohl: von Parallelismus, von Trapez und dergleichen ist dabei ausdrücklich wenigstens nicht die Rede, und wenn man die fünf Gattungen von Vierecken aus den Beispielen, die derselbe Prithûdakasvâmin beifügt, zu bestimmen sucht, so findet man, daß das gleiche Viereck das Quadrat, das paarweise gleiche das Rechteck ist; daß unter dem mit zweien gleichen und mit dreien gleichen gleichschenklige Paralleltrapeze zu verstehen sind, deren kleinere Parallelseite in dem zweiten Falle auch noch den beiden gleichen Schenkeln gleich sein soll. Die fünfte Gattung von Vierecken, nämlich die unter gewissen anderen zu erfüllenden Bedingungen ungleichen Vierecke sind im § 38 definiert. Nun sieht man, welche heillose Verwirrung entstehen mußte, sobald man die Vierecke letzter Gattung Trapeze nannte, statt irgend ein anderes Wort, z. B. unser ungleiches Viereck zu wählen. Man sieht aber noch mehr. Man sieht, daß die fünf Gattungen von Vierecken keineswegs richtig gewählt sind. Sie erschöpfen den Begriff des Vierecks durchaus nicht. Aber darin sehen wir nur einen weiteren Beweis für den ausländischen Ursprung der indischen Geometrie. Die Fünfzahl der Vierecke ist vielleicht selbst auf griechische Erinnerung zurückzuführen, da Euklid in der 30. bis 34. Definition des I. Buches seiner Elemente ebensoviele Gattungen unterscheidet: Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid, unregelmäßiges Viereck, in seinen Gattungen freilich jeder Möglichkeit einen Platz zuweisend. Nun waren den Indern nur Sätze über die fünf unberechtigten Vierecksarten, welche Prithûdakasvâmin uns nennt, bekannt geworden; nur mit ihnen also hatte man sich zu beschäftigen. Es waren das in den vier ersten Gattungen gerade die Vierecke, welche Heron mit Vorliebe behandelt hat, das Quadrat und das Rechteck und das gleichschenklige Trapez, die Lieblingsfigur schon der alten Ägypter. Was die Zerfällung der Trapeze in solche mit zwei und mit drei gleichen Seiten betrifft, so kann man verschiedener Meinung sein. Man kann meinen, da bei Heron verschiedene Gattungen von Parallel-

[1]) Colebrooke pag. 245, § 174 und Note 5. [2]) Ebenda pag. 295, Note 1.

trapezen gefunden worden waren, deren Unterscheidungsgrundlage man nicht verstand, so habe man auf eigene Faust neue Gruppen gebildet; man kann aber auch an einen griechischen Ursprung denken, da beispielsweise Hippokrates von Chios (S. 208) sich mit Paralleltrapezen mit drei gleichen Seiten vielfach abquälte und es daher wohl möglich ist, daß Spätere auch noch um diese Figur sich kümmerten, ohne daß wir unmittelbar davon wissen. Kehren wir jetzt zu § 26 Brahmaguptas zurück. Wenn darin von dem Halbmesser des Umkreises zuerst jedes Vierecks mit ausdrücklicher Ausnahme des ungleichen Vierecks die Rede ist, so sind eben nur die vier ersten Gattungen gemeint, und diese vier sind zweifellos Sehnenvierecke, und wenn in demselben Paragraphen fortfahrend auch die Berechnung des Halbmessers des Umkreises der fünften Vierecksgattung gelehrt wird, so ist wieder zweifellos auch für diese Gattung die Eigenschaft als Sehnenviereck damit in Anspruch genommen.

Jene ungleichen Vierecke der fünften Gattung entstehen aber gemäß § 38 auf folgende Weise. Man denke (Fig. 85) zwei rationale rechtwinklige Dreiecke aus den Seiten c_1, c_2, h und C_1, C_2, H gebildet. Man vervielfache die Seiten des ersteren zuerst mit C_1, dann mit C_2, so sind auch $c_1 C_1$, $c_2 C_1$, $h C_1$ und $c_1 C_2$, $c_2 C_2$, $h C_2$ Seiten zweier rechtwinkliger Dreiecke. Diese beiden setzt man mit den rechten Winkeln als Scheitelwinkeln aneinander, so daß $c_1 C_1$ als Fortsetzung von $c_2 C_2$ und $c_1 C_2$ als Fortsetzung von $c_2 C_1$ erscheint, beziehungsweise daß $c_1 C_1 + c_2 C_2$ und $c_1 C_2 + c_2 C_1$ zwei sich senkrecht durchkreuzende Gerade bilden, welche als Diagonalen eines leicht zu vollendenden Vierecks auftreten.

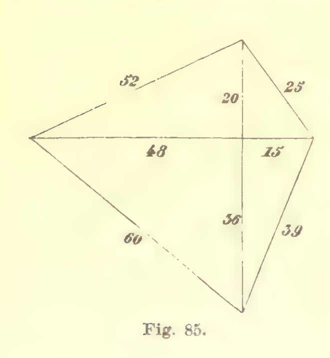


Fig. 85.

Gegenseiten dieses Vierecks sind, wie wir schon wissen, $h C_1$ und $h C_2$; das andere Paar Gegenseiten heißt leicht ersichtlich Hc_1 und Hc_2. Alle vier Vierecksseiten sind voneinander verschieden, sind ungleich; das Viereck ist aber aus vier rationalen rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt, und je zwei Scheiteldreiecke sind einander ähnlich. Diese ungleichen Vierecke sind unter denen der fünften Gattung verstanden, und die Gleichheit der Summe je zwei gegenüberstehender Winkel kennzeichnet sie als Sehnenvierecke. Zu ihrer Bildung sind also Zusammensetzungen rechtwinkliger Dreiecke notwendig, welche Heron gekannt hat (S. 399), und für welche er in seiner Geometrie des eigenen Kunstausdruckes zusammenhängender rechtwinkliger Dreiecke,

τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα, sich bediente. Durch ähnliche Zusammensetzung ist aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken 5, 12, 13 und 9, 12, 15 an der Kathete 12 das in allen Beziehungen rationale berühmte Dreieck 13, 14, 15 entstanden, welches Heron kannte, welches auch den Indern vielfach als Beispiel diente.

Vor der Zusammensetzung rationaler rechtwinkliger Dreiecke müssen wir aber auch die Kenntnis rationaler rechtwinkliger Dreiecke selbst als vorausgehend vertreten finden. Heron hat sich mit solchen beschäftigt; auch bei Brahmagupta fehlen sie nicht, der, wie wir schon (S. 628) andeuteten, zweimal darauf zurückkommt, zuerst in seinem geometrischen Kapitel und dann eingeschaltet zwischen dem Rechnen mit irrationalen Quadratwurzeln, wo die Regel am deutlichsten ausgesprochen ist[1]. Man solle c, $\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b} - b\right)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b} + b\right)$ als Seiten wählen, wobei c und b ganz beliebige Werte haben. Diese Formel, welche die unter dem Namen des Pythagoras und des Platon bekannten Sonderfälle durch $b = 1$ und $b = 2$ in sich schließt, ist genau so bei keinem Griechen uns begegnet, stimmt aber zu der (S. 645) erörterten Entstehungsweise rationaler rechtwinkliger Dreiecke. Dieser Umstand ebenso wie die Stelle, wo die Regel sich ausgesprochen findet, geben ihr ein, wenn auch nicht altindisches, immerhin indisches Gepräge, aber die Aufgabe, welche durch sie ihre Lösung fand, dürfte griechisch sein, dürfte, wenn man den Ausdruck gestatten will, in Indien nur noch mehr algebraisiert worden sein, als sie es schon war.

Wir denken nicht, daß alle diese kleineren und größeren Übereinstimmungen zwischen Heron und Brahmagupta der Annahme unseres Grundgedankens entgegenwirken können, und fragen nun, was aus einer so aus der Fremde eingeführten Lehre im Lauf der Zeiten werden mußte? Wesentliche Fortschritte dürfen und können wir bei einem nicht geometrisch angelegten Volksgeiste nicht erwarten. Im Gegenteil, manches anfänglich Verstandene muß verloren gegangen sein. Nur Aufgaben einer algebraischen Geometrie werden den indischen Geist ansprechend weitere Pflege erfahren und sich vielleicht in einem Umfange erhalten haben, der das bei Brahmagupta Vorhandene überragt. Die Geometrie des Bhâskara[2]) erfüllt diese unsere Erwartung.

Bis zu Bhâskara ist vor allen Dingen der Rest des Verständnisses der Formel für die Vierecksfläche verloren gegangen. In einem Vierecke mit denselben Seiten, sagt er, gibt es verschiedene Diago-

[1]) Colebrooke pag. 340, § 38. [2]) Ebenda pag. 58—111.

nalen. „Wie kann jemand, der weder eine Senkrechte noch eine der Diagonalen angibt, nach dem Übrigen fragen? oder wie kann er nach der bestimmten Fläche fragen, wenn jene unbestimmt sind? Ein solcher Fragesteller ist ein tölpelhafter böser Geist. Noch mehr ist es aber der, welcher die Frage beantwortet, denn er berücksichtigt nicht die unbestimmte Natur der Linien in einer vierseitigen Figur"[1]). Hinzugekommen ist die Kreisverhältniszahl $\pi = \frac{22}{7}$, welche als für Praktiker genügend erklärt wird, während der feinere Umfang $\frac{3927}{1250}$ mal dem Durchmesser sei[2]). Hier ist allerdings etwas rätselhaft. Das erste Verhältnis ist das archimedische, das zweite das von Âryabhaṭṭa in der Form $\frac{62832}{20000}$ benutzte, während diesem die archimedische Zahl nicht bekannt oder, was noch auffallender wäre, nicht mitteilenswert gewesen zu sein scheint, und doch soll es die Methode Archimeds gewesen sein, welche zu dem genaueren Werte geführt hat. Archimed, erinnern wir uns, ließ vom Sechsecke ausgehend die Seitenzahl des eingeschriebenen Vielecks sich immer verdoppeln, bis er zum 96eck gelangte (S. 303). Gaṇeça, der Kommentator Bhâskaras, berichtet uns, man sei vom Sechsecke durch stete Verdoppelung der Seitenzahl bis zum 384eck vorgeschritten und habe so $\pi = \frac{3927}{1250}$ gefunden. Bhâskara bedient sich übrigens auch noch einer anderen Annäherung[3]), nämlich $\pi = \frac{754}{240} = 3{,}141666\ldots$ Hinzugekommen sind ferner einige Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen. Sie finden sich nicht, wie die bisher angeführten Dinge, in der Lîlâvatî, sondern in dem Vîja Gaṇita genannten algebraischen Kapitel. Es wird verlangt, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn neben der Summe derselben erstens das Produkt der beiden Katheten oder zweitens das Produkt der drei Seiten gegeben ist[4]). Die erstere Aufgabe ähnelt nämlich ebensowohl der heronischen Aufgabe vom Kreise, bei welcher Summen von Stücken verschiedener Dimensionen gegeben sind (S. 404), als der des Nipsus aus Hypotenuse und Fläche, d. h. also halbem Produkte der Katheten die Dreiecksseiten selbst zu finden (S. 556). Bhâskara löst die erste Aufgabe wie folgt. Ist $c_1 c_2 = p$, so ist

$$2p = 2c_1c_2 = (c_1+c_2)^2 - (c_1^2+c_2^2) = (c_1+c_2)^2 - h^2 = (c_1+c_2+h)(c_1+c_2-h).$$

Da nun $c_1 + c_2 + h = s$ gegeben ist, so folgt $c_1 + c_2 - h = \frac{2p}{s}$ und

[1]) Colebrooke pag. 73. [2]) Ebenda pag. 87. [3]) Ebenda pag. 95, § 214.
[4]) Ebenda pag. 225—226, § 151—152.

$$2h = s - \frac{2p}{s}, \quad h = \frac{s^2 - 2p}{2s}, \quad c_1 + c_2 = \frac{s^2 + 2p}{2s}.$$

Die Katheten findet man noch einzeln, indem von $(c_1 + c_2)^2 = \left(\frac{s^2 + 2p}{2s}\right)^2$ der Wert $4c_1c_2 = 4p$ abgezogen wird; so entsteht nämlich

$$(c_1 - c_2)^2 = \frac{s^4 - 12ps^2 + 4p^2}{4s^2}$$

und daraus $c_1 - c_2$, welches in Gemeinschaft mit $c_1 + c_2$ die Katheten liefert. In der zweiten Aufgabe ist $c_1 \cdot c_2 \cdot h = p$ und $c_1 + c_2 + h = s$ gegeben. Aus $s - h = c_1 + c_2$ erhält man

$$s^2 - 2sh + h^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 = h^2 + \frac{2p}{h},$$

mithin ist $s^2 - 2sh = \frac{2p}{h}$ und $2sh^2 - s^2h = -2p$. Daraus findet man h, daraus $s - h = c_1 + c_2$ und $\frac{4p}{h} = 4c_1c_2$, und nun ist es wieder leicht $c_1 - c_2$ und endlich die Katheten zu finden. Das sind Methoden, welche der von Nipsus angewandten entschieden ähneln, so wenig in Abrede gestellt werden soll, daß Bhâskaras Aufgaben die bei weitem verwickelteren sind. Hinzugekommen sind endlich einige Beweise geometrischer Sätze durch Rechnung, und einige auf Anschauung beruhende, wenn man letztere als Beweise gelten lassen darf. Ein Beispiel beider Auffassungen bildet der Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich in dem Vîja Gaṇita vorfindet[1]. Das eine Mal wählt man die Hypotenuse zur Grundlinie, auf welche (Fig. 86) von der Spitze des rechten Winkels aus eine Senkrechte gefällt wird, und weist auf die Eigenschaft der zwei so entstehenden rechtwinkligen Dreiecke hin, mit dem ursprünglichen Proportionalitäten zu bilden. So kommen, wenn h_1 und h_2 die Stücke der Hypotenuse h heißen, die je an c_1 und c_2 anstoßen, die Verhältnisse heraus

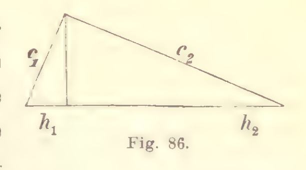


Fig. 86.

$$\frac{c_1}{h} = \frac{h_1}{c_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{h} = \frac{h_2}{c_2},$$

und daraus folgt

$$h(h_1 + h_2) = h^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Bei Euklid (VI, 8 der Elemente) findet sich zwar nicht dieser rechnende Beweis selbst, aber doch dessen Grundlage, daß die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse zwei dem ganzen Dreiecke ähnliche Teildreiecke hervorbringt.

---

[1]) Colebrooke pag. 220—222, § 146.

Der andere Beweis, welcher, wie im 34. Kapitel sich zeigen wird, mehr als 200 Jahre vor Bhâskara schon bekannt war, konstruiert (Fig. 87) über jede Seite des Quadrates der Hypotenuse nach innen zu das rechtwinklige Dreieck. „Sehet!“ Damit begnügt sich Bhâskara und erwähnt nicht einmal, daß die Anschauung

$$h^2 = 4 \times \frac{c_1 \cdot c_2}{2} + (c_1 - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Fig. 87.

liefere. Ganz ähnlicher Natur sind Beweise, welche der Kommentator Gaṇeça zu Sätzen Bhâskaras beigebracht hat[1]). Die Dreiecksfläche wird erhalten als Rechteck der halben Höhe und der Grundlinie (Fig. 88). Sehet! Die Kreisfläche wird erhalten als Rechteck des halben Durchmessers in den halben Kreisumfang (Fig. 89). Sehet!

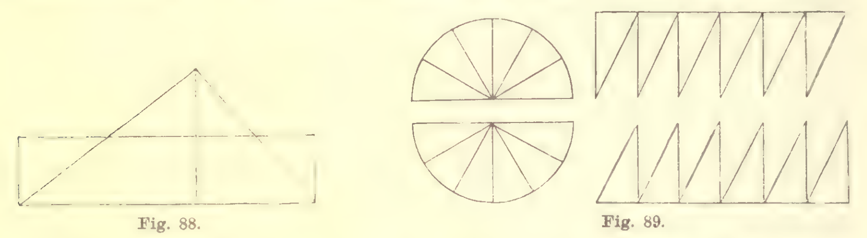


Fig. 88. Fig. 89.

Diese Beweisform, welche bei Brahmagupta nirgend auftritt, muß wohl als indisch betrachtet werden. Sie ist mit der algebraischen Beweisform verbunden ungemein charakteristisch für die Darstellungsweise jener Geometer. Rechnen in nahezu unbegrenzter Möglichkeit oder Anschauen, darüber kommen sie nicht hinaus. Das eine wie das andere ist zum Beweise schon bekannter Sätze gleich gut anzuwenden, die Rechnung ist strenger, die Berufung auf unmittelbare Anschauung vielfach überzeugender. Aber kann letztere zur Erfindung neuer Sätze führen? Kann es erstere, wenn nicht eine gewisse Summe geometrischer Sätze als Ausgangspunkt vorhanden ist, unter welchen der pythagoräische Lehrsatz einer der wichtigsten ist? Kann der pythagoräische Lehrsatz gefunden worden sein von einem Beweise ausgehend, wie die beiden durch Bhâskara uns überlieferten? Wir wissen, daß diese Fragen bald verneinend bald bejahend beantwortet worden sind, daß man gerade den auf Fig. 87 beruhenden Beweis des Satzes von dem Quadrate der Hypotenuse bis zu einem gewissen Grade für die Entstehung des Satzes in Anspruch genommen hat. Wir persönlich können diese Ansicht nicht teilen. Wir kommen, wie wir es in unserer seitherigen Schilderung indischer Geometrie

[1]) Colebrooke pag. 70, Note 4 und pag 88, Note 3.

überall haben durchklingen lassen, immer wieder zur Überzeugung, es sei für die Inder nach einer frühen Periode geometrischer Beeinflussung von Norden her eine solche eingetreten, in welcher von Südwesten her Fremdes eindrang, Fremdes, welches der indischen Denkweise entsprach, also weniger der „Euklid“ mit seinen streng geometrischen Folgerungen, als der „Heron“ mit seinen Rechnungen. Eine solche Übertragung schließt keineswegs aus, daß indische Mathematiker des überkommenen Stoffes sich in ihrer Weise bemächtigten, ihn mißhandelten oder behandelten, wie sie es eben verstanden, bald einen Rückgang, bald einen Fortschritt zuwege bringend.

Am unzweifelhaftesten sind die Fortschritte, welche der der Rechnung am meisten bedürftige Teil der alten Geometrie bei den Indern gemacht hat, die Trigonometrie[1]). Hier ist zwar von Griechenland aus sicherlich die archimedische Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ der Kreisperipherie zum Durchmesser nach Indien gedrungen (S. 654). Vielleicht mag auch griechischen Ursprunges sein, wie die Höhe h eines Kreisabschnittes, sein *utkramajyâ* nach indischem Sprachgebrauche, mit der Sehne s und dem Kreishalbmesser r in Verbindung steht, wir meinen (Fig. 90) die leicht abzuleitende Gleichung

$$2hr - h^2 = \frac{s^2}{4} \quad \text{oder} \quad s = 2\sqrt{h(2r-h)}.$$

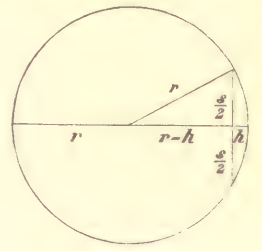


Fig. 90.

Aber ihre ganze weitere Rechnungsweise beginnend von dem Maße der Linien im Kreise ist so ungriechisch wie möglich, also vermutlich indischen Ursprunges.

Allerdings zerlegt der Inder, wie wir schon früher betont haben, gleich dem Griechen und wahrscheinlich babylonischer Sitte folgend den ganzen Kreisumfang in 360 Grade oder in 21600 Minuten, da jeder Grad gleich 60 Minuten ist; aber wenn dann der Grieche den Halbmesser gleichfalls in 60 Teile mit sexagesimal fortschreitenden Unterabteilungen zerlegt, so fragt der Inder, wie groß der Kreisbogen in Minuten sei, zu welchem der Halbmesser sich zusammenbiegen läßt. Er vollzieht eine Arkufikation der geraden Linie und muß dazu des schon bei Âryabhaṭṭa vorkommenden Wertes $\pi = 3{,}1416$ sich bedient haben, denn nur dann folgt aus $2\pi r = 21600$ Minuten,

[1]) Vgl. außer Colebrooke den Sûrya Siddhânta und das von Rodet übersetzte Kapitel des Âryabhaṭṭa. Ferner *Asiatic researches* (Calcutta) II, 225; daraus Arneth, Geschichte der reinen Mathematik S. 171—174. Woepcke, *Sur le mot kardaga et sur une méthode indienne pour calculer les sinus* in den *N. ann. math.* (1854) XIII, 386—394. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 31—42.

$r = \frac{21\,600}{6,2832} = 3437,7\ldots$ in ganzen Zahlen am nächsten $r = 3438$ Minuten, wie der Inder rechnet. Es ist nicht unmöglich, daß der Gedanke der Arkufikation darin wurzelt, daß die Trigonometrie der Inder wie der Griechen in astronomischen Aufgaben ihren Ursprung hat, also zunächst eine sphärische Trigonometrie war, in welcher nur Bogen vorkommen, wenn auch im übrigen, wie wir noch bemerken werden, von sphärisch-trigonometrischen Aufgaben keine Rede ist.

Von $r = 3438$ Minuten als erster Tatsache ausgehend wurde nun die ähnlicherweise in Minuten umgebogene Länge anderer Geraden im Kreise gesucht. Die Sehne, welche einen Bogen bespannt, wurde *jyâ* oder *jîva* genannt, welche Wörter auch die Sehne eines zum Schießen bestimmten Bogens bezeichnen. Die halbe Sehne hieß dann *jyârdha* oder *ardhajyâ* und wurde unter letzterem Namen auch zum halben Bogen in Beziehung gesetzt. Sie war nichts anderes als was die spätere Trigonometrie den Sinus jenes Bogens genannt hat. Auch den Sinus versus unterschied man, wie schon bemerkt, als *utkramajyâ*, sowie den Kosinus als *koṭijyâ*. Man wußte zugleich aus dem aus Sinus, Kosinus und Halbmesser bestehenden rechtwinkligen Dreiecke, daß $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = r^2 = (3438)^2$. Da nun die Sehne von 60^0 dem Halbmesser oder 3438 Minuten gleich ist, so mußte ihre Hälfte oder in moderner Schreibweise $\sin 30^0 = \frac{r}{2} = 1719$ Minuten sein. Man war nun imstande, aus dem Sinus eines Bogens den des halb so großen Bogens zu finden, da (Fig. 91) $2\sin\frac{\alpha}{2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, dessen beide Katheten $\sin\alpha$ und $\sin\text{vers}\,\alpha$ sind. Folglich mußte

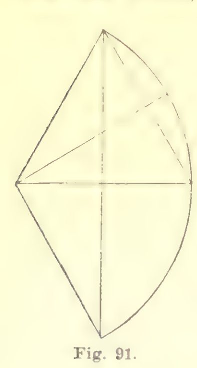


Fig. 91.

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = (\sin\alpha)^2 + (\sin\text{vers}\,\alpha)^2$$

sein. Aber $\sin\text{vers}\,\alpha = r - \cos\alpha$ und $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = r^2$ in Berücksichtigung gezogen, wird auch $\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2r^2 - 2r\cdot\cos\alpha$ und

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r}{2}(r - \cos\alpha)} = \sqrt{1719\,(3438 - \cos\alpha)}\,.$$

So verschaffte man sich vielleicht die Zahlen, welche im Sûrya Siddhânta unter anderen angegeben sind: $\sin 15^0 = 890$ Minuten, $\sin 7^0\,30' = 449$ Minuten, $\sin 3^0\,45' = 225$ Minuten. Aber $3^0\,45'$ sind selbst 225 Minuten, also bei soweit fortgesetzter Bogenhalbierung fiel der Sinus mit dem Bogen zusammen, war ihm an Länge gleich, sofern man es bei der Genauigkeit von einer Minute bewenden ließ, und um so mehr mußte diese Gleichheit für noch kleinere

Bögen und deren Sinus stattfinden d. h. es mußte $\sin \alpha = \alpha$ sein, wofern $\alpha \leqq 225'$ war. Damit war dem Bogen von $225'$ oder, wie wir auch sagen können, dem 96. Teile des Kreisumfanges eine besondere Wichtigkeit beigelegt, welche ihn würdig machte durch einen besonderen Namen ausgezeichnet zu werden. Man nannte seinen Sinus und ihn selbst den geraden Sinus, *kramajyâ*.

Wenn wir uns ausdrückten, man habe vielleicht von $\sin 30^0$ ausgehend durch Bogenhalbierung $\sin 225' = 225'$ gefunden, so gebrauchten wir dieses einschränkende Wort, weil möglicherweise auch der umgekehrte Weg eingeschlagen wurde. Die archimedische Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ war gefunden worden, indem man das 96eck als mit dem umschriebenen Kreise nahezu zusammenfallend sich dachte; daraus könnte man Veranlassung genommen haben, auch $\sin \frac{360^0}{96} = \frac{360^0}{96}$ zu setzen und zum voraus diese Annäherung als genügend zu betrachten.

Sei dem nun, wie da wolle, jedenfalls spielte von nun an der Bogen von $225'$ wie dessen Vielfache und die Sinus derselben in der indischen Trigonometrie eine Rolle, deren Wichtigkeit zur Genüge hervortreten wird, wenn wir sagen, dieser Bogen bildete die Bogeneinheit einer Sinustabelle, die sich von $3^0\,45'$ bis 90^0 in 24 Werten erstreckte. Die Auffindung der Sinusse der durch Zusammensetzung von Bögen gebildeten größeren Bögen erfolgte nach ähnlichen Methoden, wie Ptolemäus sie im Almageste gelehrt hat. Nachdem die Tabelle gebildet war, erkannte man vermutlich empirisch das Zahlengesetz, daß

$$\sin((n+1)\,225') - \sin(n \cdot 225') = \sin(n \cdot 225') - \sin((n-1)\,225') - \frac{\sin(n \cdot 225')}{225}$$

war, und benutzte nunmehr diese Interpolationsformel, um die Tabelle selbst jeden Augenblick herstellen zu können. Bhâskara ist sogar bei dieser Tabelle nicht stehen geblieben. Er hat die Sinusse und Kosinusse in Bruchteilen des Halbmessers des Kreises angegeben:

$$\sin 225' = \frac{100}{1529}, \quad \cos 225' = \frac{466}{467}; \quad \sin 1^0 = \frac{10}{573}, \quad \cos 1^0 = \frac{6568}{6569},$$

wo jedesmal die betreffenden Teile des Halbmessers gemeint sind; er hat die Berechnung einer Sinustabelle gelehrt, deren Bögen von Grad zu Grad fortschreiten. Damit steht vielleicht eine in der Lîlâvatî[1]) mitgeteilte Formel in Verbindung, welche die Sehne s aus

[1]) Colebrooke pag. 94, § 213.

dem Kreisumfange P, dem Durchmesser d und dem Bogen B finden lehrt: $s = \frac{4dB(P-B)}{\frac{5}{4}P^2 - B(P-B)}$, eine Formel, deren Ableitung noch nicht enträtselt ist, welche aber eine ziemlich genügende Annäherung liefert[1]).

Trigonometrie als Berechnung von Dreiecksstücken eines beliebigen Dreiecks mit Hilfe von Winkelfunktionen scheinen die Inder nicht gekannt zu haben. Sie führen vielmehr fast alle Aufgaben auf ebene und zwar auf rechtwinklige Dreiecke zurück und konnten so mit ihren planimetrischen Kenntnissen ausreichend die verschiedenen vorkommenden Fragen beantworten.

Als wesentlicher Fortschritt, den die Trigonometrie in Indien machte, bleibt danach das übrig, was wir oben besprachen: die Sinustabelle. Die Sehnen waren verdrängt durch ihre Hälften. Was im Analemma des Ptolemaeus angedeutet war (S. 423), aber bei dem Griechen nicht seine in Zahlen umgesetzte Ausbildung fand, dessen Wichtigkeit ahnte wenigstens der rechnungsgeübte Inder. In dem Sûrya Siddhânta findet sich bereits eine Sinustabelle. Die ganze Tragweite der damit vollzogenen Abänderung ergab sich allerdings auch den Indern noch nicht, sondern erst ihren Nachfolgern, den Arabern.

[1]) Ein Herleitungsversuch der Formel von Suter in den Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 S. 556—558 scheint uns zu kühn, um ihn aufzunehmen.

VI. Chinesen.



31. Kapitel.

Die Mathematik der Chinesen.

„Wissen, daß man es weiß, von dem was man weiß, und wissen, daß man es nicht weiß, von dem was man nicht weiß, das ist wahre Wissenschaft.“ So soll Confucius, der chinesische Weise, dessen Lebensdauer von 551 bis 479 angesetzt wird, zu seinen Schülern gesagt haben[1]. Von China selbst dürfte nach dieser Definition kaum eine Wissenschaft möglich sein, denn weder was wir über dieses Reich wissen, noch was wir nicht wissen, ist von Zweifel befreit.

Europäischer Nachforschung hat man mit geringen Ausnahmen, welche sich auf Männer bezogen, die keineswegs mit der kritischen Vorbereitung eines Gelehrten von Fach ausgerüstet waren, zu allen Zeiten Hindernisse in den Weg zu legen gewußt. Was uns über Chinas Vergangenheit erzählt wird, stammt ausschließlich von der Benutzung chinesischer Quellen durch Chinesen her. Der Chinese aber liebt das Alte. Seine Anhänglichkeit an dasselbe geht so weit, daß er Neuerungen, wo möglich, als Rückkehr zu Altem und Ältestem darstellt, und wenn ein anderer Ausspruch des Confucius, er habe neue Schriften nicht verfaßt, er habe nur die alten geliebt, erläutert und verbreitet[2], vielleicht der persönlichen Bescheidenheit des Redners entstammt, so ist jedenfalls von anderen diese Auffassung dahin überboten worden, daß sie für alt ausgaben, was durchaus neuen und neuesten Datums war.

So gibt es kaum eine Erfindung, welche nicht mit dankbarer, vielleicht häufig ganz unbegründeter Erinnerung an bestimmte Persönlichkeiten eines längst entschwundenen Altertums geknüpft wird. Die Schrift, nach der Ansicht einer Gelehrtenschule in namenlose Vorzeit hinaufreichend, soll nach der Ansicht einer zweiten Schule von Kaiser Fŭ hī um 2852 v. Chr. herrühren, und ein fürstlicher

[1] Paul Perny, *Grammaire de la langue chinoise orale et écrite*. Paris. T. I, 1873. T. II. 1876. Der hier zitierte Ausspruch II, 243, Note I. [2] Perny II, 263.

Gelehrter Prinz Huây nân tsè gibt (189 v. Chr.) gar an, die Schrift sei durch Tsâng kiĕ, den Minister des Kaisers Huâng tì 2637 v. Chr. auf Befehl des Kaisers erfunden worden[1]). Auf Fŭ hī wird auch das dekadische Zahlensystem zurückgeführt[2]), welches er abgebildet auf dem Rücken eines aus den Fluten des Gelben Stromes auftauchenden Drachenpferdes sah und dessen Bedeutung erkannte. Die chinesische Tusche soll unter Kaiser Où wâng 1120 v. Chr. schon bereitet worden sein[3]). Confucius soll sich zum Schreiben damit eines Pinsels aus Antilopenhaar bedient haben, während Pinsel aus Hasenhaar durch Mông tiên 246 v. Chr. erfunden wurden, einen General, welcher auch eine Art von Papierbereitung lehrte und zugleich die Aufsicht über die Erbauung der chinesischen Mauer führte, eine Vereinigung von Tatsachen, in welcher wir fast eine Ironie der Geschichte zu erkennen geneigt sind. Wir würden noch anderen eben so glaubhaften oder unglaubwürdigen Nachrichten begegnen, wenn wir weiter griffen. Wir wollen lieber an der Hand chinesischer Quellen einen Blick auf die Geschichte des Reiches der Mitte werfen[4]).

Wilde Jäger waren die Ureinwohner Chinas. Zu ihnen wanderte zwischen dem XXX. und XXVII. S. von Nordwesten her das „Volk mit schwarzen Haaren" ein, Hirten, die sich bald dem Landbau widmeten und eine gewisse Kultur schon mit sich brachten. Sie hatten ein Wahlkaisertum, welches bis um 2200 währte. Nun folgten in meistens lang am Ruder bleibenden Erbfolgen verschiedene Dynastien. Die Dynastie Hin regierte 500 Jahre. Sie wurde von der Dynastie Chang gestürzt, diese um 1122 durch die Dynastie der alten Tcheōu entthront. Die Tcheōu waren ein Stamm, der unter den Chang von der alten Gemeinschaft sich trennte und westlich sich ansiedelte. Dort erstarkten sie so weit, daß seit 1200 Kämpfe zwischen ihnen und den Untertanen der Chang begannen, die in dem genannten Jahre 1122 mit der Ersetzung des letzten Chang-Kaisers Cheou sin durch Où wâng endigten. So wurde dieser letztere Kaiser aller wieder vereinigten Stämme und gab ihnen ein neues Gesetzbuch, den Tcheōu lỳ, welchen sein Bruder Tcheōu kong verfaßt haben soll, während eine andere Sage den Tcheōu lỳ wenige Jahre später (1109) im sechsten Regierungsjahre von Then wâng entstanden sein läßt[5]). Die Dynastie der Tcheōu blieb im Besitze der kaiserlichen Macht bis 221 also volle 900 Jahre.

[1]) Perny II, 2—4, 7, 9. [2]) Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen in Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik (1856). LII, 59—94. Die hier angezogene Stelle auf S. 92. [3]) Perny II, 92. [4]) Unsere Quelle war namentlich die Einleitung des zweibändigen Werkes: *Le Tcheōu Lỳ ou rites de Tcheōu traduit par* Ed. Biot. Paris 1851. [5]) Perny II, 303.

In diese lange Periode fällt eine Einwanderung von vielleicht hochwichtigem Einflusse auf die chinesische Kultur. Eine jüdische Kolonie ließ sich jedenfalls im VI. S. in China nieder[1]), also etwa zur Zeit, die kurz vor die Geburt des Confucius fällt, die etwa die Blütezeit eines andern chinesischen Weisen Laò tsè war, welcher 604—523 gelebt hat. Bei Laò tsè, von welchem übrigens auch weite Reisen nach Westen, vielleicht bis Assyrien, erzählt werden, findet sich mutmaßlich eine Spur der Berührung mit diesen Einwanderern in dem dreieinigen Namen Ŷ hȳ wỳ, welche er dem Taò, d. h. dem höchsten Wesen, beilegt und in welchem man Jehova, den der war, ist und sein wird, hat erkennen wollen.

Auf die Tcheōu folgt Tsin schè huâng tỳ, der sich durch eine Anordnung aus dem Jahre 213 v. Chr. den Beinamen des Bücherverbrenners verdiente[2]). Ob er nur eine neue Schrift allgemein einführen wollte, um der wachsenden Verwirrung ein Ende zu machen, die darin ihren Ursprung hatte, daß allmählich die allerverschiedensten Verschnörkelungen der Schriftzeichen Eingang gewonnen hatten, ob er, was dem, der der Gründer eines neuen Herrschergeschlechtes zu werden beabsichtigt, weit ähnlicher sieht, alles vernichtet wissen wollte, was auf die frühere Geschichte sich bezog, damit nicht der Geschmack der Alten über die neueren Einrichtungen ein Verdammungsurteil spreche oder gar die Staatskunst des Kaisers tadle, jedenfalls wurde der Befehl des Kaisers vollzogen, so genau es möglich war, und Stöße von zusammengehefteten Bambusbrettchen mit eingeritzten Schriftzeichen, die Bücher der alten Chinesen, wurden den Flammen überantwortet.

Der Kaiser starb 211. Seinem Geschlecht verblieb die Regierung nicht. Die Dynastie der Han folgte 197, und der ihr angehörige Hoei ti hob 191 das Verbrennungsedikt wieder auf. Ja unter einem der nächsten Regenten dieses Hauses Hiao wen ti 170—156 suchte man nach Werken, welche der Vernichtung entgangen waren, und fand solche in ziemlicher Menge. Bruchstücke des Tcheōu lỳ sollen damals entdeckt und der kaiserlichen Büchersammlung einverleibt worden sein, welche sodann zwischen 32 und 6 v. Chr. durch den gelehrten Minister Lieou hin noch interpoliert wurden, um, wie es heißt, gewissen damals zu treffenden Einrichtungen den Stempel hohen Alters aufzudrücken. Die Dynastie der Han ging 223 n. Chr. zu Ende.

Wieder haben wir ein für chinesische Kulturverhältnisse ungemein

[1]) Perny II, 265, 305, 312. [2]) Vgl. Tcheōu lỳ I, pag. XIII flgg. mit Perny II, 34—36.

bedeutsames Ereignis aus dieser Zeit zu erwähnen. Im Jahre 61 n. Chr. fand der in Indien verfolgte Buddhismus in China Eingang, wo er insbesondere unter der niederen Bevölkerung sich unaufhaltsam und mit so dauerndem Erfolge verbreitete, daß noch jetzt die große Masse der etwa 500 Millionen Menschen, welche chinesisch reden, ihm anhängt.

Es kann unsere Aufgabe nicht sein auch nur skizzenhaft der nun folgenden Dynastien zu gedenken. Höchstens, daß wir erwähnen wollen, wie unter den Sung im Jahre 1070 ein politisch-literarischer Streit an eine Auslegung sich knüpfte, welche Wang ngan chi, der Minister des Kaisers Chin tsong, einigen Stellen des Tcheōu lÿ gab. Damals ging man so weit die Ursprünglichkeit jenes Werkes völlig zu leugnen und es für eine Fälschung des Lieou hin, also etwa aus den drei letzten Jahrzehnten vor dem Beginne der christlichen Zeitrechnung, zu erklären. Daß man nicht einen noch späteren Zeitpunkt für das unterschobene Werk annahm, war wohl vorzugsweise in der Lebenszeit der Kommentatoren des Tcheōu lÿ begründet. Man kannte damals hauptsächlich drei solcher Kommentatoren: Tching tong dem I. S. n. Chr., Tchin khang tching dem II. S., Kiu kong yen dem VIII. S. angehörig, von welchen insbesondere der zweite zur Sicherung des Originals seit seinem Leben dienen konnte, weil sein Kommentar über das ganze Werk fortläuft und stete Vergleichungen mit den Sitten und Regeln, mit den Würden und Obliegenheiten seiner Zeit anstellt[1]). Hundert Jahre nach jenem Streite trat ein vierter Kommentator Wang tchao yu hinzu, und nun am Ende des XII. S. verfocht auch der gelehrte Tchu hi wieder die volle Echtheit des Tcheōu lÿ.

Auf die Sung folgte ein fremdes Herrschergeschlecht. Mongolen drangen in China ein und gaben dem Reiche eine Dynastie, welche 1275—1368 den Kaiserthron besetzt hielt, bis sie, die sogenannte Dynastie Yuën, verdrängt wurde durch die einheimische Dynastie Ming 1368—1644. Im Gefolge der Mongolen kamen, wie mit Bestimmtheit bekannt ist, arabische Gelehrte an den Kaiserhof von China, ihre wieder ganz anders geartete Wissenschaft mit sich führend, freilich nicht die ersten Araber, welche in China erschienen, denn schon 615 n. Chr., 713, 726, 756, 798 waren arabische Gesandtschaften dorthin gelangt, das heißt Handeltreibende, deren Anführer, um mehr beachtet und geachtet zu sein, sich als Abgeordnete des Herrschers der Araber aufspielten. Der Name, unter welchem die Araber erwähnt werden, ist Ta schi, das ist Tâzy, der persische Name

[1]) Tcheōu lÿ I, pag. LX—LXI.

derselben[1]). In die Mongolenzeit fallen auch die Reisen des Venetianers Marco Polo, dessen Berichte bei der 1295 erfolgten Heimkehr auf unverdienten Unglauben stießen. Erst unter der Mingdynastie suchten andere Europäer dem Beispiele des Wundermannes, der von seinem Umsichwerfen mit großen Zahlen oder von seinen Reichtümern den Beinamen Messer Millione erhalten hatte, zu folgen und in das schwer zugängliche Reich einzudringen.

Dem Jesuitenmissionar Matthias Ricci gelang es 1583 zuerst Zugang zu finden und in seinem Unternehmen, das Christentum zu predigen, nennenswerte Erfolge zu erreichen. Er machte sich zugleich auch als tüchtiger Astronom am Kaiserhofe geltend, so daß ihm, bis er 1620 China wieder verließ, die Leitung des Kalenderwesens übertragen wurde, eine früher in China erbliche Würde, und von nun an blieb China ein der katholischen Mission geöffnetes Land, so daß dieselbe mehr und mehr erstarkte, so daß Missionsprediger Kenntnisse genug von Land und Leuten, von Sprache und Schrift sich erwarben, um in umfangreichen Werken davon handeln zu können, um auch ihrerseits den Chinesen europäische Wissenschaft mitzuteilen. Wissen wir doch, daß Julius Aleni, der von 1613 bis zu seinem 1649 eintretenden Tode in China verweilte, in der Landessprache einen Auszug aus den Elementen des Euklid und eine praktische Geometrie verfaßte[2]). Jean François Gerbillon löste ihn ab 1686–1707, in welchem Jahre er in Peking starb. Es verfaßte eine Geometrie nach Euklid und Archimed in chinesischer und in tartarischer Sprache[3]). Das änderte sich auch nicht als die Mandschu, erst mit den Chinesen in Krieg verwickelt und zurückgeschlagen, von einer der in China nicht seltenen Gegenregierungen, die in China gegen den Kaiser sich erhob, zu Hilfe gerufen wurden, und ein Mandschu Schun tchi nach mehrjährigen Kämpfen 1647 die noch jetzt vorhandene Dynastie der Tsing gründete. Unter dieser Dynastie, insbesondere unter Kaiser Kang hi, wurde vielmehr das Verhältnis zwischen dem Kaiserhofe und den Missionären ein immer engeres. Schon unter Kang hi's Vorgänger war Adam Schaal aus Köln, gleich Ricci, Aleni und Gerbillon Mitglied des Jesuitenordens, gleich ihnen Astronom und Missionär, in China ansässig geworden. Nun folgte ein fünfter Jesuit, der Holländer Ferdinand Verbiest, den

[1]) Bretschneider, *On the knowledge possessed by the Chinese of the Arabs and Arabian Colonies.* London 1871, und A. v. Kremer, Culturgeschichte des Orients II, 280. Wien 1877. [2]) *Carteggio inedito di Ticone Brahe, Giovanni Keplero etc. con Giovanni Antonio Magini pubblicato ed illustrato da* Antonio Favaro. Bologna 1886, pag. 108 Note 4. [3]) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften I, 877.

Kang hi zum Präsidenten des Kollegiums für Astronomie ernannte, derselbe Kang hi, der in mannigfachster Weise seine Liebe für Wissenschaft betätigte und z. B. ein Wörterbuch der damals vorhandenen Schriftzeichen anfertigen ließ, welches in 32 Bänden 42000 Zeichen enthält[1]). Es folgten im XVIII. S. Männer wie Pater Prémare, Pater Gaubil, deren Werke für die Kenntnis Chinas unentbehrlich geworden sind, wenn ihnen auch anhaftet, was wir zu Anfang dieses Kapitels angedeutet haben, daß sie den Erzählungen chinesischer Berichterstatter und chinesischer Bücher ein allzubereites Ohr zu leihen liebten. Am Anfange des XIX. S. erfolgte ein Umschlag, als 1805 die katholische Mission eine Landkarte einer chinesischen Provinz nach Rom zu schicken wagte. Das alte Mißtrauen, die alte Feindschaft gegen die Fremden erwachte, welche kaum durch die Waffen Europas um die Wende des XIX. zum XX. Jahrhundert gebändigt, sicherlich nicht vernichtet worden ist.

Der Überblick, welchen wir, selbstverständlich auf Quellenwerke zweiter Hand allein uns stützend, hier gegeben haben, soll uns mehrfache Zwecke erfüllen. Er soll uns gestatten im Verlaufe dieses Kapitels der Dynastien als Zeitbestimmungen uns zu bedienen. Er soll zweitens in ein helles Licht setzen, daß die Kultur des Reiches, mit welchem wir uns zu beschäftigen haben, doch nicht so sehr gegen auswärtige Einflüsse abgeschlossen war, als man in gebildeten Kreisen Europas zu wähnen pflegt, daß vielmehr in dem Zeitraum, welcher mit dem VI. vorchristlichen Jahrhundert beginnt, der Reihe nach jüdisch-babylonische, dann indische, dann arabische, dann europäische Wissenschaft die Gelegenheit hatte in China einzudringen, eine Gelegenheit, welche kaum jemals unbenutzt verlaufen sein mag. Er soll drittens uns bemerklich machen, daß den chinesischen Zeitangaben für schriftstellerische Überreste nicht immer Glaube beizumessen ist, daß es häufig absichtliche Rückverlegungen sind, von Chinesen selbst wenigstens im Eifer gelehrter Streitigkeiten als solche verunglimpft und ihres Ansehens für unwürdig erklärt.

Steht es doch um die Glaubwürdigkeit chinesischer Berichte überhaupt nicht sonderlich, und ohne auf Gründe psychologischer Art uns einzulassen, die man weder behaupten noch verwerfen sollte, ohne sich auf eigne Kenntnis des betreffenden Volkscharakters stützen zu können, wollen wir nur ein Moment hervorheben: das ist die buddhistische Neigung zur Anwendung großer Zahlen, welche in China ihren Gipfelpunkt erreichte und in dem Namen Sand des

---

[1]) Stanisl. Julien in dem *Journal Asiatique* vom Mai 1841. 3ième série XI, 402.

Ganges, heng ho cha, welcher dem 10^{53} beigelegt wurde[1]), ihren Ursprung deutlich an den Tag legt.

Man könnte ferner aus dem Umfange vorhandener chinesischer Enzyklopädien den Rückschluß ziehen, daß viel Unwahres in denselben mit in Kauf genommen werden muß. Wenn uns gesagt wird, daß eine solche Enzyklopädie, welche den Namen Yùn lō tá tièn führt, aus beinahe 15000 Bänden bestehe[2]), so kann uns das schon ein Kopfschütteln entlocken. Wenn nun aber gar eine neue Enzyklopädie, zu deren Herstellung Kaiser Kiêu lông den Befehl gab, auf 160000 Bände veranschlagt worden ist, von welchen über 100000 bereits vollendet seien[3]), so ruft diese Mitteilung in uns persönlich keineswegs das Gefühl demütiger Bewunderung hervor, welches den Berichterstatter offenbar durchdringt. Wir kommen vielmehr selbst unter Beschränkung der Stärke der Bände auf das Geringfügigste und unter Ausdehnung der durch Blumenreichtum der Sprache trotz der ungemein raumsparenden Wortschrift erzielten Raumverschwendung auf das Unerträglichste nur zu dem einen Gedanken: Wie viel muß in einer solchen Enzyklopädie unwahr sein, da für ein Volk, welches seinen Stolz darein setzt um das Ausland sich nicht zu kümmern, so viel Wahres gar nicht vorhanden sein kann.

Wir werden freilich, trotz dieser Bekenntnis unserer ungläubigen Voreingenommenheit, getreulich wieder berichten, was aus verschiedenen chinesischen Werken für die Geschichte der Mathematik bei jenem Volke ermittelt worden ist, überall soweit als möglich der Zeitangabe folgend, welche die Chinesen selbst liefern, aber wir verargen es keinem unserer Leser, wenn ihn die erheblichsten Zweifel an unsere Gewährsmänner erfüllen sollten. Man wird es um so begreiflicher finden, daß wir europäischer Übertreibungen, die chinesischer als die Chinesen selbst der Sternkunde jenes Volkes ein Alter von 18500 Jahren beilegen wollen, nur mit diesem einen Worte gedenken[4]).

Einem Minister des Kaisers Huâng tì, welcher 2637 v. Chr. regierte, wurde, wie wir (S. 664) gesehen haben, nach einem Berichte die Erfindung der Schrift beigelegt. Ein anderer Minister desselben Kaisers, Cheòu lỳ, wird als Erfinder des Rechenbrettes, *suán pân*,

[1]) Ed. Biot, *Table générale d'un ouvrage chinois intitulé Souan-fa-tong-tson ou Collection des règles du calcul* im *Journal Asiatique* vom März 1839. 3ième série, VII, 195. [2]) Perny I, 10. [3]) Ebenda II, 7. [4]) G. Schlegel, *Uranographie chinoise.* Wir selbst kennen das Werk nur aus den dessen Tendenz ablehnenden Rezensionen von Jos. Bertrand (*Journal des Savans* 1875) und von S. Günther (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, XII. Jahrgang, Heft 1).

genannt[1]), und unter ebendemselben soll das erste arithmetische Werk, die neun arithmetischen Abschnitte, *Kieou tschang*, verfaßt worden sein[2]), welches in fast allen nachfolgenden arithmetischen Werken als die erste Grundlage der Wissenschaft des Rechnens genannt wird, und welches schon Tcheōu kong, von welchem noch nachher die Rede sein wird, um 1100 v. Chr. im Auge gehabt haben soll bei einer Vorschrift[3]): die Söhne der Fürsten und des hohen Adels in den sechs Künsten zu unterweisen, nämlich in den fünf Klassen gottesdienstlicher Gebräuche, in den sechs verschiedenen Arten der Musik, in den fünf Regeln für Bogenschützen, in den fünf Vorschriften für Wagenlenker, in den sechs Anweisungen zum Schreiben und endlich den neun Methoden mit Zahlen zu rechnen. Wieder Huâng tì ist es, dem die Einführung eines 60jährigen Zyklus nachgerühmt wird[4]).

Zum besseren Verständnis dieser Berichte müssen wir einiges hier einschalten. Die Chinesen teilen ihre Zeit nach den Grundzahlen 12 und 10 ein. Zwölf Stunden bilden ihnen den Tag, und der Zehn bedienen sie sich zur höheren Zeiteinteilung[5]), nachdem eine in den heiligen Schriften vorkommende siebentägige Zeitgruppe wieder verloren gegangen ist[6]). Aus den beiden Grundzahlen 12 und 10 vereinigt soll nun die Zahl 60 jener Jahreszyklen entstanden sein. Jedes der 60 Jahre hat seinen besonderen Namen, das erste kiă, das zweite tsè usw., weshalb der ganze Zyklus kiă tsè genannt wird. Die aufeinander folgenden Namen dieser Jahre weiß jeder Chinese auswendig, und er sagt daher über sein Alter befragt ohne weiteres: ich bin in dem so und so genannten Jahre des gegenwärtigen oder des vergangenen, des vorvergangenen Zyklus geboren. Eine anderweitige Anwendung dieser Namen bietet die Geometrie, indem die einzelnen Punkte einer Figur durch sie unterschieden werden, in derselben Weise wie Griechen und Römer es durch die Buchstaben ihres Alphabetes zu erreichen wußten.

Wir haben ferner vom Rechenbrette swán pân gesprochen[7]). Von demselben handelt der swán fă tōng tsōng in 6 Bänden von je 2 Büchern. Der Swán pân besteht aus in einen Rahmen eingespannten Drähten, welche insgesamt durch einen Querdraht in zwei Abteilungen zerfallen, deren kleinere 2, deren größere 5 Kugeln trägt, also abgesehen von einer sehr überflüssigen Kugel in jeder einzelnen

[1]) Perny I, 108. [2]) Biernatzki l. c. S. 62. [3]) Ebenda S. 67. [4]) Ebenda S. 62. [5]) Perny I, 104. [6]) Ebenda I, 107. [7]) Abbildungen desselben bei Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der großen Tartarei, übersetzt von Mosheim. Rostock 1747, Bd. III, S. 350, und bei Perny I, 108.

Abteilung genau in der Weise hergerichtet sind, wie wir den Abacus der Römer (S. 529) beschrieben haben. Die meisten Swán pâns besitzen 10 Drähte. Es soll auch solche von 15 und mehr Drähten geben. Einem Zeichnungsfehler dürfen wir es vielleicht zuschreiben, wenn eine Abbildung nur 9 Drähte aufweist[1]), während wir allerdings selbst der Ausnahmsbildung eines echt chinesischen Swán pân mit 11 Drähten begegnet sind[2]). Wie ausnahmslos die Chinesen sich ihres Swán pân bedienten, ist schon daraus zu entnehmen, daß in den Lehrbüchern der eigentlichen Rechenkunst über Addition und Subtraktion gar keine Vorschriften gegeben sind[3]), doch wohl nur, weil man diese Rechnungsarten mit der Hand und nicht im Kopfe auszuführen gewohnt war. Für das Multiplizieren und Dividieren sind dagegen Regeln vorhanden. Ersteres beginnt bei der Vervielfachung der größten Zahlenteile, letztere wird durch wiederholte Subtraktion ausgeführt.

Da auch unter Huâng tì die Anwendung der Schrift auf arithmetische Dinge uns erwähnt wird, so müssen wir hier von der Zahlenschreibung bei den Chinesen reden. Wir dürfen dabei wohl zweierlei als bekannt voraussetzen: erstens daß die chinesische Sprache der Beugungsformen durchaus entbehrt, so daß alle syntaktischen Beziehungen der Wörter eines Satzes zueinander nur durch die gegenseitige Stellung sowie durch eigens dazu vorhandene Partikeln ausgedrückt werden müssen, zweitens daß die Schrift der Chinesen keine Lautschrift oder Silbenschrift, sondern eine ursprünglich bildliche Begriffsschrift ist, deren Zeichen kursiv geworden und ihrer ursprünglichen Gestalt entfremdet nunmehr aus 214 Schlüsseln[4]) durch das reichhaltigste Verbindungsverfahren hergestellt werden können. So wuchs die Anzahl chinesischer Zeichen bis auf die 42000 des Wörterbuches Kaisers Kang hi, während freilich die vier sogenannten klassischen Bücher der Chinesen nicht mehr als die Kenntnis von 2400 Zeichen von ihrem Leser verlangen[5]). Das sind immer noch viel mehr als eigentliche chinesische Stammwörter vorhanden sind, deren man neuerdings 304 zählt, welche sich durch verschiedenartige Betonung auf 1289 erheben[6]), aber naturgemäß weitaus nicht hinreichen jedem Begriffe ein eigenes Wort zuzuwenden, so daß 20, ja 30 chinesische Schriftzeichen durch dasselbe Wort ausgesprochen werden, beziehungsweise daß man dasselbe Wort, weil es

---

[1]) Perny I, 109 und 110. [2]) Das 11drähtige Exemplar gehört der ethnographischen Sammlung des Missionshauses in Basel an. [3]) Biernatzki S. 72. [4]) Perny II, 103. [5]) Stanisl. Julien im *Journal Asiatique* vom Mai 1841, pag. 402. [6]) Perny I, 34—36.

20 bis 30 Bedeutungen besitzt, bald so bald so zu schreiben übereingekommen ist.

Diese Armut der Sprache nötigte nun bei den Zahlwörtern Verbindungen weniger Elemente eintreten zu lassen, und die Elemente wurden nicht anders als wie bei den übrigen Völkern gewählt, denen wir bisher unsere Aufmerksamkeit zuwandten: das Zehnersystem der Zahlbildung ist auf das folgerichtigste festgehalten. Der Mangel an jeglicher Beugung ließ ja nicht einmal Wortverschmelzungen wie z. B. unser dreißig zu; die Wortelemente drei und zehn mußten unverändert sich zusammensetzen. Eben dieselben Wortelemente mußten zu der Bildung des Zahlwortes dreizehn ausreichen, und so ergab sich für die Chinesen als sprachnotwendig, was überall sonst mehr oder weniger Willkür war: man mußte je nachdem der Name einer kleineren Zahl dem einer größeren voranging oder folgte bald multiplikativ bald additiv verfahren, und vermöge des Gesetzes der Größenfolge, welches dem des Zehnersystems im allgemeinen noch vorgeht, ergab sich die Regel von selbst aus sān $= 3$ und chĕ $= 10$ additiv chĕ sān $= 10 + 3 = 13$, multiplikativ sān chĕ $= 3 \times 10 = 30$ zu bilden. Die Schrift hat nun bei den Chinesen dieselbe Methode festgehalten. Sie unterscheidet sich freilich von der dem Europäer geläufigen Reihenfolge insofern als der Chinese seine Wörter von oben nach unten zu Zeilen, die Zeilen von rechts nach links zu Seiten vereinigt[1]), aber diese Anordnung als bekannt vorausgesetzt schreiben sich die Zahlwörter in der Tat so, wie es eben angedeutet wurde (die Zahlzeichen und Beispiele vergleiche auf der am Schlusse des Bandes beigefügten Tafel). Es gibt allerdings Wörter und Zeichen, welche noch weit über 10000, ja über das multiplikativ herstellbare 10000 mal 10000 sich erheben — wir haben vorher in 10^{53} ein überzeugendes Beispiel davon kennen gelernt — aber eben jenes Beispiel mit seinem Ursprungszeugnisse an der Stirn läßt vermuten, was berichtet wird, daß die altchinesische Gewohnheit nicht über 10000 als höchste einfache Rangordnung sich erhob. Eine Bestätigung liefert die früher von uns (S. 24) erwähnte Unterscheidung des Heilrufes, der einem Großen des Reiches noch 1000, dem Kaiser noch 10000 Jahre wünscht.

Außer den Zahlzeichen, von deren Benutzung wir bisher gesprochen haben, und welche die altchinesischen heißen mögen, gibt es merkwürdigerweise noch mehrere andere Schreibarten. Wir meinen nicht eine offizielle verschnörkelte Form, welche zur Verhinderung von Fälschungen in öffentlichen Aktenstücken mit Vorliebe

[1]) Abel Remusat, *Élémens de la grammaire chinoise* (Paris 1822) pag. 23.

angewandt wird, noch eine kursive flüchtigere Form, in welcher die Gestaltung der einzelnen Zeichen sich mehr und mehr verwischt hat; diese Zeichen sind beide nur als das aufzufassen, als was wir sie benannten, als Formverschiedenheiten. Wir meinen dagegen Zahlenanschreibungen, welche einem ganz anderen Grundgedanken folgen, und zwar unter Benutzung von selbst zweierlei Zeichen, welche wir Kaufmannsziffern und wissenschaftliche Ziffern nennen wollen, und deren Form gleichfalls auf der Tafel am Schlusse des Bandes zu vergleichen ist. Die Kaufmannsziffern wie die wissenschaftlichen Ziffern werden horizontal nebeneinander geschrieben in derselben Richtung wie die indischen Ziffern, also so daß die höchste Ordnung am weitesten links erscheint. Die Kaufmannsziffern an Form den altchinesischen nahe verwandt sollen nie gedruckt erscheinen[1]), sondern nur im täglichen Gebrauche des Lebens ihre Anwendung finden. Die multiplikative Ziffer, welche also angibt, wieviele Zehner, wieviele Hunderter usw. gemeint sind, tritt nur äußerst selten links von dem Zeichen der betreffenden Einheit auf, dann nämlich wenn keine Einheiten von anderer Ordnung vorkommen, also z. B. wenn 3000 oder 400 geschrieben werden soll. Sonst werden die Rangziffern und Wertziffern in zwei Zeilen übereinander geschrieben, jene in der unteren, diese in der oberen Zeile, bis auf die Einer, welche wegen nicht vorhandenen Rangzeichens in die untere Zeile hinabrücken. Eine zweite und noch wichtigere Eigentümlichkeit dieser Kaufmannsziffern besteht in dem Zeichen der Null, für welche ein kleiner Kreis in Anwendung tritt um anzudeuten, daß Einheiten einer gewissen Ordnung, welche aber selbst nicht weiter angedeutet wird, sondern aus den Nachbarziffern einleuchtet, nicht vorhanden sind.

Gewichtige Gründe sprechen dafür, daß hier erst spät von auswärts Eingeführtes, nicht ursprünglich Vorhandenes vorliegt. Das geht eben aus dem gegenseitigen Verhältnisse von Sprache und Schrift bei den Chinesen hervor. Die Schrift konnte verschiedene Zeichen für gleichlautende Wörter besitzen um den verschiedenen Sinn derselben zu erkennen zu geben, aber sie fügte kein durch die Nachbarwerte überflüssiges Null hinzu.

Noch weniger kann in China eine vollständige Stellungsarithmetik erfunden worden sein. Wenn die Zahl 36 z. B. chinesisch durch die drei Wörter drei-zehn-sechs ausgesprochen wurde, so konnte der Chinese von sich aus unmöglich auf den Gedanken kommen, beim

[1]) Ed. Biot, *Sur la connaissance que les Chinois ont eu de la valeur de position des chiffres* im *Journal Asiatique* vom Dezember 1839, pag. 497—502.

Schreiben das Wort zehn aus der Mitte heraus fortzulassen, welches er noch immer lesen sollte. Er konnte nicht auf diesen Gedanken kommen, weil bei ihm nicht, wie bei anderen Völkern, das Anschreiben der Zahlen ohnedies ein aus dem Rahmen der gewöhnlichen Lautschrift heraustretendes war, weil alle Schrift vielmehr, wie wir schon sagten, für ihn Begriffsschrift war, mochten es Wörter einer oder einer anderen Bedeutung sein, die aufgezeichnet werden sollten.

Nichtsdestoweniger hat, wie die Zeichen, welche wir wissenschaftliche Ziffern nennen, beweisen, die Stellungsarithmetik mit einem eigenen System von Zeichen, welches viel durchsichtiger ist als die bisher besprochenen, in China Eingang gefunden. Man bezeichnet nämlich die Eins durch einen senkrechten oder wagrechten, die Fünf entsprechend durch einen wagrechten oder senkrechten Strich und verbindet diese beiden Elemente zur Bezeichnung von 6 bis 9, während 1 bis 5 durch Wiederholung der Eins, Null durch einen kleinen Kreis geschrieben werden. Wenn wir zum voraus schon diese Bezeichnungsweise als eine jedenfalls spät eingeführte schildern durften, so entspricht dem die Tatsache, daß dieselbe nicht früher als in einem Werke des Jahres 1240 etwa erscheint[1]), in dem Su schu kieou tschang (neun Abschnitte der Zahlenkunst) des Tsin kiu tschau, der unter der Dynastie Sung gegen Ausgang derselben lebte. Andere Beispiele gehören gar der Zeit der Mongolen (1275—1368) erst an[2]), so daß wir von den neun Abschnitten der Rechenkunst unter der Sungdynastie bis zu dem Werke gleichen Namens des Huâng tì den weiten Weg von fast 4000 Jahren zurückverfolgen müssen, um uns wieder an der Stelle zu befinden, von welcher aus wir diese Abschweifung begannen.

Und selbst jener Ausgangspunkt war ein zu später, denn noch vor Erfindung des Rechenbrettes, vor Verfassung des ersten arithmetischen Lehrbuches muß ja ein Rechnen, muß der Begriff der Zahlen festgestanden haben. Die chinesische Überlieferung läßt uns auch für jene alleräItesten Zeiten nicht im Stich. Mit Knötchen versehene Schnüre in Verschlingungen gezeichnet bilden die beiden Tafeln hô tû und lŏ schu[3]). Auf der ersteren (Fig. 92) sind durch die je einer Schnur angehörigen Knoten die Zahlen 1 bis 10, auf der zweiten (Fig. 93) die 1 bis 9 dargestellt. Weiß sind die ungeraden Zahlen gezeichnet, denn das Ungerade ist das Vollkommene wie der Tag, die Hitze, die Sonne, das Feuer. Die geraden Zahlen dagegen

---

[1]) Biernatzki S. 72 und 69. [2]) Ed. Biot im *Journal Asiatique* für Dezember 1839. [3]) Perny II, 5—7.

sind schwarz, denn das Gerade ist das Unvollkommene, wie die Nacht, die Kälte, das Wasser, die Erde. Man hat neuester Zeit darauf aufmerksam gemacht[1]), daß die Anordnung der Zahlen 1 bis 9 auf

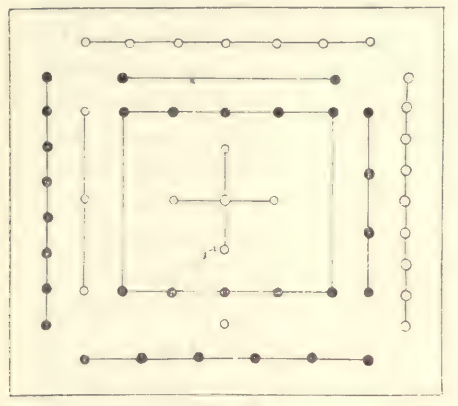


Fig. 92.

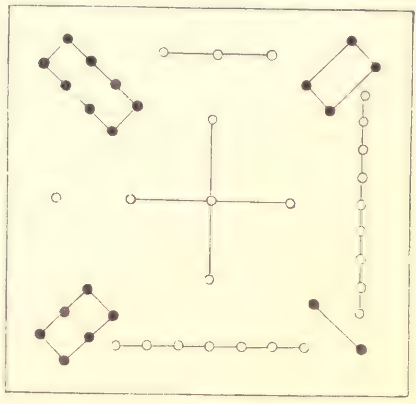


Fig. 93.

Fig. 93 das magische Quadrat ebenderselben Zahlen darstelle. Diese Tafeln sollen nun — wie? ist uns wenigstens ganz unersichtlich — in der Urzeit Chinas dazu gedient haben in der Verwaltung der öffentlichen Angelegenheiten benutzt zu werden, und Kaiser Fŭ hī um 2852 soll sie erst durch seine 8 aufgehängten Zeichen pă kuá ersetzt haben, gewöhnlich kurzweg die Kuas genannt. Sie bestehen aus bald ganzen, bald gebrochenen Linien, jene das Vollkommene diese das Unvollkommene bezeichnend, in dieser Bezeichnung also, mit dem hô tû und lŏ schu übereinstimmend, wie auch darin mit ihnen übereinstimmend, daß wir uns unter Zuhilfenahme der vorhandenen Berichte auch nicht die geringste Anschauung von der Anwendungsart der Kuas zu bilden vermögen[2]). Nur schwach vermutend möchten wir darauf hinweisen, daß der Swán pân aus den Knotenschnüren vielleicht seine Entstehung genommen oder zu der einen Ursprung suchenden Rückerfindung jener Urbilder geführt haben kann, daß ferner in den gezeichneten Tafeln hô tû und lŏ schu wie in den kuá eine Art von Zahlensymbolik auftritt, welche uns daran erinnert, daß wir schon früher (S. 43) auf Übereinstimmungen zahlenträumerischer Gedankenverbindungen zwischen

[1]) Dr. Gram hat dieses bemerkt. Vgl. Zeuthen, *Forelaesning over mathematikens Historie. Oldtid og Middelalder.* Kopenhagen 1893. S. 274. [2]) Über die Kuas vgl. *Le Chou king un des livres sacrés chinois traduit par le* P. Gaubil *revu et corrigé par* M. de Guignes. Paris 1770, an sehr verschiedenen Stellen, die im Register s. v. *koua* zu entnehmen sind. Daß man in den Kuas einmal ein chinesisches Binärsystem erkannt haben wollte, führen wir beiläufig an. Vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 48—49.

chinesischen und pythagoräischen Lehren aufmerksam machen mußten, welche wohl einen geistigen wie örtlichen Mittelpunkt ihres Daseins in Babylon besaßen.

Wir gehen weiter zum Tcheōu lẏ über, jenem Gesetzbuche, welches auf Où wâng oder dessen nächste Nachfolger zwischen 1122 und 1109 zurückgeführt wird. In ihm sind alle jene zahlreichen Würdenträger des chinesischen Hofstaates mit ihren Obliegenheiten genannt, welche sicherlich in späterer Zeit vorhanden waren, wenn auch vielleicht nicht in früher, da, wie wir uns erinnern, der Tcheōu lẏ von Chinesen selbst als eine Fälschung aus den letzten 30 Jahren v. Chr. angesehen worden ist. Unter diesen Würdenträgern erscheinen mehrere[1]), welche in der Geschichte der Mathematik Erwähnung finden müssen. Da sind erbliche Würden eines Hofastronomen, fong siang schi, und Hofastrologen, pao tschang schi. Da ist ein Obermesser, liang jîn, betraut mit der Tracierung der Mauern der Paläste wie der Städte. Da ist ein eigener Beamter des Meßapparates, tu fang schi, der mit dem tu kueï genannten Instrumente, das ist mit einem Schattenzeiger, den Schatten der Sonne und dergleichen bestimmen muß. Die bedeutsamste Stelle, welche wir deshalb der französischen Übersetzung entnehmen, lautet: „Wird eine Hauptstadt angelegt, so ebnen die Erbauer, tsiang jîn, den Boden nach dem Wasser, indem sie sich des hängenden Seils bedienen. Sie stellen den Pfosten mit dem hängenden Seile auf. Sie beobachten mit Hilfe des Schattens. Sie machen einen Kreis und beobachten den Schatten der aufgehenden Sonne und den Schatten der untergehenden Sonne.“ Das hängende Seil aber wird uns dahin erläutert, es befänden sich 8 Seilstücke am oberen Teile des Pfahles befestigt, 4 längs der Kanten, 4 in der Mitte der Seitenflächen, und wenn diese 8 Seilstücke sämtlich dicht am Pfahle herunterhängen, so sei seine senkrechte Aufstellung gewährleistet.

Für jeden Leser dieses Bandes muß hier mancherlei auffallen: die Nivellierung nach der Wasserfläche, die Bestätigung des Senkrechtstehens eines Pfahles durch hängende Seilstücke, die Benutzung eines Schattenzeigers, die Beobachtung des Schattens der auf- und der untergehenden Sonne zur Orientierung nach den Himmelsgegenden, das sind alles Dinge, die uns in Alexandria oder aus Alexandria stammend in Rom begegnet sind, die mindestens im ersten vorchristlichen Jahrhunderte im Westen bekannt waren und uns nun im fernsten Osten zu Gesicht

---

[1]) Tcheōu lẏ Buch XXVI, Nr. 15 und 18; Buch XXX, Nr. 6—10; Buch XXXIII, Nr. 60; Buch XLIII, Nr. 19 flgg. Letztere Stelle T. II, pag. 553 der Übersetzung.

kommen. Es dürfte kaum einen anderen Ausweg geben, als entweder mit den heißspornigsten Sinologen anzunehmen, die ganze Mathematik und Astronomie sei altchinesische Erfindung und sei von dort zu den Völkern des Westens gelangt, oder aber mit den Zweiflern unter den Chinesen selbst die Entstehung des Tcheōu lỳ in eine Zeit kurz vor Christi Geburt herabzulegen und zu schließen, es müsse damals schon aus Alexandria über Indien, wo wir auch ein sehr einfaches Wassernivellement hätten nachweisen können[1]), oder wieder aus Babylon, dessen mathematische Vergangenheit uns von Abschnitt zu Abschnitt merkwürdiger und erforschungsbedürftiger wird, dergleichen nach China gedrungen sein. Diese Zwangswahl wird unseren Lesern noch mehr als einmal im Laufe dieses Kapitels sich aufdrängen, auch wenn wir nicht darauf aufmerksam machen, hat sich ihnen vielleicht schon geboten, als wir vom 60 jährigen Zyklus des Huâng tì sprachen. Wir haben in der letztangeführten Stelle des Tcheōu lỳ: „Sie machen einen Kreis und beobachten den Schatten der aufgehenden Sonne und den Schatten der untergehenden Sonne" das uns wohlbekannte Orientierungsverfahren erkannt. Daß wir in dem vielleicht auch anderer Deutung fähigen Wortlaut nicht mehr hinein als heraus lesen, beweist eine Stelle eines mathematischen Werkes, mit welchem wir uns jetzt beschäftigen müssen.

„Wenn die Sonne zu erscheinen beginnt, errichte eine Beobachtungsstange und beobachte den Schatten. Beobachte den Schatten aufs neue, wenn die Sonne untergeht. Die beiden Hauptschattenpunkte, welche sich entsprechen, bezeichnen Ost und West. Teile deren Entfernung hälftig und ziehe eine Linie nach der Beobachtungsstange hin, so wirst Du Süd und Nord bestimmt haben." So unzweideutig spricht sich der Tcheou pei aus[2]).

Der Tcheou pei oder tcheou pei swan king, d. h. heiliges Buch (king) der Rechnung (swan), welches genannt ist Beobachtungsstange (pei) im Kreise (tcheou), besteht aus zwei Teilen, welche sich scharf unterscheiden lassen. Im ersten wie im zweiten Teile wird zwischen zwei Männern, von denen der eine den Lehrer, der andere den Schüler darstellt, ein wissenschaftliches Gespräch geführt, welches auf den Schattenzeiger sich bezieht. Aber die beiden Redner wechseln. Im ersten Teile sind es Tcheōu kong und der Gelehrte Schang kao, und sie beziehen sich auf die Kenntnisse, welche Kaiser Fŭ hī und

---

[1]) L. Rodet, *Leçons de calcul d'Aryabhata* pag. 27—28. [2]) Ed. Biot, *Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé Tcheou pei, littéralement: Style ou signal dans une circonférence* im *Journal Asiatique* vom Juni 1841, pag. 593—639. Die hier angeführte Stelle der künftig als Tcheou pei zu zitierenden Übersetzung auf pag. 624.

der nicht minder sagenberühmte Kaiser Yu besessen haben. Im zweiten Teile wird ein Yung fang von einem Tchin tsoe unterrichtet. Die Redner des I. Teils sind Persönlichkeiten aus dem Anfange der Tcheōu-Dynastie, welche um 1100 v. Chr. gelebt haben sollen. Die Redner des II. Teils kennt man nicht, doch ist hier ein Zitat aus lu schi tschun tsieou des Lu pu oei vorhanden[1]), welcher letztere bekannt ist als Minister des Kaisers Tsīn schè huâng tý des Bücherverbrenners, also um 213 v. Chr. lebte. Drei ältere Kommentatoren werden für beide Teile genannt, deren ältester Tchao kun hiang von den einen in die Dynastie der östlichen Han etwa auf 200 n. Chr., von den anderen erst in die Dynastie der Tsin im IV. S. gesetzt wird. Was man von den Kommentatoren und von dem auf die Tcheōu-Dynastie zurückgeführten Alter des I. Teiles weiß — von dem II. Teile wird ohne genau bestimmte Zeitangabe nur gesagt, er sei jünger als der I. — stammt aus einer Vorrede, welche 1213 n. Chr. unter der Dynastie Sung verfaßt worden ist. In einem anderen Werke wird ferner noch berichtet[2]), der Tcheōu pei sei unter der Dynastie Thang, dann wieder unter der Dynastie Sung „einer Durchsicht" unterworfen worden. Was man aber unter Durchsicht zu verstehen habe, geht daraus hervor, daß zugestanden wird, man habe bei der letzten 120 Zeichen, mithin Wörter, verändert und 60 weggelassen.

Fassen wir diese Angaben zusammen, so steht freilich die heutige Gestalt des Werkes nur in einem Alter von noch nicht sieben Jahrhunderten fest. Nimmt man an, es seien damals und früher unter den Thang wirklich nur unwesentliche Verbesserungen getroffen worden und die Kommentatoren seien richtig datiert, so kommt man auf die Zeit zwischen 213 v. Chr. und etwa 300 n. Chr., innerhalb welcher der II. Teil entstanden sein müßte, ohne daß irgend eine Nötigung vorläge, sich der früheren Grenze mehr zu nähern als der späteren. Man könnte also z. B. eine Gleichzeitigkeit des II. Teiles mit jenem Lieou hin annehmen, welcher den Tcheōu lỳ gefälscht haben soll. Was endlich den I. Teil betrifft, so müssen wir es unseren Lesern überlassen, ob sie der Überlieferung, welche ihn von Tcheōu kong selbst herrühren läßt, Glauben schenken wollen. Uns scheint ein Beweis, gestützt darauf, daß Tcheōu kong redend eingeführt ist, gestützt ferner auf eine Vorrede, die mehr als zwei Jahrtausende nach Tcheōu kong geschrieben ist, nicht unumstößlich festzustehen, und man gestattet uns vielleicht trotz unserer vollständigen Unbekanntschaft mit der chinesischen Sprache den Hinweis, daß bei der

---

[1]) Tcheou pei pag. 616. [2]) Ebenda pag. 597.

eigentümlichen Doppelbedeutung von tcheou als Kreis und als Name einer Dynastie es nicht so gar weit entfernt lag, ein Werk von der Beobachtungsstange im Kreise dem Tcheōu zuzuschreiben. Dann freilich rückt auch das Datum des I. Teiles so weit herab, daß er nur vor der Lebenszeit des ersten Kommentators entstanden sein muß, möglicherweise auch nicht weit von der Zeit um Christi Geburt entstand.

Der I. Teil ist kurz genug, um die wichtigsten Lehren des Schang kao in Übersetzung hier anzufügen. Schang kao spricht:

„Die Wissenschaft der Zahlen stammt vom Kreise und vom rechtwinkligen Vierecke.

Der Kreis stammt von dem rechtwinkligen Viereck, und das rechtwinklige Viereck stammt vom Kreise.

Der kuu d. h. das Winkellineal stammt von 9 mal 9, welches 81 gibt.

Teile den kuu.

Mache die Breite keou d. h. den gekrümmten Haken gleich 3.

Mache die Länge kou d. h. die Hälfte gleich 4.

Der king yu d. h. der Weg, der die Winkel vereinigt, die Diagonale, ist 5.

Nimm die Hälfte des rechtwinkligen Vierecks außen herum, es wird ein kuu sein.

Vereinige sie und behandle sie gemeinschaftlich mit dem Rechenbrette, so wirst Du genau 3, 4, 5 erhalten.

Die zwei kuu bilden zusammen die Größe 25. Das ist was man die Vereinigung der kuu nennt.

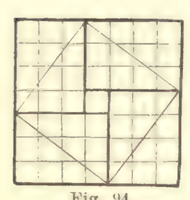
Die Wissenschaft, deren Yu sich einst bediente, um was unter dem Himmel sich befindet zu regeln, beruht auf diesen Zahlen.“

Hier folgen im Originale drei Figuren, welche in der Übersetzung, deren wir uns bedienen, nicht abgebildet, sondern nur beschrieben sind[1]). Sie sollen die Theorie des rechtwinkligen Dreiecks klar machen. Die erste Figur heißt „Figur des Seiles“ und wird folgendermaßen geschildert. In einem in 49 Teile geteilten großen Quadrate befindet sich eingezeichnet ein aus 25 Teilen bestehendes zweites Quadrat. Dieses zweite Quadrat ist selbst in vier rechtwinklige Dreiecke und ein inneres Quadrat zerlegt. Man kann nicht sagen, daß die Klarheit dieser Schilderung nichts zu wünschen übrig lasse. Wir entnehmen ihr, die Figur des Seiles habe so ausgesehen:

---

[1]) Tcheou pei pag. 601, Note 1. Biernatzki S. 64—66 hat eine deutsche Übersetzung nach englischer Vorlage, von welcher die unsrige sehr abweicht. Von den hier erwähnten Figuren sagt er kein Wort.

(Fig. 94). Da die Richtigkeit dieser Auffassung durch einen 1682 gedruckten chinesischen Kommentar zum Tcheou pei, in welchem die Erläuterungen stets den neuerdings abgedruckten Texteswörten folgen, nachträgliche volle Bestätigung gefunden hat[1]), so stellt das zweite Quadrat mit seiner Zerlegung die Figur dar (Fig. 87), deren Bhâskara um 1150 sich bediente (S. 656), etwa 60 Jahre vor der Durchsicht des Tcheou pei in der Sung-Dynastie.


Fig. 94.

Da wir den Lauf unserer wörtlichen Wiedergabe doch einmal unterbrochen haben, so sei auf einiges aus dem bisherigen Texte hingewiesen: auf den pythagoräischen Lehrsatz an dem Dreiecke von den Seiten 3, 4, 5; auf den Namen der Diagonale für die Hypotenuse, welcher zeigt, daß der Satz am Rechtecke und nicht am Dreiecke bekannt geworden war; auf den weiteren Namen Seil für Hypotenuse, welcher täuschend an die Seilspannung der Inder erinnert, wenn wir keine andere Verwandtschaft suchen wollen.

Nach jenen Figuren folgen nun weitere Lehren, wie man den *kuu*, also das Winkellineal, benutzen soll. Eben hingelegt diene es zum Gradmachen, umgekehrt zur Höhenmessung, verkehrt zur Tiefenmessung, ruhend zur Messung der Entfernung. Der *kuu* für den Kreis, d. h. der Zirkel, diene zur Herstellung des Kreises, der Doppelkuu zur Herstellung rechtwinkliger Vierecke. Die rechtwinklige Figur entspreche der Erde, die runde dem Himmel. Der Himmel sei der Kreis, die Erde sei das Quadrat.

Dieser letztere Satz bedarf gar sehr der Erläuterung. Vielleicht ist es richtig, was ein Missionär, welcher lange in China war, zur Erklärung gesagt hat[2]), Himmel und Erde seien symbolisch für die Zahlen 3 und 4; andererseits gehöre die Zahl 3 zum Kreise, dessen Umfang als dreifacher Durchmesser galt, 4 naturgemäß zum Quadrate, und so sei die weitere Vergleichung des Himmels mit dem Kreise, der Erde mit dem Quadrate zustande gekommen.

Es folgen noch einige philosophische uns unverständliche Redensarten, und nun schließt Schang kao: „Das Wissen stammt vom gekrümmten Haken, der gekrümmte Haken vom Winkellineal, das

[1]) Giov. Vacca, *Sulla Matematica degli antichi Cinesi* in dem *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (Oktober, November und Dezember 1905). Da H. Vacca zurzeit (Winter 1905—1906) unter der Leitung von H. Carlo Puini in Florenz chinesischen Studien obliegt, so dürfte in Bälde Genaueres über chinesische Mathematik bekannt werden. [2]) Tcheou pei pag. 602, Note 1 mit Beziehung auf eine Bemerkung des Pater Gaubil.

Winkellineal mit Zahlen vereinigt regelt und leitet alle Dinge.“ Tcheōu kong sprach: „Das ist wundervoll!“

Hiermit schließt der I. und, wie man behaupten will, ältere Teil des Tcheou pei. Es folgt der II. viel ausführlichere Teil. Wir brauchen ihm eine weit weniger eingehende Aufmerksamkeit zuzuwenden, teils wegen des allgemein anerkannten verhältnismäßig späten Datums seiner Entstehung, teils weil es sich in ihn mehr um astronomische Verwertung der Beobachtungsstange handelt. Nur zwei Bemerkungen scheinen uns von Wichtigkeit.

Erstlich, daß die Verhältniszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser stets als 3 gerechnet wird[1]). Das bestätigt jene Bemerkung, warum 3 die Zahl des Kreises sei, erinnert zugleich an die nach unserer Vermutung altbabylonische Umfangsformel. Aus den Durchmessern 238000, $317333\frac{1}{3}$, 357000, $396666\frac{2}{3}$, $436333\frac{1}{3}$, 476000, 810000 sind die Umfänge 714000, 952000, 1071000, 1190000, 1309000, 1428000, 2430000 gefolgert, und in einem Beispiele heißt es ausdrücklich: „Nimm einen Durchmesser von $121\frac{75}{100}$ Fußen, vervielfache mit 3, Du erhältst $365\frac{1}{4}$ Fuß.“

Dieses letztere Beispiel[2]) führt uns zu unserer zweiten Bemerkung. Der Kreisumfang wird bei den Chinesen nicht in 360 Grade, sondern in $365\frac{1}{4}$ Grade eingeteilt, und die Chinesen kennen die Jahreslänge des Sonnenjahres von $365\frac{1}{4}$ Tagen. „Unter 4 Jahren sind, wie man weiß, drei von 365 Tagen und eines von 366 Tagen; daraus weiß man, daß das Jahr im Mittel aus $365\frac{1}{4}$ Tagen besteht.“ Eine deutlichere Bestätigung unserer Ansicht, daß die Kreiseinteilung in 360 Grade nichts anderes bezwecke als die von der Sonne am Himmel scheinbar durchlaufenen Wege sichtbar zu machen (S. 40), dürfte sich kaum finden lassen. Wenn die Chinesen diese Bedeutung der Gradeinteilung überliefert bekamen und nachträglich die mit der Wahrheit besser übereinstimmende Jahreslänge von $365\frac{1}{4}$ Tagen erfuhren oder erkannten, dann, aber auch nur dann, konnten sie dem allem Zahlengefühle Hohn sprechenden Gedanken verfallen, den Kreis

---

[1]) Tcheou pei pag. 613, 614, 626. Auf pag. 614 ist zwar zu dem Durchmesser $267666\frac{2}{3}$ der Umfang 833000 statt 803000 angegeben, doch dürfte diese einzige Ausnahme auf einem Druckfehler im *Journal Asiatique* beruhen.
[2]) Ebenda pag. 625. Vgl. auch pag. 638—639.

nunmehr selbst in $365\frac{1}{4}$ Grade zu zerlegen, damit wieder jeder Grad einen Tagesweg darstelle. Außerdem sprechen mittelbare Spuren dafür, daß den Chinesen die Kreisteilung in 360 Grade gleichfalls einmal bekannt war, denn nur von ihr aus erklärt sich die Anwendung der Zahl 60 in dem sechzigjährigen Zyklus, nur von ihr aus die 30 Speichen in dem Rade des Kaiserwagens in der Tcheou-Dynastie, wie eine Abbildung sie zeigt[1]). Bei den Unterabteilungen des Grades bedienten sich dagegen die Chinesen nach einem Berichte des Paters Verbiest seit undenklichen Zeiten der Zerlegung in 100 Teile, welche man Minuten nennen könnte[2]).

Leider ist der Tcheou pei die einzige mathematische Abhandlung der Chinesen, welche durchaus übersetzt uns vorliegt. Für alle übrigen Schriften sind wir gezwungen, uns auf notdürftige Auszüge zu beziehen, von welchen nur einer eine halbwegs genügende Inhaltsanzeige des Werkes liefert, aus welchem er stammt und zugleich das Alter dieses Werkes zweifellos angibt. Die anderen Berichte leiden meistens an Unklarheit und lassen es selbst fraglich erscheinen, welches Werk von verschiedenen, die den gleichen Namen führen, eigentlich gemeint sei?

Kieou tschang oder die neun Abschnitte war (S. 670) der Titel des ältesten arithmetischen Werkes. Kieou tschang swan su d. h. Arithmetische Regeln zu den neun Abschnitten schrieb alsdann etwa ein Jahrhundert vor der christlichen Zeitrechnung ein gewisser Tschang tsang. Dieses Werk behauptet „die von den kaiserlichen Hofmeistern unter der Dynastie Tcheōu befolgten arithmetischen Grundsätze zu enthalten. Jedoch gibt es sich nicht für ein neues Originalwerk aus, sondern nur für eine revidierte und verbesserte Auflage eines viel älteren Buches, dessen Verfasser unbekannt ist. Das Werk hat bis heute mehrere neue Auflagen erlebt, ist jedoch jetzt sehr selten geworden; es hat aber viele Kommentatoren unter namhaften chinesischen Gelehrten gefunden“[3]). Gegen Ende der Dynastie Sung um 1240 schrieb Tsin kiu tschau, welchen wir (S. 674) als den Schriftsteller nannten, bei welchem die sogenannten wissenschaftlichen Ziffern zuerst erwähnt werden, sein su schu kieou tschang oder die neun Abschnitte der Zahlenkunst. Werke ähnlichen Titels von noch anderen Verfassern folgten vielfach. Wenn wir uns nun der chinesischen Rückverlegungen erinnern, welche dem

[1]) Tcheōu lỳ II, 488. [2]) Henri Bosmans S. J. in den *Annales de la société scientifique de Bruxelles*. T. XXVII Nr. 3 (April 1903). [3]) Wörtlich aus Biernatzki S. 67.

Götzen des nationalen Eigendünkels mit persönlicher Bescheidenheit das Opfer der eigenen Erfinderfreude zu bringen verlangten und in diesem Verlangen offenbar nirgend auf Widerstand stießen; wenn uns dann ein Auszug aus den neun Abschnitten gegeben[1]), aber mit keiner Silbe gesagt wird, welches von den vielen Werken, die diese Überschrift tragen, zugrunde gelegt sei, welchen geschichtlichen Wert kann das für uns haben? Doch wohl keinen anderen, als daß wir dem Auszuge das alte vielleicht auf Tschang tsang, vielleicht noch weiter hinauf zurückzuverfolgende Vorhandensein von neun Abschnitten glauben, ohne jedoch annehmen zu dürfen, diese Abschnitte hätten von jeher dieselben 246 Aufgaben enthalten, oder es sei auch nur sicher, daß die Namen der Abschnitte sich nicht verändert hätten.

Die Namen der Abschnitte[2]): 1. Viereckige Felder, 2. Reis und Geld, 3. Verschiedene Teilungen, 4. Eng und weit, 5. Körpermessung (wörtlich: überlegen und beendigen), 6. Gerechte Verteilung, 7. Überschuß und Mangel, 8. Vergleichen und recht machen (d. h. Gleichungen), 9. Dreieckslehre erinnern ungemein an Namen indischer Abschnitte, gebildet nach irgend einer Hauptaufgabe, an welche die anderen anknüpfen, wenn auch nicht immer im Inhalt ihr gleichend. Gleich im ersten Abschnitte findet sich die Regel für die Dreiecksfläche als Produkt der Grundlinie in die halbe Höhe. Die Kreisfläche zu berechnen wird nach sechs der Form nach verschiedenen Arten gelehrt: „Man multipliziere den halben Durchmesser mit dem Radius, oder nehme ein Dritteil vom Quadrat des halben Umkreises, oder ein Zwölftel vom Quadrate des Umkreises, oder ein Viertel vom dreifachen Quadrate des Durchmessers, oder ein Viertel vom Produkte aus Durchmesser und Umkreis, oder endlich das dreifache Quadrat des Radius.“ Man sieht sofort, daß die fünf letzten Regeln sämtlich auf $\pi = 3$ herauskommen. Die erste allein ist mit $\pi = 1$ gleichbedeutend und höchst auffallend dadurch, daß sie in einem Atem von dem halben Durchmesser und dem Radius spricht. Wir möchten daher hier einen Druck- oder Übersetzungsfehler annehmen und lesen „man multipliziere den halben Umkreis mit dem Radius“, eine Vorschrift, welche sonst fehlen würde, und welche nicht mit $\pi = 3$ in Widerspruch steht.

Das genauere Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser war einem Schriftsteller Tsu tschung tsche, der dem Ende des

[1]) Biernatzki S. 73—76. [2]) Die drei ersten Namen nach Biernatzki, die sechs folgenden nach L. Nix. Vgl. W. Schmidt im Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker 1890—1901 S. 63.

VI. S. angehören soll, als $\pi = \frac{22}{7}$ bekannt und Liu hwuy[1]) benutzte $\pi = \frac{157}{50}$.

Der 9. der neun Abschnitte beschäftigt sich mit 24 geometrischen Aufgaben, welche mittels des rechtwinkligen Dreiecks gelöst werden. Über die Methode läßt uns der Auszug im unklaren, doch dürfte wohl der pythagoräische Lehrsatz angewandt sein, der im Tcheou pei uns gleichfalls begegnet ist. Von den Körpermessungen im 5. Abschnitte ist uns nur ganz allgemein berichtet, die angewandten Formeln scheinen mithin zu besonderen Anmerkungen eine dringende Veranlassung nicht geboten zu haben. Aus den übrigen Abschnitten erwähnen wir Gesellschafts- und Vermischungsrechnungen im 3. und 6. Abschnitte, Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln im 5. Abschnitte, Gleichungen im 8. Abschnitte.

Die Geometrie dürfte wohl den schwächsten Teil chinesischer Mathematik gebildet haben, kaum über die niedrigsten Anwendungen des Satzes vom rechtwinkligen Dreiecke sich erhebend; denn wenn Ko schau king um 1300 unter den Mongolen die sphärische Trigonometrie erfunden haben soll, welche in einem Werke aus der Dynastie Ming wiederholt dargestellt sei[2]), so klingt das doch sehr nach arabischen ins Chinesische nur übersetzten Schriften.

In der Lehre von den Gleichungen dagegen müssen wir den Chinesen selbsttätiges Vorgehen nachrühmen, denn hier finden wir in der Tat Fortschritte, welche weder auf indischem Boden uns bekannt geworden sind, noch überhaupt anderswo so frühzeitig gemacht wurden. Hauptquelle für die Lehre von den bestimmten wie von den unbestimmten Gleichungen sind Schriften desselben Tsin kiu tschau aus der Mitte des XIII. S., welchen wir auch unter den Verfassern von Neun Abschnitten der Rechenkunst nannten. Die Lehre von den bestimmten Gleichungen findet sich in dessen Aufstellung der himmlischen Monade, *leih tien yuen yih*[3]), und ist erläutert durch Le yay jin king, welcher während der Mongolenzeit gelebt hat[4]). Die Monade, yuen, ist das durch ein besonderes Schriftzeichen dargestellte Symbol der ersten Potenz der unbekannten Größe, also das yâvattâvat der Inder. Auch die Zahl, welche als ein Gegebenes in der Gleichung auftritt, die rûpa der Inder, hat einen Namen täe. Die Zeichen für yuen und täe werden rechts von den betreffenden

---

[1]) Dessen Lebenszeit anzugeben sind wir nicht imstande. Biernatzki sagt nämlich S. 63–64, er habe früher als *Tsu tschung tsche* gelebt, und S. 68, er habe im VII. S. gelebt, und sein Werk sei im VIII. S. neu aufgelegt worden! [2]) Biernatzki S. 70. [3]) Ebenda S. 84 flgg. [4]) Ebenda S. 70 und 84.

Zahlenkoeffizienten geschrieben. Die Gleichungen sind vor dem Anschreiben geordnet und zwar so, daß die unbekannten Dinge den bekannten gleich gesetzt sind. Ein Gleichheitszeichen tritt dabei nicht auf, ist vielmehr aus der bloßen Stellung ersichtlich. Die unterste Reihe mit rechts stehendem täe enthält die bekannte Zahl, die darüber befindliche mit rechts stehendem yuen die Unbekannte, die nächsthöhere ohne weiteren Zusatz enthält die zweite Potenz der Unbekannten usf. Eine fehlende Potenz der Unbekannten muß, da die Höhe der Potenzen nach dem Stellungswerte zu entnehmen ist, durch Null angedeutet werden. Von den beiden Wörtern täe und yuen kann eines, beliebig welches fehlen, da die Verständlichkeit dadurch noch nicht aufgehoben ist. Positive und negative Zahlen werden durch die Farbe des Druckes unterschieden. Erstere druckt man rot, letztere schwarz. So heißt z. B. unser $14x^3 - 27x = 17$ auf chinesisch, wenn wir die Benutzung unserer Ziffern beibehalten und die Farben durch die links beigesetzten Anfangsbuchstaben ${}_r$ (rot) und ${}_s$ (schwarz) unterscheiden:

${}_r14$		${}_r14$		${}_r14$
${}_r00$		${}_r00$		${}_r00$
	oder		oder	
${}_s27$ *yuen*		${}_s27$		${}_s27$ *yuen*
${}_r17$ *täe*		${}_r17$ *täe*		${}_r17$

Es scheint dabei eine Annäherungsmethode für Gleichungen höherer Grade bestanden zu haben, in welcher man eine Ähnlichkeit mit der sogenannten Hornerschen Näherungsmethode entdecken will[1]), die aber wenigstens in unserer Vorlage zu dürftig behandelt ist, als daß wir es wagten, diese Meinung zu stützen oder zu widerlegen.

Die Lehre von den unbestimmten Gleichungen scheint unter dem Namen große Erweiterung, Ta yen, zuerst von Sun tse in dunkeln Versen beschrieben worden zu sein[2]), und dieser Verfasser wird gegenwärtig in die Dynastie Han im III. S. n. Chr. gesetzt. Besondere Anwendung fand die Regel Ta yen durch Yih hing, einen Geistlichen unter der Dynastie Thang, welcher 717 das Werk Ta yen lei schu darüber verfaßte, und dieses Werk hat wieder unser Tsin kiu tschau neu bearbeitet. Das Hauptbeispiel heißt in wörtlicher

---

[1]) Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878, S. 964—965. [2]) Biernatzki S. 77 flgg. Vgl. besonders L. Matthiessen, Vergleichung der indischen Cuttaca- und der chinesischen Ta yen-Regel in der Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht (1876) VII, 78—81. Ebenderselbe hatte schon 1874 in der Zeitschr. Math. Phys. XIX, 270—271 die Ta yen-Regel erklärt, die vor ihm nie verstanden worden war.

Übersetzung: „Dividiert durch 3 gibt Rest 2; schreibe 140. Dividiert durch 5 gibt Rest 3; schreibe 63. Dividiert durch 7 gibt Rest 2; schreibe 30. Diese Zahlen addiert geben 233, davon subtrahiert 210 gibt 23 die gesuchte Zahl. Für 1 durch 3 gewonnen setze 70. Für 1 durch 5 gewonnen setze 21. Für 1 durch 7 gewonnen setze 15. Ist die Summe 106 oder mehr, subtrahiere hiervon 105 und der Rest ist die gesuchte Zahl."

Man hat nun vollständig zutreffend darauf aufmerksam gemacht[1]), daß dieselben Divisoren 3, 5, 7 und dieselben gewonnenen Zahlen 70, 21, 15 mit deren Anwendung zur Auffindung von 23 auch in einer griechischen Aufgabe vorkommen, deren Text in einer Handschrift aus dem Ende des XIV. oder Anfang des XV. S. sich erhalten hat, während ein Verfasser nicht genannt ist. Es ist nicht unmöglich, daß die chinesische Aufgabe und ihre Auflösung etwa durch arabische Vermittlung irgend einem Byzantiner bekannt geworden sein kann, der sie sich aufnotierte. Ein umgekehrter Gang, daß also hier wie so vielfach im Westen Bekanntes nach China drang, ist kaum anzunehmen, weil nur im chinesischen Texte die Begründung des Verfahrens angedeutet ist, freilich schwer zu verstehen, aber doch zu verstehen, wie die Erfahrung gezeigt hat.

Der Sinn ist nämlich folgender. Soll eine Zahl x gefunden werden, welche durch m_1, m_2, m_3 geteilt die Reste r_1, r_2, r_3 liefere, so sucht man drei Hilfszahlen k_1, k_2, k_3, welche Multiplikatoren, *tsching su*, genannt werden, und deren jede vervielfacht mit ihrer Erweiterungszahl, *yen su*, d. h. mit dem Produkte derjenigen m, welche einen andern Index als das betreffende k führen, und dann geteilt durch ihre bestimmte Stammzahl, *ting mu*, d. h. das dritte m den Rest 1 liefern. So gibt unsere Aufgabe unter Anwendung von Kongruenzen: $5 \cdot 7 \cdot k_1 \equiv 1 \pmod 3$; $3 \cdot 7 \cdot k_2 \equiv 1 \pmod 5$; $3 \cdot 5 \cdot k_3 \equiv 1 \pmod 7$. Daraus werden nun gewonnen: aus 3 die Zahl $k_1 = 2$ oder $5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$; aus 5 die Zahl $k_2 = 1$ oder $3 \cdot 7 \cdot 1 = 21$; aus 7 die Zahl $k_3 = 1$ oder $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$. Wie diese Zahlen gewonnen wurden, ist auch nicht andeutungsweise gesagt, die Vermutung liegt daher am nächsten, man werde sich durch Probieren geholfen haben. Nun wird jede der gewonnenen Zahlen $m_2 m_3 k_1 = 70$, $m_1 m_3 k_2 = 21$, $m_1 m_2 k_3 = 15$ mit dem entsprechenden Reste $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ vervielfacht und ihre Summe $140 + 63 + 30 = 233$ gebildet, von welcher man die Stammerweiterung, *yen mu*, d. h.

[1]) Matthiessen in der Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht. Vgl. Nikomachus (ed. Hoche) pag. 152—153 und Friedleins Anzeige dieser Ausgabe in der Zeitschr. Math. Phys. (1866) Bd. XI, Literaturzeitung S. 71.

das Produkt der drei m, $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, so oft als möglich abzieht und hat damit

$$x = m_2 m_3 k_1 r_1 + m_1 m_3 k_2 r_2 + m_1 m_2 k_3 r_3 - c m_1 m_2 m_3$$

gefunden, wie z. B.

$$x = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 - 2 \cdot 105 = 23.$$

Es steht ebenso fest, daß dieses Verfahren von der indischen Zerstäubung, mit welchem man es zu vergleichen liebte, bevor man es verstand, durchaus verschieden ist, als daß es eine wahre Methode genannt zu werden verdient, deren Erfinder mit dem glücklichsten Scharfsinne ihrer Aufgabe zu Leibe zu gehen wußten[1].

Etwas später als Tsin kiu tschau lebte Tschu schi kih, welcher 1303 den kostbaren Spiegel der vier Elemente, *Sze yuen yuh kihn*, veröffentlichte. Hier finden sich die *lihn* bei Berechnung von Zahlen bis zur achten Potenz als eine alte Methode. In unseren Ziffern sehen dieselben folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Es sind[2]) die den Arabern freilich seit dem Ende des XI. S. bekannten Binomialkoeffizienten zu der Gestalt geordnet, welche man in Europa seit dem Ende des XVII. S. das arithmetische Dreieck genannt hat. Das hier auftretende Wort *lihn* wird auch bei der früher erwähnten Annäherungsmethode zur Auflösung von Gleichungen höherer Grade mehrfach benutzt und hat dadurch Anlaß zu dem gleichfalls erwähnten Deutungsversuche dieser Methode gegeben.

Das arithmetische Dreieck ist auch in einem letzten Werke wiedergefunden worden, von welchem wir einigermaßen eingehender unterrichtet sind, da wenigstens die Inhaltsangabe desselben in

[1]) Matthiessen hat l. c. mit Recht hervorgehoben, daß die Methode *ta yen* mit derjenigen, welche Gauß in den *Disquisitiones arithmeticae* § 32—36 gelehrt hat, übereinstimme. Vgl. Dirichlet, Zahlentheorie § 25 (III. Auflage. 1879, S. 56—57). [2]) Biernatzki S. 87—89.

Übersetzung vorhanden ist[1]). Wir meinen die Grundlagen der Rechenkunst, *swan fa tong tsong*, welche unter Wan ly aus der Dynastie Ming 1593 dem Drucke übergeben worden sind. Es heißt in demselben, jene Zahlenanordnung finde sich schon in einem älteren Werke des U schi, aber unser europäischer Gewährsmann fügt ausdrücklich hinzu, dieser Name sei ein so gewöhnlicher, daß Folgerungen aus demselben nicht zu ziehen seien, und so wissen wir nicht einmal, ob dieser U schi früher oder später als Tschu schi kih gelebt hat. Im *Swan fa tong tsong* werden noch mancherlei andere Dinge gerühmt, so die Anwendung der Verhältniszahl $\pi = \frac{22}{7}$, das Vorkommen von Dreieckszahlen und Pyramidalzahlen, magische Quadrate, Multiplikationen unter Anwendung von dreieckigen Feldern, also vielleicht so, wie wir sie (S. 611) bei den Indern in Übung fanden. Wir berichten genauer nur über eine Messungsaufgabe, welche Verwandtschaft mit in Europa vorkommenden Verfahren (S. 556) an den Tag legt. Die Höhe eines zugänglichen Baumes wird zu kennen verlangt[2]). Man entfernt sich von dessen Fuße um eine gemessene Strecke, stellt eine Signalstange auf und entfernt sich dann noch weiter, bis man mittels eines hohlen Rohres die Spitze der Stange und des Baumes in einer geraden Linie sieht. Die Höhe des Auges über dem Boden wird nun zu 4 Fuß geschätzt und alsdann die Höhe des Baumes mit Hilfe ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke berechnet.

Wir sind der Zeit schon sehr nahe, in welcher die europäischen Missionäre an dem Hofe des den Wissenschaften ergebenen Kaisers Kang hi freundliche Aufnahme fanden. Er schätzte in ihnen die höhere Bildung, welche er, sich darin als kein Nationalchinese verratend, wohl anerkannte. Aber einen chinesischen Gelehrten Mei wuh gan, einen Anhänger der verjagten Ming-Dynastie und trotzdem wegen seines Wissens bei dem fremden Kaiser wohlgelitten, wurmte das Übergewicht dieser Europäer. Er behauptete[3]), von den durch sie eingeführten Theorien sei die bei weitem größte Mehrzahl den Chinesen schon Jahrhunderte früher bekannt gewesen, und dieses nur aus Unkunde mit der heimischen Literatur übersehen worden. Ja aus China stamme alle Wissenschaft, übersetzt sei sie zu den Bewohnern anderer Länder gedrungen und habe dort weiter gelebt, während sie in China selbst seit der großen Bücherverbrennung auf-

---

[1]) Ed. Biot im *Journal des Savants* 1839 pag. 270—273 und besonders im *Journal Asiatique* für März 1839 pag. 193—217. Die Bemerkung über U schi pag. 194. [2]) *Journal Asiatique* für März 1839, pag. 212. [3]) Biernatzki S. 60—62.

gehört habe sich zu entwickeln, wie sie begonnen hatte. Jetzt suchte man wieder eifriger und allgemeiner nach den alten Schriften und fand sie.

Wieviele deren echt, wieviele unecht waren, wer könnte diese Frage ohne die eingehendsten Kenntnisse der verschiedensten Art beantworten? Für die mathematischen Schriften muß notwendigerweise neben den sprachlichen Merkmalen höheren oder niedrigeren Alters, vielleicht noch vor diesen der Inhalt zur Beantwortung beitragen, und diesem Inhalte, soviel uns davon bekannt geworden ist, entnehmen wir die gleiche Folgerung, welche (S. 669) als vorläufige Ansicht schon von uns geltend gemacht worden ist, als wir die Ursprungs- und Echtheitsfrage zuerst aussprachen. Wir glauben nicht an eine hohe Entwicklung der ursprünglichen chinesischen Mathematik. Wir glauben vielmehr, daß das meiste aus verschiedenen Quellen, unter welchen die babylonische wohl nicht die mindest ergiebige gewesen ist, dorthin zusammenfloß. Wir gehen aber andererseits auch nicht so weit, daß wir den Chinesen jede einzelne Leistung auf mathematischem Gebiete absprechen. Die Algebra scheint wie den Indern so auch den Chinesen das ihrem Geiste angemessene Arbeitsfeld geboten zu haben, und auf diesem Felde wuchsen Früchte, denen wir bis auf weiteres die chinesische Heimat abzuerkennen in keiner Weise gerechtfertigt sind. Die Methode der großen Erweiterung zur Auflösung gleichzeitig bestehender unbestimmter Gleichungen ersten Grades dürfte die edelste dieser Früchte sein.

Für die verhältnismäßig geringe Meinung, welche wir von der altchinesischen Mathematik hegen, können wir eine mittelbare Bestätigung in den entsprechend geringen Kenntnissen finden, die fast zweifellos von China aus weiter nach Osten vordrangen. Wir berufen uns in diesem Sinne auf die Mathematik der Japaner.

Was wir von derselben wissen, stammt unmittelbar oder mittelbar aus neueren geschichtlichen Untersuchungen dort einheimischer Gelehrten, welche das Ergebnis ihrer Forschungen teils in japanischer teils in englischer Sprache zum Drucke gegeben haben. Insbesondere sind es die Herren Endō, Kikuchi, Fujisawa, Hayashi, welche sich um den Gegenstand verdient gemacht haben. Sie unterscheiden eine Anzahl von Zeiträumen in der Geschichte der japanischen Mathematik und zwar:

1. Die Zeit bis 553 nachchristlicher Zeitrechnung, in welcher sie eine von außen unbeeinflußte Bildung vermuten, welche aber nicht über das Zählen und das elementarste Rechnen hinausging. Von der Art, wie das letztere geübt wurde, ist nicht der geringste Bericht vorhanden. Beim Zählen scheinen Gruppen von je 10^4 Einheiten

eine wesentliche Rolle gespielt zu haben. Wir erkennen darin die griechischen Myriaden wieder, natürlich ohne aus dieser Ähnlichkeit eine Beeinflussung Japans von Griechenland oder gar Griechenlands von Japan folgern zu wollen. Sprachliche Gründe — wir meinen das Vorhandensein eines einfachen Wortes für den Begriff zehntausend — können an mehreren Orten zugleich und unabhängig voneinander solche Gruppierungen zur Folge gehabt haben. An diese älteste Zeit schloß sich

2. die Zeit von 554—1591, während welcher chinesische Mathematik, zuerst auf dem Umwege über Korea, dann bei sich steigerndem Verkehre unmittelbar, in Japan eindrang. So kam das *Kieou tschang*, die neun Abschnitte (S. 670), nach Japan, ohne jedoch dort weiter ausgebildet zu werden. Im Gegenteil geriet das anfänglich freudig aufgenommene fremde Wissen allmählich in Mißachtung und Vergessenheit.

Erst in dem als weitere Periode unterschiedenen Zeitraume von 1592 an scheint sich, zum Teil unter holländischem Einflusse, eine japanische Mathematik gebildet zu haben, welche wirklich erzählenswert ist, und von ihr soll im III. Bande dieses Werkes im 110. Kapitel die Rede sein, wo die Ähnlichkeiten und Unähnlichkeiten, welche zwischen enropäischer und japanischer Mathematik hervorzuheben sind, deutlicher betont werden können.

Hier kam es uns ja nur darauf an, den nach unserer Meinung geringen Wert altchinesischen mathematischen Wissens durch dessen geringe Einwirkung auf ein Volk zu belegen, dessen Begabung in späterer Zeit einen Zweifel nicht aufkommen läßt.

VII. Araber.



32. Kapitel.

Einleitendes. Arabische Übersetzer.

Wenn in den beiden vorigen Abschnitten der Ursprung der Kenntnisse, welche bei den Indern und Chinesen nachweislich waren, unsere Kritik herausforderte und uns die Hoffnung kaum gestattet ist, daß bei den einander schnurstracks entgegenstehenden Schulmeinungen in dieser Beziehung unsere Auffassung von allen Lesern geteilt des Charakters einer wenn auch durch Gründe gestützten doch wesentlich persönlichen Meinung entkleidet werde, so verhält es sich ganz anders mit der arabischen Mathematik[1]).

Daß ein Volk Jahrhunderte lang jedem Kultureinflusse von seiten seiner Nachbarvölker unzugänglich war, daß es selbst in jener ganzen Zeit keinen Einfluß üben konnte, daß es dann plötzlich seinen Glauben, seine Gesetze und mit diesen seine Sprache weiten Ländern aufzwang, welche an Ausdehnung kaum von dem Machtbereiche anderer Eroberer erreicht worden sind, ist für sich eine so regelwidrige Erscheinung, daß es wohl der Mühe lohnt, ihren Ursachen nachzuforschen, daß aber zugleich mit ihr die Gewißheit gegeben ist, die plötzlich auftretende anderen Entwicklungen ebenbürtige Geistesreife könne aus sich selbst unmöglich zustande gekommen sein.

---

[1]) Wir folgen in diesem Abschnitte in der Anordnung des Stoffes wesentlich Hankels arabischen Kapiteln S. 223—293. Von Büchern allgemeinen Inhaltes, deren wir uns außer den auch von Hankel benutzten bedient haben, seien besonders erwähnt: G. Weil, Geschichte der islamitischen Völker von Mohammed bis zur Zeit des Sultan Selim übersichtlich dargestellt. Stuttgart 1866, und Alfr. v. Kremer, Kulturgeschichte des Orients unter den Chalifen. Wien 1877. Suter, Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm. Übersetzung mit Anmerkungen in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VI, 1—87, 1892. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik X, 1—278, 1900 nebst Nachträgen in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 155—185, 1902. Wir zitieren diese Werke als Kremer, Weil, Fihrist, Suter, die Nachträge an den wenigen Stellen, wo wir uns ihrer bedienen, in ausführlicher Bezeichnung. Bei der ersten Auflage hat uns auch ein inzwischen allzufrühe aus dem Leben geschiedener Orientalist, Heinrich Thorbecke, in ausgiebigster Weise unterstützt.

Muhammed floh im September 622 aus Mekka. Er starb im Juni 632. Zehn Jahre hatten ausgereicht, ihn auf der Flucht aus seiner Vaterstadt, ihn kämpfend mit wechselndem Erfolge, ihn endlich auf dem Gipfel seiner Macht zu sehen, und, was nur wenigen gleich ihm beschieden war, er starb auf einem Höhepunkt angelangt. Seine Nachfolger — Chalifen — setzten das von ihm begonnene Werk fort, die Glaubenssätze, welche Muhammed als ihm offenbart verkündigt hatte, mit dem Schwerte in der Hand zu verbreiten. Nicht eigentliche Eroberung war der nächste Zweck der Kriege. Die Annahme der neuen Religion durch die Bekriegten genügte den Siegern in erster Linie, und auch wo der Glaubensfeldzug mit Ländererwerb endigte, blieb der erste Beweggrund an manchen Erscheinungen sichtbar. Der Fremde war nicht länger der Unterworfene, als er selbst wollte. Mit dem Übertritte zum Islam erlangte er das Bürgerrecht, trat er in die Rechte der herrschenden Nation ein[1]), nur Eines fehlte ihm: Stammesgemeinschaft, da der Muselmann auf die alte Nationalität verzichten mußte, der neuen nicht von selbst angehörte. Aber auch diesem Mangel konnte er abhelfen. Er trat meistens zu dem herrschenden Stamme, zu dessen Anführer oder zur regierenden Dynastie in das Klientelverhältnis. In der nächsten Generation waren seine Nachkommen schon vollständig den neu gewonnenen Freunden gleichartig und galten bald als echte Araber, denen sie in Sprache und Sitte so schnell als möglich sich anzuschließen bedacht waren. Diesen durch den Übertritt zu erwerbenden Vorteilen vereinigt mit der geschichtlichen Tatsache, daß in vielen Ländern, gegen welche die ersten Züge der Mohammedaner sich wandten, religiöse Gleichgültigkeit, in anderen Verkommenheit und Widerstandslosigkeit ihnen gegenübertrat, vereinigt mit der weiteren Tatsache, daß nationalarabische Volksteile an den verschiedensten Orten des Ostens längst vor dem Auftreten des Propheten verbreitet waren, welche auch den Stammesgegensatz zwischen Siegern und Besiegten zu lindern sich eigneten, mag eine wesentliche Rolle bei der raschen Ausbreitung des Islam zugefallen sein. Eben diese Art der Ausbreitung erklärt es aber, daß die arabische Sprache in fast unglaublich kurzer Zeit als herrschende Sprache sich aufdrängen, daß z. B. noch nicht volle 200 Jahre nach Muhammed unter dem Chalifen Almamûn, welcher uns noch oft beschäftigen wird, ein Statthalter in Persien seinen Wohnsitz haben konnte, der nicht ein Wort persisch verstand[2]).

Den geistig kräftigeren Elementen, welche an der Religion ihrer

---

[1]) Kremer II, 147. [2]) Ebenda 150, Anmerkung 1.

Väter hingen und nicht zum Übertritte zu bewegen waren, sondern das blieben als was sie erzogen worden waren, meistens nestorianische Christen und Juden, wurde freilich dem Wortlaut des Gesetzes nach mit Bedrückung mannigfacher Art gedroht. Schon Chalife Omar 634—644, derselbe, welcher das Jahr 622 der Flucht Muhammeds als Hidschra zum Anfang einer neuen Zeitrechnung schuf, erließ das Verbot, daß kein Jude oder Christ in Staatskanzleien angestellt werde[1]. Hârûn Arraschîd 786—809 befahl, alle Kirchen in dem Grenzgebiete niederzureißen und verordnete, daß die Nicht-Muselmänner sich einer besonderen Kleidung zu bedienen hätten[2]. Aber viele dieser Gesetze standen nur auf dem Papiere und wurden massenhaft umgangen. Wenn wir hören, daß Hârûn Arraschîd selbst einen nestorianischen Christen Dschibril ibn Bachtischûʿ zum Leibarzt hatte, der sich bei ihm jährlich auf 280 000 Dirham (das sind über M. 200 000) stand[3], wenn Chalife Almuktadir 869—870 das Verbot Andersgläubige anzustellen mit der Klausel versah: es sei denn als Ärzte oder Geldwechsler, so wird uns der Grund nicht lange verborgen bleiben, warum man so schonend in mancher Beziehung verfuhr.

Unter den echten Arabern war die Schreibkunst noch wenig verbreitet. Es ist zweifelhaft, ob Muhammed selbst in späteren Jahren sie sich aneignete[4]. Gewandtheit mit dem Schreibrohre umzugehen besaßen noch lange Zeit nur Christen und Juden, und so mußte man wohl oder übel sich ihrer bedienen. Namentlich die nestorianischen Christen waren es, die das staatliche Rechnungswesen fast allein besorgten und ebenso als Ärzte unentbehrlich waren. Auch Juden, Perser, Inder betrieben die praktische Medizin, aber das christliche Element war entschieden vorherrschend. Erst der große Râzî, dessen Todesjahr auf 932 fällt, eröffnet den Reigen der mohammedanischen Ärzte[5]. Dagegen war schon unter den persischen Sassanidenkönigen im V. S. ungefähr in der Stadt Dschundaisâbûr in der Provinz Chuzistan eine von Nestorianern geleitete und besuchte medizinische Schule gegründet worden. Diese Schule wurde durch die Eroberung in ihrer Blüte keineswegs gehemmt, aus ihr gingen die besten und berühmtesten Ärzte ihrer Zeit hervor, aus ihr insbesondere die Leibärzte der Chalifen, und wir haben an einem Beispiele gesehen, wie dieselben bezahlt wurden. Die ungeheuren Geldsummen, welche rasch ihren Besitzer zu wechseln pflegten, bilden überhaupt ein kennzeichnendes Merkmal der damaligen Verhältnisse,

---

[1] Weil S. 20. [2] Kremer II, 167. [3] Ebenda 179. [4] Weil S. 3. [5] Kremer II, 183.

und man hat gewiß mit Recht auf diesen Umstand hingewiesen[1]), um die Raschheit der Entwicklung, die eben so große Jähe des Verfalls der orientalisch-arabischen Bildung zu erklären. Wo nicht bloß der Beherrscher der Gläubigen über ungezählte Schätze verfügte, wo nur als ein Beispiel unter vielen von einem Kaufmanne in Al-Basra unter Al-Mahdî 775—785 uns berichtet wird, der ein tägliches Einkommen von 100 000 Dirham (beinahe 30 Millionen Mark jährlich!) besaß, so begreifen wir, welche Treibhaustemperatur durch solche Mittel den Fleiß anzufeuern geschaffen wurde.

Eine ungemein fruchtbare übersetzende Tätigkeit begann, sobald das Arabische die allgemeine Literatursprache geworden war[2]). Aus dem Syrischen, aus dem Persischen, aus dem Griechischen, aus dem Indischen wurden durch eingeborene Andersgläubige wertvolle Werke in das Arabische übertragen. Die Regierungen der Chalifen Almanṣûr 754—775, Hârûn Arraschîd 786—809, Almamûn 813—833 sind für solche Tätigkeit ganz besonders günstig gewesen, und hier beginnt auch die Geschichte der Mathematik bei den Arabern.

Vielleicht sollte man zugunsten einer Persönlichkeit noch um einige Chalifate weiter hinaufgreifen bis zu dem Omaijaden ʿAbd Almelik 684—705, während die drei obengenannten dem Geschlechte der Abbasiden angehörten. Unter ʿAbd Almelik, welcher gleich den anderen Omaijaden in Damaskus residierte, war ein Christ von echtgriechischer Herkunft, Sergius, Schatzmeister, und dessen Sohn Johannes von Damaskus folgte in noch jugendlichem Alter wahrscheinlich dem Vater bei dessen Tode in dieser Stellung nach. Bald aber zog er sich nach dem Kloster Saba zurück, wo er nach den einen 760, nach den andern gar erst 780 starb[3]). Wir haben früher (S. 464) gesehen, daß ihm, dessen schriftstellerische Tätigkeit allerdings auf theologischem Gebiete liegt, nachgerühmt wird, er sei in der Geometrie so bewandert gewesen wie Euklid, in der Arithmetik wie Pythagoras und Diophantus, aber das ist auch alles, was wir von ihm als Mathematiker wissen.

Die Abbasiden folgten im Chalifate auf die Omaijaden im Jahre 750 in der Person des grausamen, undankbaren, rachsüchtigen und meineidigen Abû'l ʿAbbâs, dessen blutgetränkte Regierung nur vier Jahre dauerte[4]). Wir erwähnen aus dieser Zeit nur eine Neuerung. Die Heiligkeit des Nachfolgers des Propheten gestattete nicht mehr einen unmittelbaren Verkehr zwischen ihm und dem Volke. Ein Träger seiner Befehle mußte die Vermittelung hinfort übernehmen, und ein solcher Träger, arabisch Wezîr, wurde demgemäß ernannt. Wir

[1]) Kremer II, 190. [2]) Ebenda 169. [3]) Ebenda 402. [4]) Weil S. 131.

stehen jetzt wieder an dem Regierungsantritt Almanṣûrs, der nach den verschiedensten Richtungen eine neue Zeit einleitete und wie zum äußeren Zeichen derselben seinen Wohnsitz von Damaskus nach Bagdad an den Tigris verlegte, an die Stelle, wo im Umkreise nur weniger Meilen einst Babylon und Ktesiphon mächtigen Königen zum Mittelpunkt ihrer Herrschaft gedient hatten. Der Handel belebte sich sichtlich. Die Schiffahrt im persischen Meerbusen und darüber hinaus brachte den Kaufleuten namentlich von Al-Baṣra an der Mündung des mit dem Euphrat vereinigten Tigris jene Reichtümer, von denen vorübergehend die Rede war, brachte ihnen Menschenkenntnis und Welterfahrung und Wissen der mannigfachsten Art.

Al-Baṣra wurde jetzt der Ort, von wo auch geistige Güter der Reichshauptstadt zugeführt wurden[1]). ʿAmr ibn ʿUbaid lebte in Al-Baṣra, ein Philosoph von sittlicher Reinheit und geistiger Größe, der sich tief erbittert über die schmachvolle Regierungsweise der letzten Omaijaden lebhaft mit politischen Umtrieben beschäftigte und für seinen Teil an dem Sturze wenigstens eines Tyrannen aus jenem Geschlechte emsig mitwirkte. Als die Dynastie vollends beseitigt war, trat er zu dem Abbasiden Almanṣûr in nahe Beziehungen, und dieser verehrte ihn wie einen väterlichen Freund. Wahrscheinlicherweise waren es die Lehren des ʿAmr ibn ʿUbaid, welche die kulturfreundlichen Anwandlungen Almanṣûrs in Taten überführten. Auf Almanṣûrs Befehl entstanden Übersetzungen, von denen wir andeutungsweise gesprochen haben. Aus dem Griechischen, vielleicht freilich erst mittelbar aus syrischen Bearbeitungen, übertrug man medizinische Schriften[2]); aus dem Pehlewî die ursprünglich indischen Tierfabeln des Bidpai, welche in der zweiten Hälfte des VI. S. der Leibarzt des persischen Königs Chosrau Anôscharwân, desselben, der den flüchtigen Lehrern der Athener Hochschule eine Heimat geboten hatte (S. 503), in jene Sprache übersetzt hatte[3]); aus dem Sanskrit lernte man den Sindhind kennen, welchen Al-Fazârî arabisch herausgab[4]), und sobald einmal, sagt der arabische Geschichtsschreiber, der uns dieses erzählt, diese Werke in die Öffentlichkeit gedrungen waren, las man sie und studierte mit Eifer die darin behandelten Gegenstände.

---

[1]) Kremer II, 410—412. [2]) Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis Persicisque.* Leipzig 1842, pag. 13—14. [3]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher. Göttingen 1840, S. 6, Nr. 7 und S. 11, Nr. 21. [4]) Kremer II, 442. Suter 4—5, Nr. 6.

Wir sind namentlich über das, was den Sindhind betrifft[1]), aufs beste unterrichtet durch eine in der Einleitung zu einem astronomischen Werke enthaltene Erzählung. Aus dieser berichtet nämlich ein anderer Araber wie folgt: „Alhusain ibn Muḥammed ibn Hamid, bekannt unter dem Namen Ibn Aladamî, erzählt in seinem Tafelwerke, bekannt unter dem Namen der Perlenschnur[2]), daß im 156. Jahre der Hidschra vor dem Chalifen Almanṣûr ein Mann aus Indien erschien, welcher in der unter dem Namen Sindhind bekannten Rechnungsweise, die sich auf die Bewegungen der Sterne bezieht, sehr geübt war, und zur Auflösung der Gleichungen Methoden, die sich auf die von einem halben Grade zu einem halben Grade berechneten Kardagas stützten, und außerdem mannigfache astronomische Verfahren zur Bestimmung der Sonnen- und Mondfinsternisse, der Koaszendenten der Zeichen der Ekliptik und anderer ähnlicher Dinge, insgesamt in einem aus einer gewissen Zahl von Kapiteln bestehenden Buche besaß. Das Buch wollte er ausgezogen haben aus den Kardagas, welche den Namen eines indischen Königs Figar tragen, und welche auf eine Minute genau berechnet waren. Almanṣûr ordnete an, daß man dieses Buch ins Arabische übersetze und danach ein Werk verfasse, welches die Araber den Planetenbewegungen zugrunde legen könnten. Diese Arbeit wurde dem Muḥammed ibn Ibrâhîm Alfazârî anvertraut, welcher danach ein Werk verfaßte, das bei den Astronomen der große Sindhind heißt. Das Wort Sindhind bedeutet nämlich in der Sprache der Inder ewige Dauer. Insbesondere die Gelehrten jener Zeit bis zur Regierung des Chalifen Almamûn richteten sich danach. Für diese wurde ein Auszug davon durch Abu Dschaʿfar Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî angefertigt, welcher sich dessen auch zur Herstellung seiner in den Ländern des Islam berühmten Tabellen bediente. In diesen Tafeln stützte er sich für die mittleren Bewegungen auf den Sindhind und wich für die Gleichungen und Deklinationen davon ab. Er stellte seine Gleichungen nach der Methode der Perser und die Deklinationen der Sonne nach der Weise des Ptolemäus auf. Er schlug auch in diesem Werke schöne von ihm erfundene Näherungsmethoden vor, welche aber wegen gewisser augenscheinlicher Irrtümer, die das Werk enthält, und die des Verfassers Schwäche in der Geometrie zeigen, unzuläng-

[1]) Vgl. Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863, pag. 474 flgg. Auch die von uns nachher zu gebenden Erläuterungen finden sich bei Woepcke, welcher sich hier zum Teil auf Colebrooke stützt. [2]) Ibn Aladamî lebte um 900. Sein Tafelwerk wurde 920 nach seinem Tode von einem Schüler herausgegeben. *Notices et extraits de manuscrits de la biblioth.* VII, 126, Anmerkung 3. Suter 44, Nr. 82.

lich sind. Diejenigen Astronomen der genannten Zeit, welche der Methoden des Sindhind sich bedienten, schätzten das Werk sehr und verbreiteten es rasch weiter. Noch heute ist es sehr gesucht von denjenigen, welche sich mit der Berechnung der Gleichungen der Planeten beschäftigen."

Wir müssen diesem Berichte mannigfache Erläuterungen beifügen. Der Name Sindhind ist nichts anderes als eine offenkundige Verketzerung von Siddhânta, und es ist also nur die Frage, welches von den diesen Namen führenden astronomischen Werken der Inder gemeint sei. Da es im Jahre 156 der Hidschra, welches mit dem Jahre 773 n. Chr. übereinstimmt, nach Bagdad gekommen ist, so stehen später verfaßte Siddhântas natürlich außer Frage. Genauere Antwort gestattet sodann die Nennung des Königs Figar. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Figar aus Vyâghra entstand, daß aber Vyâghra selbst eine Abkürzung aus Vyâghramuka ist, dem Namen des Königs, während dessen Regierungszeit Brahmagupta 628 seinen Brâhma-sphuṭa-siddhânta (S. 598) verfaßte. Berücksichtigt man endlich die gleichfalls allgemein zugestandene Verketzerung Kardaga aus kramajyâ, so dürfte folgende Vermutung zur fast sicheren Tatsache sich gestalten: Im Jahre 773 kam durch einen Inder ein Auszug aus dem astronomischen Lehrgebäude des Brahmagupta nach Bagdad, und dieser Inder nannte seine Quelle nicht mit dem wahren Namen des Verfassers, sondern nach dem Könige, unter welchem das Werk verfaßt war, darin vielleicht nur die Fragen des Chalifen beantwortend, welcher die fürstliche Macht so verstand, daß alles nach dem benannt werden müsse, unter dem es geleistet wurde.

Die arabischen Personennamen, welche in dem Berichte und auch sonst uns bereits vorgekommen sind, erheischen gleichfalls eine erläuternde Bemerkung[1]). Die Araber bedienten sich verhältnismäßig sehr wenig zahlreicher Namen. Um so sicherer trat es ein, daß viele gleichnamig waren, und zur Unterscheidung wurde alsdann, verbunden durch das Wort ibn = Sohn, auch der Vatersname genannt, Muḥammed ibn ʿAbdallâh (der Sohn des ʿAbdallâh) war ein anderer als Muḥammed ibn ʿOmar (der Sohn des ʿOmar). Waren auch die Väter gleichnamig, so konnte wiederholt durch ibn eingeführt auf den Vater des Vaters zurückgegangen werden usw. War eine Verwechslung nicht möglich, so ließ man nicht selten dem Namen des Vaters gegenüber den des Sohnes weg und sprach nur von dem Sohne ʿOmars oder von dem Sohne ʿAbdallâhs. Auch umgekehrt

[1]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher, S. X—XIII.

hat man durch den Sohn auch wohl den Vater näher bezeichnet, der nun abû = Vater des nachfolgend Genannten hieß. Ein Muḥammed also, der einen ʿOmar zum Vater, einen ʿAbdallâh zum Sohne hatte, vereinigte die Namen beider Blutsverwandten mit dem eignen und hieß dementsprechend Abû ʿAbdallâh Muḥammed ibn ʿOmar. Man findet dabei die eigentümlichsten Verbindungen und Weglassungen. So konnte von dem Vater eines bekannten Mannes, von dem Sohne des Vaters eines Dritten die Rede sein, ohne daß der Name des eigentlich Gemeinten überhaupt ausgesprochen wurde. Abû Marwân war Marwâns Vater, gleichgültig wie er hieß; Ibn Abû Marwân war der Sohn von Marwâns Vater, d. h. Marwâns Bruder. Der Araber hat nun ferner die Gewohnheit auch Eigennamen den Artikel al vorzusetzen, welcher mit Abû sich zu Abû'l vereinigt und auch andere Veränderungen erleidet, z. B. vor einem anfangenden R sich in ar verwandelt. Daß dieser Artikel um so weniger bei Beinamen fehlen durfte ist einleuchtend. Wir erinnern als Beispiele an die Chalifennamen al Manṣûr = der Siegreiche, ar Raschîd = der auf richtigen Weg Geleitete, al Mamûn = der durch Vertrauen Beglückte. Die Beinamen, vielfach zur genaueren Bestimmung der gemeinten Persönlichkeit beitragend, sind verschiedener Gattung. Sie können sich auf geistige oder körperliche Vorzüge oder Mängel dessen beziehen, dem sie beigelegt wurden; sie können von dem Geburtsorte oder Wohnorte des Betreffenden herrühren; sie können eine religiöse Sekte bezeichnen, welcher er angehörte; sie können den Stand oder die Beschäftigungsweise der Persönlichkeit selbst oder des Vaters angeben. Wir werden durch diese Erläuterung darauf vorbereitet, arabische Schriftsteller mit einem für unsere Gewohnheiten übermäßig langen Namen auftreten zu sehen, aber auch darauf, daß man, um die Länge zu vermeiden, sich gern nur der Beinamen bediente. So ist in obigem Bruchstücke schon von Alhusain ibn Muḥammed ibn Hamid die Rede und dabei erwähnt, man nenne ihn gemeiniglich Ibn Aladamî. So kommt ebendort Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî vor, d. h. Muḥammed, der Vater des Dschaʿfar, der Sohn des Mûsâ aus der Provinz Chwarizm, und wir werden sehen, daß Alchwarizmî der Name blieb, unter welchem dieser Schriftsteller in weiteren Kreisen bekannt wurde.

Wir kehren nach dieser Abschweifung zu der unmittelbar vorher ausgesprochenen Behauptung zurück, daß 773 ein Auszug aus dem uns bekannten Werke des Brahmagupta nach Bagdad kam. Die arabische Überarbeitung durch Alchwarizmî muß um 820 etwa stattgefunden haben. Aber schon vorher wurde jener Auszug von Arabern benutzt. Jaʿḳûb ibn Târiḳ schrieb schon 777 Tafeln ge-

zogen aus dem Sindhind[1]). Ähnliche Tafeln fertigte Ḥafṣ ibn ʿAbdallâh aus Bagdad, und Aḥmed ibn ʿAbdallâh Ḥabasch genannt al Ḥâsib = der Rechner aus Merw stellte um 830 drei verschiedene astronomische Tafeln her, eine nach arabischen Beobachtungen, eine nach den Lehren der Perser, eine nach den Methoden der Inder[2]). Auf ein noch späteres Datum weisen nach indischer Methode berechnete Tafeln des Abû'l ʿAbbâs Faḍl ibn Ḥâtim aus Nairîz in Persien[3]) um 900 und die Perlenschnur des Ibn Aladamî aus der gleichen Zeit. Ob jedoch alle diese Anwendungen indischer Methoden auf der einmaligen Einführung im Jahre 773 beruhten, ob spätere Verbindungen zwischen arabischen und indischen Gelehrten vorhanden waren, wenn wir von den Reisen absehen, welche Masʿûdî († 956) und Albîrûnî († 1038) in Indien machten und ausführlich beschrieben haben, ob schon vor 773, damals als Muḥammed ibn Ḳâsim unter dem Omaijaden Welid I., 705 bis 715, bis an den Indus vordrang[4]), indische Wissenschaft in mündlicher Übertragung zu den Arabern gelangt war, das sind Fragen, zu deren Bejahung wir freilich keinen überlieferten Anhaltspunkt haben, deren vollständige Verneinung aber uns fast noch kühner erscheinen möchte.

Ungleich gesicherter ist jedenfalls die Art und Weise, in welcher griechische Wissenschaft in sich wiederholenden Wellen den arabischen Boden durchtränkte. Ganz Syrien in den gebildeten vorzugsweise christlichen Kreisen ist fast als griechische Kolonie zu denken. Aus der Schule von Antiochia ging jener Nestorius hervor, welcher 428 bis 431 Patriarch von Konstantinopel war, und dessen Anhänger seine Heimatsgenossen waren und bis auf den heutigen Tag geblieben sind. In Emesa und Edessa waren nestorianische Schulen, in welchen man nicht aufgehört hatte, Hippokrates und Aristoteles zu studieren. Als dann bei der Amtsentsetzung des Nestorius wegen seiner als ketzerisch verurteilten Ansichten diese Anstalten in eine Art von Verruf kamen und die zu Edessa 489 ganz aufhörte, da verschwand das Studium griechischer Medizin nicht etwa ganz, es zog sich nur weiter zurück nach Dschundaisâbûr in der Provinz Chuzistân, wie wir (S. 695) gelegentlich gesagt haben. Die spätere Omaijadenresidenz selbst, Damaskus, besaß unter ihren Einwohnern Männer von grie-

[1]) Hankel S. 230—231. Fihrist 33. Suter 4, Nr. 4. [2]) Abulpharagius, *Historia dynast.* ed. Pococke. Oxford 1663, pag. 161 der lateinischen Übersetzung. Vgl. auch Caussin in den Anmerkungen zu den Ḥâkimitischen Tafeln des Ibn Junis. *Notices et extraits de manuscrits de la Bibliothèque nationale* VII, 98, Anmerkung 2. [3]) *Notices et extraits* etc. VII, 118, Anmerkung 2. Suter 45, Nr. 88. [4]) Weil S. 97. Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863, pag. 472.

chischer Herkunft und griechischer Bildung. Damascius von Damaskus (S. 501) stand um 510 an der Spitze der athenischen Hochschule, entsprechend wie Johannes von Damaskus in der zweiten Hälfte des VIII. S. Vertreter griechischer Denkungsart in der Heimat war. Auch in Persien fehlte es keineswegs neben alten an neueren Beziehungen zu Griechenland. Der Hof jenes Sasaniden, Chosrau I. Anôscharwân war, woran wir eben (S. 697) erinnert haben, von 531 bis 533 etwa die Zufluchtsstätte der aus Athen vertriebenen letzten Peripatetiker gewesen, und wenn dieselben auch der Heimat sich wieder zuwandten, sobald der Friedensvertrag von 533 es ihnen gestattete, die Samen, welche sie einmal ausgestreut hatten, gingen doch nicht alle in der fremden Erde zugrunde. So war also, als durch Verhältnisse, auf die wir aufmerksam gemacht haben, eine Neigung der Chalifen erwachte, Schriftsteller anderer Völker in arabischer Sprache kennen zu lernen, an Männern kein Mangel, welche Griechisches aus schon vorhandenen syrischen und persischen Übersetzungen, aber auch aus der Ursprache zu übertragen imstande waren.

Die ersten griechischen Mathematiker, welche den Arabern mundgerecht gemacht wurden, waren Ptolemäus und Euklid[1]).

Für beide werden wir auf die Regierungszeit Arraschîds verwiesen, dessen Wezîr Jaḥjâ ibn Châlid der Barmekide die große Zusammenstellung übersetzen ließ. Der erste Versuch scheint jedoch nicht von sonderlichem Erfolge begleitet gewesen zu sein. Vielleicht entstammt ihm die sprachwidrige Verbindung des arabischen Artikels al mit dem griechischen Superlativ *μεγίστη*, welche in dem Worte Al-Midschistî (Almagest) ein höchst ungerechtfertigtes, aber durch die lange Dauer des Besitzes unantastbar gewordenes Bürgerrecht erlangte. Erneuerte Durchsicht und Verbesserung dieser Übersetzung erfolgte noch unter desselben Chalifen Regierung durch Abû Ḥasan und Salmân, dann durch Haddschâdsch ibn Jûsuf ibn Maṭar, welcher letztere auch als erster Übersetzer der euklidischen Elemente genannt wird. Euklid scheint er sogar zweimal, zuerst unter Arraschîd, dann unter Almamûn, vorgenommen zu haben, da von den beiden Bearbeitungen unter dem Namen jener Chalifen die Rede ist als von einer harûnischen und einer mamûnischen[2]).

Wir stellen uns keineswegs die Aufgabe, alle arabischen Über-

[1]) Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis.* Halle 1823, pag. 7, und Wenrich, *De auctorum Graecorum versionibus etc.* pag. 177 und 227.
[2]) Über diese und andere Euklidübersetzungen vgl. Klamroth, Ueber den arabischen Euklid (Zeitschr. der morgenländ. Gesellschaft XXXV, 271—326, Leipzig 1881). Über Haddschâdsch s. Suter 9, Nr. 16.

setzer zu nennen, oder die griechischen Schriftsteller über Mathematik sämtlich anzugeben, welche von jenen übersetzt worden sind. Die einen wie die anderen dürften nicht einmal alle bekannt sein, selbst für solche, welche mit dem gediegensten Einzelwissen an die Untersuchung dieses Gegenstandes herangetreten sind. Die Anzahl der noch nicht katalogisierten oder ungenügend beschriebenen, jedenfalls von Mathematikern von Fach noch nicht durchgesehenen arabischen Handschriften, welche auf unsere Wissenschaft sich beziehen, in Bibliotheken des Ostens wie des Westens — wir nennen insbesondere die reichhaltigen spanischen Sammlungen — ist eine ungemein große und verbietet dadurch jedes abschließende Wort, mag es um Übersetzer oder um Originalschriftsteller sich handeln. Nur einige wenige Übersetzer sind unter allen Umständen zu erwähnen.

Ḥunain ibn Isḥâḳ mit dem ausführlichen Namen Abû Zaid Ḥunain ibn Isḥâḳ ibn Sulaimân al ʿJbâdi[1]) gehörte dem christlichen arabischen Stamme der ʿJbâd an. Er kam schon mit guter Vorbildung nach Bagdad, machte dann Reisen in die griechischen Städte, wo er deren Sprache sich aneignete und kehrte über Al-Baṣra, wo er sich noch im Arabischen vervollkommnete, nach Bagdad zurück. Jetzt begab er sich an die Übersetzung einer ganzen Reihe griechischer Naturforscher und Philosophen, auch des Ptolemäus, dessen Almagest er bearbeitete. Andere Schriftsteller, wie die meisten Werke des Euklid, die Schrift des Archimed von der Kugel und dem Zylinder, den Autolykus ließ er unter seiner Aufsicht durch seinen Sohn Abû Jaʿkûb Isḥâḳ ibn Ḥunain[2]) übersetzen. Der Vater starb, durch den Bischof Theodosius wegen Gotteslästerung aus der Gemeinde ausgestoßen, 873, der Sohn 910 oder 911. Beiden fehlten bei aller philologischen Gewandtheit, deren sie sich rühmen durften, die sachlichen Kenntnisse, ohne welche es nun einmal nicht möglich ist, ein mathematisches Buch zu übersetzen, und so bedurften ihre Arbeiten gar sehr der fachkundigen Verbesserung.

Diese wurde ihnen durch Tâbit ibn Ḳurrah[3]). Abû'l Ḥasan Tâbit ibn Ḳurrah ibn Marwân al Ḥarrânî wurde 836 zu Ḥarrân in Mesopotamien geboren. Er war zuerst Geldwechsler, wandte sich aber dann der Wissenschaft zu und erwarb sich in Bagdad ausge-

---

[1]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 26, Nr. 69. Suter 21—23, Nr. 44. Wenrich l. c. pag. 228 glaubte fälschlich die Almagestübersetzung dem hier gleich folgenden Isḥâḳ ibn Ḥunain zuschreiben zu müssen. Vgl. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 469, Anmerkung 2. [2]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 29, Nr. 71. [3]) Ebenda l. c. S. 34, Nr. 81. Fihrist 25—26. Suter 34—38, Nr. 66.

zeichnete Kenntnisse, sowohl als Mathematiker und Astronom, als auch in der griechischen Sprache, welcher er wie der syrischen und arabischen mächtig war. Ein erneuerter Aufenthalt in seiner Vaterstadt war für Tâbit mit Mißhelligkeiten verknüpft. Er gehörte nämlich der Sekte der Sabier an, teilte aber deren Ansichten nicht in der geforderten Strenge und wurde deshalb ausgestoßen. Nun kehrte er abermals nach Bagdad zurück, welches er nicht wieder verließ. Dort starb er 901 in höchstem Ansehen bei dem Chalifen Almu'taḍid[1]), 892—902, der ihn seines nächsten Umganges würdigte. Wir werden es im 34. Kapitel mit Tâbit als Originalschriftsteller zu tun haben. Unter seinen Übersetzungen nennen wir Schriften des Apollonius von Pergä, des Archimed, des Euklid, des Ptolemäus, des Theodosius. Den Übersetzungen können wir auch als nahe verwandten Inhaltes einen Kommentar Ṭâbits[2]) zu dem (S. 424) von uns erwähnten Buche des Charistion über die Wage anschließen. Es ist in einer viel verbreiteten alten lateinischen Übersetzung erhalten und den Forschern über die Geschichte der Mechanik als *Liber Charastonis* bekannt.

Etwa gleichzeitig mit Tâbit zwischen 864 und 923 ist Ḳusta ibn Lûkâ zu nennen[3]), ein christlicher Philosoph und Arzt, der von seinen Reisen durch die griechischen Städte eine Menge Bücher mit nach Hause brachte, deren Übersetzung er sich angelegen sein ließ. In seinen eigenen Schriften soll Reichtum an Gedanken neben Kürze der Ausdrucksweise zu bewundern sein. Er übersetzte die Sphärik des Theodosius, astronomisch-geometrische Schriften des Aristarch von Samos, des Autolykus, des Hypsikles, den Gewichtezieher des Heron von Alexandria, mit großer Wahrscheinlichkeit auch den Diophant.

Die ganze zweite Hälfte des X. S. erfüllt Abû'l Wafâ Muḥammed ibn Muḥammed Al-Bûzdschânî 940—998 aus Bûzdschân[4]), der als Übersetzer des Diophant zu nennen ist. Er verließ schon mit 20 Jahren seine Heimat, um nach 'Irâḳ überzusiedeln, wo er spekulative und praktische Arithmetik vermutlich bei zwei Oheimen, Geometrie bei zwei anderen Lehrern studierte. Unter der spekulativen Arithmetik ist das zu verstehen, was die Griechen Arithmetik nannten, also Zahlentheorie und Algebra, unter der praktischen Arithmetik die eigentliche Rechenkunst, die Logistik der Griechen,

---

[1]) Weil S. 194—198. [2]) P. Duhem, *Les origines de la statique* I, 79—93. [3]) Wüstenfeld l. c. S. 49, Nr. 100. Wenrich l. c. S. 178. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 499. Suter 40—42, Nr. 77. [4]) Eilhard Wiedemann, Zur Geschichte Abul Wefas. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, histor.-literar. Abtlg. S. 121—122 (1879). Fihrist 39—40.

wobei jedoch keineswegs jetzt schon mit Bestimmtheit ausgesprochen werden will, daß er beide nach griechischen Mustern erlernt habe.

Die griechischen Schriftsteller, deren Werke wir als von Arabern übersetzt namhaft zu machen hatten, sind neben den großen Meistern Euklid, Archimed, Apollonius, Heron, Diophant hauptsächlich solche, welche den sogenannten kleinen Astronomen (S. 447) der Griechen ausmachten. Die Araber hatten für diese Schriften, deren Studium zwischen die Elemente des Euklid und den Almagest einzuschalten ist, gleichfalls einen besonderen Sammelnamen, sie nannten sie die mittleren Bücher[1]).

Man muß nicht glauben, daß damit die Reihe griechischer Mathematiker, von denen man weiß, daß ihre Schriften arabische Übersetzer fanden, abgeschlossen sei, und ebensowenig, daß es eine einfache Sache sei, aus arabischen Zitaten klug zu werden. Wenn es natürlich ist, daß Eigennamen, bei welchen man sich, auch wenn man die Sprache des Volkes, dem ihre Träger angehörten, kennt, gar häufig nichts denken kann oder Falsches sich zu denken versucht ist, beim Übergang in fremde Literaturen verdorben werden, so haben arabische Abschreiber, welche sogenannte diakritische Punkte bald wegließen, bald unzutreffend hinschrieben, ein besonderes Geschick an den Tag gelegt, Namen unkenntlich zu machen. Sind nun vollends die arabischen Schriften nicht im Urtexte bekannt, sondern selbst wieder in Gestalt von Übersetzungen ins Lateinische, welche seit dem XII. S. angefertigt wurden und zum Teil von Männern angefertigt wurden, denen die wirklichen griechischen Eigennamen unbekannt waren, so ist das Unmögliche an Verketzerungen fast das Gewöhnliche. Aus Heron ist Iran und Yrinius geworden[2]), aus Menelaus Milleius, aus Archimed bald Arsamites, bald Arsanides, bald Archimenides usw.[3]).

Einen Vorteil bilden diese Umgestaltungen, sobald sie einmal erkannt sind; sie geben die Möglichkeit, lateinischen Übersetzungen oder Bearbeitungen griechischer Schriftsteller, welche dieselben enthalten, auf den ersten Blick anzusehen, daß nicht der griechische Grundtext, sondern die Zwischenbehandlung eines Arabers die Vorlage des letzten Übersetzers bildete, daß also notwendigerweise der betreffende griechische Schriftsteller als einer von denen betrachtet werden muß, deren Werke auf arabische Mathematik Einfluß üben

[1]) Steinschneider, Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Zeitschr. Math. Phys. X, 456—498 (1865). [2]) Zeitschr. Math. Phys. X, 489, Anmerkung 60. Suter in der *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge II, 408—409 (1902). [3]) Steinschneider in der Hebräischen Bibliographie Juli-August 1864 (Bd. VII, Nr. 40) S. 92—93, Anmerkung 20.

konnten. So müssen beispielsweise die Arbeiten des Zenodorus den Arabern bekannt gewesen sein, weil in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe, welche handschriftlich in Basel vorhanden ist[1]), der Name Archimenides vorkommt.

Von anderen Schriftstellern, welche den Arabern bekannt waren, nennen wir neben Jamblichus und Porphyrius, deren Studium bei den Syrern niemals aufgehört hat, insbesondere Nikomachus[2]), dessen arabische Quellen selbst gedenken. Ebenso dürfen wir eine Bekanntschaft mit Pappus vermuten, da Pappus der Rumäer doch wohl nur irrtümlich statt der Alexandriner gesagt ist.

Die Übersetzungstätigkeit war auch von einer vielfach kommentierenden begleitet, auf die wir aber, da sie immerhin einige Ansprüche an das Selbstdenken des Kommentators erhebt, bei den Originalarbeiten zu reden kommen. Wir haben, bevor wir diesen uns zuwenden, nur eine Bemerkung noch zu machen.

Die Schriftsteller, von welchen als Übersetzern seither die Rede war, gehörten sämtlich dem Morgenlande an. Das Morgenland war es aber nicht allein, welches der Islam sich unterwarf, in welchem arabisch gesprochen und arabisch gelehrt wurde, und wenn wir gelten lassen, was für die früheren Abschnitte unsere Richtschnur bildete, daß es wesentlich auf die Sprache ankommt, nicht auf das örtliche Beisammenwohnen, um die Zugehörigkeit zu einem Kulturverbande zustande zu bringen, so werden wir neben den Ostarabern auch Westaraber berücksichtigen müssen, welcher letztere Name für die arabisch redenden Bewohner der afrikanischen Nordküste, Spaniens und Siziliens in Anspruch genommen wird.

Längs der afrikanischen Küste[3]) verbreitete sich der Islam unter der Regierung Welid I., 705—717, vornehmlich durch die Tapferkeit zweier Feldherren, des Mûsâ und des Târiḳ. Letzterer war es auch, der sein Waffenglück über das Mittelmeer hinübertrug und im Mai 711 auf spanischem Boden jene steile Höhe besetzte, die nach ihm Târiḳs Höhe, Dschebel Târiḳ, Gibraltar genannt ist. Von diesem festen Punkte aus wurde Spanien bald zum größten Teile unterworfen. Aber die große Entfernung von der Chalifenhauptstadt gab dem Emîr, d. h. dem Befehlshaber von Spanien, die Gelegenheit sich selbständiger zu gehaben, als Statthalter der näher gelegenen Provinzen es wagen durften. Nachdem die Abbasiden zur Macht gelangt waren, kam es zur vollständigen staatlichen Trennung, indem Emîr

[1]) In dem Sammelbande F. II, 33 der Basler Stadtbibliothek. [2]) Zeitschr. Math. Phys. X, 463, Anmerkung 24 über Nikomachus und auf derselben Seite im Texte: Pappus der Rumäer. [3]) Weil S. 97 flgg.

ʿAbd Arrahmân ein Omaijade 747 eine eigene spanische Omaijadendynastie gründete[1]), welche Versuche des Chalifen Al-Mahdî 776—777 Spanien wieder zu unterwerfen, mit Glück zurückwies[2]). Auch das afrikanische Küstengebiet trennte sich vom Mutterlande. Seit dem Anfang des IX. S. entstand[3]) dort ein Reich mit der Hauptstadt Fez, und dieses war, kaum gegründet, kräftig genug selbst wieder erfolgreiche Kolonisten nach Sizilien auszusenden, wo auch wieder eine selbständige moslimische Dynastie ihren Herrschersitz aufschlug. Wir haben zum Glück uns nicht mit den Kämpfen und Feindseligkeiten zu beschäftigen, welche zwischen den einzelnen Dynastien herrschten. Gift und Dolch ebenso wie offene Empörungen ließen bald einzelne Persönlichkeiten, bald ganze Geschlechter in der Herrschaft wechseln und auch den Sitz der Herrschaft mehrfach verlegen.

Uns genügt die Tatsache der fast unaufhörlichen Kämpfe zur Stütze der weiteren Tatsache, daß auch wissenschaftlicher Neid zwischen den Arabern des Ostens und des Westens eine Scheidewand errichtete, welche es verhinderte, daß manches, welches den einen eigentümlich geworden war, in derselben Form von den anderen übernommen wurde, und was wir damit meinen, wird wohl klar, wenn wir die Jahreszahl 773, welche das Auftreten indischer Astronomie in Bagdad bezeichnet, mit der Zahl 715 der Eroberung des Westreiches, oder auch nur mit der 747 des Beginnes des spanischen Omaijadenreiches vergleichen. Wir werden sofort an diese Datenvergleichung erinnern müssen, wenn wir nunmehr an die Ausbreitung des Zahlenrechnens als ersten Teil arabisch-mathematischen Originalschriftstellertums gelangen und dabei wieder zuerst von den Zahlzeichen der Araber reden.

33. Kapitel.

Arabische Zahlzeichen. Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî.

Die Schreibkunst der Araber[4]) in der Zeit, zu welcher sie für die Geschichte der Mathematik unsere Aufmerksamkeit beanspruchen dürfen, war nicht weit her (S. 695). Von einer alten Schrift mit groben starken geradaufstehenden Zeichen, welche von späteren ara-

---

[1]) Weil S. 140 flgg. [2]) Ebenda S. 150 [3]) Ebenda S. 297—336 die moslimischen Dynastien in Afrika und Sicilien. [4]) Vgl. Silvestre de Sacy, *Grammaire arabe.* Paris 1810 und die von Gesenius verfaßten Artikel Arabische Schrift S. 53—56 und Arabische Literatur S. 56—69 im V. Bande von Ersch und Grubers Enzyklopädie.

bischen Gelehrten selbst diesem Aussehen nach den Namen einer gestützten säulenartigen Schrift erhalten hat, sind nur geringe Überreste vorhanden. Ob Zahlzeichen darunter vorkommen, ist uns nicht bekannt. Eine neue Schrift, welche zunächst dazu angewandt wurde, den Koran zu schreiben, entwickelte sich um die Mitte des VII. S. Die Schreibkunst gelangte bei diesem heiligen Zwecke bald zu höherem Range, gewerbsmäßige Abschreiber bildeten sich aus, und da diese besonders zahlreich und geschickt in dem 639 am Euphrat erbauten Al-Kûfa auftraten, so erhielt die Schrift den Namen der kufischen. Am Anfange des X. S. veränderte sich diese doch immer noch grobe und rohe Schrift, welche man mit einem Stifte oder einer ungespaltenen Röhre zu schreiben pflegte, besonders unter dem Einflusse des 940 verstorbenen Wezîrs Ibn Muḳla zu jener flüchtigen, abgerundeten Kurrentschrift, welche heute noch im Oriente dient und in Druckwerken nachgeahmt wird. Sie führt den Namen Nes-chîschrift oder Schrift der Abschreiber, und wurde, seit man sich gespaltener Rohrfedern zu ihrer Darstellung bediente, immer feiner und eleganter. Schreibkünstler wie Ibn Bauwâb († 1032), wie der berühmte Jâḳût († 1221) glänzten. Spanien bewahrte seinen eigenen Schriftzug, der sich bis jetzt in Westafrika, in dem sogenannten Magrib, erhalten hat; er ist von einer altertümlichen Steifheit und Ungefälligkeit[1]).

Die Buchstaben des arabischen Alphabetes waren ursprünglich nach Reihenfolge und Aussprache wohl übereinstimmend mit den 22 Lauten, welche auch anderen semitischen Alphabeten angehören, und diese ältere Anordnung führt den Namen Abudsched durch Verbindung der drei ersten Laute, wie man Abece und Alphabet sagt. Als die Nes-chîcharaktere sich bildeten, verließ man die alte Reihenfolge, um die Buchstaben nach ihrem Aussehen zu ordnen, d. h. so, daß die einander ähnlichen Schriftzeichen nebeneinander gestellt wurden.

Daß die Schreibart der Zahlen bei den vielfachen Veränderungen der ganzen Schrift sich nicht gleich bleiben konnte, ist nicht mehr als natürlich. Vor allem liebten es die Araber, die Zahlwörter selbst vollständig zu schreiben, eine Methode, wenn man das Methode nennen darf, welche selbst in einem Lehrbuche der Rechenkunst noch beibehalten ist, das zwischen 1010 und 1016 in Bagdad verfaßt wurde[2]).

Aus ihr wohl entstanden die einem arabisch-persischen Wörter-

---

[1]) Kremer II, 314. [2]) Kâfî fîl Hisâb des Abu Bekr Mohammed ben Alhusein Alkarkhî, deutsch von Ad. Hochheim. Halle 1878.

buche entnommenen sogenannten Dîwânîziffern, welche nur abgekürzte Zahlwörter sein sollen[1]). Am klarsten stelle sich dieses durch den Umstand heraus, daß in Zahlen, die aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehen, die Einer zwischen den Hundertern und Zehnern ihren Platz finden, wie es in der Aussprache auch sei (S. 607).

Außerdem bedienten sich die Araber ihrer in der Reihenfolge Abudsched geordneten Buchstaben in derselben Weise wie die übrigen Semiten, um die Zahlen von 1 bis 400 darzustellen. Freilich ist die genannte Reihenfolge nicht allerorten ganz streng festgehalten worden. Der gleiche Buchstabe, der in Bagdad 90 bedeutete, hatte im nördlichen Afrika den Wert 60, 300 wechselte an eben diesen Orten mit 1000 usw.[2]), und man hat daraus den Schluß gezogen, diese von den Arabern als wesentlich arabisch bezeichnete Darstellungsweise der hurûf aldschummal, d. h. der Zahlenwerte der Buchstaben nach ihrer alten Reihenfolge, könne erst entstanden sein, nachdem Afrika islamisiert war, also nach 715. Damit stimmt auch eine Notiz überein[3]), welche dem Chalifen Welid I., unter dessen Regierung jene Ausbreitung nach Westen erfolgte, das Verbot nacherzählt, in die öffentlichen, wie wir uns erinnern meist von Christen geführten Bücher griechische Einträge zu machen mit Ausnahme der Zahlen, weil arabisch eins, oder zwei, oder drei, oder achteinhalb nicht geschrieben werden könne. Eine Ausnahme, welche natürlich nur so gedeutet werden kann, daß damals um 700 die Bezeichnung der Zahlen in abgekürzter Buchstabennotation anders als mit griechischen Buchstaben noch nicht stattfand. Die Schwierigkeit Hunderte von 500 an zu bezeichnen, scheint man anfänglich ähnlich überwunden zu haben, wie zum Teil bei den Hebräern (S. 126) durch gleichzeitige additive Benutzung von zwei oder gar drei Buchstaben. Später, vielleicht erst vom XI. S. an[4]), ersann man ein neues Mittel. Wie nämlich im Hebräischen gewisse Buchstaben existieren, welche in zweierlei Aussprache mit und ohne Aspiration vorhanden sind, so gibt es auch im Arabischen sechs Charaktere von doppelter Lautbedeutung. Man unterscheidet dieselbe durch Punkte, welche deshalb diakritische Punkte genannt werden. Diese sechs neuen punktierten arabischen Buchstaben wurden nun den 22 schon vorhandenen beigefügt und lieferten in dieser Weise nicht nur Zeichen für die Hunderte 500 bis 900, sondern, da jetzt ein Zeichen überschüssig war, auch noch für 1000. Die Vereinigung mehrerer Buchstaben zu

[1]) Silv. de Sacy, *Grammaire arabe* I, 76, Note a und Tabelle VIII. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 463, Note 1 und 464. [3]) Theophanes, *Chronographia* (ed. Franc. Combefis). Paris 1655, pag. 314. [4]) Silv. de Sacy, *Grammaire arabe* I, 74, Note b.

Zahlen geschah nach dem Gesetze der Reihenfolge linksläufig, wie es die Schrift morgenländischer Völker mit sich brachte.

So war für das Volksbedürfnis, für das Schreiben und Lesen von Zahlen im fortlaufenden Texte ausreichend gesorgt, insbesondere da den Arabern bei ihrer allmählichen Ausbreitung auch noch eine Möglichkeit offen stand, die Möglichkeit sich der in dem eroberten Lande schon vorhandenen, dort volkstümlich gewordenen Zahlzeichen zu bedienen, von der sie wirklich da und dort Gebrauch machten[1]).

Das Rechnen, dessen Kenntnis am langsamsten unter den eigentlichen Arabern sich entwickelte, stellt andere Anforderungen. Teils war es ein schwieriges nur Geübten mögliches Kopfrechnen, bei welchem vielleicht die Darstellung der Zahlen an Fingern als Hilfsmittel diente. Sind wir auch über die Zeit durchaus im unklaren, wann ein solches Fingerrechnen stattfand, so wissen wir aus einem kleinen Lehrgedichte eines Verwaltungsbeamten Schams addîn al Mausilî[2]), daß es bei Arabern in Übung war. Genau nach der gleichen Folge, wie Nikolaus Rhabda es seine Landsleute lehrte (S. 514—515), wurden die Einer und Zehner an der linken, die Hunderter und Tausender an der rechten Hand dargestellt.

Teils aber lernten die Araber beim Rechnen den indischen Stellungswert der Ziffern kennen. Darüber kann bei der übereinstimmenden Aussage aller arabischen Quellen Zweifel nicht bestehen. Am deutlichsten spricht sich Albîrûnî darüber aus. Dieser Schriftsteller[3]) ist in Iran geboren. Er brachte lange Jahre in Indien zu, studierte im Sanskrit geschriebene Werke, stellte astronomisch-geographische Beobachtungen an, denen namentlich auffallend genaue Breitenangaben für die von ihm bestimmten Orte verdankt werden, und schrieb ein großes Werk über Indien, welches in jeder Beziehung zu den bedeutendsten Erscheinungen der arabischen Literatur gehört. Albîrûnî starb im Jahre 1038 oder 1039. Er sagt uns[4]), die Inder hätten nicht die Gewohnheit ihren Buchstaben eine Bedeutung für das Rechnungswesen zu geben, wie die Araber es täten, welche ihre Buchstaben nach dem Zahlenwerte anordneten. Die Inder bedienten sich vielmehr gewisser Zahlzeichen, die aber verschiedener Art seien, wie denn auch die Gestalt der Buchstaben bei den Indern von einer Landesgegend zur andern wechsle. Die von

---

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 236—237.
[2]) Übersetzt von Aristide Marre im *Bullettino Boncompagni* (1868) I, 310—312. Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 181 (1902).
[3]) Suter 98—100 Nr. 218 und in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 128, Note 2 (1903). [4]) Woepcke im *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 275 flgg.

den Arabern angewandten Zahlzeichen seien eine Auswahl der geeignetsten bei den Indern vorhandenen. Auf die Form komme es nicht an, wenn man nur die innenwohnende Bedeutung kenne. Ferner sagt uns Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî[1]), derselbe, welcher für Almamûn die indische Astronomie bearbeitet hat (S. 698) und dessen schriftstellerische Leistungen uns noch in diesem Kapitel ausführlich beschäftigen müssen, es herrsche in bezug auf die Zeichen Verschiedenheit unter den Menschen, eine Verschiedenheit, welche zumal bei der 5, der 6, der 7 und der 8 hervortrete, doch liege darin kein Hindernis.

Sieht man sich so vorbereitet die arabischen Handschriften an, so findet man wesentliche Abweichungen zwischen den Zahlzeichen der Ostaraber und der Westaraber. Der Vergleich der auf der Tafel am Ende unseres Bandes ausgeführten Zeichen lehrt, daß die hauptsächlichsten Abweichungen in den Zeichen für 5, 6, 7 und 8 stattfinden, während 1, 4, 9 ziemlich gleich aussehen, 2 und 3 nur aus horizontaler Lage in vertikale übergingen. Das kann uns nicht gerade überraschen. Wohl aber überrascht es uns, daß die arabischen Zahlzeichen so ungemein abweichen von den Devanagariziffern und daß sie viel eher den Vergleich aushalten mit den Apices, beziehungsweise mit indischen Zeichen des II. bis III. S. Das gibt zu denken! Als immer wahrscheinlicher drängt sich die Vermutung auf, es könne der ganze historisch so dunkle als merkwürdige Vorgang folgender gewesen sein[2]):

Um das II. S. n. Chr. kamen indische Zahlzeichen nach Alexandria, von wo sie sich in ihrer Anwendung beim Kolumnenrechnen vielleicht nach Rom, jedenfalls aber nach dem Westen Afrikas verbreiteten. Die Erinnerung an die indische Herkunft mag wach geblieben sein. Im VIII. S. lernten die Araber des Ostens die indischen Zahlzeichen in bereits wesentlich veränderter Gestalt mit der inzwischen dazugetretenen Null kennen. Die Null nannten sie *aṣ-ṣifr*, das Leere,

---

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da* Bald. Boncompagni I, pag. 1—2.
[2]) Diese Theorie rührt von Woepcke her. *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 69—79 und 514—529. Gundermann, Die Zahlzeichen (Gießen 1899), hat dagegen folgende Theorie zu begründen gesucht: Ein älteres einfaches System, die Zahlen durch Striche zu bezeichnen, ist allmählich aber nie ganz durch ein neues System, das von allen Kulturvölkern der antiken Welt angenommen wurde, zurückgedrängt worden. Die Buchstaben eines Alphabetes fanden in ihm ihrer Reihenfolge nach Verwendung. Aus diesem Systeme entwickelte sich schrittweise ein neues, das nur einzelne Grundzeichen festhielt, die übrigen abstieß. Das vollständige System lebte aber verborgen weiter und kam nochmals zu großer Blüte. Endlich wurden durch das Ziffernsystem, den Abkömmling eines vollständigen Systems, alle früheren Systeme verdrängt.

als Übersetzung von *sunya,* wie die Null bei den Indern heißt (S. 614). Im Westen nahm man zwar die Null auf, blieb aber, und wäre es nur im bewußten Gegensatze zu den Ostarabern, den alten Zeichen treu, deren indischen Ursprungs man sich ebensowohl als ihres alexandrinischen Stempels noch lange erinnerte, und die man jetzt Ġubârziffern nannte, d. h. Staubziffern[1]) im Gedächtnisse der indischen Weise auf mit Staub bedeckten Tafeln zu rechnen.

Wenn wir behaupten dürfen, jene doppelte Erinnerung sei lange nicht verloren gegangen, so beziehen wir uns dafür auf drei Stellen ziemlich später arabischer Rechenbücher[2]). In allen dreien ist die Form der Ġubârziffern neben der der ostarabischen, welche letztere den Namen der indischen führen, aufgezeichnet; in zweien sind die Ġubârziffern beschrieben, d. h. ihre Ähnlichkeit mit arabischen Buchstaben und Buchstabenvereinigungen ist hervorgehoben, so daß man sie deutlich erkennen kann; in allen dreien sind dann auch die Ġubârziffern als indische Formen bezeichnet. Das eine Rechenbuch erzählt in dieser Beziehung: „Ihr Ursprung bestand darin, daß ein Mann aus dem Volke der Inder feinen Staub nahm, welchen er auf eine Tafel von Holz oder anderem Stoff oder auf irgend eine ebene Fläche ausbreitete, und daß er darauf verzeichnete was ihm beliebte an Multiplikationen, Divisionen oder sonstigen Operationen, und hatte er die Aufgabe vollendet, so schloß er die Tafel wieder fort bis zum Gebrauche.“ Eben dieses Rechenbuch leitet aber, und das ist beweisend auch für die andere Erinnerung, die ganze Erörterung durch die Bemerkung ein, die Pythagoräer seien die Männer der Zahlen gewesen.

Mögen die Vermutungen, mit deren Hilfe hier ein einheitlicher Überblick zu gewinnen gesucht wurde, richtig sein oder nicht, das Vorhandensein der ostarabischen wie der Ġubârziffern wird dadurch nicht beeinträchtigt, und wir müssen nun Schriftsteller verschiedener Zeiten und verschiedener Heimat kennen lernen und von ihnen erfahren, was sie in der Mathematik geleistet haben, auch wie sie rechneten.

Der erste arabische Schriftsteller, mit welchem wir es zu tun haben, ist Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî. Er hat, wie wir wissen, im ersten Viertel des IX. S. gelebt. Er war einer der Gelehrten, welche der Chalif Almamûn so sachgemäß zu beschäftigen wußte, indem er einen Auszug aus dem sogenannten Sindhind anfertigen, eine Revision der Tafeln des Ptolemaeus vornehmen, Beob-

---

[1]) *Journal Asiatique* vom 1. Halbjahr 1863 pag. 243. [2]) Ebenda pag. 58 bis 68.

achtungen zu diesem Zwecke in Bagdad und in Damaskus anstellen, endlich die Messung eines Grades des Erdmeridians ausführen ließ[1]. Die astronomischen Tafeln Alchwarizmîs gehen uns nicht weiter an, als daß wir hervorheben müssen, daß sie von Atelhart von Bath, einem englischen Mönche, welcher um 1120 die erste Übersetzung des Euklid aus dem Arabischen in das Lateinische anfertigte (vergl. Kapitel 40), gleichfalls in lateinischer Sprache bearbeitet worden sind[2], und daß sich in ihnen zweifellos eine Sinustafel befand[3]. Eingehend müssen wir uns dagegen mit zwei Schriften Alchwarizmîs beschäftigen, in welchen er zuerst die Algebra, dann die Rechenkunst behandelt hat, deren Reihenfolge wir in unserer Besprechung aber umkehren.

Beide wurden hoch geschätzt und, wie wir sehen werden, nicht ohne Grund. Beide sind, oder waren in verhältnismäßig neuer Zeit im arabischen Texte vorhanden. Die Algebra freilich ist allein in diesem Urtexte veröffentlicht, während für die Rechenkunst man lange auf das Nachsprechen eines selbst arabischer Quelle entstammenden Lobes beschränkt war: das Buch übertreffe alle anderen an Kürze und Leichtigkeit und beweise den Geist und Scharfsinn der Inder in den herrlichsten Erfindungen[4]. Ein lateinisches Manuskript, 1857 in der Bibliothek zu Cambridge entdeckt und im Drucke herausgegeben[5], erwies sich aber als Übersetzung des vermißten Werkes, und der Umstand, daß trotz nachträglichen eifrigen Suchens kein zweites Exemplar dieser Übersetzung außer dem Kodex von Cambridge hat aufgefunden werden können, vereinigt mit der Tatsache der Übersetzung der astronomischen Tafeln desselben Verfassers durch Atelhart von Bath, haben die Vermutung entstehen lassen[6], der gleiche Übersetzer habe auch die Arithmetik lateinisch bearbeitet, eine Vermutung, welche wenigstens soweit große Wahrscheinlichkeit für sich hat, als man auf einen Landsmann und Zeitgenossen des Atelhart, wenn nicht auf ihn selbst als Übersetzer wird schließen dürfen.

---

[1]) Kremer II, 442—443. Suter 10—11, Nr. 19, aber auch Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 158—160 (1902). [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 268—269. Wüstenfeld, Die Uebersetzungen arabischer Werke in das Lateinische. Abhandlungen der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. Bd. XXII (1877) S. 20—23. [3]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 49 Note 1 und 2. [4]) Casiri, *Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis* I, 427 (Madrid 1760). [5]) Die Schrift bildet das I. Heft der von dem Fürsten Bald. Boncompagni herausgegebenen *Trattati d'aritmetica.* [6]) Vgl. einen Aufsatz von Chasles in den *Comptes Rendus de l'académie des sciences* XLVIII, 1058 vom 6. Juni 1859.

Die Schrift beginnt mit den Worten: „Gesprochen hat Algoritmi. Laßt uns Gott verdientes Lob sagen, unserem Führer und Verteidiger.“ Der Name des Verfassers Alchwarizmî ist also hier in Algoritmi übergegangen, und fast in dieser letzteren Form nur noch etwas weniger der Urform gleichend, nämlich als Algorithmus hat das Wort Jahrhunderte überdauert[1]) und bezeichnet jetzt jedes wiederkehrende zur Regel gewordene Rechnungsverfahren. Das Bewußtsein der eigentlichen Bedeutung des Wortes ist in diesem modernen Algorithmus gänzlich verloren gegangen, aber das Gleiche gilt bereits für das XIII. S., wo man schon durch allerlei sprachliche Taschenspielerkünste sich bemühte ein Verständnis des Wortes zu gewinnen[2]). Da sagt einer, das Wort kommt von *alleos* fremd und *goros* Betrachtung, weil es eine fremde Betrachtungsweise ist. Nein, sagt der zweite, es kommt von *argis* griechisch und *mos* Sitte, es ist eine griechische Sitte. Der dritte kommt zu *ares* die Kraft und *ritmos* die Zahl. Ein vierter sieht in *algos* ein griechisches Wort, welches weißen Sand bedeute, und daher der Name, denn die Rechnung *ritmos* wurde auf weißem Sande geführt. Wieder ein anderer legt sich das Wort auseinander in *algos* die Kunst und *rodos* die Zahl. Manchen war durch Überlieferung vielleicht das Bewußtsein geblieben, es handle sich um den Namen eines Mannes, aber dieser hieß ihnen bald Algorus von Indien, bald König Algor von Kastilien, bald Algus der Philosoph. Allerdings ist auch ein Zeugnis dafür vorhanden, daß man in Deutschland im letzten Drittel des XIII. S. Algorismus als Namen eines Mannes kannte. Im jüngeren Titurel findet sich eine Strophe[3]):

Nu ist auch hi gesundert
Lot vurste von Norwege
Ichn weyz, mit we vil hundert,
Ob Algorismus noch lebens plege
Unde Abakuc de geometrien kunde,
De heten vil tzo scaffen
Solten se ir aller tzal da haben funden.

Am auffallendsten erscheint, daß hier nicht bloß *Algorismus*, sondern auch *Abakuc* als eine Persönlichkeit vorkommt. Neuere Gelehrsamkeit hat sich, ehe die richtige Ableitung bekannt war, mit

[1]) In dem Algorithmus den Namen Alchwarizmî erkannt zu haben, ist das große Verdienst von Reinaud (*Mémoire sur l'Inde* pag. 303 sq.), der schon 1845 diesen Gedanken aussprach, also lange bevor die Entdeckung des Cambridger Kodex die Vermutung in Gewißheit verwandelte. [2]) Math. Beitr. Kulturl. 267. [3]) Wir verdanken die Kenntnis dieser Strophe Herrn Armin Tille. Vgl. Zeitschr. für deutsche Philologie Bd. XXX. Ein Xantener Bruchstück des jüngeren Titurel (insbesondere S. 175 die obige Strophe 2009).

scheinbarem Rechte fast am weitesten von der Wahrheit entfernt, indem sie in ähnlicher Weise wie bei Almagest eine Zusammensetzung des arabischen Artikels *al* mit dem griechischen *ἀριθμός*, die Zahl, vermutete und das dazwischengetretene *g* als sprachliche Absonderlichkeit betrachtete, die einer Erklärung nicht fähig sei, auch nicht bedürfe, da man bei dem Übergange aus dem Griechischen durch das Arabische in das Lateinische auf alles gefaßt sein müsse. Es können einen solche Verirrungen nicht erstaunen, wenn man berücksichtigt, daß durch neckischen Zufall alle anderen Formen des Namens unseres arabischen Gelehrten, die bekannt geworden sind, dem Algorithmus lange nicht so verwandt klingen wie das zuletzt veröffentlichte *Algoritmi*. Als solche Formen erwähnen wir *Alchoarismus*[1]), *Alkauresmus*, ja sogar *Alchocharithmus*[2]).

Eine Frage könnte noch erhoben werden dahin gehend, welche den Namen Alchwarizmî führende Persönlichkeit den Urtext zu jener lateinischen Übersetzung geliefert habe? Wir nahmen an, es sei Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî gewesen, aber eine zweite Persönlichkeit konnte gleichfalls als Verfasser gelten. Albîrûnî, nach unserer früheren Darstellung (S. 710) dem Nordwesten Indiens entstammend, hatte nach anderer Meinung seine Heimat in einem kleinen Orte Bîrûn der Landschaft Chwarizm, und diese Meinung, wenn auch mutmaßlich irrig, war verbreitet genug ihm den Namen Alchwarizmî bei manchen zuzuziehen[3]). Außerdem weiß man von ihm, daß er ein Rechenbuch verfaßt hat[4]), einiger Zweifel konnte daher entstehen, ob der erste, ob der zweite Alchwarizmî sich in jener Schrift redend einführe. Die Sicherung in dem Sinne beruht auf dem Umstande, daß nur von dem ersten, nicht von dem zweiten Alchwarizmî eine Algebra geschrieben worden ist, und daß der Verfasser des Rechenbuches nach jenem Anrufen und Preisen des Lenkers der Dinge, welches er echt arabisch noch weiter fortsetzt als wir es oben mitteilten, nach Erörterung der Verschiedenheit der Zahlzeichen unter den Menschen, auf welche wir ebenfalls (S. 711) uns schon bezogen haben, fortfährt wie folgt[5]): „Und ich habe schon in dem Buche Aldschebr und Almukâbala, d. h. der Wiederherstellung und Gegenüberstellung eröffnet, daß jede Zahl zusammengesetzt sei, und daß jede Zahl sich über eins zusammensetze. Die Einheit also wird in jeder Zahl gefunden, und das ist es, was in einem anderen Buche der Arithmetik ausgesprochen ist. Weil die Einheit Wurzel

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 298. [2]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 375. [3]) Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 75, Nr. 129. [4]) Reinaud, *Mémoire sur l'Inde* pag. 303. [5]) *Trattati d'aritmetica* I, 2.

jeder Zahl und außerhalb der Zahl ist." Der Anfang dieses Satzes bis zu der „einem anderen Buche der Arithmetik", *in alio libro arithmetico*, entnommenen Bemerkung über die Ausnahmestellung der Einheit findet sich aber nahezu wörtlich in der Algebra des Muhammed ibn Mûsâ[1]). Wir sind also in der Tat berechtigt, hier unter dem Namen des Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî über jenes Rechenbuch weiter zu berichten, für ihn in Anspruch zu nehmen, was aus dem letzten Teile der hier mitgeteilten Stelle unzweifelhaft hervorgeht, daß wer so schrieb, in der Zahlenlehre der Neupythagoräer wohl geschult sein mußte, welche er nicht aus indischen Quellen kennen lernen konnte, daß unter jenem anderen Buche der Arithmetik die spätere sogenannte spekulative Arithmetik im Gegensatze zur praktischen Arithmetik (S. 704) gemeint ist, daß dem Verfasser darüber Kenntnisse zu Gebote standen, welche unmittelbar oder mittelbar auf Nikomachus, vielleicht auch auf Theon von Smyrna, der am deutlichsten betont hat, die Einheit sei keine Zahl (S. 435), zurückgehen.

Nun wird das eigentliche Rechnen gelehrt, das Zahlenschreiben, das Addieren, bei welchem ein besonderes Gewicht auf den Fall gelegt ist, daß die Summe der Ziffern an einer Stelle 9 übersteigt; die Zehner sollen alsdann der folgenden Stelle zugerechnet und an der ursprünglichen Stelle nur das geschrieben werden, was unterhalb 10 noch übrig bleibt. „Bleibt nichts übrig, so setze den Kreis, damit die Stelle nicht leer sei; sondern der Kreis muß sie einnehmen, damit nicht durch ihre Leerheit die Stellen vermindert werden und die zweite für die erste gehalten wird"[2]). Bei der Subtraktion wie bei der Addition soll man bei der höchsten Stelle, also links anfangen, dann zur nächstfolgenden übergehen, weil dadurch die Arbeit, so Gott will, nützlicher und leichter werde. Die eigentliche Schwierigkeit der Subtraktion für Anfänger, die Behandlung des Falles, daß eine Stelle des Subtrahenden durch eine höhere Zahl als die entsprechende Stelle des Minuenden erfüllt ist, wird zwar erwähnt[3]), aber ohne daß ein Beispiel dafür angegeben wäre, trotzdem vorher *tres modi* d. h. drei Beispiele in Aussicht gestellt sind. Da zwei derselben (nämlich 3211 von 6422 und 144 von 1144) angegeben sind,

[1]) *The algebra of Mohammed ben Musa* (ed. Rosen). London 1831, pag. 5, § 3: *I also observed that every number is composed of units and that any number may be divided into units.* [2]) *Si nihil remanserit pones circulum, ut non sit differentia vacua: sed sit in ea circulus qui occupet eam, ne forte cum vacua fuerit, minuantur differentiae, et putetur secunda esse prima. Trattati d'aritmetica* I, 8. [3]) Hierauf hat H. Eneström in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, Bd. VI, 307 hingewiesen.

so entsteht die Frage, ob hier an einen Mangel des arabischen Originals oder an eine durch den Übersetzer verschuldete Auslassung zu denken sei. Die dritte Operation ist das Halbieren, welches in der umgekehrten Ordnung bei der niedersten Stelle zu beginnen hat. Das Verdoppeln hingegen, die vierte Operation, beginnt wieder von oben. Die Hervorhebung von Halbierung und Verdoppelung als besonderen Rechnungsarten ist sehr bemerkenswert. Indisch ist sie nicht, wenigstens finden wir sie weder bei indischen Originalschriftstellern, noch bei dem nach indischem Muster arbeitenden Maximus Planudes. Nach dem heutigen Stande des Wissens können wir nur an unmittelbaren oder durch Griechen vermittelten ägyptischen Einfluß denken. Die Multiplikation wird nach der Weise ausgeführt, welche wir (S. 610—611) bei den Indern kennen gelernt haben; das Produkt wird jeweil über die betreffende Ziffer des Multiplikandus geschrieben und verbessert, wenn eine nach rückwärts folgende Stelle des Multiplikandus mit der Multiplikatorziffer vervielfacht eine Verbesserung nötig macht. Von der Richtigkeit der genannten Operationen überzeugt man sich durch die Neunerprobe. Die Division wird nach dem gleichen Gedanken wie die Multiplikation ausgeführt, nur natürlich in umgekehrtem Gange. Die Schreibweise ist die, daß der Dividend unter sich den Divisor, über sich den Quotienten erhält und erst über dem Quotienten die aufeinanderfolgenden Veränderungen erscheinen, welche mit dem Dividenden durch Abziehung der Teilprodukte vorgenommen werden. Der Divisor bleibt übrigens an seiner Stelle unter dem Dividenden nicht stehen, sondern rückt fortwährend von links nach rechts zurück. So liefert die Division 46 468 : 324 den Quotient 143 und den Rest 136. Faßt man die umständliche Beschreibung[1]) in eine kurze, vielleicht durch den Verfasser, vielleicht durch den Übersetzer weggelassene Musterrechnung zusammen, so würde sie folgendermaßen ausgesehen haben:

```
    136
    24
   110
   22
  140
  143
  46468
  324
   324
    324.
```

---

[1]) *Trattati d'aritmetica* I, 14—16.

Von einer komplementären Division ist keine Spur zu finden. Im Anschlusse an die Division kommt der Verfasser zu den Brüchen und bemerkt, die Inder hätten sich der 60 teiligen Brüche bedient, welche er dann schließlich ausführlich erklärt und das Rechnen an und mit denselben erläutert.

Wir schalten hier eine Bemerkung über arabische Brüche ein, von welcher wir zwar nicht die volle Überzeugung besitzen, daß sie bereits für die Zeit des Muḥammed ibn Mûsâ Geltung habe, aber auch für das Gegenteil keinerlei Gründe kennen, indem es mehr um etwas Sprachliches als der Rechenkunst Angehöriges sich handelt. Die Araber unterschieden nämlich stumme Brüche von aussprechbaren[1]). Aussprechbar sind die Brüche mit den Nennern 2 bis 9 oder anders gesagt: es gibt arabische Wörter für Halbe, Drittel, . . . Neuntel. Stumm sind Brüche mit Nennern, welche nicht 2 bis 9 sind oder aus diesen multiplikativ zusammengesetzt werden können, wie etwa Sechstel des Fünftels statt Dreißigstel. Ein stummer Bruch ist also z. B. $\frac{1}{13}$ und muß umschreibend durch ein Teil von 13 Teilen ausgedrückt werden. Man hat die Ähnlichkeit mit dem Aussprechbarmachen der Brüche durch Verwandlung in eine Summe von Stammbrüchen bei den Ägyptern (S. 68) hervorgehoben[2]), und wenn wir uns kein bestimmtes Urteil über die Triftigkeit dieser unter allen Umständen höchst scharfsinnigen Vergleichung zutrauen, so unterlassen wir doch nicht sie zu wiederholen und im voraus darauf aufmerksam zu machen, daß uns noch eine weitere Vergleichung, möglicherweise eine ägyptische Erinnerung durch mündliche Überlieferung von Jahrtausenden in diesem Kapitel aufstoßen wird.

Von einem Rechenbrette oder etwas, was demselben irgendwie gleicht, ist bei Alchwarizmî keine Rede, und ebenso erfolglos wird unser Suchen danach bei älteren arabischen Schriftstellern bleiben. Von Alkindî, der seine wissenschaftliche Tätigkeit um 850 entfaltete, wird zwar eine Schrift erwähnt, deren Titel in richtiger Übersetzung über die Linien und das Multiplizieren mit der Zahl der Gerstenkörner[3]) lautet, aber daraus ein Rechnen auf Linien oder zwischen Linien mit Hilfe von Gerstenkörnern entnehmen zu wollen, dürfte allzukühn sein.

Die zweite Schrift des Alchwarizmî, welcher wir uns jetzt zuwenden, ist die, wie wir schon gesagt haben, vor der Arithmetik des-

[1]) Kâfî fîl Hisâb (deutsch von Hochheim) Heft I, S. 11, Anmerkung 4, und Behaeddins Essenz der Rechenkunst (deutsch von Nesselmann) S. 4.
[2]) Herr L. Rodet in einem Privatbriefe. [3]) Fihrist 11. Suter 23—26, Nr. 45.

selben Verfassers entstandene Algebra[1]), das erste Werk, soviel man weiß, in welchem dieses Wort selbst als Titel erscheint. Ja, wenn man arabischen Notizen, die teils in einem Werke des XII. S., teils in Randbemerkungen zu einer Handschrift von Alchwarizmîs Algebra niedergelegt sind[2]), Glauben beimessen darf, so ist es das erste Werk, in welchem jenes Wort vorkommen kann, denn vor Alchwarizmî habe kein Araber je über den dadurch bezeichneten Gegenstand geschrieben. Wir müssen demnach sicherlich an dieser Stelle von dem Worte Algebra reden[3]).

Eigentlich sind es zwei Wörter Aldschebr walmuḳâbala, welche Alchwarizmî vereint als Titel benutzt hat. Dschebr ist restauratio, die Wiederherstellung, muḳâbala ist oppositio, die Gegenüberstellung. Allein mit diesen Wortübersetzungen ist gewiß für niemand, der den Sinn der Wörter in der Mathematik noch nicht gekannt hat, etwas verdeutlicht. Trotzdem fand es Alchwarizmî nicht für notwendig, die Wörter, die ihm als Überschrift dienten, zu erklären, und, was noch mehr sagen will, in dem eigentlich theoretischen Teile seines Buches kommen diejenigen Operationen, welche dschebr und muḳâbala genannt werden, gar nicht vor. Wir werden noch Folgerungen aus diesem höchst merkwürdigen Tatbestande ziehen. Einstweilen erläutern wir auf die Erklärungen späterer arabischer Schriftsteller uns stützend die Meinung unseres Verfassers. Wiederherstellung ist genannt, wenn eine Gleichung derart geordnet wird, daß auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur positive Glieder sich finden; Gegenüberstellung sodann, wenn Glieder gleicher Natur auf beiden Seiten weggelassen werden, so daß Glieder dieser Art nach vollzogener Gegenüberstellung nur noch auf der einen Seite vorkommen, wo sie eben im Überschusse vorhanden waren.

Alchwarizmî nimmt, wie gesagt, in seinem theoretischen Teile, wo er zuerst die Auflösung der Gleichungen lehrt, stillschweigend an, die betreffenden beiden Vorbereitungsoperationen seien bereits vollzogen, und er unterscheidet danach 6 Arten von Gleichungen, welche wir schreiben würden:

$$ax^2 = bx, \quad ax^2 = c, \quad bx = c, \quad x^2 + bx = c, \quad x^2 + c = bx,$$
$$x^2 = bx + c.$$

[1]) Eine alte lateinische Übersetzung ist abgedruckt bei Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253—297. Wir verstehen unter Mohammed ben Musa, Algebra immer die von Friedr. Rosen besorgte mit englischer Übersetzung begleitete Ausgabe. London 1831. [2]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. VII. [3]) Ebenda pag. 177—188 und Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 45—53.

Er gibt sodann für jede dieser Gleichungen Regeln, welche er zugleich an Zahlenbeispielen erläutert.

Wir wollen die Auflösung von $x^2 + c = bx$ hier beispielsweise übersetzen, weil sie in mehreren Beziehungen die wichtigste ist[1]. „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln; z. B. 1 Quadrat und 21 an Zahlen sind gleich 10 Wurzeln desselben Quadrates, d. h. was muß der Betrag eines Quadrates sein, welches nach Addition von 21 Dirham gleichwertig wird mit 10 Wurzeln jenes Quadrates? Auflösung: Halbiere die Zahl der Wurzeln; ihre Hälfte ist 5. Vervielfache dieses mit sich selbst; das Produkt ist 25. Ziehe davon die mit dem Quadrate vereinigten 21 ab; der Rest ist 4. Ziehe die Wurzel; sie ist 2. Ziehe dieselbe von der halben Anzahl der Wurzeln, welche 5 war, ab; der Rest ist 3. Das ist die Wurzel des gesuchten Quadrates und das Quadrat selbst ist 9. Oder Du kannst jene Wurzel zu der halben Anzahl der Wurzeln addieren; die Summe ist 7. Das ist die Wurzel des gesuchten Quadrates, und das Quadrat selbst ist 49. Wenn Du auf ein Beispiel dieses Falles stößest, versuche die Lösung durch Addition, und wenn diese nicht den Zweck erfüllt, dann wird Subtraktion es sicherlich tun. Denn in diesem Falle können beide — Addition und Subtraktion — angewandt werden, was in keinem anderen der drei Fälle, in welchen die Anzahl der Wurzeln halbiert werden muß, gestattet ist. Wisse auch, daß, wenn in einer Aufgabe dieses Falles das Produkt der Vervielfachung der halben Anzahl der Wurzeln in sich selbst kleiner ausfällt als die Zahl der Dirham, welche mit dem Quadrate verbunden ist, die Aufgabe unmöglich ist; ist aber jenes Produkt den Dirham selbst gleich, dann ist die Wurzel des Quadrates gleich der Hälfte der Anzahl der Wurzeln allein ohne jede Addition oder Subtraktion.“ In Zeichen würden wir das so schreiben, daß aus $x^2 + c = bx$ sich

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

ergebe, also mit zwei möglichen Werten, vorausgesetzt, daß $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$; bei $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ sei die Aufgabe unmöglich; bei $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ gebe es nur einen Wert $x = \frac{b}{2}$.

Nachdem die verschiedenen Gleichungsformen aufgelöst sind, wendet sich Alchwarizmî zum geometrischen Nachweise der Richtigkeit des betreffenden Verfahrens. Auch hier wollen wir nur einen Fall, etwa $x^2 + bx = c$ hervorheben[2], um zu zeigen, wie die Sache

[1]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 11—12. [2]) Ebenda pag. 13—16.

gemeint sei. Das Zahlenbeispiel lautet $x^2 + 10x = 39$. Man zeichne (Fig. 95) ein Quadrat $\alpha\beta$ und an jede Seite desselben ein Rechteck, so entsteht, wenn man noch 4 kleine Quadratchen an den Ecken beifügt, ein größeres Quadrat $\delta\varepsilon$. Soll die erste Figur $\alpha\beta$ das Quadrat x^2, sollen die 4 Rechtecke γ, η, $\varkappa$, θ die $10x$ vorstellen, so ist die Breite jedes solchen Rechteckes $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ und die 4 Eckquadratchen betragen zusammen $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$. Das größere Quadrat $\delta\varepsilon$ ist also $x^2 + 10x + 25$ oder 64, weil $x^2 + 10x = 39$ ist. Die Seite des größeren Quadrates ist mithin $\sqrt{64} = 8$. Eben diese Seite ist aber auch $x + \frac{10}{2}$, folglich $x = 8 - 5 = 3$ oder als Formel geschrieben

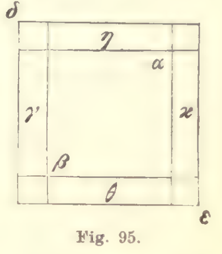


Fig. 95.

$$x = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}, \quad \text{beziehungsweise} \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Alchwarizmî erklärt dann ebendenselben Fall mit Hilfe eines Gnomons. Er legt nämlich (Fig. 96) an $\alpha\beta = x^2$ das $10x$ in Gestalt nur zweier Rechtecke γ, δ an 2 Seiten an, so daß ein aus $\alpha\beta$, γ und δ bestehender Gnomon gebildet ist, welchem zur Vollendung des Quadrates $\varepsilon\zeta$ nur ein Eckquadrat von der Seite $\frac{10}{2} = 5$, mithin von der Fläche 25 fehlt. Das größere Quadrat ist nunmehr wieder $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$ und seine Seite $\sqrt{64} = 8$. Ebendiese ist aber auch $x + 5$ und so wieder $x = 8 - 5 = 3$.

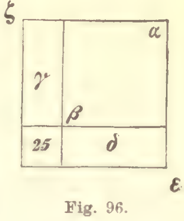


Fig. 96.

Wir bleiben in unserem Berichte hier zuvörderst stehen, um an das Bisherige die erforderlichen Bemerkungen zu knüpfen. Wir haben gesehen, daß Alchwarizmî seine Schrift Aldschebr walmukâbala nannte. Als im Mittelalter lateinische Übersetzungen angefertigt wurden, übernahm man erst einfach die beiden Wörter, welche man nur mit lateinischen Buchstaben schrieb[1]), und welchen man allenfalls die Übersetzung *restauratio et oppositio* beifügte, die dabei mitunter in der Reihenfolge wechselten, so daß sie *oppositio et restauratio* hießen. Allmählich ging von den beiden arabischen Wörtern das zweite verloren, das erste blieb allein in der Form *algebra* übrig, und nun geschah das Entgegengesetzte wie bei *algorithmus*. Dort vergaß man, daß es ein Mann war, der so hieß, und suchte das Wort zu übersetzen, hier vergaß man, daß es ein übersetzungs-

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253.

fähiges Wort war, welches man vor sich hatte und hielt *algebra* für den Namen eines Mannes. Von einem Araber Geber sollte die Kunst herrühren, behauptete im XIV. S. ein Florentiner, Rafaele Canacci[1]), und andere schrieben das gläubig ab, nicht selten den Erfinder in jenem Astronomen Dschâbir ibn Aflaḥ aus Sevilla vermutend, der gemeiniglich Geber genannt wird und mehrere Jahrhunderte nach Alchwarizmî erst lebte[2]). Im Spanischen ist die Bedeutung und das Wort selbst annähernd erhalten in *Algebrista*, der Chirurg[3]).

Wir haben ferner gesehen, daß Alchwarizmî jene Wörter *dschebr* und *mukâbala* zwar in der Überschrift gebraucht aber nirgend erklärt hat, wiewohl der bloße Wortlaut ganz gewiß nicht ausreicht, um die technische Bedeutung zu verstehen. Die Folgerung ist dadurch geradezu aufgezwungen, daß Alchwarizmî, mag er auch der erste arabische Schriftsteller über seinen Gegenstand gewesen sein, doch keinesfalls einen für seine Landsleute neuen Gegenstand behandelte, daß vielmehr durch mündliche Lehre, entnommen aus persönlichen Übertragungen fremdländischen Wissens oder aus Schriften, die in nicht-arabischer Sprache verfaßt waren, schon bekannt gewesen sein muß, was Herstellung und was Gegenüberstellung sei.

So sind wir zu der Frage gelangt, aus welcher Sprache die arabische Lehre von den Gleichungen sich abgeleitet hat und wann diese Ableitung erfolgte. Die letztere Frage zu beantworten reicht das bekannte Quellenmaterial nicht aus. Wir können nur behaupten, die Einführung der Algebra müsse hinlänglich lange Zeit vor Alchwarizmî stattgefunden haben, um die Möglichkeit zu gewähren, daß jene Begriffe und die für dieselben erfundenen Kunstausdrücke unter den Fachleuten — denn für solche schrieb Alchwarizmî — schon landläufig geworden sein konnten. Aber woher war damals die Algebra gekommen? Zwei Quellen stehen uns, soweit wir sehen, zu Gebot. Was Alchwarizmî gibt kann griechischen, kann indischen Ursprungs sein, kann vielleicht einer aus beiden Quellen gemischten Strömung sein Dasein verdanken, wie wir ja auch in seinem Rechen-

[1]) Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra.* Parma 1797. I, 35. [2]) Hankel S. 248, Note **. Dieser Geber darf ja nicht verwechselt werden mit dem Alchimisten Abû Mûsâ Dschâbir, der gleichfalls als Geber in der Literargeschichte genannt wird und ein Schüler des Dschaʿfar as Ṣâdiḳ (699—765) war, mithin vor Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî gelebt hat. Vgl. Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher S. 12, Nr. 25. [3]) *Llegàron à un pueblo, donde fuè ventura hallàr à un Algebrista con quièn se curò el Sanson desgraciado. Don Quixote,* Parte III, L. V, c. 15 am Ende. Hier ist augenscheinlich Algebrista der Chirurg, der Zerbrochenes wieder einrichtet.

buche überwiegend Indisches und daneben einzelne griechische Spuren vorfanden. Wir wollen zu zeigen versuchen, daß, wenn die Algebra überhaupt als eine Mischung zu betrachten ist, jedenfalls griechische Elemente in ihr weitaus vorherrschen.

Schon die beiden Verfahren der Herstellung und Gegenüberstellung, welche voraussetzen, daß auf beiden Seiten der Gleichung nur Positives stehe, wenn der Ansatz vollendet ist, können nicht indisch sein, weil die Inder von dieser Bedingung nichts wissen. Es kann hier nur auf Griechisches gemutmaßt werden, und vergleichen wir unsere Auszüge aus Diophant (S. 472), so finden wir ganz genau die Vorschrift der Herstellung und Gegenüberstellung, in welcher nur keine Namen für jenes Verfahren angegeben sind, Namen die mithin jünger und mutmaßlich arabischer Herkunft sein werden. Bei Diophant finden wir ferner gerade die drei Formen unreiner quadratischer Gleichungen, welche unser Araber kennen lehrt, wieder mit einem kleinen Unterschied, auf den wir noch zu reden kommen. Vergleichen wir weiter.

Alchwarizmî hat für die in den Gleichungen auftretenden Größen verschiedene Namen. Die Unbekannte heißt schai, die Sache, oder dschidr, die Wurzel. Das Quadrat der Unbekannten heißt māl, Vermögen, Besitz. Die bekannte Größe wird als die Zahl benannt. Der Name des Quadrats kann nun sehr wohl aus dem griechischen *δύναμις*, Möglichkeit, Vermögen übersetzt sein, während es aus dem indischen varga, die Reihe, unter keinen Umständen abgeleitet werden kann[1]. Das Wort schai für die Unbekannte entspricht weder dem indischen yâvattâvat, noch dem *ἀριθμός* des Diophant. Letzteres war freilich nicht mehr zu verwenden, wenn man ihm schon eine andere Bedeutung gegeben hatte, wenn man ganz zweckmäßig die bekannte Größe der Gleichung, die *μονάς* des Diophant, die rûpa der Inder Zahl genannt hatte. Der Name schai, Sache, für die Unbekannte erinnert, wenn man ihn nicht als in der Natur der Fragen begründet einheimisch entstanden lassen sein will, nur an das ägyptische hau, welches gleichfalls Sache heißt und für die Unbekannte gebraucht wird, eine Ähnlichkeit, auf welche wir oben (S. 718) vorbereitet haben[2]. Nun bleibt noch dschidr, die Wurzel, für die Unbekannte erklärungsbedürftig. Man hat darin eine Übersetzung des indischen mûla erkannt. Das ist ganz gewiß richtig für die Bedeutung von

---

[1]) Über alle diese Namen vgl. Hankel S. 264, Note *, wo freilich weder alles angegeben ist, was wir hier mitteilen, noch die gleichen Folgerungen gezogen sind. [2]) Die Vergleichung zwischen *schai* und *hau* haben wir in dem Aufsatze: „Wie man vor vierthalbtausend Jahren rechnete“ in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 6. September 1877 ausgesprochen.

dschidr als Quadratwurzel einer Zahl, welche bei den Griechen stets *πλευρά*, die Seite, hieß. Aber ob nicht zugleich an das *ῥίζη* des Nikomachus, welches in der Arithmetik des Boethius sich mit erweiterter Bedeutung als radix wiederfindet[1]), erinnert werden darf, ist eine doch wohl aufzuwerfende Frage. Es könnte *ῥίζη* selbst eine Übersetzung von mûla sein, wenn wir an die indische Beeinflussung Alexandrias im II. S. uns erinnern; es könnte mûla aus *ῥίζη* übersetzt worden sein, wenn wir an die alexandrinische Beeinflussung Indiens denken; es könnte dschidr dem einen wie dem andern Worte sein Dasein verdanken! Soviel scheint daraus hervorzugehen, in diesen Wortvergleichungen werden wir den Schlüssel zu dem uns beschäftigenden Geheimnisse nicht finden.

Täuschen wir uns nicht, so liegt dieser Schlüssel in den Figuren, welche Alchwarizmî zur Begründung seiner Auflösungen der unreinen quadratischen Gleichungen gezeichnet hat, oder vielmehr in den Buchstaben, welche er zur Bezeichnung dieser Figuren verwendet[2]). Alchwarizmî beweist Algebraisches geometrisch; das ist von vornherein griechisch, nicht indisch, da dem Inder gerade das entgegengesetzte Verfahren Gewohnheit ist, Geometrisches algebraisch zu behandeln, und nur eine unbestimmte quadratische Gleichung

$$xy = ax + by + c$$

(S. 631) geometrische Erörterung fand, welche uns an einen griechischen Ursprung gerade dieser Gleichungsauflösung denken ließ. Alchwarizmî bezeichnet ferner seine Figuren mit Buchstaben; das ist wieder griechisch, nicht indisch. Und nun vollends mit welchen Buchstaben bezeichnet er sie? Allerdings mit arabischen Buchstaben, aber mit solchen, welche eine bunte Reihenfolge in dem späteren arabischen Alphabete darstellen und auch durch die Reihenfolge Abudsched nicht ganz erklärt sind, während sie durch griechische Buchstaben nach dem Gesetze gleichen Zahlwertes, sofern man die Buchstaben als Zahlen betrachtet, ausgedrückt die vollständig richtige griechische Reihenfolge zeigen, und auch darin griechisch sich geben, daß sie das ϛ und ι ausschließen. Welchen Grund könnte ein Araber gehabt haben, seinen beiden Zeichen, welche die Zahlenbedeu-

[1]) *Radices autem proportionum voco numeros in superiore dispositione descriptos, quasi quibus omnis summa supradictae comparationis innitatur* (Boetius ed. Friedlein pag. 60 l. 1—3). [2]) Der den Charakter einer Methode an sich tragende Gedanke auf die Buchstaben einer Figur und deren Reihenfolge zu achten, um die Herstammung einer Lehre zu erkennen, rührt von Hultsch her, der ihn in seiner Abhandlung über den heronischen Lehrsatz, Zeitschr. Math. Phys. IX, 247 zuerst in Anwendung gebracht hat.

tung 6 und 10 haben und so den als ausgeschlossen von uns genannten entsprechen, also den w-Laut und den j-Laut, nicht zu benutzen? Keinen, so viel wir sehen. Der Grieche hatte solche Gründe. Das ϛ war ihm im Gewöhnlichen überhaupt kein Buchstabe mehr, und das ι, wie wir uns erinnern, dem einfachen Striche allzuähnlich. Der ein griechisches Muster benutzende Araber folgte ihm, aber auch nur dieser.

Wir behaupten auf diese Begründung gestützt: Zum mindesten die geometrischen Nachweisungen für die Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî sind griechisch, und damit gewinnen auch frühere Behauptungen erneute, für manchen Leser vielleicht erhöhte Wahrscheinlichkeit, die Behauptung jene Auflösung der Gleichung $xy = ax + by + c$ bei Bhâskara sei griechischen Ursprungs, die Behauptung, die griechische Algebra habe von Euklid zu Heron, vielleicht zu Diophant in vollkommen selbständiger Entwicklung sich ausgebildet.

Wie Alchwarizmî zu griechischer Algebra gekommen sein kann, darüber vollends ist nach der allgemeinen kulturgeschichtlichen Übersicht, welche wir im vorigen Kapitel zu geben uns gedrungen fühlten, kein Zweifel. Die griechischen Gelehrten, die am persischen Hofe erschienen waren, gehörten einer Zeit an, welche wohl anderthalb Jahrhunderte nach Diophant fällt, und durch sie kann und wird manches aus Diophant, beziehungsweise aus Kenntnissen, wie sie in griechischer Sprache uns nur bei Diophant erhalten sind, mitgeführt worden sein. Wir erinnern ferner daran, daß Johannes von Damaskus im VIII. S. zum arabischen Hofe in Beziehung stand, jener Mann (S. 696), der mit Pythagoras und Diophant verglichen worden ist, vielleicht doch mehr als eine Floskel seines Lobredners, vielleicht ein Hinweis darauf, daß die Gegenstände pythagoräischer wie diophantischer Arithmetik und Algebra ihm geläufig waren.

Es fehlt freilich bei Alchwarizmî neben Dingen, in welchen er als Schüler griechischer Algebraisten sich erweist, auch nicht an Dingen, in welchen er sich wie von den Indern, so auch von ihnen zu unterscheiden scheint, nicht an solchen, in welchen er über sie hinausgeht. Die Griechen, und wie die Griechen so auch die Inder (S. 625), bereiteten eine unreine quadratische Gleichung, etwa

$$ax^2 + bx = c,$$

zur Auflösung dadurch vor, daß sie dieselbe mit dem Koeffizienten a des quadratischen Gliedes, unter Umständen auch mit dem Vierfachen desselben $4a$ vervielfachten. Alchwarizmî schlägt den entgegengesetzten Weg ein, er läßt seine Gleichung durch jenen Koeffi-

zienten dividieren[1]) und bringt sie so in die in seinen Lösungen vorgesehene Form $x^2 + b_1x = c_1$. Wir erinnern uns ferner, daß es mindestens sehr wahrscheinlich gemacht werden konnte, Diophant habe nicht gewußt, daß manche unreine quadratische Gleichungen zwei voneinander verschiedene positive Wurzelwerte besitzen (S. 476). Alchwarizmî spricht ausdrücklich von den beiden Wurzeln der Gleichungen $x^2 + c = bx$ (S. 720). Das dürfte doch wohl auf indischen Einfluß zurückzuführen sein, so daß damit das Wort Mischung, dessen Möglichkeit wir für die arabische Algebra in sehr einschränkende Klauseln einschlossen, sich für dieses eine indische Element rechtfertigen könnte.

Indisch ist auch wohl die nur uneigentlich der Algebra zugeteilte Regeldetri, welche in der Fortsetzung von Alchwarizmîs Werke auftritt[2]) und ähnlich bei griechischen Schriftstellern uns nicht bekannt ist.

Gehen wir in unserem Berichte weiter, so kommen wir zu einem unzweifelhaft wieder griechischen Quellen entstammenden Kapitel mit der Überschrift die Messungen, *misâhât*[3]). Einzelheiten mögen unsere Behauptungen bestätigen. Alchwarizmî spricht den pythagoräischen Lehrsatz aus und will ihn beweisen. Zum Beweise dient ihm (Fig. 97) das in acht gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke zerlegte Quadrat, die Figur, deren wir als Fig. 34 zum Verständnis der berüchtigten platonischen Menonstelle (S. 217) bedurften, welche auch von Pythagoras mutmaßlich zum Beweise seines Satzes in dem ersten Falle, daß das vorgelegte rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines Quadrates war, benutzt wurde, eine Mutmaßung, die selbst wieder zu gesteigerter Wahrscheinlichkeit gelangt, wenn wir die dazu dienende Figur als eine griechische wirklich nachweisen können. Das können wir aber trotz des arabischen Fundortes wieder mit Hilfe der

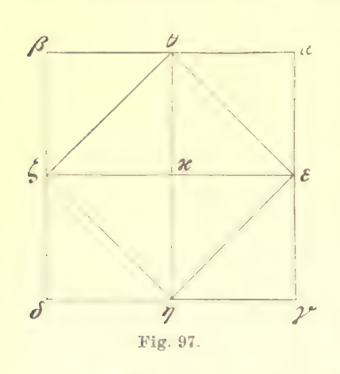


Fig. 97.

[1]) *The solution is the same when two squares or three, or more or less be specified; you reduce them to one single square and in the same proportion you reduce also the roots and simple numbers, which are connected therewith* (Mohammed ben Musa, Algebra pag. 9). [2]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 68—70. [3]) Ebenda pag. 70—85. Eine französische Übersetzung dieses einen Kapitels hat Aristide Marre nach Rosens englischer Übersetzung in den *N. ann. math.* V, 557—570 gegeben. Später hat er sie nach dem arabischen Grundtexte verbessert zum erneuerten Abdruck bringen lassen in *Annali di matematica pura ed applicata* T. VII. Roma 1866.

Buchstaben. Unter den 12 Figuren, welche überhaupt in dem Kapitel der Messungen vorkommen, ist eine (ein durch einen vertikalen Durchmesser geteilter Kreis) ohne jede Bezeichnung. Zehn Figuren sind durch an die Seiten beigeschriebene Längenmaße bezeichnet. Die einzige zum pythagoräischen Lehrsatze gehörige Figur trägt Buchstaben an den Ecken und zwar solche, die nach unserer vorerwähnten Methode ins Griechische übertragen eine richtige Reihenfolge der gewählten Buchstaben geben[1]). Vierecke, heißt es alsdann weiter, sind von fünf Arten: Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Rhomboide, unregelmäßige Vierecke. Das sind ganz genau die fünf euklidischen Vierecke im Gegensatze zu den indischen (S. 651). Alchwarizmî unterscheidet dabei Länge und Breite der Figuren, unter ersterer die größere, unter letzterer die kleinere Abmessung verstehend. Das ist wieder alexandrinisch und von ägyptischer Zeit her in Gebrauch (S. 394). Die Aufgabe wird gestellt: in ein gleichschenkliges Dreieck, dessen beide gleiche Schenkel 10 und dessen Grundlinie 12 zur Länge hat, ein Quadrat einzuzeichnen. Die Höhe des Dreiecks ergibt sich ihm als 8, die Quadratseite als $4\frac{4}{5}$. Genau dieselbe Aufgabe mit denselben Maßzahlen findet sich bei Heron[2]), denn darin wird man doch wohl eine Verschiedenheit nicht erkennen wollen, daß Heron von seinem gleichschenkligen Dreiecke nur die Grundlinie mit 12, die Höhe mit 8 bekannt gibt, woraus man die beiden gleichen Seiten mit je 10 berechnen könnte, wenn Heron es auch unterläßt. Eine gewisse Verschiedenheit bietet nur die Art der Berechnung der Quadratseite, die in dem arabischen Texte deutlicher ist als in unserem griechischen Wortlaute. Heron nämlich verschafft sich ohne weitere Begründung die Quadratseite, indem er das Produkt von Höhe und Grundlinie durch die Summe von Höhe und Grundlinie dividiert; Alchwarizmî dagegen rechnet — ob nach griechischer Vorlage lassen wir dahingestellt — dieselbe Formel erst algebraisch aus, indem er die Quadratseite als Unbekannte wählt und die vier Stücke, in welche die Einzeichnung des Quadrates das ursprüngliche Dreieck zerlegt, ihrer Fläche nach einzeln berechnet, welche alsdann zusammen der bekannten Gesamtfläche gleich gesetzt werden. Allerdings fehlen auch in dem Kapitel der Messungen gewisse Dinge, welche wir sonst bei Schriftstellern, die unmittelbar an Heron sich anlehnen, zu finden gewohnt sind. Die näherungsweise Berechnung des gleichseitigen Dreiecks unter

---

[1]) Rosen hat zwar R wo wir ζ haben, doch ist dieses offenbar Wirkung eines Schreibfehlers, indem die beiden entsprechenden arabischen Buchstaben sich nur durch ein kleines Pünktchen unterscheiden. [2]) Heron (ed. Hultsch) pag. 74—75.

Benutzung von $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$, die heronische Dreiecksformel aus den drei Seiten, jene altägyptischen Annäherungswerte für Vierecksflächen als Produkte der arithmetischen Mittel von je zwei Gegenseiten lehrt Alchwarizmî nicht. Von Stereometrischem hat nur der Inhalt einer abgestumpften quadratischen Pyramide, deren Grundfläche die Seite 4, die Abstumpfungsfläche die Seite 2 besitzt, während die Höhe 10 ist, Beachtung gefunden. Die Berechnung selbst kann nach griechischem Muster geführt sein, wiewohl gerade diese Zahlen in keinem der bekannten heronischen Beispiele vorkommen. Auch ein indisches Element ist übrigens mit Bestimmtheit in diesem Kapitel nachzuweisen. Die Verhältniszahl π wird nämlich in dreierlei Größen angegeben. Davon werde $\frac{22}{7}$ „im praktischen Leben angewandt, wiewohl es nicht ganz genau sei; die Geometer besitzen zwei andere Methoden“, und diese sind die indischen $\pi = \sqrt{10}$ und $\pi = \frac{62832}{20000}$.

Nun kommt ein letzter wieder ganz verschieden gearteter Abschnitt, an Länge ziemlich genau die Hälfte des ganzen Buches ausmachend[1]) und dadurch den Beweis liefernd, daß in den Augen des Verfassers hier wohl der Schwerpunkt seiner Aufgabe liegen mochte. Es handelt sich um die ungemein verwickelten, um nicht zu sagen verworrenen Bestimmungen über Erbrecht, über Freimachung von Sklaven und dergleichen, welche in dem Koran, dem bürgerlichen nicht minder als religiösen Gesetzbuche der Araber, enthalten waren, und welche mit ihren sich oft widersprechenden Forderungen nicht selten eine Entscheidung nötig machten, die von dem Rechte und der Rechnung gleichmäßig abwich, weil es untunlich schien, nur das eine zugunsten des anderen zu verletzen. Aufgaben wie jene römische Erbschaftsfrage von der Witwe, die nach dem Tode des Mannes Zwillinge zur Welt bringt, sind in diesem Abschnitte nicht enthalten, was ja zum voraus keineswegs sicher war, da möglicherweise auch diese Doktorfrage einem arabischen Rechenkünstler hätte bekannt werden können und dann gewiß seine Sammlung kitzlicher Fälle zu bereichern beigetragen haben würde. Aber wenn auch Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen mit dem römischen Rechte bei den Arabern nachzuweisen sind, ableitbar aus der langen Geltung römischen Rechtes in Palästina und Syrien, im Erbrecht finden sich keine Vergleichungspunkte. Es ist ganz unabhängig von fremden Einflüssen auf ausschließlich semitischem Boden entstanden, und nur die hebräische Gesetzgebung, die ebenso wie die arabische auf eine

[1]) Mohammed ben Musa, Algebra pag. 86—174.

altsemitische gemeinsame Rechtsauffassung zurückreicht, hat hierbei mitgewirkt[1]). Dieser Abschnitt der Algebra ist also arabisch durch und durch und ist als Grundlage zahlreicher späterer besonderer Schriften zu betrachten, welche geradezu von den Erbteilungen und den dabei vorkommenden Rechnungen ausschließlich handeln. Ibn Chaldûn, ein arabischer Gelehrter, der von 1332 bis 1406 im Okzidente lebte, hat diesen Teil der mathematischen Wissenschaften unter dem Namen al farâ'id, d. h. gesetzlich festgestellte Bedingung, ausführlich geschildert und Schriftsteller genannt, welche sich mit demselben besonders beschäftigten[2]). Gleiches findet sich bei Hadschî Chalfa[3]), einem Bibliographen des XVII. S.

Wir haben die beiden Lehrbücher Alchwarizmîs, sein Lehrbuch der Rechenkunst und das der Zeit nach ältere der Algebra, verhältnismäßig sehr ausführlich besprochen. Die ganz außergewöhnliche Wichtigkeit, welche beide Schriften für die Entwicklung der abendländischen Mathematik gewonnen haben, wird noch nachträglich dieses längere Verweilen rechtfertigen. Schon jetzt dürfte aber unsere Rechtfertigung von dem Gesichtspunkte aus geliefert sein, daß uns nunmehr die Grundlage genau bekannt ist, welche durch den ersten arabischen Schriftsteller über Mathematik natürlich aus fremdem Stoffe geschaffen war, eine Grundlage, auf welcher seine Landsleute nun fortbauen konnten und mußten, mochten sie gleich ihm die schon zubehauenen Steine den Trümmern einer fremdländischen Bildung entnehmen, oder mochten sie selbst ganz Neues schaffend ihre Befähigung mehr als bloße Aufbewahrer angeeigneten Gutes zu sein glänzend bewähren.

Was das Verhältnis betrifft, in welchem gemischt Griechisches und Indisches von Alchwarizmî aufgenommen und verarbeitet wurde, so läßt sich dasselbe kurz dahin angeben, daß als indisch vornehmlich die Rechenkunst, als griechisch dagegen, wenn auch nicht unter Ausschließung jeglicher aus Indien stammender Veränderung, die Algebra sowie die Geometrie, mit anderen Worten die eigentliche wissenschaftliche Mathematik sich erweist.

Diese fast gegensätzliche Scheidung der beiden Richtungen, welche bei Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî sich einigermaßen verwischte, scheint auch fast zwei Jahrhunderte nach ihm im allgemeinen noch bemerklich gewesen zu sein. Erzählt doch der be-

---

[1]) Kremer I, 527—532. [2]) Ibn Khaldoun, *Prolégomènes* in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale* T. XXI, Partie 1, pag. 21 bis 25 und 138—140. Über Ibn Khaldoun selbst vgl. Suter 169—170, Nr. 420. [3]) Hâǧǧî Halîfa, Bd. IV, S. 393 flgg.

rühmteste unter allen arabischen Ärzten Abû 'Alî Ḥusain ibn 'Abdallâh ibn Ḥusain ibn 'Alî as-Schaich ar-Ra'îs Ibn Sînâ oder Avicenna, wie man ihn gewöhnlich nennt, er habe[1]) in seinem zehnten Lebensjahre — das war zwischen 990 und 995 n. Chr. — in Buchârâ von einem Lehrer Unterricht im Lesen des Koran und in den Wissenschaften erhalten und habe bald den Gegenstand allgemeiner Bewunderung gebildet; dann habe der Vater ihn zu einem Manne geschickt, der mit Kohl handelte, und der in der indischen Rechenkunst wohl erfahren war, damit er von diesem lerne.

Selbst Muḥammed ibn Mûsâ hat neben seiner Algebra noch eine Schrift verfaßt, in welcher er nach höchster Wahrscheinlichkeit Gegenstände sehr ähnlicher Natur nach einer weniger wissenschaftlichen als praktischen Methode, die auch bei den Indern, wenn auch etwas abweichend (S. 618) uns begegnet ist, behandelte[2]). Wir kennen freilich nur die Überschrift des uns verlorenen Buches Über die Vermehrung und Verminderung, fîl dscham' wattafrîḳ, und aus diesem Titel selbst ließe sich gar nichts entnehmen, wenn er nicht häufiger vorkäme, einmal begleitet von der Abhandlung, der er als Überschrift dient, und aus deren Inhalt man auf den der gleichbetitelten aber nicht mehr vorhandenen Arbeiten schließen zu dürfen glaubt. So ergänzt man sich die Schrift über die Vermehrung und Verminderung des Alchwarizmî, so die des Sind ibn 'Alî, des Sinân ibn Alfatḥ. Von diesen beiden war der erstere einer der Astronomen, welche Chalif Almamûn zugleich mit Alchwarizmî in Diensten hatte, und ebenso wie von diesem, ebenso wie von dem vielleicht nicht viel späteren Sinân ibn Alfatḥ ist auch von ihm eine Schrift über indische Rechenkunst ausgegangen[3]). Die zur Ergänzung dienende Schrift ist in einem dem Mittelalter entstammenden lateinischen Texte vorhanden[4]) und ist betitelt: *Liber augmenti diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.* Ob dieser Abraham, wie man vermutet hat, der sonst unter dem Namen Ibn Esra bekannte gelehrte Jude ist, der 1093 bis 1168 lebte, ob ein Araber Ibrâhîm sich darunter verbirgt, wie man früher als einzige Möglichkeiten in Wahl stellte, ist keineswegs ausgemacht. Gewichtige Gründe werden vielmehr dafür beigebracht, der

[1]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 64—75, Nr. 128 *Abul Pharagius Historia Dynast.* (ed. Pocock) pag. 229 der lateinischen Übersetzung. Suter 86—90, Nr. 198. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* 1. Halbjahr 1863, pag. 514. [3]) Ebenda 490. [4]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 304—371. Über einige dunkle Stellen vgl. Schnitzler, Zeitschr. Math. Phys. IV, 383—389.

rätselhafte Verfasser sei ein gelehrter Ägypter Sodscha ibn Aslam[1]) gewesen, von dem man weiß, daß er ein Buch über die Vermehrung und über die Verminderung geschrieben hat. Die Namensverschiedenheit soll dabei kaum ins Gewicht fallen, da der ohnedies sehr seltene Name Aslam in arabischen Schriftzügen verhältnismäßig leicht mit Ibrâhîm verwechselt werden könne[2]). Unzweifelhaft dagegen ist es, daß das gelehrte Verfahren den Indern zugeschrieben ist, da ihrer nicht bloß in der Überschrift gedacht wird, sondern auch im Texte, wo der Verfasser wiederholt, er habe dieses Buch nach denjenigen Erfindungen zusammengestellt, welche die Weisen der Inder über die Rechnung der Annahme gemacht haben; es sei nützlich für den, welcher es beachte und sich bemühe und beharre und dessen Meinung verstehe.

Die eigentliche Methode zu erläutern, wollen wir die erste Aufgabe hier mitteilen: „Ein gewisser Besitz (*census*), von welchem man dessen Drittel und dessen Viertel weggenommen hat, ließ 8 als Rest. Wie groß war der Besitz? Die Methode der Rechnung desselben ist, daß Du aus 12 eine Wagschale (*lancem*) bildest. Der dritte und der vierte Teil entstehen daraus. Du nimmst den dritten und vierten Teil weg, welche 7 betragen und 5 bleibt übrig. Stelle 8 gegenüber, nämlich den Rest des Besitzes, und es wird klar, daß Du um 3 in der Verminderung geirrt hast. Diese bewahre. Sodann nimm Dir eine zweite Wagschale, welche durch die erste teilbar sei, etwa 24; nimm ihren dritten und vierten Teil, also 14 weg, 10 bleibt übrig. Stelle 8 gegenüber, den Rest des Besitzes. Es wird klar, daß Du um 2 in der Vermehrung geirrt hast. Vervielfache jetzt den Irrtum 2 der zweiten Wagschale mit der ersten Wagschale 12 zu 24, sodann vervielfache den Irrtum 3 der ersten Wagschale mit der zweiten Wagschale 24 zu 72. Addiere nun 24 und 72, weil der eine Irrtum in der Verminderung, der andere in der Vermehrung war; wären dagegen beide in der Verminderung oder in der Vermehrung gewesen, so müßtest Du die kleinere Zahl von der größeren abziehen. Nachdem Du die 24 und 72 addiert hast, deren Summe 96 ist, addiere auch die zwei Fehler 2 und 3; sie geben 5. Nun teile 96 durch 5, um zu erfahren, welche Zahl es sei, aus welcher die Aufgabe stammt, und es kommt $19\frac{1}{5}$ heraus."

---

[1]) Suter 43, Nr. 81 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 164 zu Nr. 81. [2]) Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. XII, 42 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 118—123 (1880). Suter in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 350—354 (1902) und zuletzt in den Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses 1904 in Heidelberg. S. 558—561.

Unmittelbar anschließend fährt der Verfasser fort als Regel, offenbar aber im Gegensatze zu dem erst gelehrten Verfahren, vorzuschreiben: „Man nehme 12 als die unbekannte Zahl, aus welcher die Wegnahme des dritten und vierten Teiles 5 hervorbringt und frage nun, womit wird 5 vervielfacht, um 12 hervorzubringen? Das gibt $2\frac{2}{5}$: vervielfache also die $2\frac{2}{5}$ mit 8 und es entsteht $19\frac{1}{5}$." Das ist genau die ishta karman der Inder, das Verfahren mit der angenommenen Zahl (S. 618), von welchem die Hauptregel als eine Abart sich erweist, auf welche wir gleich zurückkommen.

Die Methode der Vermehrung und Verminderung wird noch an vielen anderen Beispielen gelehrt und das Ergebnis häufig mittels noch anderer Rechnungsweisen gefunden. Darunter ist auch das Umkehrungsverfahren[1] unter dem sonderbaren Namen der Wortrechnung, *regula sermonis*. Auch dieses haben wir bei den Indern kennen gelernt, und es kann uns als Bestätigung dienen, daß Abraham mit Recht auch die Methode der Vermehrung und Verminderung ebendenselben zuschreibt.

Die Abweichung der letzteren von dem Verfahren mit der angenommenen Zahl besteht, wie wir sahen, darin, daß dort nur ein einmaliger Versuch genügt, während hier zwei falsche Ansätze gebildet werden, wodurch sich auch der Name *regula elchatayn*, Regel der zwei Fehler, rechtfertigt[2]), welchen die Methode bei späteren abendländischen Schriftstellern führt. Daß sie auch Methode der Wagschalen heißt und in eigentümlicher Schreibweise auftritt, werden wir noch im 37. Kapitel zu besprechen haben. Ihre algebraische Begründung ist sehr einfach. Es sei $ax = b$, folglich $x = \frac{b}{a}$. Nun setzt man einmal $x = n_1$, das andremal $x = n_2$ und erhält $an_1 = b - e_1$, $an_2 = b + e_2$, wo e_1 und e_2 die beiden Fehler sind, der erstere in der Verminderung, der zweite in der Vermehrung. Jetzt soll $x = \frac{e_1 \cdot n_2 + e_2 \cdot n_1}{e_1 + e_2}$ sein, und das ist auch der Fall, indem

$$e_1 n_2 = bn_2 - an_1 n_2, \quad e_2 n_1 = an_1 n_2 - bn_1,$$

$$e_1 n_2 + e_2 n_1 = bn_2 - bn_1 = \frac{b}{a} \cdot a(n_2 - n_1) = \frac{b}{a}(e_1 + e_2)$$

ist. Der Fall, daß beide Fehler in der Verminderung, oder beide in der Vermehrung ausfallen, kann entsprechend bewahrheitet werden.

Wir dürfen allerdings, wenn wir den doppelten falschen Ansatz als indisch beanspruchen, nicht außer Augen lassen, daß wir (S. 372) in

---

[1]) Libri l. c. 313. [2]) Diese richtige Übersetzung bei Hankel S. 259, Anmerkung.

einem doppelten falschen Ansatze das Rechnungsverfahren vermuteten, welches Heron in seiner Vermessungslehre anwandte, um zu dort vorkommenden angenäherten Quadrat- und Kubikwurzeln zu gelangen. Hier liegt unter allen Umständen eine geschichtliche Schwierigkeit vor, auf die wir uns verpflichtet fühlen hinzuweisen, wenn wir sie auch nicht zu lösen imstande sind. Jedenfalls gehört auch diese Methode zu dem Grundstocke mathematischer Wahrheiten, welcher in der Zeit des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, also im ersten Drittel des IX. S., Eigentum der Araber war. Wir werden nun bei einzelnen Schriftstellern, von denen wir zu reden haben, sehen, welche Vermehrungen teils als neuerdings erworbenes fremdes Wissen, teils als eigene Erfindung hinzutreten.

34. Kapitel.

Die Mathematiker unter den Abbasiden. Die Geometer unter den Bujiden.

Als der Zeit nach Nächste fordern die sogenannten drei Brüder unsere Aufmerksamkeit[1]). Mûsâ ibn Schâkir soll in seiner Jugend Räuber gewesen sein, d. h. hatte wohl zu einer der räuberischen Horden gehört, welche damals wie noch jetzt Unsicherheit der Wüstengegend hervorbrachten, ohne daß die persönliche Ehrenhaftigkeit der einzelnen Mitglieder in arabischer Auffassung dadurch beeinträchtigt erschiene. Dementsprechend nahm Mûsâ später am Hofe des Chalifen Almamûn eine hohe Stellung ein und erwarb sich die Gunst des Herrschers in solchem Maße, daß dieser nach Mûsâs Tode sich die Erziehung der drei hinterlassenen Söhne Muḥammed, Aḥmed und Alḥasan angelegen sein ließ. Deren Wohlhabenheit wird dadurch bezeugt, daß sie drei Übersetzer aus dem Griechischen, darunter Ṭâbit ibn Kurrah (S. 703) mit je 500 Dinaren monatlich unterstützten[2]). Der Name des ältesten: Muḥammed ibn Mûsâ ibn Schâkir kann, wenn der Vatersname nicht von dem des Großvaters begleitet ist, leicht zur Verwechslung mit Alchwarizmî führen, um so leichter, als alle drei Brüder tüchtige Astronomen und Mathematiker wurden. Von ihnen stammt die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse mittels eines an zwei Punkten festgehaltenen und durch einen Stift gespannten Fadens gemäß dem Berichte eines Arabers Alsidschzî, welcher zu Ende des X. S. lebte und, selbst Mathematiker von Bedeutung, am

---

[1]) Vgl. Mohammed ben Musa, Algebra. Vorrede pag. XI, Anmerkung. Fihrist 24—25. Suter 20—21, Nr. 43. [2]) Suter 22.

Schlusse dieses Kapitels uns beschäftigen wird. Eine geometrische Schrift ist in mittelalterlicher lateinischer Übersetzung auf uns gekommen[1]). Sie führt den Titel *Liber trium fratrum de geometria* und beginnt mit den Worten: „Verba filiorum Moysi, filii Schiae, id est Mahumeti Hameti et Hason" oder nach anderer Lesart in einem zweiten Kodex „Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti Hameti Hasen" und danach ist die Bezeichnung der drei Brüder, beziehungsweise der drei Söhne des Mûsâ ibn Schâkir geworden, unter welcher die Verfasser genannt zu werden pflegen. Manches Interessante findet sich dort, wenn auch wenig Neues, da fast alles, um nicht zu sagen alles, auf griechische Vorlagen zurückgeführt werden kann. Auch eine durch Bewegungsgeometrie erzielte Dreiteilung des Winkels dürfte griechischen Ursprungs sein. Vorzugsweise die heronische Formel für die Dreiecksfläche aus den drei Seiten hat die Aufmerksamkeit eines Forschers auf sich gezogen, der den Beweis obwohl einigermaßen von dem heronischen verschieden doch als abhängig von demselben erkannte und insbesondere aus den Buchstaben, mit welchen die Eckpunkte der Figur bezeichnet sind, den Nachweis führte, daß diese Figur einem griechischen Muster nachgebildet sein müsse, so eine vielfach mit Erfolg anwendbare (S. 724) neue kritische Methode zur Ermittelung des Ursprungs mathematischer Untersuchungen erfindend. Vielleicht war es Muḥammed, der älteste der drei Brüder, welcher die Kenntnis des heronischen Satzes nach Bagdad brachte, während allerdings andere heronische Schriften schon zu Alchwarizmîs Zeiten, wie wir aus manchen bei diesem auftretenden Dingen schließen durften, bekannt gewesen sein mögen. Jedenfalls weiß man von einer Reise nach den griechischen Gebieten, welche jener machte, und daß es auf der Rückkehr von dieser Reise war, daß er Tâbit ibn Kurrah kennen lernte, welchen er aufforderte ihn nach Bagdad zu begleiten, und so kam auch dieser letztere an den Chalifenhof, und wurde in das Astronomenkollegium Almuʿtaḍids aufgenommen.

Von dem Leben (826—901) und der reichen Übersetzungstätigkeit des gelehrten Tâbit ibn Kurrah haben wir (S. 703—704) gesprochen. Wir haben es jetzt mit ihm als Originalschriftsteller zu tun, und da finden wir eine Abhandlung von ihm, welche unsere Aufmerksamkeit zu fesseln ein entschiedenes Anrecht besitzt[2]). Der Gegenstand ist ein zahlentheoretischer und zwar ein solcher, der nur der grie-

[1]) Vgl. Hultsch in der Zeitschr. Math. Phys. IX, 241—242 und 247 in dem Aufsatze „Der heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks als Funktion der drei Seiten", und Jahresbericht über Mathematik im Alterthum für 1878—79 von Max Curtze. Ein von ebendiesem besorgter Abdruck des Buches in den Nova Acta der Leop.-Car. Akademie. Halle 1885. [2]) *Notice sur une*

chischen, nicht ebenso der indischen Zahlentheorie angehört. Tâbit sagt auch in den Einleitungssätzen, daß es Betrachtungen seien, welche der pythagoräischen Lehre angehörten, daß einiges über das zu Behandelnde bei Nikomachus und Euklid sich finde; er geht endlich, wieder nach seinen eigenen Worten, über diese beiden hinaus und liefert somit für uns das erste Beispiel einer wirklich arabischen Leistung auf mathematischem Boden. Es handelt sich um vollkommene und um befreundete Zahlen. Für die Bildung der ersteren hat Euklid die Regel angegeben (S. 268), Nikomachus sie wiederholt. Die zweiten hat nach Jamblichus schon Pythagoras gekannt und die Zahlen 220 und 284 als Beispiele aufgestellt, wie Freunde sein sollen, ein jeder dem andern ein zweites Ich (S. 167). Aber wie man solche befreundete Zahlen finde, darüber äußert sich auch Jamblichus nicht. Tâbit ibn Kurrah hat eine solche Vorschrift gegeben, welche mit der Euklids zur Bildung der vollkommenen Zahlen in Zusammenhang steht und dadurch sich als den Kern der Aufgabe enthüllend kennzeichnet. Sind

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \qquad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \qquad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

insgesamt Primzahlen, so sind $A = 2^n \cdot p \cdot q$ und $B = 2^n \cdot r$ befreundete Zahlen. Bei $n = 2$ ist $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$ und $A = 220$, $B = 284$.

Die befreundeten Zahlen haben übrigens von da an nicht aufgehört den Arabern bekannt zu sein. In einer mystischen Schrift über die Zwecke des Weisen hat El Madschrîṭî, der Madrider († 1007), die Vorschrift, man solle die Zahlen 220 und 284 aufschreiben und die kleinere wem man will zu essen geben und selbst die größere essen; der Verfasser habe die erotische Wirkung davon in eigener Person erprobt[1]), und Ibn Chaldûn weiß gleichfalls von den wunderbaren Kräften eben dieser Zahlen, als Talismane gebraucht, zu erzählen[2]).

Alsidschzî berichtet auch kurz über eine Dreiteilung des Winkels durch Tâbit ibn Kurrah. Figur und Wortlaut stimmen so nahe mit einem Satze aus dem IV. Buche des Pappus überein[3]), daß an einer genauen Benutzung dieses Schriftstellers nicht zu zweifeln ist, auch scheint Tâbit kein Hehl daraus gemacht zu haben, daß er nicht der

---

théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs von Woepcke im *Journal Asiatique* für Oktober und November 1852 pag. 420—429.

[1]) Steinschneider, Zur pseudoepigraphischen Literatur insbesondere der geheimen Wissenschaften des Mittelalters S. 37 (Berlin 1862). [2]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* T. XXI, Partie 1, pag. 178—179 (Paris 1868). [3]) Pappus IV, 32. Die Figur vgl. (ed. Hultsch) pag. 275.

Erfinder sei, da Alsidschzî ausdrücklich sagt, er wolle in seinem Berichte über Winkeldreiteilung von den Sätzen der Alten ausgehen, worunter sehr wohl die Griechen verstanden sein können[1]).

Wir haben des weiteren auf eine Schrift Țâbits über den Satz des Menelaus hinzuweisen, welche Gerhard von Cremona (1114—1187) unter dem Titel *Liber thebit de figura alkata tractatus I* ins Lateinische übersetzte und so das Wort *alkata* (= sector d. h. die Transversale) mit lateinischem Bürgerrechte versah. Ob Țâbit aus der Figur alle trigonometrischen Folgerungen zog, deren sie fähig ist, bleibt so lange ungewiß, als seine Abhandlung nur bruchstückweise bekannt ist[2]).

Wieder zu Almuʿtaḍid stand ein uns als Verfertiger astronomischer Tafeln (S. 701) schon bekannter geometrischer Schriftsteller Alnairîzi[3]) in Beziehung, den wir also hier zu nennen haben. Er verfaßte einen Kommentar zu den euklidischen Elementen, als dessen größtes Verdienst zu loben ist, daß dort wertvolle Bruchstücke der in der Ursprache verlorenen Erläuterungen von Heron und Simplicus (S. 386) erhalten sind[4]).

Die Zeitfolge führt uns zu einem Manne, welcher in ganz anderer Richtung arbeitete, und dessen Name untrennbar verbunden ist mit der Geschichte der Einführung der trigonometrischen Funktionen im Abendlande, zu Albategnius, wie die Übersetzer ihn genannt haben[5]). Muḥammed ibn Dschâbir ibn Sinân Abû ʿAbdallâh al Battânî führt seinen Beinamen nach Battân in Syrien, wo er geboren ist, und welchem er zur Berühmtheit verholfen hat. Er stellte 878—918 in Ar-Raḳḳa astronomische Beobachtungen an, welche von seinen Landsleuten als die genauesten gefeiert worden sind, die irgend jemand gelungen seien, der unter dem Islam gelebt hatte, und mit nicht geringerem Lobe haben sie seine Schrift über die Bewegung der Sterne bedacht, welche im XII. S. durch einen Übersetzer Plato von Tivoli, der uns seinerzeit noch beschäftigen wird, unter der Überschrift De motu oder De scientia stellarum in lateinischer Sprache bearbeitet wurde. Aus dieser Übersetzung soll das Wort *sinus* als Name einer trigonometrischen Funktion in die Mathematik aller

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke), Paris 1851, pag. 118. Die Übereinstimmung Țâbits mit Pappus hat Woepcke hervorgehoben ibid. pag. 117, Anmerkung **. [2]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 46—47. [3]) Fihrist 35. Suter 45, Nr. 88. [4]) Alnairîzis Kommentar wurde 1893—1905 von Besthorn und Heiberg herausgegeben. Über die Eukliderklärungen von Heron und von Simplicius vgl. auch Fihrist 22 und 21. Die von Gerhard von Cremona herrührende lateinische Übersetzung des Kommentars des Alnairîzi hat Curtze als Supplementband zu den Werken Euklids (Leipzig 1899) herausgegeben. [5]) Hankel S. 241 und 281. Suter 45 bis 47, Nr. 89.

Völker eingedrungen sein. Der Ursprung des Wortes wäre dann nach aller Wahrscheinlichkeit folgender[1]). Die Benennung der Sehne war im Sanskrit jyâ oder jîva, die der halben Sehne ardhajyâ (S. 658). Allmählich wurde, da man nur die halbe Sehne trigonometrisch verwertete, das kürzere jîva auch für diese benutzt und drang so zu den Arabern, welche es in seinem Wortlaute, wie sie ihn verstanden, übernahmen und dschîba schrieben. Genau dieselben Konsonanten, welche arabisch dschîba zu lesen sind, lassen aber auch die Lesung dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und den Einschnitt oder Busen bedeutet. Nun wird angenommen, die Überlieferung, daß man, für den Araber sinnlos, dschîba lesen müsse, sei verhältnismäßig frühzeitig abhanden gekommen, und die Lesart dschaib sei dafür die regelmäßige geworden. Jedenfalls übersetzte zwar nicht Plato von Tivoli, wie man früher fälschlich annahm, aber Gerhard von Cremona bei der Bearbeitung anderer arabischer Astronomen das arabische dschaib durch das ganz richtige Wort sinus, welches von nun an sich forterbte[2]). Daß übrigens die Araber das indische kramajyâ in der Form kardaga übernommen haben, welches ihnen den 96. Teil des Kreisumfanges bedeutete, ist schon (S. 699) erwähnt worden. Bei anderen arabischen Mathematikern, insbesondere bei solchen, deren Schriften im christlichen Mittelalter übersetzt wurden, bedeutet kardaga den 24. Teil des Kreisumfanges. Wieder bei anderen scheint kardaga zur Benennung des Sinus eines gewissen Bogens gedient zu haben[3]).

Den Sinus wendet nun Albattânî im III. Kapitel seiner Sternkunde, welches eine Trigonometrie enthält, regelmäßig an und zwar, was einen nicht hoch genug anzuerkennenden Fortschritt gegen die Inder bezeichnet, im Vollbewußtsein des Gegensatzes gegen die im Almageste benutzten ganzen Sehnen mit dem ausdrücklichen Zusatze, daß man so in der Rechnung das fortwährende Verdoppeln erspare.

In einer anderen Beziehung ist aber Albattânî noch immer Schüler des Ptolemaeus und ebenso Schüler der Inder. Er weiß noch nichts von trigonometrischen Gleichungen, nichts von deren algebrai-

[1]) Die hier folgende Hypothese stammt von dem Pariser Orientalisten Munk her. Vgl. Woepcke in dem *Journal Asiatique* 1863, 1. Halbjahr, pag. 478, Anmerkung. [2]) Max Koppe, Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht. Osterprogramm 1893 des Andreas-Realgymnasiums zu Berlin. S. 32—34, hat nachgewiesen, daß bei Plato von Tivoli die sinngetreuere Übersetzung *chorda* vorkommt. Über die dem Wortlaut nach richtige Übersetzung *sinus* bei Gerhard von Cremona vgl. Jul. Ruska in der Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abtlg. 126—128. [3]) Eneström in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge IV, 284.

schen Umformung; er kennt nur an Figuren zu beweisende geometrische Sätze[1]. In diesem Sinne spricht er von dem Schatten und versteht darunter die Schattenlänge l, welche ein von der Sonne unter dem Winkel φ beschienener Schattenmesser h wirft. Je nachdem der Schattenmesser auf einer Horizontalebene oder auf einer Vertikalebene aufsteht, ist $\frac{l}{h}$ die Kotangente oder die Tangente des Winkels φ. Albattânî hat eine kleine von Grad zu Grad fortschreitende Kotangententafel hergestellt. Ferner kennt er Beziehungen zwischen einem Winkel und den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, welche auf

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

hinauslaufen, aber diese Gleichung selbst darf man bei ihm nicht suchen.

Dem Anfange des X. S. gehört Aḥmed ibn Jussuf[2]) an, der in Ägypten lebte. Unter seinen zahlreichen Schriften hat diejenige, welche über die Verhältnisse handelt, einen geschichtlichen Einfluß geübt, von welchem im 41. Kapitel im folgenden Bande die Rede sein wird.

Von Al-Baṣra war, wie wir uns erinnern (S. 697), der Anstoß ausgegangen, der den Chalifen Almamûn zu einem Beförderer der Philosophie und der Mathematik machte. In derselben an Bildungselementen der verschiedensten Länder reichen Handelsstadt scheint in der zweiten Hälfte des X. S. eine Art von wissenschaftlichem Geheimbund entstanden zu sein[3]), dessen Mitglieder in Gemeinschaft arbeiteten, wenigstens in Gemeinschaft veröffentlichten, was sie für notwendig zur Bildung des Geistes und des Charakters hielten. Diese Abhandlungen der lauteren Brüder müssen wir bis zu einem gewissen Grade der Besprechung unterziehen. Von den, wie gesagt, anonymen Verfassern ist es doch gelungen, einige zu enträtseln[4]), und unter diesen dürfte Almuḳaddasî der bekannteste sein, ein anderer hieß Zaid ibn Rifâ'a. Die Abhandlungen selbst verbreiteten sich rasch sehr weit, ja sogar bis zu den Westarabern Spaniens drangen sie durch El Madschrîṭî oder durch dessen Schüler El Karmâni, von welchem letzteren, der 1066 über 90 Jahre

---

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 50—54. [2]) Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. X, 492 (1865) und *Bibliotheca mathematica* 1888, 111—112. Suter 42—43, Nr. 78. [3]) Vgl. Dieterici, Die Propädeutik der Araber im X. Jahrhundert. Berlin 1865. Flügel, Ueber die Abhandlungen der aufrichtigen Brüder und treuen Freunde in der Zeitschr. der morgenl. Gesellschaft XIII, 1—38 (Leipzig 1859), Sprenger ebenda XXX, 330—335 (Leipzig 1876). [4]) Flügel l. c. S. 21.

alt in Cordova starb, eine Studienreise nach dem Oriente bekannt ist[1]). Und trotz dieser Tatsache, welche eine packende Bedeutung der Schriften zu erweisen scheint, hat die arabische Kritik selbst wenig Gutes ihnen nachzurühmen gewußt. Zaid sei ein unwissender Schwindler, sagte ein Zeitgenosse[2]), und das Urteil eines gelehrten Schaich, der die Abhandlungen einer genauen Durchsicht unterworfen hatte, lautet: Sie ermüden, aber befriedigen nicht; sie schweifen herum, aber gelangen nicht an; sie singen, aber sie erheitern nicht; sie weben, aber in dünnen Fäden; sie kämmen, aber machen kraus; sie wähnen was nicht ist und nicht sein kann[3]).

Was den mathematischen Inhalt der Abhandlungen betrifft, so können wir dieses harte Urteil kaum ein allzustrenges nennen, und wenn wir trotz dieses geringen Wertes ihrer erwähnen, so geschieht dieses, weil in dem Mancherlei, in den zusammengestoppelten und gekoppelten Dingen, wie ein anderer Araber rügend sagt, doch geschichtlich verwertbare Körner haben aufgefunden werden können. Von den vollkommenen Zahlen heißt es[4]), sie kämen in jeder Zahlenstufe nur einmal vor, 6 unter den Einern, 28 unter den Zehnern, 496 unter den Hundertern und 8128 unter den Tausendern. Das stimmt genau mit einer Bemerkung des Jamblichus überein[5]) und stellt zusammengehalten mit dem, was wir aus der Einleitung zu Tâbits Abhandlung über befreundete Zahlen beibrachten, außer Zweifel, daß die Schriften des Jamblichus, welche in Syrien nie aufgehört hatten gelesen zu werden (S. 706), um 900 auch den Arabern überhaupt gut bekannt waren. Um so auffallender ist eine Bemerkung, welche durch keine andere Überlieferung gestützt ist: die meisten Völker hätten nur 4 Zahlstufen, aber die Pythagoräer, die Männer der Zahlen, kannten 16 Stufen derselben tausend tausend tausend tausend tausend[6]). Wir können das nur dahin verstehen, daß während im Arabischen die selbständigen Zahlwörter sich nicht auf andere Rangeinheiten als auf 1, 10, 100, 1000 erstrecken, die Pythagoräer solche Namen bis 10^{15} besaßen. Wenn diese Auffassung richtig und die Aussage wahrheitsgetreu, so ist der Zusammenhang zwischen Indern und Neupythagoräern in Dingen, die auf das Zahlensystem Bezug haben, um einen neuen Beleg reicher und die Hypothese

---

[1]) Flügel l. c. S. 25. Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 61, Nr. 122 und S. 80, Nr. 137. Suter 105, Nr. 238. [2]) Sprenger l. c. S. 333. [3]) Flügel l. c. S. 26. [4]) Propädeutik der Araber S. 12. Daß dort statt 8128 fälschlich 7128 steht, ist wohl nur Druckfehler? [5]) Jamblichus in Nikomachum (ed. Tennulius) pag. 46, (ed. Pistelli) pag. 33. [6]) Propädeutik der Araber S. 6.

des Eindringens indischer Zahlzeichen in jene griechische Schule wird immer wahrscheinlicher.

Wir haben (S. 706) gesehen, daß die Araber jedenfalls mit den Arbeiten des Zenodorus bekannt waren. Auch dafür haben wir hier eine Bestätigung in der Bemerkung, die Kreisfigur habe eine weitere Umfassung als alle vielwinkligen Figuren mit gleich langer Umfassungslinie[1]), und wir können jetzt noch einen Schritt weiter gehend vermuten, aus Pappus habe man die Kenntnis gerade dieser Untersuchungen geschöpft. Im V. Buche des Pappus hat, wie wir uns erinnern (S. 446), die Abhandlung des Zenodorus Platz gefunden, und an die Einleitung eben des V. Buches erinnern aufs lebhafteste folgende Sätze[2]): „Viele Tiere schaffen von Natur schon Werke. Das ist ihnen ohne Unterricht eingegeben. So die Bienen, die sich Häuser schaffen. Sie bauen Häuser in Stockwerken von runder Gestalt wie Schilde, eins über das andere. Die Öffnungen der Häuser machen sie alle mit sechs Seiten und Winkeln. Dies tun sie mit sicherer Weisheit, denn es ist die Eigentümlichkeit dieser Figur, daß sie weiter ist als das Viereck und das Fünfeck.“

Eine Stelle, welche auf falsche Flächenberechnung sich bezieht, haben wir schon früher (S. 173) erwähnt. Sie heißt folgendermaßen[3]): „In einem jeden Gewerk erfaßt den Zweifel, der dasselbe ohne Mathematik zu verstehen unternimmt, oder nur mangelhafte Kenntnisse davon hat und sich darum nicht kümmert. Man erzählt, jemand hätte von einem Manne ein Stück Landes für 1000 Dirham gekauft, das 100 Ellen lang und ebensoviel breit sei. Darauf sprach der Verkäufer: Nimm statt dessen zwei Stück, ein jedes 50 Ellen lang und breit, und meinte, damit geschehe jenem sein Recht. Sie stritten nun vor einem Richter, der nicht Mathematik verstand, und dieser war irrigerweise derselben Ansicht, dann aber stritten sie vor einem anderen Richter, der der Mathematik kundig war, und der entschied, daß dies nur die Hälfte seines Anrechts wäre.“ Wir machen mit wenigen Worten auf einen verhältnismäßig weitläufig behandelten Gegenstand[4]) aufmerksam, auf Verhältnisse der Abmessungen, welche zwischen den einzelnen Strichen stattfinden sollen, aus welchen die Buchstabenzeichen gebildet werden, und derjenigen, welche die Natur bei den einzelnen Teilen des menschlichen Körpers uns zum sinnlichen Bewußtsein bringt, letzteres ein Gegenstand, mit welchem auch Vitruvius (S. 544) sich beschäftigt hat. Wir erwähnen endlich noch eines, welches nicht ohne Interesse ist, magische Quadrate[5]). Die magischen

[1]) Propädeutik der Araber S. 42. [2]) Ebenda S. 32. [3]) Ebenda S. 34—35. [4]) Ebenda S. 133—137. [5]) Ebenda S. 43—44.

Quadrate aus 9, 16, 25, 36 sind hergestellt; daß es auch Quadrate von 49, 64, 81 gebe, wird gesagt; das Quadrat 9, heißt es, erleichtere die Nativität (?). Wir können hier so wenig als es uns früher (S. 635) gelang, dem Ursprunge dieser eigentümlichen Amulette auf die Spur kommen. Wir bemerken nur, daß sie bei den Arabern unter dem Namen *wafk* in der Zauber- und Vorbedeutungskunde eine nicht unbedeutende Rolle gespielt haben[1]), und daß unserem Gewährsmanne zufolge jeder der sieben Planeten einen ihm eigentümlichen *wafk* besaß, vielleicht eben jene sieben den lauteren Brüdern bekannte Quadrate von 9 bis 81? Am ausführlichsten soll darüber der unter dem Namen El Bûnî[2]) berühmte arabische Mystiker geschrieben haben, welcher in Bona geboren dieser Stadt unter den Arabern die gleiche Verherrlichung gab, welche sie als Heimat des heiligen Augustinus bei den Christen besaß. El Bûnî starb 1228.

Die Schriftsteller Alchwarizmî, die drei Brüder, Tâbit ibn Kurrah, Al Battânî waren an dem Hofe der Abbasiden ihren gelehrten Beschäftigungen nachgegangen. Unter demselben Chalifengeschlechte war die Verbindung der lauteren Brüder entstanden. Aber wenn auch Abbasiden fortfuhren, die Chalifen zu heißen, von einer Regierung derselben, ja auch nur von einem Einflusse auf die Wissenschaft durch Gelehrte, in deren Kreise sie weilten, die Zügel des Reiches den stärkeren Händen ihrer Heerführer, der sogenannten Emîr Alumarâ überlassend, war nachgerade keine Rede mehr[3]). Und die Emire selbst schienen allmählich die Schlaffheit ihrer Drahtpuppen, welche Gebieter hießen und Sklaven waren, ererbt zu haben. Das Chalifat schrumpfte nach und nach bis auf das Weichbild von Bagdad zusammen. Eine kriegerische Horde unter dem Befehle eines Bujiden d. h. eines Nachkommen von Abû Schudschâʿ Bûjeh, welcher selbst seine Abstammung von den alten Perserkönigen herleitete, zog gegen Bagdad heran und bemächtigte sich der Stadt. Der Chalif mußte 945 dem Bujiden Muʿizz Eddaula den Sultanstitel verleihen und ihm alle weltliche Macht abtreten. Dieses neue Geschlecht wußte zunächst mit neuer Kraft die Herrschaft wieder aufzurichten und auszudehnen, doch dauerte es nicht lange, so entbrannten unter den Bujiden Familienkämpfe um die Gewalt, wie sie unter den Omaijaden, wie sie unter den Abbasiden stattgefunden hatten, und nach einem Jahrhunderte, im Jahre 1050, hatten die Bujiden ihrer Unfähigkeit den Sturz zu verdanken. Die Seldschukensultane lösten sie ab.

---

[1]) *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale* T. XXI, 1. Partie, pag. 180, Note 4 (Paris 1868). [2]) Hammer-Purgstall, Literaturgeschichte der Araber 2. Abteilung, Bd. VII, S. 402, Nr. 7944. [3]) Weil S. 219—226

Die Wissenschaft ist in diesem Jahrhundert, von der Mitte des X. bis zur Mitte des XI. S., keineswegs zurückgegangen. Im Gegenteil sind es einige der hervorragendsten Mathematiker, welche wir in jener Zeit aufzuzeichnen haben. Der Bujide ʿAḍud ed Daula 978—983 rühmte sich selbst astronomische Studien gemacht zu haben. Sein Sohn Scharaf ed Daula, derselbe, unter welchem die Familienzwistigkeiten zuerst entbrannten, errichtete in dem Garten seines Palastes zu Bagdad eine neue Sternwarte und berief dorthin um 988 eine ganze Vereinigung von Fachmännern[1]). Unter ihnen waren Abû'l Wafâ, Alkûhî und Aṣ-Ṣâġânî.

Abû'l Wafâ Muḥammed ibn Muḥammed ibn Jaḥjâ ibn Ismaʿîl ibn Al-ʿAbbâs Albûzdschânî[2]) wurde, wie wir (S. 704) schon sagten, 940 in Bûzdschân, einem kleinen Orte des persischen Gebirgslandes Chorasan, geboren, derselben Gegend, welche so viele arabische Mathematiker hervorgebracht hat. Er erfreute sich, bald Abû'l Wafâ, bald Albûzdschâni genannt, unter den Arabern des größten Ruhmes und drei Jahrhunderte später sagt von ihm Ibn Challikân, der über berühmte Männer im allgemeinen, nicht bloß über berühmte Gelehrte schrieb, er sei ein weitbekannter Rechner, eine der glänzenden Leuchten der Geometrie gewesen, es seien ihm in dieser Wissenschaft wunderbare Entdeckungen gelungen. Er starb 998. Seine Schriften sind ungemein zahlreich. Eine, welcher er den Titel Almagest beilegte, dadurch selbst kundgebend, nach wessen Muster er gearbeitet habe, enthält die in der Geschichte der Astronomie berühmt gewordene Stelle, über welche bis auf den heutigen Tag die Meinungen gespalten sind, ob darin die Entdeckung der sogenannten Variation enthalten sei oder nicht[3]). Uns kümmert nur der Mathematiker, und auch als solcher hat Abû'l Wafâ große Verdienste. Er war einer der letzten arabischen Übersetzer und Kommentatoren griechischer Schriftsteller, und wir müssen aufs lebhafteste bedauern, daß gerade von dieser Tätigkeit gar keine unmittelbare Spur sich erhalten hat. Der Gelehrte, welcher mit Diophant sich so eingehend beschäftigte, daß er nicht bloß ihn übersetzte, ihn erläuterte, sondern ein besonderes Schriftchen mit den Beweisen der bei Diophant und in seinen Erläuterungen zu demselben enthaltenen Lehrsätze füllte, muß viel Wissenswertes für uns auf diesem Gebiete vereinigt haben. Sein Kommentar zur Algebra des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî würde uns wohl der Mühe überhoben haben, vermutungsweise dem Ur-

[1]) Hankel S. 242 nach *Abulpharagius Histor. dynast.* (ed. Pocock) pag. 216 der Übersetzung. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 243 flgg. Suter 71—72, Nr. 167 und 213 Note 36. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 53 und 204.

sprunge der dort enthaltenen Lehren nachzuspüren. Sein Kommentar zur Algebra des Hipparch, vorausgesetzt daß der Name richtig überliefert ist, ist ein eben so gerechter Gegenstand unserer Neugier, da wir hier ja nicht einmal die unzweifelhaft wichtige Abhandlung kennen, zu welcher er gehört. Aber leider sind von diesen algebraischen Kommentaren nur die Überschriften uns bewahrt. Eine Zusammenstellung dessen, was Rechnungsbeamten notwendig ist, hat sich wenigstens teilweise erhalten, ist aber nur in einem dürftigen Auszuge bekannt gemacht[1]), was Bedauern erregen kann, da ausdrücklich bemerkt ist, in jenem ganzen Werke seien wesentliche Unterschiede gegen andere arabische Rechenbücher auffallend, es sei z. B. nicht eine einzige Ziffer darin angewandt.

Dagegen ist ein genügend ausführlicher Bericht über geometrische Leistungen veröffentlicht[2]), zu welchem wir uns jetzt wenden. Von Abû'l Wafâ selbst rührt das aus zwölf Kapiteln bestehende Buch der geometrischen Konstruktionen freilich nicht her. Es ist vielmehr die persische Übersetzung eines Vorlesungsheftes, welches, wie es scheint, auf Grund von öffentlichen Vorträgen Abû'l Wafâs durch einen begabten aber doch nicht alles verstehenden Schüler angefertigt worden ist, und somit kann Abû'l Wafâ unmöglich für die Mängel verantwortlich gemacht werden, welche bei der mehrfachen Überarbeitung nur allzuleicht sich einschleichen konnten. Man hat mit Recht drei Gruppen von Aufgaben aus diesem Buche hervorgehoben, welche geschichtlich und sachlich unsere Aufmerksamkeit verdienen. Eine erste Gruppe beschäftigt sich mit der Auflösung von Aufgaben unter Anwendung nur einer Zirkelöffnung. Abû'l Wafâ hat die Bedingung teils aussprechend, teils sie stillschweigend verstehend nicht weniger als 18 Paragraphe mit solchen Aufgaben gefüllt[3]). In einer zweiten Gruppe handelt es sich um Zusammenlegung von Quadraten zu einem neuen Quadrate, so daß die Methode auch Praktiker befriedigen könne, welche die geometrische Anschauung der Rechnung vorziehen. Man wird aus einigen wenigen Beispielen am deutlichsten erkennen, wie das gemeint ist. Ein Quadrat soll gezeichnet werden von der dreifachen Größe eines gegebenen Quadrates[4]). Man findet die Seite als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Seite und die Diagonale des gegebenen Quadrates als Katheten besitzt. Dagegen lehnen sich aber die Praktiker auf; mit einer solchen Auflösung, welche ihre Sinne nicht überzeuge,

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 246—251. [2]) Ebenda pag. 318—359. [3]) Ebenda pag. 226. [4]) Ebenda pag. 349—350.

könnten sie nichts anfangen. Abûl Wafâ befriedigt sie nunmehr durch folgende Konstruktion (Fig. 98). Er zeichnet die drei einander gleichen Quadrate hin und halbiert zwei davon durch Diagonalen. Die vier so entstehenden gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke legt er nun um das dritte Quadrat herum, so daß die Hypotenusen Verlängerungen der vier Quadratseiten in der Art bilden, daß an jeder Ecke eine und nur eine Seite verlängert ist. Endlich verbindet er die rechtwinkligen Spitzen dieser Dreiecke untereinander und hat so das gewünschte Quadrat fertig. Man möchte fast erwarten, als Beweis jene Aufforderung „Sieh!“ zu lesen, welche indische Geometer ähnlichen Konstruktionen nachzuschicken für genügend hielten. Ja, eine Konstruktion, welche wir (S. 656) als in Bhâskaras Schriften vorhanden erörtert haben, welche mit gleicher Sicherheit (S. 680) in China aufgefunden worden ist, kommt bei Abûl Wafâ vor[1]). Zwei Quadrate sollen zu einem dritten vereinigt werden. Man zeichnet sie (Fig. 99) aufeinander, so daß eine Ecke und die Richtung zweier Seiten beiden gemeinsam ist. Verlängert man darauf die beiden freiliegenden Seiten des kleinen Quadrates bis zum Durchschnitte mit den Seiten des größeren Quadrates, so ist die Summe der gegebenen Quadrate zerlegt in ein Quadratchen, dessen Seiten gleich dem Unterschiede der Seiten der ursprünglich gegebenen Quadrate sind, und in zwei Rechtecke, auf der Figur einander zum Teil überdeckend, deren jedes durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerfällt. Die vier rechtwinkligen Dreiecke um das Quadratchen herumgelegt bilden (Fig. 87) das verlangte große Quadrat. Es ist unmöglich, bei so übereinstimmenden Figuren so eigenartigen Gedankens nicht einen tatsächlichen Zusammenhang anzunehmen. Wir stehen nicht an, der Meinung uns anzuschließen[2]), daß wiewohl Abûl Wafâ fast zwei Jahrhunderte vor Bhâskara lehrte, und wiewohl es leicht möglich war, daß Arabisches von den islamisierten Indusländern aus sich weiter verbreiten konnte, dennoch hier nicht daran zu denken ist,

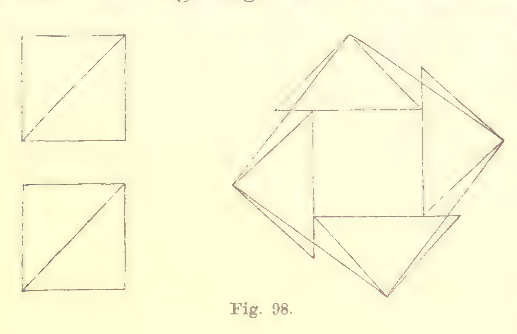


Fig. 98.

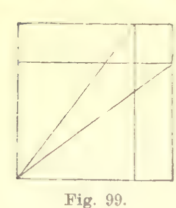


Fig. 99.

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 346 und 350—351. [2]) Ebenda pag. 235—238.

Bhâskara habe die Konstruktion aus arabischer Quelle. Nur das persönliche Anrecht Bhâskaras an die Figur und ihre Benutzung geht verloren, wie wir von vornherein bemerklich machten, aber ihr indischer Stempel dürfte ihr erhalten bleiben, erhalten mit so viel älterer Datierung, daß sie schon den Praktikern, d. h. mutmaßlich indischen Handwerkern, Baumeistern, mit welchen Abû'l Wafâ verkehrte, bekannt war. Die dritte Gruppe von Aufgaben hat die Beschreibung regelmäßiger Vielflächner zum Zwecke. Wir wissen, daß Euklid (S. 273) und Pappus (S. 447) jeder in seiner Weise sich ebenfalls damit beschäftigt haben. Abû'l Wafâ schließt sich so ziemlich an Pappus an[1], und bestrebt sich nur auf der Kugeloberfläche die Eckpunkte des gedachten nicht förmlich einbeschriebenen Vielflächners zu bestimmen. Mit anderen Worten: er teilt die Kugeloberfläche in regelmäßige, einander gleiche sphärische Vielecke. Diese drei Hauptgruppen von Aufgaben erschöpfen indessen nicht sämtliche zwölf Kapitel. Das Ende des 6., das ganze 7., der Anfang des 8. Kapitels

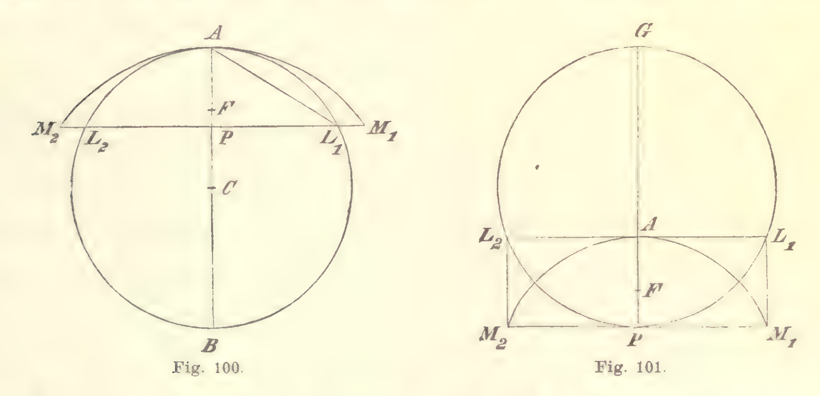


Fig. 100. Fig. 101.

sind verloren, und der erhaltene Rest schließt außer dem von uns bisher Hervorgehobenen noch manche wissenswürdige Einzelheit ein. Wir erwähnen nur zwei Sätze. Im 2. Kapitel im 6. Paragraphen und wiederkehrend im 3. Kapitel im 13. Paragraphen ist die Aufgabe, ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren[2], näherungsweise so gelöst, daß die Hälfte der Seite des einem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks als Seite des demselben Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Siebenecks gilt, ein Verfahren, welches durch Jahrhunderte durch sich fortgeerbt hat. Im 1. Kapitel im 21. und 22. Paragraphen sind punktweise Konstruktionen der Parabel gelehrt[3], denen wir uns nicht erinnern bei früheren Schriftstellern begegnet zu sein. Von einem Punkte C der Parabelachse aus (Fig. 100), der um die

[1]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 241 und 352—358. [2]) Ebenda pag. 329 und 332. [3]) Ebenda pag. 326.

doppelte Brennweite $2AF = AC$ vom Scheitelpunkte entfernt ist, als Mittelpunkt und mit der CA als Halbmesser wird ein Kreis beschrieben und in einem Punkte P der Achse die Senkrechte PL errichtet. Auf ihr nimmt man $PM = AL$ ab, so ist M ein Punkt der Parabel. In der zweiten Konstruktion verlängert man (Fig. 101) die Parabelachse über den Scheitel hinaus um den Parameter $4c = AG$. Mit der Entfernung von G bis zu einem beliebigen Punkte P der Achse als Durchmesser beschreibt man einen Kreis, an P dessen Berührungslinie und ihr parallel durch A die L_1L_2. Senkrechte von L_1 und L_2 auf jene Berührungslinie treffen sie in den Parabelpunkten M_1 und M_2.

Andere Verdienste hat sich Abû'l Wafâ in der Trigonometrie erworben[1]). Er kennt Formeln, welche unseren Gleichungen

$$2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \cos\alpha, \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

entsprechen. Er weiß $\sin(\alpha \pm \beta)$ herzustellen und schreibt dafür

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sqrt{\sin\alpha^2 - \frac{\sin\alpha^2\cdot\sin\beta^2}{r^2}} \pm \sqrt{\sin\beta^2 - \frac{\sin\alpha^2\cdot\sin\beta^2}{r^2}},$$

wo die Nenner r^2 daher stammen, daß die Sinusse wirkliche Strecken bedeuten. Er leitet mittels geometrischer Konstruktionen, welche wir durch Rechnung an Formeln ersetzen, eine Methode zur Berechnung von Sinustafeln her[2]), welche den Sinus des Winkels von $\frac{1}{2}$ Grad mit einer Genauigkeit liefert, welche sich bis zur Einheit der 9. Dezimale erstreckt. Er geht aus von der Vergleichung

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta).$$

Er beweist dieselbe nicht, aber es ist einleuchtend, daß sie Gültigkeit hat, sofern die Winkel $\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$ sämtlich dem ersten Kreisquadranten angehören, weil, sofern

$$0 < \cos\beta < 1 \quad \text{aus} \quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

sofort $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) < 2\sin\alpha$ und daraus jene Vergleichung hervorgeht. Setzt man die Vergleichung nach rechts wie nach links fort, so erhält man:

$$\sin(\alpha+3\beta) - \sin(\alpha+2\beta) < \sin(\alpha+2\beta) - \sin(\alpha+\beta)$$
$$< \sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) < \sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-2\beta)$$
$$< \sin(\alpha-2\beta) - \sin(\alpha-3\beta)$$

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 55—59. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für April und Mai 1860 pag. 298—299.

und daraus:

$$\sin(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha+2\beta)<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin\alpha-\sin(\alpha-\beta)$$
$$\sin(\alpha+2\beta)-\sin(\alpha+\beta)<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-2\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\sin(\alpha-2\beta)-\sin(\alpha-3\beta).$$

Addiert man die drei Formeln, so entsteht:

$$\sin(\alpha+3\beta)-\sin\alpha<3[\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha]<\sin\alpha-\sin(\alpha-3\beta)$$

oder endlich

$$\frac{1}{3}[\sin(\alpha+3\beta)-\sin\alpha]<\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\frac{1}{3}[\sin\alpha-\sin(\alpha-3\beta)].$$

Nun kann man $\sin 36^0$ und $\sin 60^0$ durch Quadratwurzelausziehung in beliebiger Genauigkeit finden und durch Quadratwurzelausziehung, die weiter jeden beliebigen Grad von Genauigkeit gestattet, auch zu den Sinussen der stets halbierten Winkel gelangen. So kommt man zu den Sinussen von $\frac{36^0}{64}$ und von $\frac{60^0}{128}$ oder zu $\sin\frac{18^0}{32}$ und $\sin\frac{15^0}{32}$, zwischen denen $\sin\frac{16^0}{32}=\sin 30'$ enthalten sein muß. Nun setzt man $\alpha=\frac{15^0}{32}$, $\beta=\frac{1^0}{32}$, so nimmt die letzterhaltene Vergleichung die Gestalt an:

$$\frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^0}{32}-\sin\frac{15^0}{32}\right]<\sin 30'-\sin\frac{15^0}{32}<\frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^0}{32}-\sin\frac{12^0}{32}\right].$$

Außer $\sin 30'$ ist darin nur noch $\sin\frac{12^0}{32}$ unbekannt, welches aber auch mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann vermöge $\frac{12}{32}=4\cdot\left(\frac{18}{32}-\frac{15}{32}\right)$ und somit ist eine neue fortlaufende Ungleichung

$$\sin\frac{15^0}{32}+\frac{1}{3}\left[\sin\frac{18^0}{32}-\sin\frac{15^0}{32}\right]<\sin 30'$$
$$<\sin\frac{15^0}{32}+\frac{1}{3}\left[\sin\frac{15^0}{32}-\sin\frac{12^0}{32}\right]$$

herstellbar, in welcher der größere wie der kleinere Wert bekannt ist, in welcher außerdem beide nicht weit voneinander abweichen, also auch beide dem zwischenliegenden Werte nahezu gleich sind. Um so genauer wird daher dieser Zwischenwert als arithmetisches Mittel der beiden äußeren Werte gelten dürfen, und diese Annahme macht dem entsprechend Abû'l Wafâ, d. h. er setzt

$$\sin 30'=\sin\frac{15^0}{32}+\frac{1}{6}\left[\sin\frac{18^0}{32}-\sin\frac{12^0}{32}\right].$$

Noch wichtiger in ihren Folgen war eine Neuerung, welche Abû'l Wafâ in die Gnomonik einführte. Wir haben bei Al Battânî (S. 738) das Auftreten der Schatten auf Horizontalebenen (Kotangenten) oder Vertikalebenen (Tangenten) erwähnt. Abû'l Wafâ widmete be-

sonders den letzteren seine Aufmerksamkeit. Er nahm h zu 60 Teilen an und berechnete die Schatten, *umbra versa* in den lateinischen Bearbeitungen, d. h. also die trigonometrischen Tangenten der Winkel φ, welche er in einer Tafel vereinigte, von welcher er auch bei anderen Aufgaben als der gnomonischen, bei der sie entstanden war, Gebrauch machte. Denn ihm ist nachträglich[1]) „die umbra eines Bogens eine Linie, welche von dem Anfangspunkte des Bogens parallel dem Sinus geführt wird in dem Intervalle zwischen diesem Anfange des Bogens und einer von dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Ende des Bogens gezogenen Linie ... So ist die umbra die Hälfte der Tangente des doppelten Bogens, welche enthalten ist zwischen den zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Kreises nach den Endpunkten des doppelten Bogens geführt werden". Da ist, wie wir sehen, der allgemeine Begriff der Tangente ganz fertig, da ist der Name dieser Funktion vorbereitet. Und Abû'l Wafâ geht noch einen großen Schritt weiter. Er erfindet die Sekanten und Kosekanten unter dem Namen der Durchmesser des ersten und des zweiten Schattens. Er kennt bereits die Proportionen und Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\alpha : r = \cos\alpha : \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha : \sec\alpha = \sin\alpha : r$$
$$\operatorname{tg}\alpha : r = r : \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\sec\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{tg}\alpha^2}$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + \operatorname{cotg}\alpha^2}.$$

Er wagt es endlich $r = 1$ zu setzen, indem er sagt: Also ist es klar, daß, wenn man den Radius gleich 1 setzt, das Verhältnis des Sinus eines Bogens zu dem Sinus seines Komplementes der erste Schatten und das Verhältnis des Sinus des Komplementes zu dem Sinus des Bogens der zweite Schatten ist.

Endlich berichtet ein Schriftsteller des XIII. S., Naṣîr Eddîn, der uns im 36. Kapitel begegnen wird, über verschiedene Beweise des Sinussatzes im sphärischen Dreieck, welche von Abû'l Wafâ, von Abû Naṣr[2]) und von Al Chodschandî herrühren. Wem der drei ziemlich gleichzeitigen Gelehrten die Erfindung des Satzes angehört, ist unbekannt.

Der zweite Astronom, den wir, als an die Sternwarte im Palastgarten des Bujiden berufen, genannt haben, war Alkûhî[3]). Waid-

[1]) Hankel S. 284—285. [2]) Suter 81, Nr. 186. [3]) M. Steinschneider, *Lettere intorno ad alcuni matematici del medio evo a D. Bald. Boncompagni.* Rom 1863, pag. 31 sqq. Fihrist 40. Suter 75—76, Nr. 175.

schan ibn Rustam Abû Sahl Alkûhî führt den Beinamen, unter welchem er vorzugsweise bekannt ist, nach dem Bergland Al-Kûh in Ṭabaristân. Von ihm rühren astronomische Beobachtungen des Jahres 988 her, welche er aber in ziemlich hohem Alter angestellt haben muß. Eine Jugendschrift Alkûhîs hat nämlich auf seinen Wunsch der Sohn des Tâbit ibn Ḳurrah durchgesehen und verbessert und dieser, welcher den Namen Sinân[1]) führte, auch selbst für einen in der Wissenschaft des Euklid sehr bewanderten Gelehrten galt, starb schon 943, mithin 45 Jahre vor jenen Bagdader Beobachtungen. Beiläufig sei hier bemerkt, daß auch Sinâns Sohn Ibrâhîm ibn Sinân ibn Tabit ibn Ḳurrah[2]) (908—946) ein geschickter Mathematiker war und einen Kommentar zum I. Buche der Kegelschnitte sowie selbständige Abhandlungen über Berührungsaufgaben schrieb. Alkûhîs wichtigste geometrische Leistungen, welche bekannt sind, liegen auf einem Gebiete, welches durch Griechen, besonders durch Archimed und durch Apollonius von Pergä bereits urbar gemacht, doch erst von den Arabern gründlich und erfolgreich bebaut worden ist: auf dem Gebiete der Lösung solcher geometrischen Aufgaben, die analytisch behandelt zu Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade führen.

So kennen wir von Alkûhî einen Satz, der sich auf die Dreiteilung des Winkels bezieht[3]). So kennen wir von ihm eine Auflösung dreier zusammengehöriger Aufgaben[4]): 1. einen Kugelabschnitt zu finden, der einem gegebenen Kugelabschnitte inhaltsgleich, einem anderen ähnlich sei; 2. einen Kugelabschnitt zu finden, der mit einem gegebenen Kugelabschnitte gleiche gekrümmte Oberfläche besitze und einem anderen gegebenen Kugelabschnitte ähnlich sei; 3. einen Kugelabschnitt zu finden, der zu zwei gegebenen Kugelabschnitten in dem Zusammenhang stehe, daß er denselben Inhalt wie der eine, eine gleich große gekrümmte Oberfläche wie der andere besitze. Von diesen Aufgaben kommen die beiden ersten im II. Buche von Archimeds Schrift über Kugel und Zylinder im Satze 6 und 7 vor, während die dritte und schwierigste von Alkûhîs eigener Erfindung ist. Er löst sie mit Hilfe einer gleichseitigen Hyperbel und einer Parabel, deren Durchschnittspunkte die Unbekannte ausmessen lassen. Er fügt auch eine strenge Erörterung der Bedingungen bei, unter welchen allein die Aufgabe lösbar ist, also das, was die Griechen den Diorismos nannten, und was die Nachahmer der Griechen im allgemeinen — die Araber nicht ausgeschlossen — keineswegs mit gleicher Regel-

[1]) Suter 51—52, Nr. 108. [2]) Ebenda 53—54, Nr. 113. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke) pag. 118. [4]) Ebenda pag. 103—114.

mäßigkeit zu beachten pflegten. Diesen Leistungen Alkûhîs gegenüber wissen wir endlich[1]), daß es ihm nicht gelang eine Aufgabe zu bewältigen, welche auf die Gleichung

$$x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$$

führte.

Der dritte Name, welchen wir nannten, war Aṣ-Ṣâgânî, der aus Ṣâgân in Chorasan Herstammende[2]). Aḥmed ibn Muḥammed Aṣ-Ṣâgânî Abû Ḥamid al Usturlabi d. h. auch der Verfertiger von Astrolabien genannt, starb 990. Er war, wie der zweite Beiname zu folgern gestattet, besonders geschickt in der Anfertigung jener astronomischen Winkelmessungsvorrichtungen, welche den Übergang von der Dioptra des Heron zu dem modernen Theodolit bilden. Von mathematischen Leistungen ist uns nur ein Satz über Kreissegmente bekannt[3]), welcher mit der Dreiteilung des Winkels in einigem Zusammenhange steht.

Die Sätze des Ṯâbit ibn Ḳurrah, des Alkûhî, des Aṣ-Ṣâgânî, welche auf Winkeldreiteilung sich beziehen, stehen insgesamt in einer größeren Abhandlung über den gleichen Gegenstand[4]), welche Abû Saʿîd Aḥmed ibn Muḥammed ibn ʿAbd Al-Dschâlib As-Sidschzî verfaßt hat, ein Schriftsteller, der gewöhnlich unter seinem Heimatsnamen Alsidschzî, mitunter aber auch statt dessen als Alsindschârî genannt zu werden pflegt[5]), und welcher etwa 30 Jahre vor der Abfassung jener Abhandlung in Schîrâs eine mathematische Handschrift niederschrieb, die das Datum 972 tragend der Pariser Bibliothek angehört. Die Aufgabe der Winkeldreiteilung wird durch Alsidschzî zunächst auf einen Satz zurückgeführt, der mit den anderen, welche er der Reihe nach unter den Namen ihrer Erfinder herzählt, zwar nicht übereinstimmt, aber doch zu ihrer aller Beweisen ausreicht. Der Peripheriewinkel M (Fig. 102) sei nämlich der dritte Teil des Zentriwinkels DCK, wenn $DE \times EC + EC^2 = CD^2$. Weil nämlich $CD = CA$, so sei $CD^2 = CA^2 = CE^2 + AE \times EK = CE^2 + DE \times EM$. Nun war E so gewählt, daß $CD^2 = CE^2 + DE \times EC$, folglich muß $EM = EC$ sein. In dem gleichschenkligen Dreiecke CEM sind demnach je

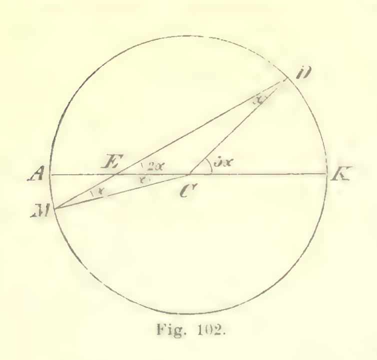


Fig. 102.

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* (ed. Woepcke) pag. 54. [2]) Hankel S. 243. Suter 65, Nr. 143. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 119. [4]) Ebenda pag. 117—125. [5]) Hankel S. 246, Anmerkung **. Suter 80—81, Nr. 185.

zwei Winkel $= \alpha$, und der Außenwinkel DEC dieses Dreiecks ist $= 2\alpha$. Der Winkel bei D ist wegen der Gleichschenkligkeit von DCM wieder $= \alpha$ und der Winkel $DCK = 3\alpha$ als Außenwinkel des Dreiecks CDE. Die erste Aufgabe der Winkeldreiteilung ist daher auf die zweite zurückgeführt, einen Punkt E von der gewünschten Eigenschaft zu finden. Die Alten, sagt Alsidschzî, lösten diese mittels Bewegungsgeometrie[1]; er selbst tut es, indem er mit dem der Figur schon angehörenden Kreis eine gleichseitige Hyperbel in Verbindung setzt, welche durch C hindurchgeht und den Kreishalbmesser als Halbachse besitzt. Er beruft sich dabei ausdrücklich auf einen Satz (den 53sten) des I. Buches der Kegelschnitte des Apollonius. Eine in Leiden befindliche Handschrift enthält ferner eine Abhandlung Alsidschzîs, welche mit der Zeichnung von Kegelschnitten sich beschäftigt[2]. Andere geometrische Abhandlungen Alsidschzîs beziehen sich endlich der Hauptsache nach auf Durchschnitte von Kreisen mit Kegelschnitten[3], welche letztere demnach ein Lieblingsgegenstand der Untersuchungen des Verfassers gewesen sein müssen.

35. Kapitel.

Zahlentheoretiker, Rechner, geometrische Algebraiker von 950 etwa bis 1100.

Ganz anderer Richtung gehören die Arbeiten einiger Gelehrten der gleichen, wohl auch noch etwas früherer Zeit an, von welchen wir jetzt reden wollen. An deren Spitze steht der anonyme Verfasser einer Abhandlung, welche, wie wir am Schlusse des vorigen Kapitels gesagt haben, Alsidschzî 972 abschrieb. Die Abhandlung ist durchaus zahlentheoretischen Inhaltes und hat es hauptsächlich mit der Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke zu tun[4]. Primitive Dreiecke, deren Seiten teilerfremd zueinander sind, werden

---

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 120. Aus dieser Stelle stammt die Kenntnis des Wortes Bewegungsgeometrie. [2]) *Journal Asiatique* für Februar und März 1855 pag. 222. Woepcke hat diese Abhandlung Alsidschzîs, sowie zwei andere ähnlichen Inhalts, d. h. gleichfalls über Kegelschnittzirkel, von Alkûhî und von Muhammed ibn Hosein in den *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale* XVII zur Veröffentlichung gebracht. Vgl. A. von Braunmühl, Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven in dem Katalog der Mathematischen Ausstellung zu Nürnberg 1892. [3]) *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du roi* XIII, 136—145. [4]) Woepcke, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* in den *Atti dell' Accademia Pontificia de nuovi Lincei* 1861, T. XIV, pag. 211—227 und 241—269.

dabei von abgeleiteten unterschieden. Im primitiven Dreiecke müsse, so wird behauptet, die Hypotenuse immer ungerad und Summe zweier Quadrate sein. Die Ungeradheit wird noch näher dahin bezeichnet, daß die Hypotenuse stets von der Form $12m + 1$ oder $12m + 5$ sei. Die Formen, denen Quadratzahlen und Summen von Quadratzahlen angehören können, mit anderen Worten ein Teil der Lehre von den quadratischen Resten, werden erörtert. Die Aufgabe, welche von nun an der Geschichte der Arithmetik erhalten bleibt: ein Quadrat zu finden, welches um eine gegebene Zahl vergrößert oder verkleinert wieder Quadratzahlen gibt, wird gestellt und gelöst. Das dürften die wichtigsten Sätze dieses Bruchstückes sein, dessen Anfang leider verloren gegangen ist und mit ihm der Name des arabischen Verfassers. Ein Araber war er unzweifelhaft, wie aus einer Stelle hervorgeht, in welcher er sich selbst als den Erfinder preist, aber nicht ohne hinzuzufügen: der Ruhm davon gehört Gott allein, ein geradezu kennzeichnender Ausdruck, dessen nur Araber sich zu bedienen pflegten. Vielleicht kann man, wenn auch nicht mit gleicher Bestimmtheit behaupten, der Verfasser habe am Studium des Diophant sich gebildet. Bei diesem Schriftsteller nämlich ist, wie mit Recht betont worden ist[1]), die erste Quelle jener Aufgabe von den drei in arithmetischer Progression stehenden Quadratzahlen, ist zugleich eine Auflösung mit Hilfe rationaler rechtwinkliger Dreiecke zu finden[2]).

Abû Mahmûd Alchodschandî aus der Stadt Chodschanda in Chorasan, der uns (S. 748) als Trigonometer bekannt geworden ist, war im Jahre 992 noch am Leben, da uns eine von ihm herrührende astronomische Beobachtung aus diesem Jahre bekannt ist[3]). Von ihm rührt ein Beweis des merkwürdigen zahlentheoretischen Satzes her, daß die Summe zweier Würfelzahlen nicht wieder eine Würfelzahl sein könne, daß $x^3 + y^3 = z^3$ rational unlösbar sei. Leider kennen wir den Beweis nicht. Es wird uns nur gesagt, daß derselbe mangelhaft gewesen sei, ebenso wie Untersuchungen des gleichen Verfassers über rationale rechtwinklige Dreiecke.

Der Berichterstatter ist der Schaich Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Alḥusain, welcher nach dem Tode Alchodschandîs — denn es ist von ihm mit dem Zusatze „Gott sei ihm barmherzig" die Rede — seine eigene Abhandlung über rationale rechtwinklige Dreiecke ver-

---

[1]) Woepcke l. c. S. 252. [2]) Diophant (Tannery) III, 19, S. 182 und V, 8, S. 330. [3]) Woepcke, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* in den *Atti dell' Accademia Pontificia de nuovi Lincei* 1861, XIV, 301—302. Suter 74, Nr. 173.

öffentlicht hat[1]), in welcher er übrigens nicht sehr weit über den anonymen Arithmetiker, mit welchem wir es eben erst zu tun hatten, hinausgeht, in mancher Beziehung sogar hinter ihm zurückbleibt. Auch diese Abhandlung ist vermutlich von Asidschzîs Hand abgeschrieben[2]), doch müßte, wenn die verschiedenen Jahreszahlen, die uns berichtet sind, namentlich die der astronomischen Beobachtung Alchodschandîs, welche doch seinem Tode beziehungsweise der Abfassung der erst nach seinem Tode vollendeten Abhandlung des Ibn Alḥusain vorangegangen sein müßte, auf Richtigkeit Anspruch erheben, ein weiter Zwischenraum von mehr als 20 Jahren die in einem Bande vereinigten Abschriften aus derselben Feder trennen, deren eine 972 datiert ist, die andere erst später als 992 entstanden sein könnte. Wenn wir sagten, daß Ibn Alḥusain nicht selten hinter dem Anonymus zurückbleibt, so bezieht sich dieses auf einige offenkundige Fehler, die bemerkt worden sind, wo er höchst wahrscheinlich eine Vorlage, nach welcher er arbeitete, nicht verstanden hatte[3]). Sollte, fügen wir fragend bei, diese Vorlage die uns unbekannte Schrift Alchodschandîs über rationale rechtwinklige Dreiecke gewesen sein, an welcher das nach Ibn Alḥusains Meinung Mangelhafte eben darin zu suchen wäre, daß der Tadler es nicht richtig auffaßte? Sollte gerade die Schrift des Alchodschandî nach Verlust der Anfangsparagraphe als anonymer Traktat übrig geblieben sein? Mehr als diese Fragen können wir nicht äußern, doch scheinen sie nicht schlechterdings verneint werden zu können. Ibn Alḥusain unterscheidet, wie der Anonymus, primitive und abgeleitete Dreiecke, benutzt aber andere Wörter, um diese Unterscheidung auszusprechen. Bei dem Anonymus heißt das primitive Dreieck aṣl, bei Ibn Alḥusain awwalî; das abgeleitete Dreieck heißt dort farᶜ oder mafrûᶜ, hier tâbiᶜ[4]). Ibn Alḥusain gibt ausdrücklich als Zweck der ganzen Untersuchung die Lösung der Aufgabe an: ein Quadrat zu finden, welches um die gegebene Zahl vergrößert oder verkleinert wieder ein Quadrat werde[5]). Es ist bemerkenswert, daß eine geometrische Erläuterung der gegebenen Auflösung von ähnlichen Grundgedanken Gebrauch macht, wie wir sie bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî verfolgen konnten, da wo es um die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten sich handelte. Es ist weiter bemerkenswert, daß Ibn Alḥusain bei dieser Auseinandersetzung sich ausdrücklich auf den 7. Satz des II. Buches der euklidischen Ele-

[1]) Woepcke l. c. 301—324 und 343—356. Suter 80, Nr. 183 und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 168. [2]) Woepcke l. c. 324. [3]) Woepckes Bemerkungen pag. 307, 317, 323. [4]) Woepcke, *Recherches* etc. pag. 320. [5]) Ebenda pag. 350 flgg.

mente bezieht. Bei der den Arabern am Schlusse des X. S. ganz allgemeinen Verehrung des Werkes ist freilich mit einer gelegentlichen Anführung desselben nichts weniger als ein Ursprungszeugnis für dasjenige, um dessenwillen Euklid beigezogen ist, verbunden; aber wenn wir die Beweisführung selbst ansehen, so kann die mehrfach benutzte Figur des Gnomon uns mindestens zweifelhaft lassen, ob wir für den Ursprung nach Indien, ob wir nach Griechenland zurückschauen, ob wir an Abû'l Wafâs dem Augenschein genügende Konstruktionen denken sollen, um so mehr als, wie wir schon bemerkten, ähnliche Aufgaben bei Diophant, bisher aber nicht in indischen Schriften aufgefunden worden sind und Abu'l Wafâ (S. 742) der Erläuterung der diophantischen Schriften seine beste Kraft zugewandt zu haben scheint. Die Katheten $AB = c_1$ und $BC = c_2$ eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 103), dessen Hypotenuse h heißen soll, werden aneinander gesetzt und über ihrer Summe, aber auch über der größeren c_1 wird ein Quadrat beschrieben. Die beiden freiliegenden Seiten BE, DE des letzteren Quadrates werden bis zum Durchschnitte mit den Seiten des Quadrates über der Summe $AC = c_1 + c_2$ verlängert. Aus dieser Konstruktion geht die Zerfällung des großen Quadrates in folgende 4 Teile hervor: AE (das Quadrat von c_1), EH (das Quadrat von c_2) und CE sowie ZE (die beiden Rechtecke zwischen c_1 und c_2). Ist nun $2c_1c_2 = k$, so folgt wegen $c_1^2 + c_2^2 = h^2$, daß $(c_1 + c_2)^2 = h^2 + k$ sei. Aber auch $h^2 - k$ ist ein Quadrat. Schneidet man nämlich von B gegen A hin und von D ebenfalls gegen A hin Stücke $BT = DK = c_2$ ab, so ist das Quadrat AE zerlegt in das Quadrat KT und die beiden Rechtecke DM, BL, von welchen das Quadrat LM abzuziehen ist. Mit anderen Worten, es zeigt sich

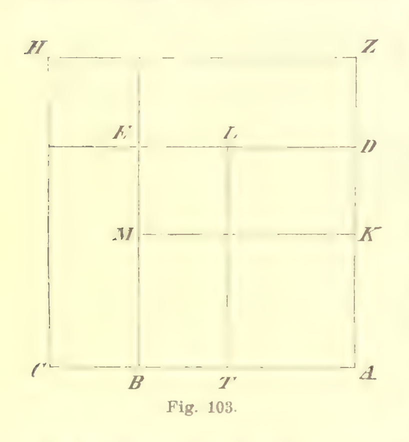


Fig. 103.

$$AE + LM - 2BL = KT$$

oder

$$c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 = (c_1 - c_2)^2$$

oder

$$(c_1 - c_2)^2 = (c_1^2 + c_2^2) - 2c_1c_2 = h^2 - k$$

und man findet also Zahlen, welche die verlangte Eigenschaft besitzen in den Quadraten der Summe der beiden Katheten, der Hypotenuse und der Differenz der beiden Katheten eines rechtwinkligen

Dreiecks, während das doppelte Produkt der beiden Katheten die Zahl ist, um welche das erstere Quadrat größer, das letztere kleiner als das mittlere ist. Entsprechend heißt es bei Diophant: „In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt aber das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder dazu addiert"[1]). Nun gibt es Methoden aus zwei beliebigen Zahlen a und b ein rationales rechtwinkliges Dreieck entstehen zu lassen, und solche Methoden werden in der anonymen Abhandlung, werden von Ibn Alḥusain gelehrt; z. B.

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = \frac{ab}{a-b}, \quad h = \frac{a^2+b^2}{2(a-b)}.$$

Setzt man diese Werte ein, so wird $k = 2c_1c_2 = \frac{(a+b)ab}{a-b}$ und

$$\left(\frac{a+b}{2} \pm \frac{ab}{a-b}\right)^2 = \left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2 \pm \frac{(a+b)ab}{a-b}$$

oder indem alle Seiten mit $2(a-b)$ vervielfacht werden

$$c_1 = a^2 - b^2, \quad c_2 = 2ab, \quad h = a^2 + b^2$$

und die beiden ganzzahligen Endgleichungen

$$(a^2 - b^2 + 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2)$$

nebst

$$(a^2 - b^2 - 2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2).$$

Beide Abhandlungen stimmen noch in einer weiteren Beziehung überein. Sie enthalten Zahlentabellen, gebildet infolge von Versuchen — freilich von auf eine theoretische Betrachtung gestützten Versuchen — welche der zunächst in Behandlung tretenden Aufgabe rationale rechtwinklige Dreiecke zu finden genügen. In keinem der bisherigen Abschnitte dieses Bandes haben wir das Vorhandensein genau solcher Tabellen erwähnen können, wenn wir auch auf manche eine Vergleichung gestattende Dinge stießen. Vergleichen läßt sich schon die altägyptische Zerlegungstabelle der Brüche mit ungeradem Nenner und dem Zähler 2 als Summe von Stammbrüchen; vergleichen lassen sich die Tabellen der Quadrat- und Kubikwurzeln in Senkereh, vergleichen die Einmaleinstafel bei Nikomachus, die kleine Liste der Diametralzahlen bei Theon von Smyrna; und auch bei den Indern fehlt es nicht an nächstverwandten Vergleichungsstücken, denn die den Çulvasûtras entlehnten Beispiele rechtwinkliger Dreiecke (S. 638) sind vielleicht ein Auszug aus einer solchen Tabelle, von deren Vorhandensein wir sonst nichts wissen. Das sind Anhaltspunkte, welche

[1]) Diophant (Tannery) pag. 182, (Wertheim) S. 110 und fast gleichlautend (Tannery) pag. 326, (Wertheim) S. 203.

man, wenn es einst gelingen soll auf Grundlage reichhaltiger Quellenkunde die Frage nach dem ersten Ursprunge dieser arabischen Untersuchungen zur Entscheidung zu bringen, nicht wird übersehen dürfen. Endlich gehört ebendahin das, was wir eine Art von Kenntnis quadratischer Reste genannt haben, und was uns (S. 632) bei Indern schon bekannt geworden ist, was von einem Araber ausdrücklich als indisch benannt worden ist.

Wir meinen den berühmten Arzt und Naturforscher Ibn Sînâ, gewöhnlicher in abendländischer Umformung Avicenna genannt. Wir haben (S. 730) über die Erziehung dieses merkwürdigen Mannes gesprochen und über den Rechenunterricht, welchen er zwischen 990 und 995 von einem Gemüsehändler erhielt. Unter den zahllosen bändereichen Schriften, welche Avicenna trotz seines häufig wechselnden Aufenthaltes, trotz der Staatsgeschäfte, welche er als Wezîr des Emirs Schams ed Daula zu Hamadân auszuüben hatte, trotz seiner großartigen ärztlichen Tätigkeit verfaßt hat, befindet sich eine handschriftlich in Leiden aufbewahrte spekulative Arithmetik[1]), d. h. also nach unserer früheren Erläuterung dieses Wortes eine Art Zahlentheorie nach griechischem Muster. Zwei Stellen derselben sind allein in Übersetzung veröffentlicht, beide dem III. Buche angehörend. „Will man nach der indischen Methode", besagt die eine Stelle, „Quadratzahlen auf ihre Richtigkeit untersuchen, so ist unvermeidlich 1, 4, 7 oder 9. Dem 1 entspricht 1 oder 8; dem 4 entspricht 2 oder 7; dem 7 entspricht 4 oder 5; dem 9 entspricht 3, 6 oder 9.' Die andere Stelle fügt dann hinzu: „Eine Eigenschaft der Kubikzahlen besteht darin, daß ihre Untersuchung nach der indischen Rechenkunst, ich meine die Probe, von welcher diese Rechenkunst Gebrauch macht, immer 1, 8 oder 9 ist. Ist sie 1, so sind die Einheiten der zum Kubus erhobenen Zahl 1, 4 oder 7; ist sie 8, so sind sie 8, 2 oder 5; ist sie 9, so sind sie 3, 6 oder 9." Beide an sich nicht ganz leicht verständliche Stellen sind gewiß richtig dahin erklärt worden, es handle sich in ihnen um die Neunerprobe bei Potenzerhebungen, und man hat sie dementsprechend verwertet, um in Übereinstimmung mit der Aussage des Maximus Planudes (S. 611) aber ohne unmittelbare Bestätigung durch einen der indischen Schriftsteller, welche uns bekannt sind, eben diese Probe als

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr pag. 501—504. H. Eneström (*Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 81) macht darauf aufmerksam, daß Avicenna auch als Verfasser eines zweiten arithmetischen Traktates bezeichnet wird, dessen Anfang in französischer Sprache im *Dictionnaire des sciences mathématiques* von A. S. de Montferrier I, 141—143 (Paris 1835) abgedruckt ist.

indisch zu erweisen. Man kann auch auf eben diese Stellen sich beziehen, um die Kenntnis quadratischer und kubischer Reste bei den Indern zu bestätigen. Offenbar sagt nämlich Avicenna zuerst nichts anderes, als was wir in modernen Zeichen

$$(9n \pm 1)^2 \equiv 1, \quad (9n \pm 2)^2 \equiv 4,$$
$$(9n \pm 3)^2 \equiv (9n + 9)^2 \equiv 9, \quad (9n \pm 4)^2 \equiv 7$$

immer für den Modulus 9 schreiben würden; und in der zweiten Stelle sind nach dem gleichen Modulus 9 die Kongruenzen enthalten

$$(9n + 1)^3 \equiv (9n + 4)^3 \equiv (9n + 7)^3 \equiv 1,$$
$$(9n + 8)^3 \equiv (9n + 2)^3 \equiv (9n + 5)^3 \equiv 8,$$
$$(9n + 3)^3 \equiv (9n + 6)^3 \equiv (9n + 9)^3 \equiv 9.$$

Zurückverweisung nach Indien wird uns auch bei Albîrûnî gewiß nicht in Erstaunen setzen, der ein Zeitgenosse des Avicenna lange Reisen in Indien, wie wir wissen (S. 710), gemacht hat. Albîrûnî nimmt gegen die bisher besprochenen Persönlichkeiten insgesamt eine Ausnahmestellung ein. Er gehörte nämlich nicht zu den gelehrten Hofkreisen von Bagdad, sondern ruhte in Ġazna von seinen Reisen, am Hofe des kunstsinnigen Fürsten Maḥmûd des Ġaznawiden, der an Machtfülle wie an Fürsorge für die Wissenschaften mit den Herrschern von Bagdad wetteiferte. Albîrûnî hat in seiner Chronologie ganz gelegentlich die Summe der geometrischen Schachfelderprogression, die mit 1 beginnend auf jedem folgenden Felde Verdopplung vorschreibt, angegeben[1]) als Beispiel, wie man eine und dieselbe Zahl, um jeden Irrtum unmöglich zu machen, in drei verschiedenen Arten niederschreiben könne: mit indischen Ziffern, umgerechnet in das Sexagesimalsystem und durch die ḥurûf aldschummal oder (S. 709) Buchstaben mit Zahlenwert. Jene Zahl sei $(((16^2)^2)^2)^2 - 1$ und betrage 18 446 744 073 709 551 619. Man finde sie nach folgenden beiden Regeln. Erstens: Das Quadrat der Zahl eines von den 64 Feldern ist gleich der Zahl des Feldes, welches von dem vorgenannten eben so weit entfernt ist als jenes von dem ersten. Ist also 16 die Zahl des 5. Feldes, so muß $16^2 = 256$ die Zahl des 9. Feldes sein wegen $9 - 5 = 5 - 1$. Zweitens: Die um 1 verringerte Zahl eines Feldes ist die Summe der Zahlen der vorhergehenden Felder. Wenn 32 die Zahl des 6. Feldes ist, so muß 31 die Summe der Zahlen der 5 früheren Felder sein, oder $31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$. In einem anderen

---

[1]) Ed. Sachau, Algebraisches über das Schach bei Bîrunî. Zeitschr. der deutsch. morgenl. Gesellsch. (1876) XXIX, 148—156.

Werke, dem Buche der Ziffern, kommt Albîrûnî auf den gleichen Gegenstand zu reden und lehrt die Berechnung nach einem Kunstgriffe, der sich an die obigen beiden Regeln anschließt, welche auf den Fall des ganzen Schachbrettes angewandt nichts anderes besagen als man solle die Zahl eines gedachten 65. Feldes berechnen und von ihr 1 abziehen. Wenn Glieder einer geometrischen Reihe a, ae, ae^2, ... ae^n vorliegen, so kann die Gliederzahl gerad oder ungerad sein, je nachdem n ungerad oder gerad ist. Im ersteren Falle ist das Produkt der äußersten Glieder $a \times ae^{2m+1}$ gleich dem Produkte zweier mittleren Glieder $ae^m \times ae^{m+1}$; im zweiten Falle ist jenes Produkt der äußersten Glieder $a \times ae^{2m}$ gleich dem Produkte eines Mittelgliedes in sich selbst $(ae^m)^2$. Nennen wir nun die Zahlen, welche jedem Schachbrettfelde entsprechen, durch die das Feld bezeichnende in römischen Ziffern dargestellte Zahl, so liefern uns die Felderzahlen I, II, III, ... LXV eine Reihe von ungerader Gliederzahl und demgemäß I $\times$ LXV = (XXXIII)^2. Aber die Zahl I ist 1, vervielfacht also nicht, und somit ist LXV = (XXXIII)^2 und XXXIII heißt das erste Mittel. Ebenso findet man XXXIII = (XVII)^2 und XVII heißt das zweite Mittel. Ferner ist XVII = (IX)^2, IX = (V)^2 und IX und V heißen drittes und viertes Mittel. Auch ein fünftes Mittel III, ein sechstes II wird durch V = (III)^2, III = (II)^2 gefunden und nun gerechnet. Das sechste Mittel II ist 2, das fünfte III ist $2^2 = 4$; das vierte V wird $4^2 = 16$, das dritte IX demnach $16^2 = 256$; weiter wird das zweite Mittel XVII notwendig $256^2 = 65\,536$ und XXXIII oder das erste Mittel $65\,536^2 = 4\,294\,967\,296$. Diese Zahl endlich quadriert gibt LXV, wovon 1 abgezogen die früher erwähnte Summe liefert. Ohne diesem Kunstgriff jeden Wert absprechen zu wollen, sind wir doch nicht imstande Folgerungen daraus zu ziehen, denn eine genaue Bekanntschaft mit den Gesetzen der geometrischen Reihe wird niemand den Griechen so wenig wie den Indern absprechen können[1]). Ob das Buch der Ziffern, in welchem Albîrûnî den Kunstgriff gelehrt hat, jenes Lehrbuch der Rechenkunst ist, welches wir als von ihm verfaßt gelegentlich (S. 715) erwähnten, können wir nur vermutungsweise aussprechen.

Auch in der Geometrie war Albîrûnî tätig und zwar auf dem Gebiete, welches, wie wir an mehreren Beispielen schon gesehen haben, die Araber um das Jahr 1000 so vielfach beschäftigt hat, auf dem ebensowohl algebraisch als geometrisch zu nennenden Ge-

[1]) S. Günther, Zeitschr. Math. Phys. XXI. Historisch-literar. Abteilung S. 57—61 findet in der Analogie zwischen Albîrûnîs Kunstgriff und dem Verfahren in Archimeds Sandrechnung eine bedeutsame Hinweisung.

biete der Auflösung solcher Aufgaben, für welche der Kreis und die Gerade nicht ausreichen, mit Hilfe von Kegelschnitten. Ob freilich Albîrûnî die Auflösungen der durch ihn gestellten Aufgaben selbst kannte, ist uns unmittelbar nicht berichtet; die Tatsache der Aufgabenstellung aber, eine Sitte, welche jedem Leser des Archimed, der sie auch ausübte, wohl bekannt sein mußte, läßt darauf schließen. Albîrûnîs Aufgaben haben die Dreiteilung des Winkels zum Gegenstande[1]).

Abû'l Dschûd, mit seinem ganzen Namen Abû'l Dschûd Muḥammed ibn Allaiṯ, ein tüchtiger Geometer aus derselben Zeit, hat sich erfolgreich mit der Auflösung der Albîrûnîschen Aufgaben beschäftigt. Durch den Durchschnitt einer Parabel mit einer gleichseitigen Hyperbel hat er die Aufgabe gelöst[2]) von einem Punkte A außerhalb einer Strecke BC eine Verbindungslinie AD nach einem derartigen Punkte D dieser Strecke zu ziehen, daß $AB \times BC + BD^2 = BC^2$ werde. Ein anderes Mal löste er die Aufgabe[3]), an welcher Alkûhî (S. 750) sich vergebens versucht hatte, und welche als Gleichung geschrieben $x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$ heißt. Wieder eine andere Leistung Abû'l Dschûds bezieht sich auf die Einzeichnung des regelmäßigen Neunecks in einen Kreis[4]). Albîrûnî hatte im 7. Satze des 7. Kapitels des IV. Buches seiner Geometrie, wie uns berichtet wird, den Satz ausgesprochen, die Konstruktion des Neunecks beruhe auf einer Gleichung zwischen einer Unbekannten einerseits und deren Würfel und einer Zahl andrerseits und hatte den Nachweis dieses Satzes verlangt. Abû'l Dschûd lieferte denselben wie folgt. Es sei (Fig. 104) AB die gesuchte Neunecksseite und das Dreieck gleichschenklig über ihr mit der Spitze auf dem Kreisumfang beschrieben. Dann sei $AB = AD = DE = EZ$ aufgetragen und $AT \perp BC$, $ZK \perp AC$ gezogen. Der Winkel bei C ist $\frac{360^0}{18} = 20^0$, die Winkel bei B und A je $= 80^0$. Daraus folgt

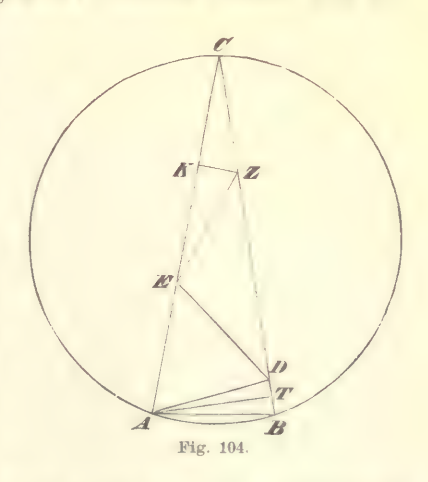


Fig. 104.

$$\sphericalangle DAE = 80^0 - 20^0 = 60^0,$$

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 114 und 119. [2]) Ebenda pag. 114—115. Suter 97, Nr. 215. [3]) Ebenda pag. 54—57. [4]) Ebenda pag. 125—126.

$\sphericalangle DEA$ ebenso groß, also auch $\sphericalangle ADE = 60^0$ und das Dreieck ADE ist gleichseitig. In dem ferneren gleichschenkligen Dreiecke DEZ ist $\sphericalangle EDZ = 180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$, $\sphericalangle EZD$ ebenso groß und $\sphericalangle DEZ = 180^0 - 2 \cdot 40^0 = 100^0$. Folglich

$$\sphericalangle ZEC = 180^0 - 100^0 - 60^0 = 20^0 = \sphericalangle ZCE,$$

und somit auch Dreieck CZE gleichschenklig, d. h.

$$CZ = ZE = ED = DA = AB = AE.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CZK und CAT folgt

$$CZ : CK = CA : CT,$$

daraus $CZ : 2CK = CA : 2CT$ oder $AB : CE = CA : (CD + CB)$ und auch $AB : (AB + CE) = CA : (CA + CD + CB)$ oder

$$AB : AC = AC : (CD + 2AC).$$

Nun setzt Abû'l Dschûd $AC = BC$ als Einheit, AB als Unbekannte, wofür wir x schreiben und somit folgt aus dem letztgeschriebenen Verhältnisse $1 = x(2 + CD)$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BDA weiß man aber ferner $AC : AB = AB : BD$ oder $BD = x^2$. Folglich ist $CD = BC - BD = 1 - x^2$, und die Gleichung, aus welcher x zu ermitteln bleibt, nimmt die Gestalt

$$1 = x(3 - x^2)$$

beziehungsweise schließlich $x^3 + 1 = 3x$ an, wie Albîrûnî behauptet hatte. Diese Gewandtheit eine geometrische Aufgabe in eine Gleichung umzusetzen verleiht endlich einer Angabe volle Glaubwürdigkeit, es habe Abû'l Dschûd „eine besondere Abhandlung über die Aufzählung von Gleichungsformen verfaßt und über die Art und Weise die meisten derselben auf Kegelschnitte zurückzuführen, freilich ohne vollständige Erörterung ihrer Fälle und ohne Scheidung der möglichen Aufgaben von den unmöglichen, sondern nur so, daß er die Entwicklungen gab, zu welchen er durch Betrachtung besonderer zu jenen Formen gehörender Aufgaben geführt wurde"[1]).

Wir werden sehen, wie es einem Nachfolger Abû'l Dschûds um 1080 gelang das Kapitel einer geometrischen Algebra zum Abschlusse zu bringen, müssen aber vorher wieder zum Beginne des XI. S. zurückkehren, um zweier Schriftsteller zu gedenken, welche dem rechnenden und dem rein algebraischen Teile der Mathematik vorzugsweise ihre Aufmerksamkeit zuwandten, Alnasawî und Alkarchî.

Abû'l Ḥasan ʿAlî ibn Aḥmed Alnasawî war aus Nasa in der Landschaft Chorasan. Wir sind in die Lage versetzt seine Lebens-

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 82.

zeit ziemlich genau angeben zu können, indem wir wissen[1]), daß er für die Finanzbeamten des Bujiden Madschd Addaulah, welcher 997—1029 regierte, ein Rechenbuch in persischer Sprache herausgab, und daß er auf Wunsch von dessen Nachfolger, also wohl kurz nach 1030, eine zweite neue Bearbeitung in arabischer Sprache vollendete, welche letztere er mutmaßlich aus dem Grunde, weil er den Fürsten damit zufrieden stellen wollte, den befriedigenden Traktat nannte. Wir erinnern uns, daß um 820 das erste arabische Lehrbuch der Rechenkunst, von welchem wir Kenntnis haben, durch Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî verfaßt worden ist, daß dasselbe sich ungemein folgewichtig erwies. Andere Schriften ähnlicher Natur werden uns da und dort genannt, zum Teil auch in Alnasawîs Vorrede.

Alkindî[2]), der philosophischste Kopf seiner Zeit, gleich berühmt als Mediziner wie als Astronom und Mathematiker, ein Günstling der Chalifen Almamûn und Almuʿtaṣim, der bis in das letzte Viertel des IX. S. gelebt haben muß, weil er eine Übersetzung des Ḳusta ibn Lûḳâ aus dem Griechischen des Hypsikles zu verbessern den Auftrag hatte, hat, wie Alnasawî uns erzählt, ein Rechenbuch verfaßt, welches diesem jedoch einen konfusen und übermäßig breiten Eindruck machte. Dasselbe Urteil fällt er über ein Rechenbuch Alanṭâkîs[3]), des Antiochiers, welcher 987 gestorben ist. Alkalwaḏânî[4]) am Ende des X. S. wird als zu schwierig bezeichnet; er gebe Regeln, welche nur für solche Personen notwendig seien, welche mit den feinsten Aufgaben sich beschäftigen, und aus der gleichen Zeit nennt Alnasawî noch verschiedene andere Verfasser von Lehrbüchern der Rechenkunst, einen Abû Ḥanîfa[5]), einen Kûschjâr[6]), welchen er bei allem Lobe doch diesen oder jenen kleinen Tadel nicht erspart. Die Schriften dieser Vorgänger sind, wenn überhaupt noch vorhanden, jedenfalls nicht in Übersetzungen veröffentlicht, und nur den befriedigenden Traktat Alnasawîs kennen wir aus einem kurzen Auszuge, der kaum mehr als Überschriften der einzelnen Kapitel enthält[7]).

Wir entnehmen ihm, daß Verdoppelung und Halbierung als besondere Rechnungsarten gelehrt wurden. Wir entnehmen ihm die Multiplikation und Division „nach indischer Weise“, worunter die

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr, pag. 492. Suter 96—97, Nr. 214. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 21 bis 22, Nr. 57, und Flügel in den Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes Bd. I, Abhandlung 2. Leipzig 1859. Suter 23—26, Nr. 45. [3]) Suter 63—64, Nr. 140. [4]) Ebenda 74, Nr. 171. [5]) Ebenda 31—32, Nr. 60. [6]) Ebenda 83—84, Nr. 192 und Steinschneider in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III, 109. [7]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, 1. Halbjahr, pag. 496—500.

Methoden verstanden sind, die wir auch durch Maximus Planudes als indische kennen. Der Multiplikator, beziehungsweise der Divisor rückt unter dem Multiplikandus oder dem Dividendus weg von der Linken zur Rechten. Beide Operationen beginnen dort, d. h. an der höchsten Stelle, die Teilprodukte werden nach und nach addiert oder subtrahiert und die nötigen Verbesserungen und Veränderungen entsprechend angebracht, beim wirklichen Rechnen vermutlich so, daß man die unrichtige Zahl wegwischte und die richtige dafür hinschrieb, in den Beispielen des Lehrbuches so, daß die richtigen Zahlen über die unrichtigen gesetzt sind, welche dadurch selbst für vernichtet gelten. Die Zahlzeichen sind die ostarabischen. Auf diese, sagt Alnasawî, hätten die meisten Personen, welche mit der Rechenkunst sich beschäftigten, sich geeinigt, doch sei volle Übereinstimmung nicht vorhanden. Mit Bruchteilen verbundene Zahlen werden in drei Zeilen untereinander geschrieben; in der obersten Zeile stehen die Ganzen, in der zweiten der Zähler, in der dritten der Nenner des Bruches; sind keine Ganzen vorhanden, so wird, um Mißverständnissen vorzubeugen, eine Null in die oberste Zeile gesetzt. So heißt also

$$\begin{matrix}\text{٠}\\ \text{٢}\end{matrix} = \frac{1}{2}\,; \quad \begin{matrix}\text{٠}\\ \text{١}\\ \text{١١}\end{matrix} = \frac{1}{11}\,; \quad \begin{matrix}\text{٣}\\ \\ \text{٣}\end{matrix} = 13\frac{1}{3}\,; \quad \begin{matrix}\text{١٥}\\ \text{٧}\\ \text{١٩}\end{matrix} = 15\frac{7}{19}\,.$$

Die Rechnungsaufgaben erstrecken sich in den drei ersten Büchern bis zur Ausziehung der Kubikwurzeln aus mit Brüchen vereinigten ganzen Zahlen. Das vierte Buch ist dem Rechnen im Sexagesimalsysteme gewidmet. Von komplementären Rechnungsverfahren keine Spur!

Abû Bekr Muḥammed ibn Alḥusain Alkarchî[1]) ist ein Schriftsteller ganz anderen Charakters. Von ihm besitzt man zwei Schriften, welche einander fortsetzen, nämlich als ersten Teil ein Rechenbuch: Al-Kâfî fîl ḥisâb, Das Genügende über das Rechnen, und als zweiten Teil eine Algebra: Al-Fachrî[2]). Der Name dieses zweiten Teils ist mutmaßlich dem einer Persönlichkeit nachgebildet, zu welcher Alkarchî in naher Beziehung gestanden zu haben scheint. Abû Ġâlib war es, welcher den Beinamen Fachr al mulk, Ruhm des Reiches, führt und welcher Wezîr der Wezîre gewesen sein muß zur Zeit als die beiden Schriften verfaßt wurden, die zweite nach ihm den Titel Al-Fachrî

[1]) Suter 84—85, Nr. 193. [2]) Der Kâfî fîl ḥisâb des Alkarchî ist deutsch von Ad. Hochheim (Halle 1878—80) herausgegeben, der Fachrî auszugsweise französisch von Woepcke (Paris 1853). Unsere biographischen Notizen gründen sich vorzugsweise auf Hochheims einleitende Notizen zum I. Heft des Kâfî fîl ḥisâb.

erhielt. Dadurch ist aber die Zeit, in welcher Alkarchî schrieb, ganz genau bestimmt. Abû Gâlib nahm als Statthalter von Bagdad, wo Alkarchî lebte, die höchste Rangstufe seit 1010 oder 1011 ein. Ebenderselbe wurde, ein Beispiel orientalischen Schicksalswechsels, 1015 oder 1016 auf Befehl des Sultans hingerichtet. So bleiben nur die fünf dazwischenliegenden Jahre, in welchen Alkarchî ihm Schriften als Wezîr der Wezîre zugeeignet haben kann. Das hervorragend Wichtige an den Werken Alkarchîs besteht darin, daß er teils eingestandenermaßen, teils mittelbar aus dem Inhalte zu erschließen der Hauptsache nach auch in der Rechenkunst nicht aus indischen, sondern aus griechischen Quellen geschöpft hat, so einen Gegensatz bildend gegen die Alnasawî usw., welche indische Rechenkunst lehrten und lehren wollten. Wir müssen um so mehr hier einen bewußten Gegensatz zweier Schulen, nicht bloß ein Abweichen des vereinzelten Alkarchî von der allgemeinen Gewohnheit erkennen, als, wie wir uns erinnern (S. 743), Abû'l Wafâ in der zweiten Hälfte des X. S. ein Rechenbuch verfaßt hat, in welchem die indischen Ziffern keine Anwendung fanden und Alkarchî selbst sich Schüler des uns im übrigen unbekannten Albustî nennt[1]). Freilich ist die von uns ausgesprochene Behauptung selbst nicht in aller Schärfe, sondern nur in der Beschränkung anzunehmen, welche wir ihr gegeben haben. Abû'l Wafâ, den wir zur griechischen Richtung beizuzählen die mannigfachsten Gründe haben, war, wie wir annahmen, in seiner Anschauungsgeometrie durch und durch indisch. Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî rechnete nach indischen Vorschriften, und in seinem Lehrbuche der Rechenkunst vernahmen wir griechische Anklänge (S. 717). Vollständig den gegenseitigen Einfluß auszuschließen, gelang es weder der einen noch der anderen Schule, wenn sie es überhaupt beabsichtigte. So wird uns trotz der vorwiegend griechischen Schulung Alkarchîs Indisches in seinen Schriften nicht in Erstaunen setzen dürfen, vorausgesetzt, daß es in homöopathisch kleinen Mengen auftritt, und diese Voraussetzung trifft ein. Indisch müssen wir vielleicht die Neunerprobe nennen[2]), indisch das was von quadratischen Resten, wir meinen von den Endziffern, welche eine Quadratzahl besitzen kann, gesagt ist[3]), indisch ist uns die Lehre von der Regeldetri[4]). Aber damit schließt die Summe nachweisbaren indischen Ein-

[1]) Kâfî fîl ḥisâb Heft I, S. 4. Suter 57, Nr. 122 nennt zwar einen bedeutenden Gehrten Muhammed ibn Ahmed ibn Hibbân Abû Hâtim Albustî. Da aber dieser 965 starb und Alkarchî vor 1015 seinen Al-Fachrî verfaßte, so lägen etwa 50 Jahre zwischen Alkarchîs Lehrzeit und seiner schriftstellerischen Tätigkeit; möglicherweise war also sein Lehrer ein anderer Albustî. [2]) Kâfî fîl ḥisâb I, 8. [3]) Ebenda II, 13. [4]) Ebenda II, 16.

flusses ab, wenn wir nicht etwa den Ursprung von Multiplikationsmethoden[1]), welche auf Zerlegung eines Faktors in Unterfaktoren oder auf Betrachtung derselben als Summe oder Differenz von Zahlen, welche eine leichte Multiplikation zulassen, hinauslaufen und welche allerdings bei den indischen Schriftstellern uns ebenso begegneten, aber einem Griechen nicht minder einfallen konnten, ausschließlich nach Indien verlegen wollen. So bedeutsam diese Dinge sind, so stellen sie doch nur einen geringfügigen Teil des Inhaltes des Kâfî fîl ḥisâb uns dar, geringfügig namentlich gegen das, was mit größter Zuversicht auf griechische Quellen zurückgeführt werden muß. Da finden wir Multiplikationsmethoden, welche an die des Apollonius, des Archimed, wie sie von Pappus, von Eutokius uns berichtet werden, welche an die des Heron vielfach erinnern[2]). Da finden wir die Definition der Multiplikation selbst fast wörtlich wie bei Euklid[3]). Da finden wir wieder genau nach Euklid die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors[4]), genau nach ihm eine ausführliche Proportionenlehre[5]), welche gewissermaßen als theoretische Grundlage der nachher vom Standpunkte praktischen Geschäftsbedürfnisses erörterten Regeldetri vorausgeschickt ist. Da finden wir Stammbrüche und Brüche von Brüchen, wie sie bei Heron nicht zu den Seltenheiten gehören[6]), und wobei, beiläufig bemerkt, zwischen jenen stummen und aussprechbaren Brüchen unterschieden wird, deren Bedeutung wir bereits (S. 718) erörtert haben. Da ist die Rechnung mit Sexagesimalbrüchen, insbesondere die Ausziehung von Quadratwurzeln aus solchen, wie sie bei Ptolemäus und bei Theon von Alexandria in Übung war[7]). Da finden wir in dem geometrischen Kapitel auf Schritt und Tritt griechische Definitionen und Sätze[8]), den ptolemäischen Satz vom Sehnenviereck[9]), die heronische Dreiecksformel aus den drei Seiten[10]) usw. Da finden wir einzelne Wörter, welche geradezu Übersetzungen griechischer Ausdrücke sind, wie die aussprechbaren und nicht-aussprechbaren Quadratwurzeln (ῥητόν und ἄλογον)[11]), wie die Grenze (ὅρος, lateinisch *limes*, auch *terminus*)[12]) um bei Sexagesimalbrüchen die Ordnung zu bezeichnen, oder sagen wir vielleicht entsprechender um das Reihenglied anzugeben, bei welchem man stehen zu bleiben wünscht.

In diesem Lehrbuche nun, dessen Reichhaltigkeit aus unseren nur besonders für den Ursprung zeugende Dinge berücksichtigenden Notizen zur Genüge erhellt, ist von Verdoppelung und Halbierung

[1]) Kâfî fîl ḥisâb I, 6 flgg. [2]) Ebenda I, 5, 6; II, 7. [3]) Ebenda I, 4. [4]) Ebenda I, 10—11. [5]) Ebenda II, 15—16. [6]) Ebenda I, 7, 14 und häufiger. [7]) Ebenda II, 10 und 15. [8]) Ebenda II, 18 flgg. [9]) Ebenda II, 26. [10]) Ebenda II, 23. [11]) Ebenda II, 12. [12]) Ebenda II, 4.

als besonderen Rechnungsarten nirgend die Rede und wird, was noch weit merkwürdiger ist, nicht ein einziges Mal von Ziffern irgendwelcher Art gesprochen. Alle und jede Zahlen, welche in dem Texte vorkommen, sind vielmehr in ganzen ausgeschriebenen Worten angegeben. Selbst die umständlichsten Rechnungen führt Alkarchî nur in dieser Weise aus, so daß eine rasche Übersicht ganz und gar nicht möglich ist, man sich vielmehr immer in die Lage eines durch das Ohr allein Lernenden versetzt fühlt. Die Frage, wie Alkarchî, ein Mann von glänzendem Scharfsinne, wie uns insbesondere sein zweites Werk beweisen wird, die indischen Rechenmethoden, deren Unkenntnis bei ihm, dem Zeitgenossen und Ortsgenossen des Alnasawî, zur Unmöglichkeit sich gestaltet, so sehr unterschätzen konnte, daß er nicht mit einem Worte ihrer erwähnte, enthält eine so schwere Anklage, daß uns eben die Notwendigkeit ihr zu begegnen, auf die oben ausgesprochene Vermutung führte. Wir glauben nicht Unkenntnis oder Unterschätzung der indischen Methoden bei einem Alkarchî annehmen zu dürfen. Wir sehen hier bewußten, grundsätzlichen Schulgegensatz, der aus Verbissenheit selbst das Vortrefflichste sich entgehen läßt, wenn es seinen Ursprungsstempel so deutlich auf der Stirne trägt, wie dieses bei den indischen Zahlzeichen der Fall war.

Ist es die Heimatszugehörigkeit gewesen, welche den einen in diese, den anderen in jene Schulrichtung bannte? Wir wissen es nicht. Vielleicht müssen wir an eine unerwartete Rückwirkung theologischer Streitigkeiten denken, an den Gegensatz von Sunniten und Schîʿiten, von Orthodoxen und Muʿtazeliten, der die ganze arabische Geschichte beeinflußt hat und zwischen 1020 und 1030 öffentliche Disputationen veranlaßte, die so regelmäßig in große Raufereien ausarteten, daß sie gänzlich verboten wurden[1]).

Wir würden uns nicht übermäßig erstaunen dürfen und es keineswegs als Beweis gegen den von uns vermuteten alexandrinisch-römischen Ursprung gelten lassen, wenn die komplementären Rechnungsverfahren der Multiplikation und der Division Alkarchî bekannt geworden wären in einer Zeit, zu welcher, wie wir sehen werden, diese Methoden auch im christlichen Abendlande an Verbreitung gewannen. Dem ist indessen nicht so, und nur zwei leise Spuren, welche zwar nicht an jene Verfahren selbst, aber an den Weg, der zu ihnen führt, etwas erinnern, sind uns aufgestoßen. Wir führen die Stellen, weil Gegner unserer Meinungen sie vielleicht in ihrem Sinne verwerten möchten, wörtlich an.

[1]) Weil S. 225.

„Wisse nun, daß man die Zahlen in zwei Klassen teilt, nämlich in einfache und zusammengesetzte. Die einfachen Zahlen sind solche, die nur einer Ordnung angehören, und die zusammengesetzten solche, die zwei oder mehreren Ordnungen angehören“[1]).

Das klingt ungemein nach dem Fälscher der Geometrie des Boethius und ganz und gar nicht nach der 13. und 14. Definition des VII. Buches der Euklidischen Elemente, wo die Primzahlen einfach heißen, und zusammengesetzt solche Zahlen, die in Faktoren sich zerlegen lassen. Die zweite Stelle ist um ein Blatt früher in der Handschrift des Kâfî fîl ḥisâb zu finden. Dort heißt es:

„Was die Ordnungen anlangt, so sind diese drei: Einer, Zehner und Hunderter. Das aber, was über diese hinausgeht, ist auf sie aufgebaut wie die Eintausender, die Zehntausender, die Hunderttausender, [die Eintausendtausender], die Zehntausendtausender, die Hunderttausendtausender. Alle diese ruhen auf dem Fundamente der drei ersten, indem mit der Eins der Ausdruck Tausend entweder einmal oder zweimal oder dreimal verbunden ist, indem dann zweitens mit der Zehn der Ausdruck Tausend entweder einmal oder zweimal oder mehrmal verbunden ist. Und so ist jede Zahl, welche einer anderen als diesen drei Ordnungen angehört, wenn Du den Ausdruck Tausend von ihr wegnimmst, entweder ein Einer, Zehner oder Hunderter“[2]).

Das sind offenbar Triaden, wie der Römer sie besaß, wie das christliche Abendland sie nachahmen wird, und nicht griechische Tetraden. Man darf aber nicht vergessen, daß diese zweite Ähnlichkeit auf sprachlichem Boden beruht, daß die Araber gleich dem Römer, gleich dem Deutschen Zehntausend zusammensetzen mußten, während die Griechen noch ihre einfache Myrias gebrauchten, und daß so Triaden gar wohl an den verschiedenen Orten und unabhängig voneinander sich ausbilden konnten, Tetraden nur in Griechenland.

Alkarchî hat auch mancherlei, was bei ihm zuerst unseren Blicken sich darbietet und vielleicht seiner eigenen Erfindung angehört. Er benutzt neben der Neunerprobe eine Elferprobe[3]). Er nimmt als angenäherte Quadratwurzel für $\sqrt{a^2 + r}$, wo der Rest r übrig bleibt, nachdem die nächste Quadratzahl abgezogen wurde, mithin jedenfalls $r < 2a + 1$ ist, den Wert $a + \frac{r}{2a+1}$. Er hat unter den geometrischen Rechenbeispielen Formeln[4]), welche zwar an heronische Beispiele etwas erinnern, aber doch nicht mit denselben zur Deckung zu bringen sind, oder sich aus ihnen ableiten lassen[5]). Der Grund

[1]) Kâfî fîl ḥisâb I, 5. [2]) Ebenda I, 4. [3]) Ebenda I, 9. [4]) Ebenda II, 14. [5]) Ebenda II, 24, 25, 26, 28 die Formeln für Kreissegmente, für Kreisbögen, für

der Näherungsformel $\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}$ dürfte, wie allerdings erst im 41. Kapitel im nächsten Bande genauer erwiesen werden kann, folgender sein. Wenn a und die nächste ganze Zahl $a + 1$ beide quadriert werden, so ist die Differenz der Quadrate

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Wächst also die Quadratzahl um $2a + 1$, so wächst die Wurzel um 1, und Anwendung einer Proportion läßt weiter folgern, daß einem Wachstum der Quadratzahl um r ein Wachstum der Wurzel um $\frac{r}{2a+1}$ entsprechen müsse. Neueste Forschungen[1]) haben es in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, daß schon Archimed von geometrischer Grundlage aus den Näherungswert $a + \frac{r}{2a+1}$ ebensowohl als den $a + \frac{r}{2a}$ kannte, ja daß er sogar der fortlaufenden Ungleichung

$$a \pm \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2 \pm r} > a \pm \frac{r}{2a \pm 1}$$

sich bediente, um die in der Kreismessung vorkommenden Quadratwurzelwerte zu erhalten.

Die ganze Bedeutsamkeit des Mannes, mit welchem wir uns beschäftigen, tritt in seinem zweiten Werke, im Al-Fachrî, hervor, in welchem er andrerseits auch wieder als unbedingten bewundernden Schüler der Griechen, insbesondere des Diophant sich erweist, welch letzterer an häufigen Stellen mit Namen erwähnt ist. Al-Fachrî besteht selbst aus zwei Abteilungen, einer ersten, welche die Theorie, wenn man so sagen darf, enthält, nämlich die Lehre vom algebraischen Rechnen und die Auflösungen sowohl bestimmter als unbestimmter Gleichungen, und einer zweiten, welche eine Aufgabensammlung darstellt. In beiden Abteilungen finden wir, wie gesagt, Diophant in umfassendster Weise benutzt, aber in beiden Abteilungen auch Dinge, welche über Diophant hinausgehen. Indische Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten wie zweiten Grades wird man dagegen vergebens suchen.

Diophant hat z. B. Namen der 2. bis zur 6. Potenz der Unbekannten additiv aus δύναμις und κύβος zusammengesetzt. Ganz ähnlich verfährt Alkarchî, dem *mâl* das Quadrat der Unbekannten — mitunter auch allerdings irgend eine Größe[2]) — bezeichnet, *ka'b* den

die Durchmesser des Um- und des Innenkreises regelmäßiger Vielecke, für den Körperinhalt der Kugel.

[1]) Hultsch, Die Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes. Nachrichten von der königl. Gesellsch. der Wissensch. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen vom 28. Juni 1893, besonders S. 399. [2]) Fakhri 48.

Würfel und dann weiter durch sich regelmäßig wiederholende Addition *mâl mâl*, *mâl ka'b*, *ka'b ka'b*, *mâl mâl ka'b*, *mâl ka'b ka'b*, *ka'b ka'b ka'b* usw. ins Unendliche die folgenden Potenzen der Unbekannten.

Wir bemerken hier beiläufig, daß wenn in arabischen Schriften *mâl* bald das Quadrat der unbekannten Größe, bald eine erste Potenz bezeichnet, diese Zweideutigkeit auch dem lateinischen Worte *census* in mittelalterlichen Übersetzungen aus dem Arabischen beigeblieben ist[1]).

Alkarchî lehrt das Rechnen mit solchen allgemeinen Größen, zu welchen genau so wie bei Diophant auch die Brüche mit der 2., 3., usw. Potenz der Unbekannten als Nenner treten, in ausführlicher und klarster Weise. Diophant hat solches Rechnen mehr vorausgesetzt als gelehrt. Alkarchî behandelt nach den Rechnungsverfahren an den Potenzen der Unbekannten oder den ihnen inversen Ausdrücken auch Irrationalitäten[2]). Freilich bleibt er hier bei den einfachsten Fällen stehen und nähert sich nicht von weitem den von den Indern auf diesem Felde erzielten Ergebnissen, so daß man nicht nötig hat, an einen fremden Einfluß zu denken, um das Vorkommen von Gleichungen wie $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$ oder $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$ zu erklären. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit Reihensummierungen[3]). Die hier auftretenden Sätze sind Alkarchî offenbar von anderer Seite zugegangen, und er hat nur für manche derselben Beweise geliefert, sei es algebraische, sei es geometrische, für manche künftige Beweise versprochen, ein Versprechen, welches er in einem Kommentare zum Al-Fachrî zu lösen gedachte, den er selbst zu schreiben beabsichtigte[4]). Der fremde Ursprung der Summenformeln geht z. B. unzweifelhaft aus der Summierung der Quadratzahlen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + r)\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}\right)$$

hervor, welche Alkarchî mitteilt, aber nicht beweisen zu können eingesteht. Als Anhaltspunkt zur Beantwortung der Frage nach der Heimat dieser Formel weisen wir darauf hin, daß es genügt,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + r = \frac{r(r+1)}{2}$$

zu setzen, um sofort

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 = \left(\frac{r}{3} + \frac{1}{6}\right)(r+1)r$$

zu erhalten, eine Form, welche Archimed nicht, wohl aber Epaphroditus benutzt hat[5]). Für die Summierung der Kubikzahlen

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + r^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + r)^2$$

[1]) Vgl. solche Übersetzungen bei Libri, *Histoire des mathématiques en Italie* I, 276—277 und I, 305. [2]) Fakhri 57—59. [3]) Ebenda 59—62. [4]) Ebenda 6—7. [5]) Agrimensoren S. 128.

gibt Alkarchî einen geometrischen Beweis, dessen Gedankengang folgender ist[1]). Im Quadrate AC (Fig. 105) sei die Seite

$$AB = 1 + 2 + 3 + \cdots + r,$$

und nun schneidet man von diesem Quadrate einen Gnomon $B'BCDD'C'B'$ ab, dessen Breite $BB' = r$ ist. Die Fläche desselben ist offenbar

$$2r \cdot AB - r^2 = 2r \cdot \frac{r(r+1)}{2} - r^2 = r^2(r + 1 - 1) = r^3.$$

Es ist einleuchtend, daß, wenn $B'B'' = r - 1$ gewählt wird, ein zweiter Gnomon losgetrennt werden kann, dessen Fläche $(r-1)^3$ sein muß, und daß in dem ganzen Quadrate $r - 1$ derartige immer kleiner werdende Gnomone entstehen, deren letzter von der Fläche 2^3 ist, und weggenommen noch ein Quadratchen 1^2 übrig läßt. Da aber $1^2 = 1^3$, so ist auch

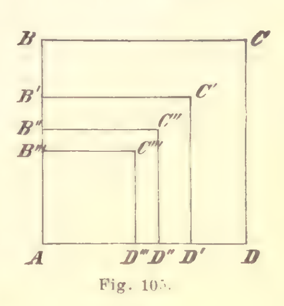


Fig. 105.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + r^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + r)^2.$$

Jetzt kommt Alkarchî zu den sechs Gleichungsformen, welche wir (S. 719) bei Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî besprechen mußten, und setzt bei dieser Gelegenheit auseinander, was dschebr und muḳâbala sei[2]). Er versteht dabei das Wegheben gleichartiger Größen auf beiden Seiten der Gleichung, welches wir im Einverständnisse mit späteren Schriftstellern muḳâbala genannt haben, bereits unter dschebr. Ihm ist muḳâbala vielmehr nur die endgültig zur Auflösung vorbereitete Gleichung in einer der sechs Formen. Unter den Beispielen, welche Alkarchî behandelt, ist auch $x^2 + 10x = 39$ und $x^2 + 21 = 10x$, deren beider, wie wir uns erinnern, Alchwarizmî sich bedient hat. Alkarchî hat für sie eine doppelte Auflösung, die eine geometrisch, die andere nach Diophant, wie er sich ausdrückt, und diese letztere besteht in der Ergänzung zum Quadrate. Die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ wird also aufgelöst durch die Umwandlung in

$$x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 5^2, \quad \text{oder} \quad (x+5)^2 = 8^2,$$

woraus $x + 5 = 8$, $x = 3$ gefolgert wird. Bei der Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ ist das Verfahren folgendes:

$$x^2 + 21 + (x^2 - 10x + 25) = 10x + (x^2 - 10x + 25),$$

$$(x^2 - 10x + 25) = 10x + (x^2 - 10x + 25) - (x^2 + 21) = 4 = 2^2.$$

---

[1]) Fakhri 61. Vgl. Hankel S. 192 Anmerkung, der in dem Beweise ein durchaus indisches Gepräge erkennen will. [2]) Ebenda 63—64.

Aber $x^2 - 10 + 25$ ist ebensowohl $(x - 5)^2$ als $(5 - x)^2$, also ist $x - 5 = 2$ und $5 - x = 2$ eine Auflösung und entsprechend $x = 7$ und $x = 3$.

Das Auffallende bei der Behandlung dieser letzteren Gleichung ist, daß Alkarchî auch von ihr des Ausdrucks „nach Diophants Art" sich bedient. Wenn wir (S. 476) wahrscheinlich machen, um nicht zu sagen zur Gewißheit erheben konnten, daß Diophant nicht wußte, daß die Gleichung $ax^2 + c = bx$ zwei voneinander verschiedene Wurzelwerte besitzt, so ist jener Ausdruck ganz unverständlich. Nicht griechisch war unter allen Umständen die eine geometrische Darstellung Alkarchîs für die Auflösung der Gleichung $x^2 + 10x = 39$.

Alkarchî gibt zwei geometrische Darstellungen unmittelbar einander folgend. Zuerst läßt er (Fig. 106) die Strecken x und 10 geradlinig aneinander setzen und den Mittelpunkt der letzteren Strecke angeben. Unter Berufung auf einen „bekannten Satz des Euklid"[1]), worunter der 6. Satz des II. Buches der Elemente verstanden ist (S. 263), folgert er sodann

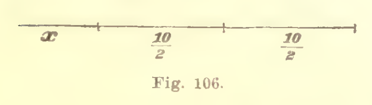


Fig. 106.

$$(10 + x)x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2} + x\right)^2.$$

Nun sei aber $(10 + x)x = 39$, also

$$64 = \left(\frac{10}{2} + x\right)^2, \quad 8 = 5 + x, \quad x = 3.$$

Diese Beweisführung kann sehr wohl alter griechischer Überlieferung sein, kann bis auf Euklids nächste Nachfolger, wenn nicht auf ihn selbst, zurückgehen. Nun läßt aber Alkarchî eine zweite geometrische Darstellung folgen. Die Strecken (Fig. 107)

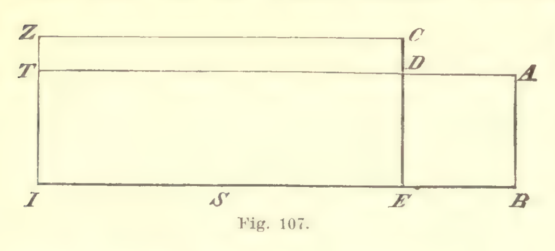


Fig. 107.

$CD = x^2, \quad DE = 10x,$

deren Summe 39 sein muß, werden geradlinig aneinander gesetzt. Über DE wird das Quadrat $ABED$ errichtet, dessen Fläche folglich $100x^2$ ist. Nun bildet man über CD ein Rechteck $CDTZ = 100x^2$, d. h. man macht $CZ = 100$, das Rechteck $CZIE$ ist folglich

$$100(x^2 + 10x) = 100 \cdot 39 = 3900$$

und ebenso groß ist das Rechteck $ABIT$. Ist jetzt S die Mitte von IE, so ist ähnlich wie im vorigen Beweise

[1]) Fakhri 65.

$$IB \times EB + ES^2 = BS^2 \quad \text{oder} \quad 3900 + 50^2 = (10x + 50)^2,$$

woraus

$$10x + 50 = 80, \quad 10x = 30, \quad x^2 = 39 - 10x = 9$$

folgt. Dieser Beweis, das können wir zuversichtlich aussprechen, rührt von keinem Griechen her. Niemals hätte ein solcher eine Strecke als x^2, eine andere als $10x$ bezeichnet und aneinander gesetzt, niemals die weiteren Folgerungen gezogen. Auch die Buchstaben der Figur, wenn wir die Transkription, in welcher sie allein uns bekannt geworden sind, für zuverlässig halten dürfen, bestätigen durch das unter ihnen vorkommende I, daß sie mindestens von keinem Griechen aus der klassischen Zeit ihrer Geometrie herrühren können. Hier ist uns vermutlich arabische Zutat geboten, wahrscheinlich eine Erfindung von Alkarchî selbst. Die Gleichung $x^2 + ax = b$ kann aber auch so behandelt werden, daß x^2 unmittelbar hervortritt, ohne durch Quadrierung des zunächst gesuchten x gefunden zu werden[1]). Nachdem

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4} \quad \text{und} \quad x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

gefolgert sind, sieht man sofort, daß

$$ax + \frac{a^2}{2} = a\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 b + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}.$$

Andererseits ist

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{2} = b + \frac{a^2}{2},$$

und zieht man davon den Wert von $ax + \frac{a^2}{2}$ ab, so bleibt

$$x^2 = b + \frac{a^2}{2} - \sqrt{a^2 b + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}.$$

Alkarchî gehört ferner wohl die Auflösung der dreigliedrigen Gleichungen von den Formen

$$ax^{2p} + bx^p = c, \quad ax^{2p} + c = bx^p, \quad bx^p + c = ax^{2p},$$

welche als auf quadratische Gleichungen zurückführbar dargestellt werden, an[2]). Die theoretische Abteilung schließt sodann mit noch zwei Aufgaben. Deren erste bildet der istikrâ, d. h. wörtlich das Weitergehen von Stelle zu Stelle. Gewöhnlich versteht der Araber darunter ein auf Kenntnis aller besonderen Fälle beruhendes induktives Urteil[3]), hier aber ist etwas anderes gemeint: die Aufgabe ein Monom, Binom oder Trinom, welches formell keine Quadratzahl ist,

---

[1]) Fakhri 65. [2]) Ebenda 71—72. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 10, Anmerkung.

durch Annahme eines bestimmten Wertes der Unbekannten zum Quadrate zu machen, also die unbestimmte Gleichung

$$mx^2 + nx + p = y^2$$

zu lösen. Alkarchî setzt als Bedingung voraus, es müsse m oder p eine Quadratzahl sein, dann wählt er y als Binom, dessen einer Teil entweder $\sqrt{mx^2}$ oder $\sqrt{p}$ ist, so daß die ausgeführte Quadrierung von y gestattet, ein Glied auf beiden Seiten zu streichen, entweder das nach x quadratische oder das konstante. Die zweite der beiden Schlußaufgaben des theoretischen Teiles fordert die Auffindung eines Faktors, welcher mit $a + \sqrt{b}$ vervielfacht die Einheit hervorbringe.

Die Aufgabensammlung, welche in fünf Abschnitte zerfallend die zweite praktische Abteilung bildet, ist nach der Schwierigkeit der Aufgaben als einzigem Einteilungsgrunde geordnet. Man trifft also in ihr in bunter Mannigfaltigkeit bestimmte und unbestimmte Aufgaben von den verschiedensten Graden. Alkarchî benutzt, wie sich erwarten läßt, bei seinen Auflösungen nur positive Zahlen. Negative Gleichungswurzeln sind ihm ein Beweis der Unmöglichkeit der betreffenden Aufgaben, und, was einigermaßen auffallen darf, auch der Wurzelwert 0 wird von ihm ausgeschlossen[1]). Die bestimmten Aufgaben höherer Grade gehören sämtlich jenen dreigliedrigen auf quadratische Gleichungen zurückführbaren Formen an. Die unbestimmten Aufgaben sind teilweise dem Diophant entlehnt, und ein Kommentator Ibn Alsirâdsch hat am Schlusse des 4. Abschnittes der Aufgaben ausdrücklich bemerkt: „Ich sage, die Aufgaben dieses Abschnittes und ein Teil derer des vorhergehenden Abschnittes sind ihrer Reihenfolge nach den Büchern Diophants entnommen. So geschrieben durch Aḥmed ibn Abû Bekr ibn ʿAlî ibn Alsirâdsch Alḳalânisî. Schluß"[2]). Andere Aufgaben rühren dagegen, wie es scheint, von Alkarchî selbst her, und unter diesen mögen späterer Rückbeziehungen wegen zwei besonders angeführt werden, die in moderner Schreibart $x^2 + 5 = y^2$ und $x^2 - 10 = y^2$ heißen[3]). Zur Auflösung der ersteren setzt Alkarchî $y = x + 1$, zur Auflösung der zweiten $y = x - 1$ und erhält so für jene $x^2 = 4$, $y^2 = 9$, für diese $x^2 = 30\frac{1}{4}$, $y^2 = 20\frac{1}{4}$. Man sieht, daß Alkarchî die gebrochenen Auflösungen unbestimmter Aufgaben keineswegs scheut, sondern gleich Diophant nur irrationale Werte verpönt. An sich interessant ist es, daß Alkarchî die Auflösbarkeit von

$$\pm (ax - b) - x^2 = y^2$$

---

[1]) Fakhri pag. 78 und 11. [2]) Ebenda 22—23. [3]) Ebenda 84 (Aufgaben II, 22 und 23).

behandelt und ihre Bedingung in der Zerlegbarkeit von $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b$ in die Summe zweier Quadrate erkannt hat[1]). Die Auflösung von

$$\pm (ax - b) - x^2 = y^2$$

nach x liefert nämlich

$$x = \pm \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} \mp b\right) - y^2},$$

wo die oberen, beziehungsweise die unteren Vorzeichen in der Aufgabe und in der Auflösung zusammengehören. Kann man nun $\frac{a^2}{4} \mp b$ in zwei Quadrate zerlegen, so setze man diese $y^2 + z^2$ und bekommt dadurch

$$x = \pm \frac{a}{2} + z.$$

In zwei Aufgaben bedient sich Alkarchî zweier Unbekannten, welchen er besondere Namen beilegt[2]). Das eine Mal heißt ihm die erste Unbekannte Sache, die zweite Maß; das andere Mal benutzt er neben Sache noch Teil. Ganz Ähnliches findet sich auch in einem anonymen mutmaßlich gleichfalls dem XI. S. entstammenden arabischen Aufsatze über Winkeldreiteilung[3]). Daß hierin ein Hinausgehen über Diophant enthalten ist, leuchtet ein, da dieser, wenn er auch unter Umständen Hilfsunbekannte eingeführt hat, für dieselben stets nur die gleiche Benennung und Bezeichnung wählte wie für die Hauptunbekannte und durch den verbindenden Text dafür sorgte, daß eine Verwechslung nicht eintrete. Den Buchstaben gegenüber, welche die Inder für voneinander zu unterscheidende Unbekannte in fast beliebiger Anzahl zu setzen gewohnt waren, ist Alkarchîs Verfahren ein untergeordnetes.

Ob auch hier ein absichtliches Vernachlässigen dessen, was die Inder über die Griechen hinaus geleistet haben, ob ein wirkliches Nichtwissen anzunehmen sei, dürfte schwerlich ermittelt werden können. Wahrscheinlicher ist uns jedoch das letztere, weil auch in solchen arabischen Schriften, die ausgesprochenermaßen indischen Schriften nachgebildet sind, die Methoden der Inder, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, mag es um bestimmte oder um unbestimmte Aufgaben sich handeln, regelmäßig fehlen.

Wir haben gesagt, daß die bestimmten Gleichungen, welche Alkarchî löst, sofern sie den 2. Grad übersteigen, stets solche sind, welche auf Gleichungen des 2. Grades sich zurückführen lassen. Bestimmte kubische Gleichungen hat er nicht behandelt, und eben-

---

[1]) Fakhri 113 (Aufgabe IV, 32). [2]) Ebenda 139—143 (Aufgaben III, 5 und 6). [3]) *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854 pag. 381—383.

sowenig läßt sich eine Spur finden, daß irgend ein anderer Araber dieser Zeit sich in algebraischer Weise erfolgreich mit denselben beschäftigt hätte. Nur geometrisch treten sie mit Glück an diese Aufgabe heran.

Wir haben an der Wende des X. zum XI. S. Männer wie Abû'l Dschûd mit kubischen Gleichungen sich abarbeiten sehen, bald in einzelnen Fällen ein Ergebnis erzielend, bald der Schwierigkeiten, die sich ihnen entgegenstellten, nicht Meister werdend. Auch andere etwas frühere Schriftsteller wie Almâhanî[1]) am Ende des IX. S. und Abû Dscha'far Alchâzin[2]) am Ende des X. S. haben sich im Chalifenreiche ähnliche Aufgaben gestellt und wurden für ihre Bemühungen von einem, wie wir gleich sehen wollen, sehr befugten Berichterstatter gelobt. Ersterer versuchte vergebens die archimedische Aufgabe, eine Kugel in Abschnitte von gegebenem gegenseitigem Raumverhältnisse zu teilen, welche er in eine Kuben, Quadrate und Zahlen enthaltende Gleichung umgesetzt hatte, durch Auffindung der Gleichungswurzeln zu lösen[3]). Letzterer fand, daß Kegelschnitte genügten das zu zeichnen, was zu errechnen nachgerade als Unmöglichkeit galt[4]). Unser Berichterstatter ist Alchaijâmî d. h. der Nachkomme des Zeltenverfertigers, und er wußte endlich die Lehre zum Abschlusse zu bringen. Er gehört schon einer Zeit an, die jenseits der Periode liegt, bis zu welcher wir (S. 741) der Schicksale des Chalifates in flüchtigen Umrissen gedacht haben.

Die Dynastie der Abbasiden dauerte unter dem Namen und dem Scheine des Chalifates noch fort, aber die Bujiden, die eigentlichen Machthaber, waren seit der Mitte des XI. S. gestürzt, und an ihre Stelle traten Männer aus dem Geschlechte Seldschuks, die aus der Steppe der Kirgisen gekommen neue frische Kräfte mitbrachten, noch unverbraucht in der Verfeinerung und Verweichlichung städtischen und höfischen Lebens[5]). Togrulbeg der Enkel Seldschûks zog 1050 halb gerufen von dem Chalifen Alkâ'im und achtlos des Widerspruchs des Bujidensultans Al-Melik Ar-Rahîm in Bagdad ein. Mehrjährige Kämpfe endeten zu seinem Gunsten, und der ihm verliehene Ehrentitel „König des Ostens und des Westens" gewann wenigstens für die Umgegend der Hauptstadt einige Wahrheit. Auf Togrulbeg folgte 1063 sein kriegerischer Neffe Alp Arslan, auf diesen 1073—1092 dessen Sohn Melikschâh. Den beiden letztgenannten Sultanen stand als Wezîr Nizâm Almulk zur Seite, und dieser war der Jugendfreund unseres Omar Alchaijâmî[6]). Noch ein dritter Jüngling, Al-Hasan ibn As-Sabbâh, war mit beiden zusammen aufgewachsen.

[1]) Suter 26—27, Nr. 47. [2]) Ebenda 58, Nr. 124. [3]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 2. [4]) Ebenda pag. 3. [5]) Weil S. 226 flgg. [6]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami Préface* pag. IV—VI.

Die jungen Männer hatten sich gegenseitige Unterstützung zugeschworen, wenn einer von ihnen zu Ehren und Ansehen käme. Nizâm Almulk war in der Lage, sein Versprechen einzulösen, und es lag nicht an ihm, wenn es anders kam, als die Phantasie der Freunde es sich ausgemalt hatte. Al-Hasan ibn Aṣ-Ṣabbâḥ, der eine Stelle als Kämmerer erhalten hatte, suchte seinen beginnenden Einfluß zum Schaden Nizâm Almulks selbst zu verwenden, wurde durch diesen wieder vom Hofe verdrängt, begab sich nach Ägypten und kehrte von dort später als schîʿitischer Parteiführer nach Persien zurück, woher er stammte. In der Burg Alamût, deren er sich 1090 bemächtigte, gründete er den Orden der Haschîschesser (Haschîschîn), welche unter dem berückenden Einflusse jenes gefährlichen Reizmittels zu allen Verbrechen bereit waren, die ihr Führer ihnen anbefahl, den Märtyrern ewige paradiesische Genüsse versprechend, und welche so den Namen ihres Ordens gleichbedeutend mit Meuchelmördern machte, eine Bedeutung, die der abendländischen Verketzerung ihres Namens Assassini beigeblieben ist.

Alchaijâmîs[1]) Leben war weniger stürmisch. Eine eigentliche Hofstellung scheint er ausgeschlagen zu haben und nur als Astronom für Melikschâh tätig gewesen zu sein, in welcher Eigenschaft er 1079 eine Kalenderreform zuwege brachte. Sie bestand darin, daß man zum persischen Sonnenjahre von 365 Tagen zurückkehrte und alle vier Jahre ein Schaltjahr von 366 Tagen eintreten ließ, zum 8. Schaltjahre aber nicht das 4., sondern das 5. Jahr nach dem letzten Schaltjahre wählte. So bekam man für 33 Jahre die Dauer von $25 \times 365 + 8 \times 366$ Tagen und mithin 1 Jahr $= 365^d\ 5^h\ 49^m\ 5^s, 45$ in einer Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, welche größer ist als bei allen sonstigen Kalendereinrichtungen[2]). Auch Alchaijâmî scheint in die religiösen Zwiespalte zwischen Schîʿiten und Sunniten etwas verwickelt gewesen zu sein. Wenigstens berichtet eine ihm freilich nicht freundliche Feder, er habe, nicht aus Frömmigkeit, sondern durch ein fast zufälliges Zusammentreffen, die jedem Moslim gebotene große Pilgerfahrt gemacht, sich aber bei der Wiederkehr nach Bagdad gegen allen wissenschaftlichen Verkehr abgeschlossen und habe dann in die Heimat nach Chorasan sich zurückgezogen.

Sein Ruhm als großer Mathematiker blieb unbeeinträchtigt, und noch in der Mitte des XVII. S. hat Hadschî Chalfa, welcher sich sonst begnügt, den Titel der Bücher nur anzugeben, welche er in seinem

[1]) Suter 112—113, Nr. 266. [2]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 331, wo der Name Alchaijâmîs als *Omar-Cheian* angegeben ist, eine ältere Lesart, deren wir uns in Anschluß an Woepcke nicht bedienen.

umfassenden bibliographischen Werke aufzählt, ein nicht unbedeutendes Stück der Algebra Alchaijâmîs zum Abdrucke gebracht.

ʿOmar Alchaijâmî rechtfertigt durch seine Algebra vollständig den Ruhm, welcher bei seinen Landsleuten ihm nachblieb. Er war der erste, welcher die Unterscheidung der Fälle, die dadurch, daß nur positive Glieder in den Gleichungen vorkommen dürfen, sich ergeben, auch für die kubische Gleichung durchführte, und sodann, nicht, wie es die Griechen schon mehrfach getan hatten, diese oder jene geometrische Aufgabe löste, sondern mit diesen Gleichungen als solchen sich vollbewußt beschäftigte. Es ist wahr, er blieb hinter dem Erreichbaren in manchen Beziehungen zurück. Er sah nicht, daß es kubische Gleichungen von der Form $x^3 + bx = ax^2 + c$ gibt, welche durch drei positive Wurzeln erfüllt, eine Ähnlichkeit mit jenem Falle $ax^2 + c = bx$ der quadratischen Gleichung an den Tag legen, welcher zwei positive Wurzeln zuläßt[1]). Er glaubte, die kubischen Gleichungen könnten überhaupt nicht durch Rechnung gelöst werden, sondern man müsse mit der Konstruktion von einander durchschneidenden Kegelschnitten sich begnügen[2]). Ihm entgingen manche Wurzelwerte, welche durch Zeichnung sich eigentlich hätten kundgeben müssen, dadurch, daß er von den Kegelschnitten, die er zur Konstruktion verwandte, immer nur einen Arm zu zeichnen pflegte[3]). Er nahm es auch nicht sehr genau mit dem Diorismus der einzelnen Fälle[4]), d. h. mit der Untersuchung der Zahlenwerte, welche die einzelnen in den Gleichungen vorkommenden Koeffizienten annehmen müssen, um die Möglichkeit einer Konstruktion, wir würden sagen um eine positive Gleichungswurzel hervorzubringen. Er hielt biquadratische Gleichungen auf geometrischem Wege für unlösbar[5]). Aber diese Mängel sind doch nur geringfügige gegen den ungemein großen Fortschritt, überhaupt Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade systematisch bearbeitet und in Gruppen zerlegt zu haben. Fragen wir, welcher Mathematiker irgend eines Volkes noch vor dem Jahre 1100 trinome kubische Gleichungen von quadrinomen unterschied, unter jeden wieder zwei Gruppen bildend, je nachdem dort das Glied 2. oder 1. Grades fehlte, hier die Summe von drei Gliedern einem, oder die Summe von zwei Gliedern der der beiden anderen gleichgesetzt war, so wird man uns sicherlich nur den einzigen Namen ʿOmar Alchaijâmî als Antwort zu nennen wissen, und das genügt, dem Manne seine hervorragende Stellung in der Geschichte der Algebra zuzuweisen.

---

[1]) *L'algèbre d'Omar Alkhayami* XVI und 65, Anmerkung. [2]) Ebenda pag. 11 und 12. [3]) Ebenda pag. 68. [4]) Ebenda XVII—XVIII. [5]) Ebenda pag. 79.

Es scheint, als sei noch ein anderes Verdienst ihm zuzuschreiben, die Kenntnis der Binomialentwicklung für den Fall ganzzahliger positiver Exponenten. Er sagt nämlich: „Ich habe gelehrt, die Seiten des Quadratoquadrats, des Quadratokubus, des Kubokubus etc. bis zu beliebiger Ausdehnung zu finden, was man vorher noch nie getan hatte. Die Beweise, welche ich bei dieser Gelegenheit gab, sind einzig arithmetischer Natur und gründen sich auf die arithmetischen Abschnitte der euklidischen Elemente“[1]. Diese Behauptung kann kaum anders verstanden werden, als daß die Ausziehung der Quadratwurzel sich stütze auf die Entwicklung von $(a+b)^2$, die der Kubikwurzel auf die Entwicklung von $(a+b)^3$, die der $m$ten Wurzel auf die Entwicklung von $(a+b)^m$, eine Auffassung, zu deren Bestätigung es dienen kann, daß Alchaijâmî unmittelbar vor der angeführten Stelle von den Methoden der Inder die Quadrat- und Kubikwurzel zu finden geredet hat und nur deren Art vermehrt zu haben sich rühmt.

Wir reihen diesen Bemerkungen noch eine geometrische Aufgabe an, welche von einem Ungenannten bearbeitet worden ist, der nach der ganzen Behandlungsweise jedenfalls der Zeit und der Schule angehört, deren Hauptvertreter wir soeben kennen gelernt haben. Es handelt sich um die Konstruktion[2] eines Paralleltrapezes von drei einander gleichen gegebenen Seiten und von zugleich gegebenem Flächeninhalte. Diese an griechische wie an indische Vorbilder (S. 651—652) erinnernde Aufgabe führt zu einer Gleichung des 4. Grades von der Form $x^4 + bx = ax^3 + c$ und wird mittels des Durchschnittes eines Kreises und einer Hyperbel gelöst.

36. Kapitel.

Der Niedergang der ostarabischen Mathematik. Ägyptische Mathematiker.

Wieder verlangen die politischen Ereignisse, daß wir einen Augenblick bei ihnen verweilen. Wir stehen an dem Zeitpunkte, von welchem an durch zwei Jahrhunderte, in runden Zahlen von 1100 bis 1300, jene Kämpfe wüteten, welche in ihrer Gesamtheit die Kreuzzüge genannt worden sind, welche aber mehr als einmal durch Zeiten unterbrochen waren, in welchen friedlichster Verkehr zwischen den Feinden stattfand. Das waren die Zeiten, in welchen

[1] *L'algèbre d'Omar Alkhayami* pag. 13. [2] Ebenda pag. 115.

die europäische Christenheit in dauernde unmittelbare Beziehung zur ostarabischen Bildung trat, eine Beziehung, welche von größter Wichtigkeit werden mußte. Nicht für die Kultur der Araber tritt uns die ganze Bedeutung der Kreuzzüge hervor. Wenigstens in den Wissenschaften, um deren Geschichte wir uns zu kümmern haben, sind die Araber von 1100 den Gelehrtesten des christlichen Abendlandes so ungemein überlegen, daß sie nichts, wir würden noch schärfer betonen gar nichts, von jenen lernen konnten, wenn nicht vielleicht eine an sich unbedeutende Kleinigkeit uns nachher noch die Vermutung erwecken dürfte, es habe auch hier sich bewährt, daß keine Wirkung ohne Gegenwirkung zu denken ist. Jedenfalls aber werden wir an den Einfluß der Kreuzzüge vorwiegend in Europa zu erinnern haben.

Die Kriege gegen die Andersgläubigen, vornehmlich in Palästina und Ägypten ausgefochten, waren nicht die einzigen, welche das arabische Ostreich in diesem Zeitraume beschäftigten. Daneben dauerten wie unter allen Dynastien unaufhörliche Kämpfe gegen die Provinzen fort, die unter kühnen Feldherren und Gegenfürsten bald sich losrissen, bald zu Paaren getrieben wurden. Daneben hatte man des Andranges der Mongolen sich zu erwehren[1]), die im ersten Viertel des XIII. S. unter Dschingiz-chân die östlichen Grenzen des Reiches überfluteten. Wieder war es der Hilferuf eines ohnmächtigen Chalifen, der dem Eroberer den kaum mehr notwendigen Vorwand gab, sich in dieser Richtung weiter auszudehnen. Schon 1220 wurde Chorasan, jene Geburtsstätte zahlreicher Mathematiker, von den Mongolen besetzt. Wieder 36 Jahre später, 1256 drangen die Mongolen unter Hûlâgû abermals weiter vor, und 1258 fiel Bagdad. Der Chalife Almustaʿṣim wurde mit vielen Prinzen seines Hauses getötet, das Chalifat hörte auch dem Namen nach auf, wie es seit lange schon der Tat nach so gut wie nicht bestand.

In diesen Zeitraum fällt Kemâl Eddîn[2]), einer der größten Gelehrten unter den Arabern. Er ist 1156 in Moṣul geboren und hat ebenda das nach ihm benannte Kemâlische Kollegium gegründet. Er war es, der nach einem arabischen Berichterstatter die mathematischen Fragen zu beantworten wußte, um deren Erledigung willen der Frankenkönig Imbarûr — eine Verketzerung von Imperator, unter welcher Friedrich II. verborgen ist — eine besondere Gesandtschaft nach Moṣul geschickt hatte.

Unter Hûlâgûs Begleitern war ein Mann, der einst vom Chalifen schwer beleidigt vielleicht zu den Anstiftern jenes Kriegszuges ge-

---

[1]) Weil S. 249—255. [2]) Suter 140, Nr. 354.

hörte, jedenfalls unter die Günstlinge des mongolischen Führers zählte und auch für uns von hervorragender Bedeutung ist: Naṣîr Eddîn[1]). Der Name Naṣîr Eddîn d. h. Verteidiger der Religion ist nur Beiname. Eigentlich hieß er Abû Dschaʿfar Muḥammed ibn Ḥasan al Ṭûsi aus Tûs, wo er 1201 geboren wurde. Er starb 1274. Seine Gelehrsamkeit umfaßt die allerverschiedensten Gegenstände. Philosophie und Arzneikunde, Naturgeschichte und Geographie haben ihm Stoff zu Abhandlungen gegeben, neben welchen ein Gesetzbuch der Perser sich kaum sonderbarer ausnimmt als ein Werk über die Punktierkunst. Die Îlchânischen Tafeln, welche den Titel von den Fürsten erhalten haben, unter welchen Naṣîr Eddîn die 12jährigen in den Tafeln verwerteten Beobachtungen anstellte, von den sogenannten Großchânen, sind das Werk, um dessen willen Naṣîr Eddîn in seiner Heimat den größten Ruhm genoß. Die Beobachtungen sind auf der Sternwarte in Marâga angestellt, deren Gründung 1259 unmittelbar nach der Einnahme von Bagdad auf Naṣîr Eddîns Rat vollzogen wurde. Die dort erbeuteten Schätze des letzten Chalifen fanden zum Teil ihre Verwendung bei der Erbauung der großartigen Anstalt, deren Kostspieligkeit nahezu imstande gewesen wäre, noch im letzten Augenblick die Inangriffnahme zu verhindern, wenn nicht Naṣîr Eddîn es verstanden hätte, Hûlâgû zu bereden. Nach Fertigstellung der Sternwarte diente sie als Sammelplatz zahlreicher Astronomen, welche Hûlâgû herbeirief, und soll mit einer Bibliothek von über 400000 Bänden ausgerüstet gewesen sein, Beutestücke aus Plünderungen in Bagdad, Syrien und Mesopotamien. Von mathematischen Schriften Naṣîr Eddîns werden solche über Algebra, über Arithmetik und über Geometrie genannt. Von großer Bedeutung ist die Abhandlung Naṣîr Eddîns über die Figur der Schneidenden[2]), d. h. über den Satz des Menelaos. Er hat auf denselben eine ganz vollständige ebene und sphärische Trigonometrie aufgebaut, welche hier zum ersten Male als Teile der reinen Geometrie erscheinen, d. h. nicht mehr bloß als Einleitung zur Astronomie dienen. In der ebenen Trigonometrie kennt er den Sinussatz, in der sphärischen sind ihm die sechs Hauptformeln des rechtwinkligen Dreiecks vertraut, er löst aber auch

---

[1]) Über Naṣîr Eddîn vgl. einen Aufsatz von Wurm in v. Zachs Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde (1811) Bd. XXIII, S. 64—78 und 341—361. Suter 146—153, Nr. 368. [2]) Naṣîr Eddîns *Schakl al kaṭṭâ*, wie der arabische Name lautet, ist 1892 durch Alexander Pascha Karatheodory herausgegeben worden. Suter gab ein Referat in der *Bibliotheca mathematica* 1893, 1—8, an welches wir uns teilweise wörtlich anschließen. Vgl. ganz besonders A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 65—71.

alle sechs Fälle des schiefwinkligen Dreiecks, sofern man nicht geschmeidige Formeln verlangt, sondern sich damit zufrieden gibt, daß gezeigt wird, man könne, wenn diese oder jene Stücke gegeben sind, diese oder jene andere Stücke finden. In diesem Sinne führt Naṣîr Eddîn auch den Fall der drei Winkel auf den der drei Seiten zurück. Er bildet nämlich zu dem gegebenen Dreiecke dasjenige neue Dreieck, welches erst drei Jahrhunderte später in Europa einer abermaligen Erfindung bedurfte, um von da an als Polardreieck ein geschätztes Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie zu bleiben. Über die wichtige Frage, welche Verbreitung diese Trigonometrie fand, und ob sie im Oriente den ganzen Einfluß übte, den sie zu üben imstande war, fehlen noch Untersuchungen. Sicher ist, daß etwa ein Jahrhundert nach Naṣîr Eddîn Levi ben Gerson als Fortsetzer seiner Lehren auftrat, der selbst wieder abermals ein Jahrhundert später einen neuen Fortsetzer in Regiomontanus fand. Zu den grundsätzlich weniger wichtigen aber immerhin der Erwähnung würdigen Stellen bei Naṣîr Eddîn gehört diejenige, an welcher er beweist, daß wenn ein Kreis einen anderen von doppelt so großem Halbmesser innerlich berührt, und wenn beiden Kreisen drehende beziehungsweise rollende Bewegung erteilt wird, die entgegengesetzt gerichtet und für den kleinen Kreis doppelt so groß als für den großen Kreis ist, der anfängliche Berührungspunkt alsdann eine gerade Linie, und zwar den Durchmesser des großen Kreises beschreibt[1]). Weit bekannter als Naṣîr Eddins Trigonometrie war jedenfalls seine Bearbeitung der Euklidischen Elemente. Er hat an seiner Vorlage mancherlei zu ändern gewagt, und insbesondere findet sich bei ihm ein Versuch, die Parallelentheorie von den ihr innewohnenden Schwächen zu befreien[2]).

Erläuterungen zu Euklid wurden dagegen auch später noch geschrieben, und als Verfasser von solchen wird der Perser Kâḍîzâdeh Ar-Rûmî genannt[3]), der auch den Namen Maulânâ Salaḥeddîn Mûsâ ibn Muḥammed führte, und von welchem ein Leben des Euklid nach griechischen Quellen herrührt, welches handschriftlich noch vorhanden sein soll. Kaḍîzâdeh Ar-Rûmî starb 1412 oder 1413. Er gehörte zu den Astronomen, welche wieder ein neuerer Eroberer an einen neuen Mittelpunkt zusammenrief.

Tîmûr[4]), gewöhnlich Tamerlan genannt, ein Häuptling des Tartarenstammes Berlas, schuf sich am Schlusse des XIV. S. ein neues

[1]) Curtze in der *Bibliotheca Mathematica* 1895, S. 33—34. [2]) Wallis, Opera II, 669—673. Kästner, Geschichte der Mathematik I, 374—381. [3]) Gartz, *De interpretibus et explanatoribus Euclidis Arabicis* etc. pag. 30—31. Suter 174—175, Nr. 430. [4]) Weil S. 421 flgg.

Reich. Wenn er auch 1393 in Bagdad einzog, seine Hauptstadt hatte er in Samarkand, welche rasch emporblühte und Sammelplatz für Handel und Gewerbe, für Künste und Wissenschaften wurde. Tîmûr selbst, noch mehr sein Sohn Schâhruch bemühten sich, dieses Ergebnis hervorzubringen, und nun gar der Enkel Muhammed ibn Schâhruch Ulûg Beg, geboren 1393, ermordet 1449, war selbst ein hervorragender Astronom und verfertigte in Gemeinschaft mit anderen astronomische Tafeln von hohem Werte[1]). Zu seinen Hilfsarbeitern gehörte vorzugsweise Ar-Rûmî, der auch als Lehrer des Ulûg Beg angeführt wird. Der Enkel Ar-Rûmîs Mahmûd ibn Muhammed ibn Kâdîzâdeh Ar-Rûmî genannt Mîram Tschelebî schrieb 1498 Erläuterungen zu jenen Tafeln[2]).

Zu dem Ulûg-Begschen Gelehrtenkreise ist auch Dschamschîd ibn Mas'ûd ibn Mahmûd der Arzt mit dem Beinamen Ġijât eddin Al-Kâschî zu zählen, welcher eine Abhandlung „Schlüssel der Rechenkunst" verfertigte, welche handschriftlich vorhanden ist, und deren Vorrede auch übersetzt worden ist[3]). Der Verfasser kündigt in der Vorrede einige der Sätze an, welche er mitteilen wird. Dazu gehört die Summenformel der aufeinander folgenden Kubikzahlen von 1 an, wie sie unter den Arabern uns bei Alkarchî bekannt geworden ist (S. 769), aber auch die Summenformel für die mit der 1 beginnenden aufeinander folgenden Biquadratzahlen, welche hier überhaupt zum ersten Male auftreten dürfte. Ġijât eddin Al-Kâschî setzt

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + r^4 = \left[\frac{(1+2+3+\cdots+r)-1}{5} + (1+2+3+\cdots+r)\right] \times [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2],$$

eine allerdings sehr umständliche Form, deren Zurückführung in die einfachere Gestalt

$$\frac{6r^5 + 15r^4 + 10r^3 - r}{30}$$

er nicht zu vollziehen imstande gewesen zu sein scheint, jedenfalls nicht vollzogen hat. In jener Vorrede rühmt sich der Verfasser auch eine Methode erfunden zu haben, um die Sehne, die zu dem Bogen von 1^0 gehört, in beliebiger Annäherung zu erhalten, weil es doch nicht möglich sei, in genauer Weise die Sehne eines Bogens aus der Sehne des dreifachen Bogens abzuleiten. Die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung kubischer Gleichungen galt also damals auch bei den Arabern noch für ausgemacht.

---

[1]) Sédillot hat 1853 die Einleitung zu diesen Tafeln in französischer Übersetzung herausgegeben. [2]) *Journal Asiatique* für 1853, série 5, T. II, 333 bis 356. Suter 188, Nr. 457. [3]) Woepcke, *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes.* Roma 1864, pag. 22—25.

Die Näherungsmethode Al-Kâschîs ist uns höchst wahrscheinlich bekannt, denn sein Name dürfte in der wohl durch falsche Stellung der sogenannten diakritischen Punkte veränderten Lesart Atabeddin Dschamschîd zu erkennen sein, von welchem Mîram Tschelebî in dem obengenannten Kommentare zu den Ulûg Begschen Tafeln uns eine solche Methode mitteilt[1]). In modernen Zeichen stellt die Methode sich etwa folgendermaßen dar. Es sei $x^3 + Q = Px$ aufzulösen, wo P und Q positive Zahlen und P gegen Q sehr groß sein soll, woraus alsdann folgt, daß x entsprechend klein, also auch x^3 gegen Q sehr klein gewählt, die Gleichung zu erfüllen vermag. Dem entsprechend wird, indem wir das Ähnlichkeitszeichen $\backsim$ benutzen, um angenäherte Gleichheit auszudrücken, neben

$$x = \frac{Q + x^3}{P} \quad \text{auch} \quad x \backsim \frac{Q}{P}$$

sein. Liefert jene Division einen Quotienten a und den Rest R, so ist $Q = a \cdot P + R$. Der genaue Wert von x wird jedenfalls $> a$ sein, etwa $= a + \beta$. Alsdann ist

$$a + \beta = \frac{Q + (a + \beta)^3}{P} = a + \frac{R + (a + \beta)^3}{P} \backsim a + \frac{R + a^3}{P}.$$

Die Division $\frac{R + a^3}{P}$ möge den Quotienten b, den Rest S liefern, so daß $R = bP + S - a^3$. Weiter setzen wir $x = a + b + \gamma$. Daraus folgt

$$a + b + \gamma = \frac{Q + (a + b + \gamma)^3}{P} = a + \frac{R + (a + b + \gamma)^3}{P}$$

$$= a + b + \frac{S - a^3 + (a + b + \gamma)^3}{P} \backsim a + b + \frac{S + (a + b)^3 - a^3}{P}.$$

Die letztere Division $\frac{S + (a + b)^3 - a^3}{P}$ wird nun abermals vollzogen. Sie liefere den Quotienten c mit dem Reste T oder

$$T = S + (a + b)^3 - a^3 - cP.$$

Ein weiterer Annäherungsversuch $x = a + b + c + \delta$ führt demnach zu

$$a + b + c + \delta = \frac{Q + (a + b + c + \delta)^3}{P} = a + \frac{R + (a + b + c + \delta)^3}{P}$$

$$= a + b + \frac{S + (a + b + c + \delta)^3 - a^3}{P}$$

$$= a + b + c + \frac{T + (a + b + c + \delta)^3 - (a + b)^3}{P}$$

$$\backsim a + b + c + \frac{T + (a + b + c)^3 - (a + b)^3}{P} \quad \text{usw.}$$

[1]) *Journal Asiatique* von 1853, série 5, T. II, pag. 347. Die Vermutung Atabeddin = Ġijât Eddîn hat gestützt auf die Ansicht mehrerer Orientalisten Hankel S. 292, Anmerkung * ausgesprochen. Die Näherungsmethode selbst hat er S. 291 an einem Beispiele durchgeführt. Suter 173—174, Nr. 429.

Die Brauchbarkeit dieser Methode, bei welcher es nur auf Divisionen durch einen und denselben Divisor P und auf Berechnung der dritten Potenzen von a, von $a + b$, von $a + b + c$ usw., also von den aufeinander folgenden Näherungswerten von x, ankommt, ist eine ziemlich bedeutende und hat nur, wie man, um allzuhochgespannten Meinungen entgegenzutreten, hervorheben muß, den einen Mangel, daß ein einzig auf die gegebene Gleichungsform unter der Bedingung eines gegen Q sehr großen P beschränktes Verfahren damit gelehrt ist. Ist letztere Bedingung nicht erfüllt, oder ist die Form der Gleichung nicht $x^3 + Q = Px$, so läßt die Methode sich nicht anwenden. Es muß vielmehr alsdann wesentlich anders verfahren werden, und ob ein Araber, der, wie wir wissen, nur mit positiven Zahlen rechnete und deshalb so viele verschiedene Gleichungsformen unterscheiden mußte, auch in jenen abweichenden Fällen sich zu helfen wußte, ist uns im höchsten Grade unwahrscheinlich, da nicht einmal andeutungsweise von solchen anderen Fällen die Rede ist. Der Ursprung der hier behandelten besonderen Gleichung dritten Grades war, wie wir (S. 781) gesagt haben, ein trigonometrischer. Man sollte aus dem bekannten Sinus von 3^0 den von 1^0 ermitteln. Hieß letzterer x und der Kreishalbmesser r, so fand sich an einer Figur

$$x^3 + \frac{r^2}{4} \sin 3^0 = \frac{3r^2}{4} x$$

und das war die zu lösende Gleichung. Man hat nun die Meinung ausgesprochen[1]), die Herstellung dieser Gleichung werde schon Abû'l Dschûd gelungen sein, welcher ähnliche Aufgaben behandelte (S. 759). Alsdann habe es sich um die Auflösung einer einmal bekannten Gleichung gehandelt, die vermutlich nicht so lange auf sich habe warten lassen. Man habe also nur einen späten Bericht über eine wahrscheinlich ältere Leistung. Das ist eine vollkommen in der Luft schwebende rein persönliche Meinung, der wir uns um so weniger anschließen können, als ja Al Kâschî sich ausdrücklich der Erfindung der Methode rühmt.

So tief wir schon herabgerückt sind, bis zu einer Zeit, welche schon später als die Einnahme von Byzanz durch die Türken liegt und eigentlich erst im folgenden Bande dieses Werkes besprochen werden dürfte, so wollen wir doch in ähnlicher Weise, wie wir dieses für die Mathematik der Chinesen uns gestattet haben, lieber jetzt eine zeitliche als später eine räumliche Abweichung von einem ein-

[1]) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 72, Note 2.

heitlich angelegten Plane uns gestatten. Man muß nun einmal die Entwicklung der Mathematik auf asiatischem Boden unter die zu betrachtenden Dinge vollwertig einrechnen, wird aber entschieden besser daran tun, sie ein für allemal von Anfang bis zu Ende zu verfolgen, als sie der Entwicklung auf europäischem Boden je und je einzureihen.

Jahrhunderte hindurch haben die Araber des Ostens einen mächtigen Vorsprung vor den Europäern, die teilweise bei ihnen in die Schule gehen. Mit den Männern, welche wir zuletzt genannt haben, hört jeder Fortschritt bei den einen auf, während er bei den anderen zu immer rascherer Gangart sich gestaltet. Und auch die Empfänglichkeit der Araber auf mathematischem Gebiete war dahin. Das zeigt uns der letzte orientalische Schriftsteller, von dem wir nunmehr zu reden haben, Behâ Eddîn[1]). Dieser Mathematiker lebte, wie ein in arabischer Sprache verfaßtes biographisches Wörterbuch berichtet, 1547—1622. Er war, was aus einzelnen Stellen seines Rechenbuches mit Bestimmtheit hervorgeht, Schîʿite und demnach wahrscheinlich geborener Perser oder doch in Persien ansässig, was mit der Angabe, er sei in Ispahan gestorben, im Einklang steht. Der Titel des von ihm herrührenden Werkes lautet Essenz der Rechenkunst, Chulâṣat al ḥisâb, weil es die Essenz der Bücher älterer Schriftsteller sei, die er vereinigt habe. Den Inhalt bildet ein Gemenge von arithmetischen, algebraischen, geometrischen Dingen in bunter Reihenfolge, und nicht minder bunt ist das Gemenge, wenn wir die einzelnen Dinge auf ihren Ursprung uns ansehen und Griechisch-abendländisches mit Indischem, mit Arabischem regellos wechselnd erkennen. Nur eines muß man nicht erwarten: daß Behâ Eddîns Sammelgeist es verstanden hätte, jeder Heimat die edelste Frucht zu entnehmen, welche sie zeitigte. Griechisch erscheint die Behauptung, die Einheit sei keine Zahl, erscheint das ganze Kapitel der Messungen mit einer Ausnahme. Griechisch ist die Auffindung der vollkommenen Zahlen, der Summe von Quadrat- und Kubikzahlen. Ebendahin weist uns wohl die komplementäre Multiplikationsmethode (S. 528), welche Behâ Eddîn kennt und folgendermaßen lehrt: „Addiere die beiden Faktoren und nimm den Überschuß über 10 zehnfach und dazu das Produkt der Überschüsse der 10 über jeden Faktor“[2]). Er dehnt die Regel, welche, wie er ausdrücklich hervorhebt, nur für zwei Faktoren zwischen 5 und 10 Geltung hat, auch mit einigen geringfügigen Ab-

[1]) Beha Eddins Essenz der Rechenkunst, arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann. Berlin 1843. Biographisches in den Anmerkungen auf S. 74—75. Suter 194, Nr. 480. [2]) Beha Eddin S. 9.

änderungen auf andere Faktoren aus. Die komplementäre Division ist dagegen auch in Behâ Eddîns Essenz nicht eingedrungen, und an abendländische Zutat erinnert bei der Division nur das Ziehen von Vertikallinien, welches freilich zur Vermeidung von Irrtümern jedermann erfinden konnte, welches aber auch ein Überbleibsel von Kolumnen sein kann, welche in Europa benutzt wurden. An Heron werden wir in dieser spät entstandenen Sammlung durch Höhenmessungen aus Schattenlängen und mit Hilfe von Beobachtungsvorrichtungen[1]) erinnert, an ihn durch die Aufgabe die Breite eines Flusses zu messen. Die Ausführung dieser Messung selbst erfolgt in einer uns noch unbekannten Art: „Stelle Dich an das Ufer des Flusses und beobachte sein anderes Ufer durch das Diopterlineal; dann kehre Dich um, so daß Du durch dasselbe eine Stelle des Bodens siehst, während das Astrolabium an seinem Platze bleibt: nun ist der Abstand zwischen Deinem Standpunkte und jener Stelle gleich der Breite des Flusses“[2]). An Indien erinnert uns das Zifferrechnen, die Neunerprobe, die Regeldetri, die Rechnung des doppelten falschen Ansatzes, die Rechnung durch Umkehrung der Reihenfolge und Ausführung der zu vollziehenden Operationen, die Netzmultiplikation[3]), welche letztere besonders deutlich gelehrt wird, während zwei andere Multiplikationsmethoden nur genannt, aber nicht erläutert werden, so daß der Sinn, der mit der Multiplikation des Umgürtens und des Gegenüberstellens zu verbinden ist, rätselhaft bleibt. Wenn wir diese Dinge griechisch-abendländisch, beziehungsweise indisch nannten, so ist unsere Meinung keineswegs die, als habe Behâ Eddîn aus jenen entfernten Quellen selbst geschöpft. Er hat zuverlässig nur Schriften seiner Heimat benutzt. Aber in jene sind früher oder später die Einschiebungen schon erfolgt und zwar, wie es uns wenigstens vorkommt, die der Kolumnenüberbleibsel, möglicherweise der komplementären Multiplikation, vielleicht auch der praktisch-feldmesserischen Aufgaben erst nach den Kreuzzügen. Arabische Originalquellen lieferten daneben die Unmöglichkeit, der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ zu genügen[4]) oder eine Quadratzahl zu finden, welche um 10 vermehrt oder vermindert wieder eine Quadratzahl liefere. Einheimisch war, soweit wir wissen,

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

[1]) Beha Eddin S. 35—36. [2]) Ebenda S. 36—37. [3]) Ebenda S. 12. [4]) Ebenda S. 56, Nr. 4. Diese Nummer bezieht sich auf sieben von Behâ Eddîn in seinen Schlußworten S. 55—56 zusammengestellte Aufgaben, welche er als solche bezeichnet, die „seit alter Zeit als unauflösbar übrig blieben, sich empörend gegen alle Genies bis zu dieser Frist“. Mit der Beleuchtung jener

Einheimisch kann auch die Vorschrift sein, den Kreisumfang durch einen Faden zu messen[1]), sowie wir die falsche Regel den Raum einer Kugel vom Durchmesser d durch

$$d^3\left\{\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left[\left(1-\frac{3}{14}\right)-\frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)\right]\right\}$$

zu berechnen[2]) einheimischem Mißverständnisse später Zeit zur Last legen möchten. Augenscheinlich ist nämlich der für den Kugelinhalt angegebene Ausdruck gleichbedeutend mit $\left(\frac{11}{14}d\right)^3 = \left(\frac{r\pi}{2}\right)^3$ d. h. mit dem Kubus des vierten Teils des Kreisumfanges, und bei aller Verwandtschaft mit der falschen Berechnung des Kugelinhaltes durch Âryabhaṭṭa (S. 646) ist doch die Verschiedenheit wieder zu bedeutend, um ein Abhängigkeitsverhältnis anzunehmen. Weit eher möchten wir an die spätrömische Kreisflächenausmessung (S. 591) uns erinnert fühlen. Einige geometrische Namen sind sowohl nach Bedeutung als Ursprung zweifelhaft, einige wenigstens in letzterer Beziehung. Einer Art von Trapez, welche Gurke genannt wird, stehen wir ebenso ratlos gegenüber wie der Kommentator, der da sagt: „Eine Beschreibung dieser Art von Trapezen ist in keinem Buche zu finden, die es erläuterte; vielleicht wird Gott nach dieser Zeit es lehren“[3]). Woher stammt die Spitzenfigur, das ist ein Sternzehneck, dessen Seiten nur bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, nicht darüber hinaus gezeichnet sind, so daß das Innere der Figur leer bleibt? Hängt der Name Figur der Braut, welcher dem pythagoräischen Dreiecke beigelegt wird[4]), etwa mit talismanischer Verwendung desselben zusammen, ähnlich wie wir solche von magischen Quadraten berichtet bekommen? Das sind Fragen, die ihrer Beantwortung noch harren. Im ganzen aber dürften unsere Leser von Behâ Eddîns Essenz der Rechenkunst den Eindruck erhalten haben, daß hier ein Rückschritt, oder jedenfalls mindestens ein Stehenbleiben der Wissenschaft zu bemerken ist, welche vorher ruckweise vorgeschritten war.

Man hat mit Fug und Recht als ein kennzeichnendes Merkmal der arabischen Mathematik den Umstand hervortreten lassen[5]), daß sie durchaus von Fürstengunst abhängig war, daß es einzelne Herrscher waren, die zur Astronomie eine Vorliebe an den Tag legten, und daß unter ihnen Astronomen und Mathematiker erstanden, sonst nicht. Es ist vielleicht nicht minder kennzeichnend, daß keine einzige Herrscherfamilie ohne solche der Wissenschaft huldigende

---

Aufgaben hat sich gelegentlich Genocchi beschäftigt in Tortolini, *Annali di scienze matematiche e fisiche* VI, 297—304 (1855).

[1]) Beha Eddin S. 31. [2]) Ebenda S. 33. [3]) Ebenda S. 29 und 66, Anmerkung 17. [4]) Ebenda S. 71, Anmerkung 33. [5]) Hankel S. 252.

und dienende Vertreter war. Die ersten Abbasiden wie die Bujiden, seldschukische wie mongolische Fürsten, wie endlich jenen Enkel Tamerlans haben wir rühmend zu nennen gehabt. Es war, als wenn der auch nur vorübergehende Besitz von Bagdad die Geister mit Wissensdrang erfüllte und Bagdad so wirklich die Stadt des Heils war, als welche ihr Name sie bezeichnete. Und in anderer Beziehung war es, als wenn derselbe Besitz, jenem Kleinode der nordischen Sage vergleichbar, für den, der sich desselben bemächtigte, den Keim des Unheils in sich getragen hätte, so rasch verfielen die aufeinander folgenden Herrscherfamilien dem Fluche der Zwietracht und des Verwandtenmordes.

Folgende Zeitpunkte traten uns in unserer ausführlichen Darstellung vor Augen, deren wir nur noch einmal unter Erwähnung der wichtigsten Namen uns erinnern wollen. Unter den Abbasiden in dem etwa 150 Jahre dauernden Zeitraum vom letzten Viertel des VIII. bis zum ersten Viertel des X. S. ist es der Hauptsache nach Aneignung indischer und mehr noch griechischer Mathematik, letztere in zahlreichen Übersetzungsarbeiten sich äußernd, welche wir einem Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, einem Ṯâbit ibn Ḳurrah, einem Albattânî nachzurühmen haben. Bei ihnen beginnt daneben eine zahlentheoretische und eine trigonometrische Selbsttätigkeit, welche indessen gegen den Übersetzungseifer zurücktritt. Ihm sind wir zu besonderem, zu um so größerem Danke verpflichtet, als, wie wir noch sehen werden, die griechische Mathematik höherer Natur dem Abendlande wesentlich durch arabische Kanäle zugeführt wurde, jedenfalls von da aus weit früher bekannt wurde, als die Neuentdeckung der Originaltexte es ermöglichte. Ja in einzelnen Fällen sehen wir uns heute noch auf arabische Übersetzungen zum alleinigen Ersatze für die verloren gegangenen Originalien angewiesen. Um das Jahr 1000 herum gruppieren sich sodann unter bujidischem Schutze die großen Schriftsteller, welche wieder durch zahlentheoretische, aber auch durch geometrische und vorzugsweise durch algebraisch-geometrische Forschungen die Wissenschaft vermehrten, ein Abû'l Wafâ, welcher daneben noch eine gewisse Stetigkeit nach rückwärts herstellend zu den Übersetzern gehört, ein Alkûhî, ein Assidschzî, ein Alchodschandî, ein Abû'l Dschûd, ein Alkarchî. Ihnen gleichzeitig vertrat Albîrûnî uns die Blüte des gaznawidischen Hofes. Im letzten Viertel des XI. S. begünstigen seldschukische Sultane ʿOmar Alchaijâmî, den systematischen Algebraiker, dem zuerst mit vollem Bewußtsein die Schwierigkeit der kubischen Gleichung entgegentrat, und dem die Geometrie nur dienendes Werkzeug für seine Zwecke wurde. Die Schule Naṣîr Eddîns knüpfte in der Mitte des XIII. S. an die von

mongolischen Fürsten errichtete Sternwarte zu Marâga ihr Bestehen, und eine Schule des XV. S. hatte zu Samarkand in dem tartarischen Fürsten Ulûg Beg Gönner und Mitglied zugleich. Die beiden letzten Schulen gehörten mehr der Geschichte der Astronomie als der der Mathematik an, und nur Ġijât eddîn Al-Kâschi verdiente für uns besondere Berücksichtigung wegen einer sinnreichen Näherungsrechnung zur Auflösung kubischer Gleichungen von einer gewissen gegebenen Form.

Der Höhepunkt der Mathematik war für die Araber des Ostens etwa auf 1050 zwischen die Namen Alkarchî, Alchaijâmî anzusetzen. Von da an ging es bergab, erst mit teilweise neuen kleinen Erhebungen, dann in trostlose Öde sich verflachend, als deren Sohn allein Behâ Eddîn am Ende des XVI. und Anfang des XVII. S. uns noch beschäftigen durfte.

Die äußersten Grenzen des ostarabischen und des westarabischen Kulturbereiches sind durch ungeheure Entfernungen voneinander geschieden und gewähren dadurch und durch die politische Trennung, mitunter verstärkt durch religiöse Gegensätze, die Möglichkeit und die Notwendigkeit gesonderter Betrachtung der beiderseitigen Entwicklungen. Minder streng läßt sich aber die Sonderung für die aneinander stoßenden Bezirke beider Reiche durchführen, und insbesondere hätte von den beiden Persönlichkeiten, welche jetzt noch die ägyptische Mathematik uns vertreten sollen, mindestens die zweite als im Osten geboren und herangebildet mit gleichem Rechte wie hier im vorigen Kapitel behandelt werden können. Das macht, daß die ägyptischen Fürsten Schîʿiten waren und darum den sunnitischen Abbasiden viel schroffer, den gleichfalls schîʿitischen Bujiden dagegen kaum feindlich gegenüberstanden, so daß unter diesen allmählich Beziehungen vorkommen, welche noch unter den ersten Bujiden zu den Unmöglichkeiten gehören.

Ibn Jûnus von Kairo, seinem ausführlichen Namen nach Abû'l Ḥasan ʿAlî ibn Abi Saʿîd ʿAbderrahmân, starb 1008, war also in der Blütezeit seines Wirkens Zeitgenosse des Abû'l Wafâ, ähnelte in seinen astronomisch-trigonometrischen Leistungen ebendemselben und scheint doch von dessen Arbeiten in keiner Weise Notiz genommen zu haben, sei es, daß er sie wirklich nicht kannte, sei es, daß er sie nicht kennen wollte. Die ägyptischen Herrscher Al-ʿAzîz, 975—996, und Al-Ḥâkîm, 996—1021, waren für Ibn Jûnus freigebige Gönner. Sie sorgten für seine wissenschaftlichen Bedürfnisse durch Erbauung und Ausstattung einer Sternwarte, durch Anlage einer Büchersammlung usw. Er arbeitete auf ihr Geheiß seine astronomischen Tafeln aus, welche Al-Ḥâkim zu Ehren die ḥâkimi-

tischen Tafeln genannt wurden[1]) und in der Geschichte der Astronomie eine rühmliche Stellung einnehmen. Für die Geschichte der Mathematik ist weniger daraus zu entnehmen, höchstens die Auflösung einiger Aufgaben der sphärischen Trigonometrie unter Einführung von gewissen Hilfswinkeln und die unbewiesene Näherungsformel

$$\sin 1^0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \sin\left(\frac{9}{8}\right)^0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{15} \sin\left(\frac{15}{16}\right)^0 .$$

Die erstere Neuerung hätte wichtig werden können, fand aber keine Nachahmung. Ob Ibn Jûnus bei Benutzung des Wortes Schatten um den Quotienten des Sinus eines Winkels durch den Kosinus desselben Winkels zu benennen wirklich vollständig unabhängig von Abû'l Wafâ verfuhr, mag dahingestellt sein. Gewiß ist, daß er insofern unter jenem blieb, als er seine Schattentafel nie zur Berechnung anderer Winkel als wirklicher Sonnenhöhen verwertete, während Abû'l Wafâ, dessen Tod fast 10 Jahre früher als die letzte von Ibn Jûnus angestellte Beobachtung eintrat, die Verallgemeinerung des Schattenbegriffes, wie wir wissen (S. 748), vollzogen hat.

Der zweite Schriftsteller, welchen wir hier der Besprechung unterziehen, ist in Al-Baṣra geboren und nur im Mannesalter in Ägypten eingewandert. Sein vollständiger Name lautet Abû ʿAlî al Ḥasan ibn al Ḥasan ibn Alhaiṯam, kürzer als Ibn Alhaiṯam bezeichnet, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit derselbe große Gelehrte, dessen Optik von lateinischen Übersetzern mit dem Verfassernamen Alhazen überschrieben ist[2]). Dürfen wir diese Identität festhalten, so bleibt allerdings aus der Optik, so bedeutend ihr Wert für die Geschichte der angewandten Mathematik ist, für uns nur eine Aufgabe merkwürdig, nämlich die den Spiegelungspunkt eines kugelförmig gekrümmten Spiegels zu finden, von welchem aus das Bild eines an einem gegebenen Orte befindlichen Gegenstandes in ein gleichfalls an einem gegebenen Orte befindliches Auge geworfen wird, eine Aufgabe, welche analytisch behandelt zu einer Gleichung des 4. Grades führt[3]). Den aus Al-Baṣra gebürtigen Ibn

---

[1]) Der Anfang ist von Caussin übersetzt und erläutert in den *Notices et extraits de la bibliothèque nationale* T. VII, pag. 16—240. Die ungedruckte Übersetzung der späteren Kapitel durch Sédillot hat Delambre für seine *Histoire de l'astronomie du moyen-âge* benutzt. Vgl. Hankel S. 244, 282, 288. Suter 77—78, Nr. 178. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 76—77, Nr. 130. *L'algèbre d'Omar Alkayami* pag. 73—76, Anmerkung ***, und Narducci, *Intorno ad una traduzione italiana fatta nel secolo decimoquarto del trattato d'ottica d'Alhazen, matematico del secolo undecimo ed ad altri lavori di questo scienziato* im *Bullettino Boncompagni* IV, 1—48 (1871). Suter 91—95, Nr. 204. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 498, deutsch S. 576.

Alhaiṯam haben wir jedenfalls, und zwar noch zur Zeit als er im Osten lebte, als Verfasser einer in einem Vatikankodex noch vorhandenen Abhandlung über die Quadratur des Kreises anzuerkennen[1]). Sie ist allerdings herzlich unbedeutend und zeigt nur die Quadratur der gewöhnlichen Mondchen des Hippokrates, in deren eines ein kleiner Kreis einbeschrieben ist, welcher zu dem Mondchen, also auch zu dem ihm flächengleichen Dreiecke, in einem gewissen Verhältnis stehe. Ein Hinausgehen über Archimed in dem Sinne, daß eine nähere Bestimmung der Zahl π versucht wäre, ist nicht vorhanden.

Ebenderselbe Ibn Alhaiṯam hat auch ungemein zahlreiche sonstige Schriften zustande gebracht, von welchen wenigstens eine geometrische zur Übersetzung gelangt ist, die zwei Bücher der gegebenen Dinge[2]). Der Verfasser sagt darüber in der Einleitung: „Das I. Buch enthält vollkommen neue Dinge, deren Gattung nicht einmal von den alten Geometern gekannt war, und das II. enthält eine Reihe von Sätzen, welche denen ähneln, die in dem I. Buche von den gegebenen Dingen des Euklid zu finden sind, ohne jedoch selbst in jenem Werke vorzukommen." Was hier von dem II. Buche gerühmt ist, entspricht allerdings der Wahrheit, nicht so was Ibn Alhaiṯam als den Wert des I. Buches ausmachend schildert. Allerdings sind solche Sätze, wie sie im I. Buche enthalten sind, und welche kurzweg als Ortstheoreme, wenn nicht gar als Porismen im euklidischen Sinne des Wortes bezeichnet werden müssen, den Alten, d. h. den Griechen bekannt gewesen. Die euklidischen Porismen sind aber den Arabern bekannt gewesen, wenn sie auch von ihnen für unecht, d. h. nicht von Euklid verfaßt, gehalten wurden[3]). Wir wissen nicht, ob das Gleiche von den kleineren Schriften des Apollonius von Pergä gilt, welche sonst auch der Ruhmredigkeit Ibn Alhaiṯams ihr Verbot entgegenzustellen berechtigt gewesen wären, jedenfalls aber ist seine Überhebung keine minder unerlaubte angesichts der Sammlung des Pappus, von der wir wiederholt gesehen haben, daß sie Arabern des X. S. bekannt war. Wir müssen daher, wollen wir einen so tüchtigen Gelehrten, wie Ibn Alhaiṯam es jedenfalls war, nicht der absichtlichen Unwahrheit verbunden mit großer

[1]) *Bullettino Boncompagni* IV, 41 sqq. Suter hat die Abhandlung in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Histor.-literar. Abtlg. S. 33—47 (1899) im Urtext mit deutscher Übersetzung herausgegeben. [2]) *Nouveau Journal Asiatique* XIII, 435 flgg. (1834). Sédillot, *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux* pag. 379—400. Chasles, *Aperçu hist.* pag. 498—501, deutsch S. 577—581. [3]) Fihrist 17 unter Vergleichung von Suters Anmerkung 49 (Fihrist 49).

Unvorsichtigkeit bezichtigen, zu der Annahme uns bequemen, die Sammlung des Pappus sei für die große Mehrzahl auch der arabischen Gelehrten doch zu hoch gewesen und sei darum wenig bekannt geworden, beziehungsweise bald wieder in Vergessenheit geraten. Die Örter, von welchen Ibn Alhaiṯam handelt, sind übrigens ausschließlich Kreise und gerade Linien, gehören mithin zu den einfachsten, welche überhaupt vorkommen. Wir nennen einige von den Sätzen des I. Buches: 6. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, die beim Durchschnitte einen gegebenen Winkel bilden, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer gegebenen Kreislinie. — 7. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, die bei ihrem Durchschnitt einen gegebenen Winkel bilden, verlängert man darauf die eine Gerade so, daß das Verhältnis der Strecke vom Anfangspunkte bis zum Durchschnitte zu ihrer Verlängerung ein gegebenes sei, so liegt der Endpunkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. — 8. Zieht man von zwei gegebenen Punkten gleichlange sich in ihrem Endpunkte treffende Strecken, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer der Lage nach gegebenen Geraden. — 9. Zieht man von zwei gegebenen Punkten aus Gerade, deren Längen bis zum Durchschnittspunkte in gegebenem Verhältnisse stehen, so befindet sich der Durchschnittspunkt auf einer der Lage nach gegebenen Kreislinie. — 19. Zieht man an einen Punkt der kleineren von zwei sich innerlich berührenden Kreislinien eine Berührungslinie bis zum Durchschnitt mit der umgebenden Kreislinie und verbindet man diesen Durchschnittspunkt geradlinig mit dem Berührungspunkte der beiden Kreise, so ist das Verhältnis der beiden Strecken gegeben. Mit dem II. Buche mögen folgende Muster uns bekannt machen: 2. Die Gerade, welche von einem gegebenen Punkte aus gezogen von einem gegebenen Kreise ein der Größe nach gegebenes Stück abschneidet, ist der Lage nach gegeben. — 5. Zieht man von einem gegebenen Punkte eine Gerade zum Durchschnitt mit einer gegebenen Strecke, so daß das begrenzte Stück der Geraden mit dem einen Abschnitte der Strecke eine gegebene Summe bilde, so ist die Gerade der Lage nach gegeben. — 12. Zieht man an einen gegebenen Kreis eine Berührungslinie bis zum Durchschnitte mit einer gegebenen Geraden, und ist die so begrenzte Berührungslinie der Länge nach gegeben, so ist sie es auch der Lage nach.

Ibn Alhaiṯam wurde nicht wegen seiner theoretisch-wissenschaftlichen Leistungen, sondern um praktischer Dinge willen nach Kairo berufen. Er hatte sich nämlich geäußert, er halte es für leicht, am Nil solche Einrichtungen zu treffen, daß der Fluß jedes Jahr gleichmäßig austrete, ohne daß Witterungsverhältnisse einen Einfluß üben

könnten. Diese Zusage zu erfüllen, ließ Al-Ḥâkim ihn kommen, ging ihm bis zur Vorstadt von Kairo entgegen und empfing ihn überhaupt mit den größten Ehren. Ibn Alhaiṯam zog hierauf guten Mutes mit zahlreichen Gefährten nilaufwärts, bis er zu den ersten Nilfällen bei Syene gelangte, wo er erkannte, daß er zu voreilig Sicherheit an den Tag gelegt hatte, und daß die Verwirklichung seines Planes unmöglich war. So mußte er sich zu entschuldigen suchen, so gut es eben ging, und als er, nunmehr in anderen Staatsarbeiten beschäftigt, sich auch hier Fehler zuschulden kommen ließ, mußte er sich verbergen, um Al-Ḥâkims Zorne zu entgehen. Erst nach dessen Tode kam er wieder zum Vorschein und führte ein wesentlich schriftstellerisches Leben. Er starb 1038.

Das sind die beiden Männer, welche die ägyptische Mathematik für uns kennzeichnen sollten. Wir gehen zu der Entwicklung unserer Wissenschaft in Spanien und in dem gegenüberliegenden westlichen Teile der afrikanischen Nordküste, in Marokko, über.

37. Kapitel.

Die Mathematik der Westaraber.

Von der Entstehung eines selbständigen arabischen Reiches in Spanien im Jahre 747 unter dem Omaijaden ʿAbd Arraḥmân haben wir gelegentlich (S. 707) gesprochen. In unaufhörlichen Kämpfen gegen die westgotischen Christen sowie gegen afrikanische Araber erhob sich seine Dynastie bei 300jährigem Bestande zu unsterblichem Ruhme, rieb sich aber auch vollständig auf[1]). In die Zeit der Omaijaden fällt die Entstehung aller jener glänzenden Überreste maurischer Baukunst, die noch heute den Anschauer mit Bewunderung erfüllen sollen, und die nach den Berichten solcher Schriftsteller, welche sie in ihrer ganzen Pracht sahen, die Wundermärchen der Tausend und eine Nacht zur Wahrheit stempelten. Besonders ʿAbd Arraḥmân III. und sein Sohn Al-Ḥakam II., welche von 912 bis 976 regierten, spielten eine glänzende Rolle in der Geschichte der Entwicklung westarabischer Kultur. Von allgemein kulturgeschichtlichem Interesse ist es vielleicht, daß der letztgenannte Herrscher eine Geheimschreiberin Lubnâ[2]) beschäftigte, welche als sehr bewandert in Grammatik, Metrik, Dichtkunst und Rechenkunst gerühmt wird und eine sehr schöne Schrift hatte. Eine Bibliothek von 600000 Bänden entsteht

[1]) Aschbach, Geschichte der Omaijaden in Spanien Bd. II. Frankfurt a. M. 1830. [2]) Suter 61, Nr. 135.

in dem Palaste in Cordova. Ein Bibliotheksverzeichnis in 44 Bänden unterstützt die Benutzung. Gelehrte sammeln sich, aber, wie wir nicht für überflüssig halten, besonders zu betonen, ausschließlich Moslims, denn ʿAbd Arraḥmân, der Verteidiger des Glaubens, wie er sich nennen ließ, würde so wenig wie sein Sohn fremde christliche Schüler geduldet haben. Dieselben beiden Fürsten fanden ihre Freude in der Herstellung baulicher Denkmale ihres Glanzes und der hohen Vollkommenheit, bis zu welcher arabische Kunstfertigkeit gelangt war Mag manches nach früheren praktisch gewordenen und ihres geometrischen Grundes verlustig gegangenen Regeln hergestellt worden sein, so ist doch schlechterdings nicht möglich, daß eine solche Architektur sich nur empirisch entwickelte. Die Baumeister, und wenn nicht sie selbst, so doch diejenigen, bei welchen sie sich in gegebenen Fällen Rats erholten, mußten Mathematiker sein.

Freilich steht uns mehr als dieser zwingende Schluß nicht zu Gebote. Von westarabischen mathematischen Schriften bis zum XI. S. ist nichts veröffentlicht. Von Namen sogar steht uns kein älterer als Abû'l Kâsim Maslama ibn Aḥmed Almadschrîṭî[1]) zu Gebote, der uns schon zweimal gelegentlich vorgekommen ist. Er wollte (S. 735) die befreundeten Zahlen in ihrer Wirkung kennen gelernt haben. Er oder sein Schüler Alkarmânî, von welchem letzteren Reisen in den Orient bekannt sind, sollen die Abhandlungen der lauteren Brüder in Spanien eingeführt haben (S. 738). Alkarmânî war übrigens vorzugsweise Chirurg. Die mathematische Lehrtätigkeit Almadschrîṭîs in Cordova, der Residenz der Emire, fällt in die Regierung Al-Ḥakam II. und dessen Nachfolgers. Er starb 1007. Von seinen Schülern haben Ibn aṣ-Saffâr und Ibn as Samḥ el Muhandis Al-Garnâti, der erste in Cordova dann in Dânia, der zweite in Granada eigene Schulen eröffnet, in welchen Mathematiker und Astronomen gebildet wurden[2]). Der Geometer von Granada starb 1035 in einem Alter von 56 Jahren, hatte aber schon vieles geschrieben, worunter eine Einleitung in die Geometrie zur Erklärung Euklids, das große Buch über die Geometrie, die er nach geradlinigen und nach krummlinigen Gebilden einteilte, ein Buch über das Geschäftsrechnen, ein solches über das Luftrechnen d. h. Kopfrechnen lobend erwähnt werden.

Die Tatsache, daß die letztgenannten außerhalb Cordova sich niederließen, beruht gewiß zum Teil auf den Unruhen, welche seit

---

[1]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 61, Nr. 122. Steinschneider, Pseudoepigraphische Literatur usw. S. 28 flgg. und 73 flgg. Suter 76—77, Nr. 176. [2]) Wüstenfeld, Arabische Aerzte und Naturforscher S. 62, Nr. 123 und S. 64, Nr. 127. Suter 85, Nr. 194 und 86, Nr. 196.

1008 in Cordova an der Tagesordnung waren und mit wechselndem Glücke der Parteien bis 1036 dauerten, um mit dem Tode Hischâms des letzten Omaijaden zu endigen. Ein einheitliches spanisch-arabisches Reich hat es seit dieser Zeit nicht mehr gegeben[1]). Kleine Gebiete, teils als Freistädte, teils unter besonderen Fürsten, bildeten sich und gingen zugrunde, sich gegenseitig befehdend und dabei die christlichen Nachbarn wechselweise zu Hilfe rufend, welche bei solcher Gelegenheit nicht ermangelten, eine Stadt, eine Provinz nach der anderen den Moslimen abzunehmen und für sich zu behalten. Seit der Mitte des XIII. S. war nur noch das Königreich Granada dem Islam unterworfen. Später als um diese Zeit wird uns aber auch kein westarabischer Mathematiker in Spanien begegnen. Nur von Bewohnern der afrikanischen Küstengegenden werden wir in jener späten Zeit zu reden haben und brauchen uns deshalb um die langjährigen Kämpfe nicht zu kümmern, welche erst kurz vor dem Jahre 1500 mit dem gänzlichen Sturze arabischer Herrschaft auf spanischem Boden, mit der Einnahme von Granada am 2. Januar 1492 durch Ferdinand den Katholischen endigten, denselben Fürsten, für welchen Christoph Columbus Amerika entdeckte. An diesem Tage entstand, wenn man so sagen darf, das Sultanat von Marokko als Ersatz für das west-arabisch-spanische Reich.

Der erste Schriftsteller, von welchem wir seit dem Beginne der Zersplitterung zu reden haben, lebte im XI. S. in Sevilla. Es war Abû Muhammed Dschâbir ibn Aflah[2]), gewöhnlich Geber genannt, von dessen Namen man, wie wir uns erinnern (S. 722), eine Zeitlang das Wort Algebra herzuleiten sich gewöhnt hatte. Die Araber nannten ihn auch wohl Alischbîlî d. h. den von Sevilla. Er gehörte zu den hervorragendsten Astronomen seiner Zeit, verfaßte aber, wie so viele seiner Zeitgenossen, auch mystische Schriften, an deren Inhalt er nicht minder fest glaubte als seine Leser. Seine Lebenszeit ist dadurch festgestellt, daß sein Sohn in Spanien mit dem berühmten Moses Maimonides persönlich verkehrte, was nur um das Jahr 1100 herum möglich war. Ibn Aflah selbst muß also in der zweiten Hälfte des XI. S. am Leben gewesen sein. Sein Hauptwerk, eine Astronomie in 9 Büchern, wurde im XII. S. durch Gerhard von Cremona ins Lateinische übertragen[3]), und diese lateinische Bearbeitung erschien 1534 im Drucke. Das erste Buch[4]) enthält eine vollständige Trigonometrie, welche mit Vorbedacht an die Spitze gestellt wird, um

[1]) Weil S. 284–296. [2]) Steinschneider, Pseudoepigraphische Literatur usw. S. 15 flgg. und 70 flgg. Suter 119–120, Nr. 284. [3]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese.* Roma 1851, pag. 13. [4]) Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen-âge* pag. 179—185. Hankel

Wiederholungen zu vermeiden. Der Verfasser, der fast 200 Jahre vor Naṣîr Eddîn (S. 779) lebend von ihm nicht beeinflußt gewesen sein kann, aber auch aus (S. 788) angeführten Gründen ohne Einfluß auf diesen blieb, legte eine Probe geistiger Selbständigkeit ab, indem er es wagte, in dieser Trigonometrie von dem althergebrachten Gange des Ptolemäus, von der Regel der 6 Größen (S. 413 und 420) abzuweichen und sogar polemisch gegen den alten Meister der Sternkunde an den verschiedensten Stellen vorzugehen, was die Albattânî, die Abû'l Wafâ, die Ibn Jûnus, welche in ihrer Lebenszeit Ibn Aflaḥ vorangehen, niemals auch nur versuchten. Ibn Aflaḥ stützt sich bei seinen Beweisen — und daß er solche gibt, ist eine weitere rühmliche Eigentümlichkeit, durch welche er von den übrigen arabischen Astronomen sich unterscheidet — auf eine Regel der vier Größen, welche in folgendem Satze besteht und von welcher eine Vorahnung sich in der Schrift des Tâbit ibn Ḳurrah über den Satz des Menelaus (S. 736) vorfand. Diese arabische Schrift dürfte aber Ibn Aflaḥ gekannt haben, wie daraus geschlossen worden ist, daß hebräische Übersetzungen des Tâbit und des Ibn Aflaḥ in einer und derselben Hand-

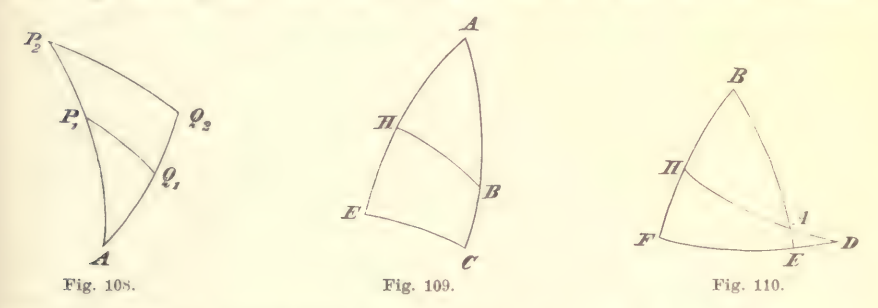


Fig. 108. Fig. 109. Fig. 110.

schrift vereinigt vorkommen. Es seien (Fig. 108) $P_1 P_2$ sowie $Q_1 Q_2$ zwei Bögen größter Kreise, welche in A sich schneiden. Von P_1 und P_2 werden die Bögen größter Kreise $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ senkrecht zu $A Q_1 Q_2$ gezogen, so verhält sich $\sin A P_1 : \sin P_1 Q_1 = \sin A P_2 : \sin P_2 Q_2$. Nun sei (Fig. 109) das bei H rechtwinklige sphärische Dreieck ABH vorgelegt, in welchem $\sphericalangle BAH = \alpha$, $BH = a$, $AB = h$ heiße. Man verlängert AB und AH bis zur Länge von 90^0 nach C und E, so ist A der Pol von CE, also der Bogen CE das Maß des Winkels α und der Bogen AE senkrecht auf EC. Die Regel der vier Größen liefert jetzt als 13. Satz das Verhältnis $\sin AC : \sin CE = \sin AB : \sin BH$ oder $\sin 90^0 : \sin \alpha = \sin h : \sin a$, mithin $\sin a = \sin h \cdot \sin \alpha$. An einer anderen Figur (Fig. 110), bei welcher wieder ABH ein bei

S. 285—287. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 81—83.

H rechtwinkliges sphärisches Dreieck darstellt und $AH = b$ und $\sphericalangle ABH = \beta$ genannt ist, werden BA und BH bis nach E und F verlängert, so daß

$$BE = BF = 90^0, \quad EF = \beta \quad \text{und} \quad \sphericalangle BFE = BEF = 90^0$$

werden. FE und HA treffen sich verlängert in D, so ist wegen

$$\sphericalangle BHD = BFD = 90^0$$

jener Punkt D der Pol von FH, also $DH = 90^0$. Die Regel der vier Größen liefert, weil jetzt AE und HF senkrecht zu EF sind, das Verhältnis: $\sin DA : \sin AE = \sin DH : \sin HF$ oder

$$\sin(90^0 - b) : \sin(90^0 - h) = \sin 90^0 : \sin(90^0 - a),$$

also $\cos h = \cos a \cdot \cos b$ der Inhalt des 15. Satzes. In derselben Figur ist aber das Dreieck DEA bei E rechtwinklig, die Anwendung des 13. Satzes ergibt deshalb $\sin DE = \sin DA \cdot \sin DAE$ d. h.

$$\sin(90^0 - \beta) = \sin(90^0 - b) \cdot \sin\alpha \quad \text{oder} \quad \cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha$$

als Inhalt des 14. Satzes. Letzterer Satz ist weder bei Ptolemäus noch bei einem arabischen Vorgänger des Ibn Aflaḥ zu finden und wird deshalb häufig unter Anwendung des Namens, unter welchem dieser Gelehrte, wie wir sagten, bekannt zu sein pflegt, der Geber-sche Lehrsatz genannt. Daß wir vorzogen, hier regelmäßig von Ibn Aflaḥ zu reden, hat seinen Grund darin, daß es mehrere nach Zeit, Ort und wissenschaftlicher Tätigkeit ungemein verschiedene Persönlichkeiten gegeben hat oder gegeben haben soll, welche alle Geber genannt werden, so daß Verwechslungen sehr leicht sind. Es ist mit großem Rechte als überraschend bezeichnet worden, daß Ibn Aflaḥ, in der sphärischen Trigonometrie ein geradezu kühner Neuerer, in der ebenen Trigonometrie um keinen Schritt weiter gegangen ist als Ptolemäus, daß er sogar Sinus und Kosinus anzuwenden hier vermeidet und noch in griechischer Weise mit den Sehnen der doppelten Winkel sich begnügt. So war noch für Ibn Aflaḥ offenbar die sphärische Trigonometrie weitaus die Hauptsache und eine eigentliche ebene Trigonometrie nur zur Vollständigkeit der Betrachtungen vorhanden, aber nicht der wichtige Teil der Mathematik, zu welchem sie erst durch Naṣîr Eddîn werden sollte.

Wir haben gesagt, daß Gerhard von Cremona die Astronomie des Ibn Aflaḥ etwa in der zweiten Hälfte des XII. S. übersetzte. Er hat die dazu nötigen Kenntnisse in dem den Arabern bereits abgerungenen Toledo sich erworben, wo um jene Zeit eine wahre Übersetzungsschule vorhanden war. Raimund, Erzbischof von Toledo zwischen 1130 und 1150, stand geistig an ihrer Spitze. Nicht als

ob er selbst dabei tätig gewesen wäre, aber er veranlaßte Dominicus Gondisalvi in Gemeinschaft mit einem jüdischen Schriftgelehrten, Johannes von Luna oder Johannes von Sevilla (Johannes Hispalensis) genannt[1]), arabische Bücher und zwar hauptsächlich solche, die sich auf aristotelische Philosophie bezogen, zu bearbeiten. Die Bearbeitung erfolgte auf einem Umwege, der nicht ohne Folgen blieb. Man mußte den arabischen Text durch einen der kastilianischen wie der arabischen Sprache kundigen Mittelsmann verdolmetschen lassen, bevor ein anderer oder auch mehrere dem Gelehrtenstande angehörende Männer nun wieder einen lateinischen Wortlaut herstellten, der nachmals irgend einem unter den Mitwirkenden zugeschrieben wurde[2]). Überlegt man nun, daß der arabische Text durch nicht über alle Zweifel erhabene Übersetzungskunst dem Griechischen entnommen war, so läßt sich denken, welcherlei aristotelische Philosophie aus solchen dreifacher Verpfuschung ausgesetzt gewesenen lateinischen Darstellungen dem Mittelalter zur Kenntnis kam. Weniger schlimm waren die Veränderungen, welche solche Schriften erlitten, die wenigstens von Ursprung her arabisch waren und ihrem Inhalte nach nicht so dunkel wie philosophische Gegenstände, selbst in der Sprache eines Aristoteles, es einem Laien gegenüber immer sein mußten. Gar keinen sinnentstellenden Veränderungen waren solche Schriften unterworfen, bei deren Übertragung in die lateinische Sprache der Verfasser selbst mitwirken konnte.

Wie unsere Leser sofort bemerken, haben wir bei dem zuletzt Ausgesprochenen ein ganz bestimmtes Werk eines bestimmten Verfassers im Auge. Abraham bar Chijja ha Nasi[3]), d. h. Abraham Sohn des Chijja der Fürst, war ein gelehrter Jude in Barcelona, von wo er zu gelegentlichem Aufenthalte wohl auch nach der Provence kam. Er stand bei Königen und Fürsten in hohem Ansehen, welches er vermutlich astrologischer Tätigkeit verdankte. Er unterstützte einen Übersetzer Plato von Tivoli bei dessen Übersetzungen aus dem Arabischen, und da ebenderselbe auch ein Werk Abrahams übersetzte, so ist es mindestens wahrscheinlich, daß auch hierbei der Ver-

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XXVI, 565 (Paris 1858). Jourdain, *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote.* 2. édition. Paris 1843, pag. 115 flgg. hält den Namen Johannes Hispalensis für entstellt aus *Johannes Hispanensis de Luna* d. h. Johannes der Spanier aus Luna. Ebenda pag. 117, Anmerkung 1 ist eine Stelle aus einer Widmung des Johannes an Raimund abgedruckt, durch welche seine Lebenszeit gesichert ist. [2]) Darin hat man den Grund erkannt, warum die gleiche in mehreren Handschriften erhaltene Übersetzung bald einem, bald einem anderen Übersetzer zugeschrieben ist. Vgl. H. Bosmans, *Revue des Questions scientifiques.* Octobre 1904. [3]) Steinschneider in der *Bibliotheca Mathematica* 1896, S. 34—38.

fasser Dienste geleistet haben wird. Abraham bar Chijja ist übrigens bekannter unter dem Namen Abraham Savasorda, und darunter verbirgt sich der Ehrentitel *Sa'hib al Schorta* d. h. Oberst der Leibwache. Das von Plato von Tivoli übersetzte ursprünglich in hebräischer Sprache verfaßte Werk führte die Überschrift *Chibburta Meschika we ha Tischboret* und ist übersetzt als *Liber embadorum a Savasorda in hebraico compositus et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus anno Arabum DX mense saphar*, wodurch die Datierung auf Juni 1116 gesichert erscheint. Das „Werk der Raumausmessungen“, wie man den Titel etwa verdeutschen könnte, besteht aus vier Kapiteln[1]).

Das 1. Kapitel enthält die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze Euklids, soweit sie geometrischer Natur sind, aber auch die in Euklids arithmetischen Büchern vorkommenden Erklärungen der verschiedenen Zahlenarten bis zu den vollkommenen Zahlen, diese mit eingeschlossen, sind aufgenommen. Ferner enthält das 1. Kapitel einige der geometrischen Lehrsätze Euklids über Gleichflächigkeit von Dreiecken und Parallelogrammen und die Erklärung der Ähnlichkeit zweier Dreiecke. Das 2. Kapitel zerfällt in fünf Teile, deren erster in geometrischem Gewande und mit Anwendung von Sätzen aus dem zweiten Buche Euklids, der ausdrücklich genannt ist, die drei verschiedenen Formen der unreinen quadratischen Gleichung behandelt. Hier ist gezeigt, daß $x^2 + b = ax$ zwei Wurzelwerte besitzt, und Platos Übersetzung von 1116 ist demnach das älteste lateinisch geschriebene Buch, von welchem wir Kenntnis haben, aus welchem das Abendland die Lösung der quadratischen Gleichungen mit Einschluß des doppeldeutigen Falles zu erlernen imstande war. Fragen wir aber rückwärts woher Savasordas Wissen stammte, so verweist uns eine Aufgabe[2]), bei deren Behandlung die Summe von vier Strecken als Rechteck gezeichnet wird, auf Al Karchî, welcher (S. 770) einer ähnlichen ganz ungriechischen Versinnlichung sich bediente. Al Karchî lebte aber etwa ein Jahrhundert vor Savasorda, so daß inzwischen trotz des Gegensatzes zwischen Ost und West seine Lehren irgendwie bis nach Spanien gedrungen sein können; werden doch die spanischen Bibliotheken nicht alles ausgeschlossen haben, was im Osten entstand, wofür die in Spanien entstandenen Übersetzungen ostarabischer Werke

[1]) Das *Liber embadorum* ist durch Curtze mit deutscher Übersetzung und unter Vorausschickung einer Einleitung, deren wir uns zum Teile wörtlich bedienen, in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen XII, 3—183 (Leipzig 1902) herausgegeben. Wir zitieren Savasorda. [2]) Savasorda pag. 40.

ein deutliches Zeugnis ablegen. Der zweite Teil des 2. Kapitels behandelt die Ausmessung der Dreiecke. Wir machen hier nur auf $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ aufmerksam, welches bei der Fläche des gleichseitigen Dreiecks benutzt wird[1]), und auf die Formel zur Auffindung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten, für welche kein Urheber genannt ist, und von deren Beweis gesagt ist[2]), er sei sehr verwickelt und könne deshalb nicht leicht auseinandergesetzt werden. Hier kann das Buch der drei Brüder (S. 734) Savasordas Quelle gewesen sein. Der dritte Teil des 2. Kapitels ist den verschiedenen Vierecken, der vierte Teil dem Kreise gewidmet. In diesem Teile ist bald mit $\pi = 3\frac{1}{7}$, bald mit $\pi = 3\frac{17}{120}$ gerechnet, die Gewährsmänner Archimed und Ptolemaeus finden keine Erwähnung. Die Ellipsenfläche wird als Kreis, dessen Durchmesser das arithmetische Mittel der beiden Achsen ist, berechnet[3]). Außerdem findet sich hier eine Sehnentafel von geringer Ausdehnung[4]), die älteste, welche in einem lateinisch geschriebenen Buche hat nachgewiesen werden können. Der fünfte Teil des 2. Kapitels mißt Vielecke, welche zu diesem Zwecke in Dreiecke zerlegt werden, und dann noch Felder, welche an Bergabhängen gelegen sind, wobei mittels einer Nivellierungs-Vorrichtung die senkrechte Höhe des Berges gemessen wird[5]). Im 3. Kapitel, der Darlegung der Felderteilung, sehen wir die geometrische Abteilung der oft erwähnten arabischen Erbteilungsaufgaben vor uns, welche in dem euklidischen Buche von der Teilung der Figuren ihr Vorbild besitzt. Das 4. Kapitel endlich ist überschrieben als Ausmessung der Körper nach Länge, Breite und Höhe. Unter den dort befindlichen Sätzen heben wir den hervor[6]), der die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedon von den Abmessungen a, b, c als $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ finden lehrt. Den Schluß bilden einige sehr einfache Aufgaben praktischer Feldmessung.

Der hier gegebene Überblick über das Werk der Raumausmessungen zeigt uns Savasorda als einen nicht gerade gelehrten, aber gewandten Lehrer, der ohne eigne Zutaten aus den ihm in arabischen Übersetzungen bekannt gewordenen Schriften des Euklid, des Archimed, des Ptolemaeus, aber auch aus arabischen Originalwerken Wissenswertes auszuziehen verstand. Um so auffallender erscheint es, daß an einer Stelle[7]) eine Berufung auf die Arithmetik des Boethius sich vorfindet. Man hat, wie uns scheint mit Recht, die Vermutung ausgesprochen, diese Stelle habe gar nicht im hebräischen Urtexte ge-

[1]) Savasorda pag. 52. [2]) Ebenda pag. 74. [3]) Ebenda pag. 108. [4]) Ebenda pag. 108. [5]) Ebenda pag. 122. [6]) Ebenda pag. 162. [7]) Ebenda pag. 16, letzte Zeile und Curtzes Anmerkung 1 auf pag. 18.

standen, sondern sei die einzige Zutat Platos von Tivoli, der sein Licht auch einmal leuchten lassen wollte. Eine sichere Entscheidung wäre allerdings nur dann möglich, wenn es gelänge den Urtext Savasordas aufzufinden. Die geschichtliche Bedeutung des Werkes der Raumausmessungen kann erst in unserem II. Bande im 42. Kapitel erkannt werden, wo es sich zeigen wird, wie sehr Savasorda einem viel höher stehenden Nachfolger als Vorlage gedient hat.

Gehört Savasorda und seine in hebräischer Sprache verfaßte Raumausmessungslehre nur uneigentlich in dieses der Mathematik der Westaraber gewidmete Kapitel, so verhält es sich nur wenig anders mit einigen Schriften, welche durch Johannes von Sevilla, welche etwas später durch Gerhard von Cremona aus dem Arabischen in das Lateinische übertragen wurden.

Von wem die Originalien herrühren, wissen wir nicht. Wo sie verfaßt wurden, ob im Westen ob im Osten, ist uns gleichfalls unbekannt. Ebensowenig wissen wir, ob wir gut daran tun gerade in diesem Zeitpunkte, also gegen die Mitte des XII. S., von ihnen zu reden. Unsere Berechtigung entnehmen wir einzig dem Umstande, daß sie damals in Toledo vorhanden gewesen sein müssen und jedenfalls zu den geschätzten Schriften gehörten, weil sonst doch wohl nicht sie übersetzt worden wären, wenn eine Auswahl auch berühmterer Werke zu Gebote gestanden hätte. Die übersetzten Schriften sind ein Lehrbuch der Rechenkunst und eine Algebra.

Jenes wird in scheinbarem Widerspruche zu unseren eben geäußerten Bemerkungen von dem Übersetzer Johannes von Sevilla dem Alchwarizmî zugewiesen. *Incipit prologus in libro alghoarismi de practica arismetrice a magistro Johanne yspalensi* lautet der Anfang[1]). Ist aber, woran wir zu zweifeln keinen Grund haben, die Schrift, welche wir früher als Rechenbuch des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî geschildert haben, echt, so kann es diese nicht sein. Der gleiche Schluß gilt freilich auch in umgekehrter Reihenfolge, allein wir glauben jene schon besprochene als die ältere, die von Johannes von Sevilla bearbeitete als die jüngere betrachten zu müssen, weil jene einfacher und kürzer, diese mehr als dreimal umfangreicher, weitschweifiger, ausführlicher ist, und somit eher den Charakter einer späteren Bearbeitung einer älteren Vorlage aufweist, während jene nicht wohl als Auszug aus dem größeren Buche gedacht werden kann, weil sie einzelne die unmittelbare Abhängigkeit ausschließende Abweichungen von demselben wahrnehmen läßt. So heißt es z. B. in

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Bald. Boncompagni* II (und letztes Heft) pag. 25 (der durch beide Hefte durchlaufenden Pagination).

der kürzeren Fassung die Zahlzeichen für 5, 6, 7, 8 würden verschiedentlich gebildet; in der längeren wird dasselbe von 7 und 4 behauptet. In der kürzeren Fassung ist die Algebra des Verfassers erwähnt; und dieses Zitat, auf welches wir uns (S. 715) stützen durften, um die Persönlichkeit des Verfassers festzustellen, fehlt in der längeren Fassung usw. Das Rechenbuch des Johannes von Sevilla, wie wir es von jetzt an mit dem Namen des Übersetzers benennen wollen, da der eigentliche Verfasser nicht zu ermitteln zu sein scheint, enthält nun sehr mannigfache interessante Dinge, teils solche, welche schon gegenwärtig für uns von Interesse sind, teils solche, welche ihre Bedeutung für uns erst gewinnen, wenn es sich um die Entwicklung der Wissenschaft im christlichen Abendlande handelt. Wir werden alsdann, im 40. Kapitel, auf die Schrift des Johann von Sevilla zurückverweisen, schildern sie aber gegenwärtig schon, um nicht eine Zersplitterung eintreten zu lassen.

Der Verfasser lehnt sich durchweg so viel als möglich an die Inder an, welchen er z. B. die Erfindung der Sexagesimalbrüche zuschreibt[1]). Von ihnen hat er wohl auch die näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe von Dezimalbrüchen[2]), natürlich nicht in einer Schreibart, wie sie den modernen Dezimalbrüchen zur erhöhten Bequemlichkeit ihres Gebrauches anhaftet, aber dem Gedanken nach damit übereinstimmend. Es werden der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, $2n$ Nullen angehängt, und die sodann gefundene Wurzel gilt als Zähler eines Bruches, dessen Nenner aus einer mit n Nullen versehenen Einheit besteht. Die Auflösung quadratischer Gleichungen[3]) wird an drei Beispielen gelehrt, den drei bekannten Fällen entsprechend. Das erste Beispiel ist wieder das althergebrachte $x^2 + 10x = 39$. Für den zweiten Fall ist dagegen $x^2 + 9 = 6x$ als Beispiel aufgestellt, eine merkwürdige Wahl insofern als bei dieser Gleichung wegen

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

nur eine einzige Wurzel $x = 3$ auftritt, so daß man wohl fragen möchte, ob die Wahl eine absichtliche, ob eine durch eigentümlichen Zufall dieses Ergebnis liefernde war? Am Schlusse der Schrift[4]) ist das magische Quadrat

$$\begin{matrix} 4 & - & 9 & - & 2 \\ | & \diagdown & & \diagup & | \\ 3 & - & 5 & - & 7 \\ | & \diagup & & \diagdown & | \\ 8 & - & 1 & - & 6 \end{matrix}$$

---

[1]) *Trattati d'aritmetica pubblicati da Bald. Boncompagni* II, pag. 49.
[2]) Ebenda pag. 87—90. [3]) Ebenda pag. 112. [4]) Ebenda pag. 136.

mit die einzelnen Zahlen in Beziehung zueinander setzenden Strichen hergestellt, aber ohne jeden erklärenden Text. Negativ heben wir hervor, daß komplementäre Rechnungsverfahren, wie wir sie schon mehrfach vergeblich gesucht haben, nicht vorkommen. Einige lateinische Ausdrücke scheinen zwar an jene Rechnungsverfahren zu erinnern, aber es ist nur Schein.

Da kommt das Wort *differentia* mehrfach vor, auch bei der Division, aber es bedeutet nur die Stelle, bis zu welcher man vorbeziehungsweise zurückrückt. Das gleiche Wort im gleichen Sinne hat auch der Übersetzer der kleinen Abhandlung, welche wir als die des Alchwarizmî selbst anerkennen, angewandt. Da braucht Johannes von Sevilla die Wörter *digitus* und *articulus*, Finger- und Gelenkzahl, genau in dem gleichen Sinne, in welchem diese Wörter in der gefälschten Geometrie des Boethius zur Anwendung kamen (S. 583). Wir könnten als Ergänzung darauf hinweisen, daß auch in einer mittelalterlichen Übersetzung der Algebra Alchwarizmîs das Wort *articulus* für Gelenkzahl im antiken Sinne, aber ohne das Wort *digitus* vorkommt[1]). Aber es wären Trugschlüsse, aus diesen Übersetzungen, von deren Entstehungsweise wir gesprochen haben, den Wortlaut des Urtextes wiederherstellen zu wollen und dabei an jeden einzelnen Ausdruck sich festzuklammern. Jene Übersetzer des XII. S., die anderen so gut wie Johannes von Sevilla, benutzten eben die Wörter, welche in ihrer Zeit die weiteste Verbreitung hatten, sofern sie mit dem Sinne des Arabischen, hier z. B. mit Einern und Zehnern, sich deckten. Sie wollten ja nicht historische Untersuchungen anstellen und darum den Wortlaut des Gegebenen so genau als möglich festhalten. Sie beabsichtigten vielmehr den verbreitungswerten Inhalt zur Kenntnis ihrer des Arabischen nicht mächtigen Landsleute zu bringen und mußten darum danach streben, bereits bekannter leicht verstandener Ausdrücke sich zu bedienen. Nur wo etwas dem Begriffe nach ganz Neues vorkam, wurde mit mehr oder weniger Geschick dem Wortlaute nach übersetzt. So nennt Johannes von Sevilla bei den quadratischen Gleichungen das Quadrat der Unbekannten *res*, die Unbekannte selbst *radix*[2]), ersteres eine schlechte Übersetzung von *mâl*, letzteres eine gute von *dschidr*.

Wir könnten schließlich noch rätselhafter Buchstabenfolgen gedenken, welche nur dadurch zu lesbaren Wörtern werden, daß man annimmt, es sei jeder Vokal durch den ihm nachfolgenden Konso-

---

[1]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 265. Die Stelle entspricht in Rosens englischer Übersetzung pag. 21. [2]) *Trattati d'aritmetica* II, pag. 112.

nanten ersetzt worden, und man müsse die entsprechende Rückverwandlung z. B. von *xnxm* in *unum*, von *dxp* in *duo* vornehmen [1]).

Gerhard von Cremona hat sicherlich die Algebra des Alchwarizmî übersetzt, allein es ist fast mehr als wahrscheinlich, daß die Bearbeitung, welche als jene Übersetzung gedruckt worden ist [2]), nicht von Gerhard herrührt und nicht die Algebra des Alchwarizmî ist [3]), daß man dagegen als die genannte Übersetzung jene anzuerkennen hat, welche als anonyme Übersetzung [4]) zur Veröffentlichung gelangte (vgl. S. 719 Anmerkung 1), und welche auch in einer Madrider Handschrift als von Gerhard von Cremona herrührend bezeichnet ist.

Die andere nach dieser Auffassung nicht von Gerhard von Cremona sondern von irgend einem uns Unbekannten übersetzte Abhandlung kündigt sich selbst an als das Buch, welches nach dem Gebrauche der Araber *algebra* und *almucabala* und „bei uns" *(apud nos)* Buch der Wiederherstellung *(liber restauracionis)* genannt wird, zu Toledo aus dem Arabischen in das Lateinische übersetzt durch Magister Gerhard von Cremona. Das Original muß als eine andere Bearbeitung des von Alchwarizmî in seiner ähnlich betitelten Schrift behandelten Stoffes angesehen werden. Die Beispiele

$$x^2 + 10x = 39, \qquad x^2 + 21 = 10x,$$

letzteres mit seinen beiden Wurzelwerten $x = 7$ und $x = 3$ treten auf. Geometrische Beweise der drei Fälle der quadratischen Gleichungen fehlen nicht. Sonstige bedeutsame Verschiedenheiten nötigen aber an einen anderen Verfasser des arabischen Textes als an Alchwarizmî zu denken. Sehr wichtig erscheint z. B. der Umstand, daß die Auflösungen der drei Formen quadratischer Gleichungen in Gestalt von Gedächtnisversen gelehrt sind [5]). Das ist durchaus indische Sitte, während sie den Arabern, so viele uns deren bisher zur Rede kamen, fremd ist. Und doch können gerade diese Verse nicht aus indischen Mustern übersetzt sein, denn die Inder — wir wiederholen hier früher Gesagtes — wußten gar nichts von drei Formen quadratischer Gleichungen, weil sie vermöge ihrer Fähigkeit mit negativen Zahlen zu rechnen nur eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

mit bald positiven, bald negativen Koeffizienten in Behandlung

[1]) *Trattati d'aritmetica* II, pag. 126. [2]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 28—51. [3]) Axel Anthon Björnbo in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge, VI, 239—241. [4]) Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, 253—297. [5]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 31, 32, 34.

nahmen. Dieser Widerspruch scheint zu der Annahme zu nötigen, der Verfasser des hier übersetzten Buches sei ein Gelehrter gewesen, welcher selbständig vorgehend die indische Sitte auf arabische, um nicht geradezu zu sagen auf griechisch-arabische Gegenstände anwandte. Er muß mit indischen Werken bekannt gewesen sein, muß ihnen das entnommen haben, was er für besonders brauchbar hielt, während er gleichzeitig von den unter den Arabern längst eingebürgerten drei Fällen nicht ließ, sei es, daß er sie wirklich für notwendig hielt, sei es, daß er als echter Araber anhängend an dem durch Alter der Überlieferung Geheiligten doch nicht allzu große Neuerungen wagte. Waren es doch neben den Gedächtnisversen noch andere ungemein überraschende Dinge, welche er seinen Landsleuten bot: eine algebraische Schrift durch Abkürzungen und übereinkommliche Zeichen, wie die Inder sie benutzten.

Fast ganz indisch ist die Bezeichnung abzuziehender Größen durch einen unter die Benennung angebrachten Punkt[1]), indisch darum wahrscheinlich auch die Darstellung der Benennung selbst durch den Anfangsbuchstaben des Benannten, sei es, daß es um die Unbekannte, oder um ihr Quadrat, oder um die absolute Zahl der Aufgabe sich handelte[2]). Welcher Buchstaben das Original sich bediente, ist nicht mit voller Sicherheit zu behaupten, indem der Übersetzer einen Beweis scharfsinnigen Verständnisses ablegend, oder aber irgendwie und irgendwo über den abkürzenden Ursprung der im Urtexte gebrauchten Buchstaben richtig belehrt, die Anfangsbuchstaben der lateinischen Wörter gewählt hat, deren er selbst sich bedient, der Wörter: *radix* für die Unbekannte, *census* für das Quadrat derselben, *dragma* für die absolute Zahl, doch ist die Wahrscheinlichkeit eine bedeutende, es seien diese Wörter die Übersetzungen von *dschidr*, *mâl*, *dirham*, deren Abkürzungen uns noch im Laufe dieses Kapitels in westarabischen Werken begegnen werden. In dem Gebrauche von *census* für *mâl* hat der Übersetzer richtiger übersetzt als Johannes von Sevilla, welcher *res* dafür sagte, während eine Übereinstimmung beider in den Wörtern *digitus* und *articulus* herrscht[3]).

Wer der arabische Gelehrte war, welcher Gedächtnisverse, welcher Abkürzungen und fast algebraische Zeichen zuerst anwandte, ist uns, wir wiederholen es, nicht bekannt, denn die Vermutung, er habe Saʿîd geheißen[4]), steht auf nicht so festen Füßen, daß wir ihr Vertrauen schenken möchten. Dagegen kennen wir die Namen west-

---

[1]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* pag. 38—39. [2]) Ebenda pag. 36 sqq. [3]) Ebenda pag. 38. [4]) Ebenda pag. 56.

arabischer Schriftsteller, welche vor dem Ende des XIII. S. — ob vor oder nach dem Aufenthalte Gerhards von Cremona in Toledo wissen wir nicht — lebten und welche ähnlich verfuhren. Der Berichterstatter über die Namen ist Ibn Chaldûn, jener Schriftsteller des XIV. S., von dem wir eine Stelle über befreundete Zahlen schon (S. 735) benutzt haben. Er erwähnt[1]) ein algebraisches Werk, welches unter dem Titel: Der kleine Sattel im Maġrib, also im afrikanischen Nordwesten geschrieben worden sei, und aus welchem Ibn Albannâ einen Auszug verfertigte habe. Von diesem Auszuge von der Hand des in der zweiten Hälfte des XIII. S. wirkenden Gelehrten haben wir nachher zu reden. Vorläufig bleiben wir bei dem Berichte Ibn Chaldûns, welcher fortfahrend erzählt, Ibn Albannâ habe auch einen Kommentar: Die Aufhebung des Schleiers zu dem kleinen Sattel geschrieben. Dieses Werk sei ungemein wertvoll, aber schwierig für Anfänger. Ibn Albannâ habe sich dabei an zwei Vorgänger angelehnt: an „die Wissenschaft des Rechnens“ von Ibn Almunʿim und an „den Vollkommenen“ von Alaḥdab. Er habe die Beweisführungen dieser beiden Werke zusammengefaßt und noch anderes, nämlich die technische Anwendung von Symbolen bei diesen Beweisen, welche zu gleicher Zeit einen doppelten Zweck erfüllen. die abstrakte Schlußfolge und die sichtbare Darstellung, worin eben das Geheimnis und die Wahrheit der Erklärung von Lehrsätzen der Rechenkunst durch Zeichen bestehe. Es kann nicht wohl ein Zweifel obwalten, daß diese an sich etwas dunklen Worte richtig auf Dinge bezogen worden sind, wie sie etwa in der Vorlage des Gerhard von Cremona vorkamen, und daß diese in mindestens mittelbarer Abhängigkeit von Ibn Almunʿim oder Alaḥdab stehen müßte, wenn der Beweis erbracht werden könnte, daß diese Schriftsteller bis auf das XII. S. also bis reichlich hundert Jahre vor Ibn Albannâ zurückgreifen.

Ibn Albannâ, d. h. der Sohn des Baumeisters[2]), ist 1252 oder 1257 in Marokko geboren. Der Vater stammte, wie es scheint, aus Granada. Der vollständige Name unseres Gelehrten war Abû'l Abbâs Aḥmed ibn Muḥammed ibn ʿO̱tmân Al-Azdî Al-Marrâkuschî ibn Albannâ Algarnâṭî. Er hat eine große Zahl von mathematischen und anderen Schriften verfaßt, welche in seiner Lebensbeschreibung aufgezeichnet sind. Auffallenderweise fehlt in diesem von einem Lands-

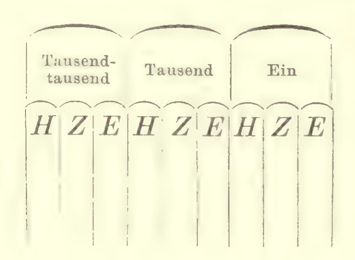
---

[1]) *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854, pag. 371—372.
[2]) Aristide Marre, *Biographie d'Ibn Albannâ* in den *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* unter dem Datum des 3. Dezember 1865 (Bd. XIX). Steinschneider, *Rectification de quelques erreurs* etc. Bullettino Boncompagni X, 313—314 (1877). Suter 162—164, Nr. 399.

manne Ibn Albannâs herrührenden Verzeichnisse die durch Ibn Chaldûn so hoch gestellte Aufhebung des Schleiers, fehlt in ihm auch der Auszug aus dem kleinen Sattel. Gerade dieser letztere Auszug, **talchîṣ** nennt ihn Ibn Chaldûn, dürfte uns aber erhalten sein. Ein arithmetisch-algebraisches Werk unter dem Titel „Talchîṣ des Ibn Albannâ" ist nämlich in der Bodleyanischen Bibliothek aufgefunden und in französischer Übersetzung des arabischen Textes dem Drucke übergeben worden[1]). Da Name und Inhalt mit der von Ibn Chaldûn erwähnten Schrift in vollem Einklange stehen, so ist an der tatsächlichen Übereinstimmung kaum zu zweifeln, eine Zweifellosigkeit, welche sich nur noch steigert, wenn dem Leser von Zeile zu Zeile zwingender die Notwendigkeit erläuternder Zusätze sich aufdrängt, so daß er begreift, daß Ibn Albannâ selbst die Aufhebung des Schleiers unternahm.

Spätere Gelehrte folgten seinem Beispiele, erläuterten aber nicht das ursprüngliche Hauptwerk des kleinen Sattels, sondern den Auszug, den **Talchîṣ**, wie wir von nun an mit dem jetzt gebräuchlich gewordenen Fremdnamen sagen wollen. Es gibt mehrere Kommentare zum Talchîṣ, es gibt auch Werke, welche ohne sich als Kommentare zu geben als solche benutzt werden können, weil sie dessen Auseinandersetzungen weiter ausführen, und von diesen ist eines, dem XV. S. angehörend, durch eine gedruckte Übersetzung zugänglich. Wir werden über manches Dunkle im Talchîṣ besser aus jenem späten Werke uns unterrichten, vorher aber wenigstens einige Stellen des Talchîṣ selbst reden lassen.

Ibn Albannâ unterscheidet Rangordnungen der Zahlen unter dem Namen **mukarrar** und **takarrur**[2]). Der Sinn ist der, daß Gruppen von je 3 Ziffern von rechts nach links abgeteilt werden, die Gruppe der Einheiten, der Tausender, der Tausendtausender usw. Bildet man lauter einzelne Kolumnen für jede Ziffernordnung und begrenzt dieselben oben durch einen kleinen Bogen



[1]) *Le Talkhys d'Ibn Albannâ publié et traduit par Aristide Marre.* Rome 1865. [2] Talkhys pag. 3 und 9.

(ein kleines Gewölbe oder Dach), so sind größere Dächer über drei Kolumnen zu spannen und damit jene Gruppeneinteilung versinnlicht. Jede vollständige Gruppe von drei Kolumnen bildet einen takarrur; mukarrar dagegen ist die Gesamtzahl der Kolumnen, in welche eine gegebene Zahl sich einträgt. Der mukarrar ist der dreifache takarrur einer Zahl nebst der Zahl der links überschießenden Kolumnen, welche nur 2, 1 oder 0 betragen kann. So ist der mukarrar von 5 000 000, welches 2 takarrur und noch 1 Kolumne braucht $= 3 \times 2 + 1 = 7$. Der mukarrar von 30 000 ist $= 3 \times 1 + 2 = 5$, der mukarrar von 400 000 000 ist $3 \times 3 + 0 = 9$.

Wir sehen hier aufs deutlichste Kolumnenrechnen und Zifferrechnen vereint, aber wir sehen es erst hier gegen Ende des XIII. S., und es ist uns persönlich kaum fraglich, daß wir statt von einer Vereinigung der beiden Verfahren von einem Übergreifen des Kolumnenrechnens in das Zifferrechnen zu reden haben, daß hier abendländischer Einfluß erhärtet ist, der gerade an der afrikanischen Küste unabweisbar war. Hatten doch z. B. in Bugia die großen italienischen Kaufleute schon vor dem Jahre 1200 eigene Handelskomptoire, eigene Zollbeamte, und war doch damit die Anwesenheit von im Rechnungswesen geübten Persönlichkeiten mit Notwendigkeit verbunden. Was aber dasselbe Bugia den Arabern war, schildert ein spanischer Araber aus Valencia, welcher 1289 jene Gegend bereiste, mit beredten Worten[1]: „Bugia ist ein großer Seehafen und eine befestigte Stadt, deren Name in der Geschichte berühmt ist. Sie ist auf steilen Höhen und in einer Schlucht angelegt, die Mauern ziehen sich bis ans Meer. Die Festigkeit der Häuser kommt der Zierlichkeit ihrer Formen gleich. Vorwerke schützen sie, so daß der Feind vergebens einen Angriff versuchen würde. Die Wut der kriegerischen Horden würde an diesen Mauern zerschellen. In Bugia steht eine Moschee, deren Pracht alle bekannten Gotteshäuser übertrifft, und deren Minaret sowohl von dem Meere als von dem Land aus gesehen wird. Gleichsam Mittelpunkt der Stadt erfreut dieses entzückend schöne Bauwerk ebensosehr den Blick, wie es die Seele mit einem Gefühle unsäglicher Glückseligkeit erfüllt. Die Einwohner versäumen nie ihren fünf durch das Gesetz vorgeschriebenen Gebeten dort zu genügen, und sie unterhalten die Moschee mit größter Sorgfalt, weil sie ihnen gewissermaßen als Versammlungsort dient, und selbst gleich einem belebten Wesen den Menschen Gesellschaft leistet. Bugia ist

[1] Einen Auszug aus dem Reisebericht des Al'Abderî hat Cherbonneau in dem *Journal Asiatique* für 1854, II. Halbjahr, pag. 144—176 herausgegeben. Die Beschreibung von Bugia S. 158.

eine der ältesten Hauptstädte des Islams und ist bevölkert mit berühmten Gelehrten."

Wir kehren zum Talchîṣ zurück. Bei Gelegenheit der Addition werden die Summenformeln für die Reihen der Quadrat- und der Kubikzahlen angegeben[1]). Bei Gelegenheit der Subtraktion kommt der Rest zur Rede, welcher entsteht, wenn von irgend einer Zahl 9, 8 oder 7 so oft als möglich abgezogen wird[2]). Die Auffindung dieser Reste, welche alsdann als Proben bei Rechnungen angewandt werden, wie wir es von der Neunerprobe schon wissen, beruht bei der 9 auf dem Satze $10^n \equiv 1 \pmod{9}$, bei der 8 auf den drei Sätzen $10^1 \equiv 2$, $10^2 \equiv 4$, $10^3 \equiv 0 \pmod{8}$. Somit ist der Rest einer Zahl nach 9 ihrer Ziffernsumme gleich, der Rest nach 8 der Einerziffer nebst dem Doppelten der Zehnerziffer noch vermehrt durch das Vierfache der Hunderterziffer. Umständlicher ist das Verfahren den Rest nach 7 zu finden. Ibn Albannâ begründet es mit den Sätzen, welche nach moderner Schreibweise

$$10^1 \equiv 3,\quad 10^2 \equiv 2,\quad 10^3 \equiv 6,\quad 10^4 \equiv 4,\quad 10^5 \equiv 5,\quad 10^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

heißen und setzt hinzu „von da an beginnt die Reihenfolge aufs neue". Man hat also von der Rechten zur Linken fortschreitend unter die einzelnen Ziffern der zu prüfenden Zahl der Reihe nach 1, 3, 2, 6, 4, 5 sich stets wiederholend niederzuschreiben, die betreffenden Ziffern mit diesen Werten zu multiplizieren und die Summe dieser Produkte zu bilden, welche dann selbst wieder nach 7 zu prüfen ist. Die Zahlen 1, 3, 2, 6, 4, 5 besser zu behalten ersetzt man sie durch die gleichwertigen Buchstaben des älteren arabischen Alphabetes, welche durch Einschiebung von Vokalen zu zwei nicht ganz richtig geschriebenen Wörtern sich verbinden lassen, deren Bedeutung etwa die eines ein Aufzubewahrendes bergenden Grabens ist.

Bei der Quadratwurzelausziehung unterscheidet Ibn Albannâ zwei Fälle[3]), ob nämlich, nachdem $\sqrt{a^2+r} \backsim a$ gefunden ist, der Rest sich als kleiner beziehungsweise als gleich, oder aber als größer als der schon gefundene Wurzelteil erweist. Ist $r \leqq a$ so soll man $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$, dagegen bei $r > a$ lieber

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$$

setzen. Wir erinnern daran, daß Alkarchî (S. 766) der letzteren Formel sich bedient hat, ohne auf das Größenverhältnis zwischen a und r Rücksicht zu nehmen. Die Methode des doppelten falschen Ansatzes lehrt Ibn Albannâ als das Verfahren mit Hilfe der Wagschalen

[1]) Talkhys pag. 5—6. [2]) Ebenda pag. 9. [3]) Ebenda pag. 53.

und sagt, es beruhe auf Geometrie[1]). Er zeichnet eine Figur (Fig. 111), welche bei einem Kommentator die etwas abweichende Gestalt Fig. 112 besitzt, und welche die eigentümliche Schreibweise gestattet, auf welche wir (S. 732) zum voraus hingewiesen haben. Seine Vorschrift ist, wenn wir uns unserer früheren Buchstaben bedienen, folgende. Die Zahl b, welche der Gleichung $ax = b$ zufolge herauskommen muß, schreibt man in die obere Einbiegung. Die Zahlen n_1 und n_2, welche die beiden Ansätze für die Unbekannte sind, schreibt man zwischen die Parallelen rechts und links, oder, wie Ibn Albannâ sagt, man legt sie auf die beiden Wagschalen. Die Fehler e_1 und e_2 werden auf derselben Seite, wo schon n_1, beziehungsweise n_2 steht, über oder unter die beiden die Wagschale darstellenden Parallelen geschrieben, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

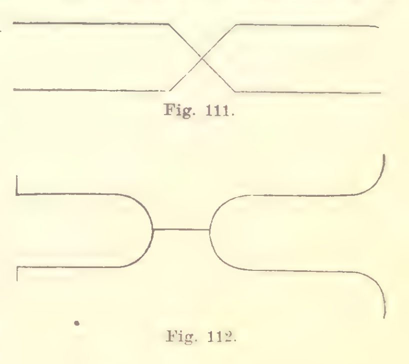

Fig. 111.

Fig. 112.

Dann wird der Fehler rechts mit der Annahme links, die Annahme rechts mit dem Fehler links vervielfacht und beide Produkte addiert, wenn die Fehler von entgegengesetzter Natur waren, das kleinere vom größeren subtrahiert, wenn die Fehler gleichartig waren. Wie man mit den Produkten verfuhr, verfährt man ferner mit den Fehlern, man addiert ungleichartige, man bildet die Differenz von gleichartigen. Man dividiert endlich die aus Fehlern und Annahmen gebildete Zahl durch die aus den Fehlern allein erhaltene, so ist der Quotient die Unbekannte. Der Ausspruch, daß die Methode des doppelten falschen Ansatzes auf Geometrie beruhe, ist einigermaßen auffallend. Man hat versucht, denselben zu erklären und hat zwei sehr voneinander abweichende Auswege ermittelt. Entweder erklärt man die Sache mit der Klangverwandtschaft des Wortes *handasa*, welches Geometrie heißt, und *hindi* indisch[2]); beide hießen ursprünglich „indische Kunst", wie denn auch in der Tat die Methode des doppelten falschen Ansatzes indischen Ursprunges sei. Oder aber man scheut den gewichtigen Einwurf, daß sodann übrig bleibe die unleugbar vorhandene Bedeutung von Geometrie für *handasa* zu rechtfertigen, und zwar aus derselben Klangverwandtschaft zu rechtfertigen, während die arabische Geometrie nichts weniger als indischen Ursprunges ist, und man gerät alsdann auf den Versuch, die Methode graphisch, also geometrisch zu ver-

[1]) Talkhys pag. 26—27. [2]) Woepcke in dem *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 505 flgg.

sinnlichen[1]. Von A aus trage man (Fig. 113) nach P_1 und nach P_2 die falschen Annahmen $AP_1 = n_1$ und $AP_2 = n_2$ auf. Ist nun der Sinn der beiden Fehler e_1 und e_2 derselbe, so errichtet man $P_1Q_1 = e_1$ und $P_2Q_2 = e_2$ senkrecht zu AP_1P_2 nach derselben Seite; sind e_1 und e_2 ungleichartig, so zieht man jene Senkrechten nach entgegengesetzten Seiten der Geraden AP_1P_2. Jedenfalls verbindet man Q_1Q_2 geradlinig und bestimmt den Durchschnittspunkt B mit der AP_1P_2. Alsdann ist AB der richtige Wert der Unbekannten. Das ist gewiß ungemein scharfsinnig und im Ergebnisse auch richtig, auch in eine Formel umgesetzt übereinstimmend mit der gegebenen Vorschrift. Ob aber in der Figur wirklich eine zwingende Ähnlichkeit mit der von Ibn Albannâ gezeichneten Wage zu finden ist, ob, wenn Ibn Albannâ oder einem seiner Vorgänger eine solche geometrische Begründung zu eigen gewesen wäre, sie sich nicht bei einem Kommentator hätte erhalten müssen, das sind Fragen, deren erste ebensowenig unbedingt bejaht, wie die zweite unbedingt verneint werden dürfte. Wir selbst sehen daher keinen der beiden Auswege als den richtigen und begnügen uns mit dem Eingeständnisse, keine Erklärung für Ibn Albannâs Ausspruch, das Verfahren mit Hilfe der Wagschalen beruhe auf Geometrie, zu wissen.

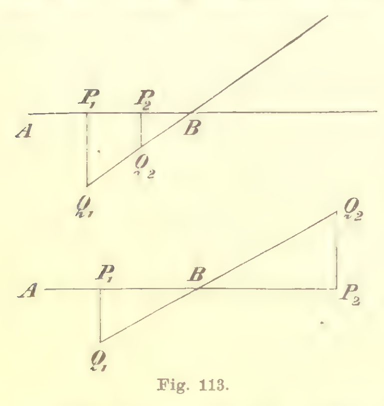


Fig. 113.

Es ist kennzeichnend für den Talchîṣ, daß für alle in ihm enthaltene Regeln keinerlei Zahlenbeispiele gegeben sind, daß vielmehr nur in ganz allgemeinen Worten die Vorschriften ausgesprochen werden, ein wissenschaftlicher Vorzug dieses Werkes, welchen in solcher Ausschließlichkeit kein anderes von denen, welche uns bisher zur Kenntnis gekommen sind, teilt. Um so nötiger aber, wir wiederholen es jetzt, war für die gleichzeitigen Leser, und noch für Leser späterer Jahrhunderte ein Kommentar zum Talchîṣ oder eine scheinbar selbständige weitere Ausführung des gleichen Gegenstandes.

Zu einer solchen gehen wir jetzt über. Sie ist verfaßt von Alḳalaṣâdî[2]), geboren in Baza, ansässig in Granada, von wo er auswanderte, als die Christengefahr immer drohender herannahte. Fern

[1]) Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen S. 924—926. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854 pag. 358—360. Ḥâdschî Chalfa nennt ihn überall Alkalṣâwî. Suter 180—182, Nr. 144.

von der Heimat starb er 1486. Ebenderselbe hat auch einen Kommentar zum Talchîṣ verfaßt, aus welchem aber nur eine Stelle veröffentlicht ist[1]), auf welche wir uns (S. 712) bezogen haben, um zu beweisen, daß bei Arabern die Erinnerung stets wach blieb, daß die Pythagoräer die Männer der Zahl gewesen seien. Der Titel des Werkes, mit welchem wir es gegenwärtig zu tun haben, ist in verschiedenen Angaben bekannt. In der einen Handschrift heißt es „Aufhebung der Schleier der Wissenschaft des Ġubâr“, in einer anderen „Enthüllung der Geheimnisse der Anwendung der Zeichen des Ġubâr“, in einem Verzeichnisse von Handschriften „Enthüllung der Geheimnisse der Wissenschaft von den Zeichen des Ġubâr“. Ġubâr, ursprünglich Staub, wie wir uns erinnern (S. 712), heißt hier so viel wie Tafelrechnen mit Ziffern im Gegensatze zum Kopfrechnen. Ob dabei die Ġubârziffern des Westens oder ob die ostarabischen Ziffern in Anwendung kommen, ist sehr gleichgültig, wenigstens gibt es in der Pariser Bibliothek eine Abschrift des Alḳalaṣâdî, in welcher nur ostarabische Ziffern vorkommen, und die gleichwohl das Wort Ġubâr in ihrem Titel an der Spitze trägt. Das Werk, oder vielmehr der Auszug aus dem Werke von Alḳalaṣâdî selbst angefertigt, welchen wir allein besitzen, besteht aus vier Büchern, deren erstes die Arithmetik der ganzen Zahlen enthält, das zweite die Brüche, das dritte die Wurzeln, das vierte die Auffindung der Unbekannten. Es ist in französischer Übersetzung gedruckt[2]).

Gleich das erste Buch ist ungemein lehrreich für jeden, welcher sich mit der Form des arabischen Rechnens bekannt machen will, die vielfach von dem heute gebräuchlichen abweicht, z. B. darin, daß die Rechnungsergebnisse bei der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation nach oben angeschrieben werden, der neueren Gewohnheit geradezu entgegengesetzt und ein unbefangenes Weiterschreiben an einem Blatte, wenn der Text durch eine Rechnung unterbrochen wird, verhindernd, weil der Araber vor Beginn der Rechnung erst im Kopfe überschlagen muß, wieviel Raum er etwa gebrauchen werde, wie weit unten auf der Seite also er die Rechnung werde beginnen müssen. Folgende Beispiele dürften nunmehr leicht verstanden werden, wenn wir noch bemerken, daß bei der Addition das Überschießende unter die Ziffer nächsthöheren Ranges angeschrieben, nicht im Kopf behalten wird, und daß ähnlicherweise bei der Subtraktion ein für den Minuenden zu borgendes 10 dem Sub-

[1]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 58—62.
[2]) Woepcke, *Traduction du traité d'arithmétique d'Abul Hasan Ali ben Mohammed Alkalsadi* in den *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* 1859, Bd. XII, pag. 230—275 und 399—438.

trahenden als Einheit der nächsten Ordnung wieder zugesetzt wird[1]) (S. 610).

Die Addition $48 + 97 = 145$ schreibt sich demnach:

145
48
97
1

Die Subtraktion $725 - 386 = 339$ schreibt sich:

339
725
386
11

Die Subtraktion heißt ṭarḥ, einem von taraha = wegwerfen abgeleiteten Stammworte, also gleichen Stammes mit Tara, welches als Verpackung, die bei der Berechnung des Wertes oder des zu verzollenden Gewichtes einer Ware usw. nicht mit eingerechnet, sondern abgezogen wird, in Gebrauch geblieben ist. Die Multiplikation $73 \times 52 = 3796$ erfolgt „in geneigter Weise", wenn zunächst $70 \times 50 + 3 \times 50$ dann unter Weiterrückung des Multiplikators 73 auch $70 \times 2 + 3 \times 2$ gebildet und alles addiert wird. Das Exempel sieht dann so aus:

3796
6
14
15
35
52
73
73

Es werden noch mancherlei andere Multiplikationsverfahren gelehrt. Ohne auf alle eingehen zu wollen, erwähnen wir nur, daß die sogenannte netzförmige Multiplikation als Multiplikation dschadwal vorkommt[2]) und daß bei einem Verfahren der Stellenzeiger der miteinander zu vervielfachenden Einzelziffern, ihr ass oder Exponent berücksichtigt wird[3]). Die komplementäre Multiplikation, welche wir bei Behâ Eddîn nachweisen konnten, findet sich dagegen bei Alkalaṣâdî nicht. Ebensowenig findet sich bei ihm die komplementäre Division. Die Division ist überhaupt gegen die Multiplikation etwas dürftig behandelt und nur nach der einen uns von früher bekannten Weise

[1]) Additionen vgl. l. c. pag. 233, Subtraktionen pag. 235, Multiplikationen pag. 237. [2]) Alkalasadi pag. 244. [3]) Ebenda pag. 239.

gelehrt[1]), daß der fortrückende Divisor unter, die Teilreste über den Dividend geschrieben werden, der Quotient wieder unter den Divisor, nachdem ein Strich dazwischen gezogen wurde. Das Beispiel 924 : 6 = 154 sieht also so aus:

32
924
666
154

Ob man dabei den Divisor auf einmal oder in Faktoren nacheinander berücksichtigt, ob man also gleich durch 15 dividiert, oder erst durch 5 und dann nochmals durch 3, übt auf das eigentliche Verfahren eine Wirkung nicht aus.

Aus dem II. Buche von den Brüchen sind die voneinander abhängigen Brüche besonders bemerkenswert, eine Art von Zahlenverbindung, welche die neuere Mathematik aufsteigende Kettenbrüche zu nennen pflegt. Auch frühere Schriftsteller haben dieselben Formen, aber Alḳalaṣâdî setzt ihre Entstehung durch wiederholte Division mit Hilfe der Faktoren eines Divisors am deutlichsten auseinander[2]). Soll etwa $\frac{253}{280}$ in eine solche abhängige Bruchform gebracht werden, so zerlegt man zunächst 280 in $5 \times 7 \times 8$ und dividiert mit 8 in 253. Das geht 31 mal und läßt 5 als Rest. Man schreibt den Rest als Zähler, den Divisor 8 als Nenner. In den früheren Quotient 31 wird wiederholt mit 7 dividiert und der Quotient 4 nebst dem Reste 3 erhalten. Dieser neue Rest nebst dem eben gebrauchten Divisor kommen über und unter dem schon gezogenen Bruchstriche rechts, aber durch einen kleinen Zwischenraum getrennt neben die von vorhin vorhandenen Zahlen zu stehen. Nun dividiert man mit 5 in den Quotient 4, das geht 0 mal und 4 bleibt Rest, worauf man mit diesem Reste und dem Divisor 5 nach der schon einmal befolgten Regel verfährt. Es ist also $\frac{253}{280} = \frac{5\ \ 3\ \ 4}{8\ \ 7\ \ 5}$ oder, wie man gegenwärtig schreibt,

$$= \cfrac{4 + \cfrac{3 + \frac{5}{8}}{7}}{5}$$

Vermutlich dürfen wir hier, wie bei den Brüchen des Diophant mit gemischtzahligen Zählern (S. 478) eine späte Nachwirkung altägyptischer Gewohnheit (S. 71) erkennen. Bruchbrüche[3]) sind solche wie $\frac{4}{5}$ von $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{8}$, dessen Wert $\frac{60}{280}$ ist und welcher $\frac{5}{8}\Big|\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}$ geschrieben wird.

---

[1]) Alkalasadi pag. 249—252. [2]) Ebenda pag. 256 *De la dénomination* und pag. 265 *Fractions relatives.* [3]) Ebenda pag. 265 *Fraction divisée en parties.*

Im III. Buche von den Wurzelausziehungen begegnen wir interessanten Näherungsverfahren[1]. Auch Alkalasâdî unterscheidet, ob bei Ausziehung der Quadratwurzel $\sqrt{a^2+r}$ der erste Rest $r \leqq a$ oder $r > a$. Im ersteren Falle setzt auch er wie Ibn Albannâ (S. 808)

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a},$$

aber im zweiten Falle nicht wie jener

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1},$$

sondern

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

Als noch genaueren Näherungswert gibt er, ohne Fälle zu unterscheiden,

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

an. Alkalasâdî weiß auch, daß $p+\sqrt{q}$ mit $p-\sqrt{q}$ sich zu einem rationalen Produkte vervielfacht und benutzt diese Kenntnis zur Umwandlung[2] von

$$\frac{m}{p+\sqrt{q}} \quad \text{in} \quad \frac{m(p-\sqrt{q})}{p-q}.$$

Weitaus das Wichtigste in diesem Buche ist aber für uns das Auftreten eines Wurzelzeichens, insbesondere wenn man es mit den Zeichen des IV. Buches zusammenhält, und an die früher begründete Annahme denkt, daß diese symbolischen Bezeichnungen bis jenseits Ibn Albannâ hinaufreichen. Wurzel, insbesondere Quadratwurzel heißt bei den Arabern dschidr (S. 723) und dieses Wort wurde vor den betreffenden Zahlen, aus welchen die Quadratwurzel zu ziehen war, ausgeschrieben. Jetzt tritt statt des ganzen Wortes der Anfangsbuchstabe dschîm desselben auf. Das würde freilich allein eine eigentliche Zeichenschrift nicht begründen, sondern eine Abkürzung sein können. Aber der Buchstabe ج steht nicht vor — d. h. also, da wir es mit arabischen Texten zu tun haben, zur Rechten — der betreffenden Zahl, sondern über derselben und durch einen Horizontalstrich von derselben getrennt[3]. Die Horizontalstriche fehlen auch mitunter, wenn nicht in der Mehrzahl der Fälle, und insbesondere die beiden Beispiele $\sqrt{20\frac{4}{7}}$ und $3\sqrt{6}$ entbehren denselben im Originale. Ein die Wurzelgröße allenfalls vervielfachender Zahlenkoeffizient

---

[1]) Alkalasadi pag. 402—405. [2]) Ebenda pag. 413. [3]) Ebenda pag. 407 bis 414 und *Journal Asiatique* für Oktober und November 1854, pag. 362—364.

steht noch über dem Wurzelzeichen. Mit Anwendung unserer Ziffern sieht also ein derartiger Ausdruck so aus:

$$\sqrt{48} = \overset{\text{ج}}{\overline{48}} \qquad \sqrt{20\tfrac{4}{7}} = \overset{\text{ج}}{\tfrac{4}{7}}\,20 \qquad 3\sqrt{6} = \overset{3}{\overset{\text{ج}}{6}}\,.$$

Symbole finden sich, sagten wir, noch häufiger im IV. Buche, welches dem Aufsuchen der Unbekannten gewidmet ist Schon bei der Regeldetri[1]) werden drei ein Dreieckchen bildende Punkte ∴ zwischen je zwei Zahlen der Proportion gesetzt und die unbekannte Größe durch ein dschîm bezeichnet. Man vermutet, es sei dieses dschîm nicht als Anfangsbuchstabe von dschidr gedacht, sondern als Anfangsbuchstabe des Zeitwortes dschahala = nicht kennen, des Stammwortes für madschhûl, welches gewöhnlich in dem Sinne „unbekannte Größe" gebraucht wird. So ist $7 : 12 = 84 : x$ geschrieben:

$$\text{ج} \therefore 84 \therefore 12 \therefore 7\,.$$

In der eigentlichen Algebra kommen folgende Symbole vor[2]): Die Unbekannte selbst, schai oder dschidr genannt, wird durch ein schîn ش, das Quadrat der Unbekannten mâl durch ein mîm م, der Kubus der Unbekannten ka'b durch ein kâf ك geschrieben, welche über den zugehörigen Zahlenkoeffizienten stehen. Ein Zeichen der Addition ist nicht vorhanden, unvermittelte Aufeinanderfolge genügt, um die additive Vereinigung der so geschriebenen Glieder zu veranlassen. Die Subtraktion bedient sich des Wortes illâ (außer) الا, links von welchem der Richtung der Schrift gemäß das Abzuziehende geschrieben wird. Das Merkwürdigste endlich ist ein Gleichheitszeichen. Wir erinnern uns, daß in manchen Handschriften des Diophant der Anfangsbuchstabe ι von ἴσοι gleich hieß (S. 472). Gleichsein heißt auf Arabisch 'adala, wird aber nicht etwa durch seinen Anfangsbuchstaben, sondern durch ein finales lâm ل, mit welchem das Wort abschließt, ersetzt, eine Bezeichnung, welche noch mehr als die übrigen das Wesen bloßer Abkürzung abgestreift und das eines Symbols angenommen hat. So schreibt also Alkalaṣâdî $3x^2 = 12x + 63$ in folgender Weise:

$$63 \;\overset{\text{ش}}{12}\; \text{ل} \;\overset{\text{م}}{3}$$

und $\frac{1}{2}x^2 + x = 7\frac{1}{2}$ in folgender Weise:

$$\tfrac{1}{2}\,7\,\text{ل}\,\overset{\text{ش}}{1}\,\overset{\text{م}}{\tfrac{1}{2}},$$

---

[1]) Alkalasadi pag. 415. *Journal Asiatique* l. c. pag. 364. [2]) Ebenda pag. 420—429. *Journal Asiatique* l. c. pag. 365—367.

endlich den Ausdruck $2x + 8x^3 - (5 + 6x^2)$ durch

م ك ش
6 5 ﻻ 8 2

In einzelnen Handschriften ist auch das illâ (außer) ähnlich wie das ʿadala (gleich sein) durch eine auffallende Abkürzung, durch die Endsilbe lâ ﻻ ersetzt, wodurch das algebraische Aussehen der Formeln noch erhöht wird. Wir haben schon des Stellenzeigers oder des Exponenten ass erwähnt, der bei Alḳalaṣâdî vielfach vorkommt. Er tritt auch bei der Multiplikation von Potenzen der Unbekannten in Gebrauch, und zwar immer in der Einzahl des Wortes, nicht in der Mehrzahl isâs. Es heißt also nicht „der kaʿb hat 3 isâs", sondern „der ass des kâʿb ist 3" und ähnlich auch bei höheren Potenzen.

Einer nicht genau bestimmbaren Zeit gehört noch ein kleines Rechenbuch an, dessen Übersetzung ebenfalls veröffentlicht ist[1]). Jedenfalls ist es später als die Lebenszeit des darin zitierten[2]) Ibn Albannâ entstanden, und vor Ende des XVI. S., da die Handschrift, aus welcher es übersetzt ist, am 26. Januar 1573 vollendet wurde[3]). Das Schriftchen heißt Einleitung zum Staub- (ġubârî) und Luft- (hawâʾî) Rechnen. Letzterer Ausdruck ist uns früher (S. 793) schon begegnet und als Kopfrechnen im Gegensatze zum Zifferrechnen verstanden worden, wenn auch sonderliche Kopfrechnungsmethoden nicht beschrieben werden. Abgesehen von der sehr geringfügigen Abänderung, daß bei der Addition wie bei der Multiplikation nicht nur ein Horizontalstrich über den untereinandergestellten Zahlen sich findet, sondern auch ein zweiter Horizontalstrich unter jenen Zahlen, während das Rechnungsergebnis doch wieder oben hingeschrieben wird, ist nur eine kleine Neuerung bei der Subtraktion zu bemerken[4]). Soll nämlich eine Ziffer höheren Wertes g im Subtrahenden von der im Range entsprechenden Ziffer niedrigeren Wertes k im Minuenden abgezogen werden, wo man also 10 borgen muß, so sei es gleichgültig, ob man g von $10 + k$ abziehe, oder aber k von g und den Rest von 10. Mit anderen Worten der Verfasser weiß, daß

$$(10 + k) - g = 10 - (g - k).$$

Fassen wir wieder in Kürze zusammen, was wir von westarabischer Mathematik kennen gelernt haben, so ist ein Unterschied gegen die ostarabische Mathematik namentlich in dreifacher Beziehung wahrnehmbar. Sie ist erstens einseitiger. Sie hat zweitens erst in späterer

[1]) *Introduction au calcul gobârî et hawâî traduit par* F. Woepcke. *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (1866) XIX. [2]) pag. 5 des Sonderabzugs. [3]) pag. 18 des Sonderabzugs. [4]) pag. 3 des Sonderabzugs.

Zeit Schriftstücke geliefert, welche auf uns gekommen sind. Sie wurde drittens mindestens seit dem XII. S. dem christlichen Europa durch in Spanien angefertigte Übersetzungen bekannt. Ihre einseitige arithmetisch-algebraische Entwicklung, welche hauptsächlich unser Augenmerk fesselte, ließ sie auf diesem Gebiete Fortschritte machen, von welchen bei den Ostarabern nichts zu bemerken ist. Es bildete sich allmählich eine förmliche algebraische Schreibweise aus, welche auch den Übersetzungen in die lateinische Sprache sich mitteilte, und welche somit den Europäern gestattete, schon im XII. S. die Lehre von den Gleichungen in größerer Vollkommenheit kennen zu lernen, als wenn sie deren Entwicklung einzig im Oriente bei dem durch die Kreuzzüge hervorgerufenen Zusammentreffen mit arabischer Kultur verfolgt hätten. Was die Rechenkunst, den elementareren aber weitest verbreiteten Teil der Mathematik betrifft, so sehen wir, wie sie im Westen immerhin einige äußere Verschiedenheiten von Zeit zu Zeit sich aneignete, wie wahrscheinlich durch italienische Kaufleute Elemente nichtarabischer Methoden, Spuren des Kolumnenrechnens oder mit anderen Worten eines gezeichneten Abacus, sich eingemischt zu haben scheinen, Spuren, welche wir aber freilich erst vom XIII. S. an bemerken konnten. Eines nur finden wir in keiner Weise, und dieses negative Ergebnis ist zu wichtig, um nicht fort und fort darauf aufmerksam zu machen: wir finden kein komplementäres Rechnen, nicht die komplementäre Division, nicht einmal die komplementäre Multiplikation, während doch gerade die Multiplikation emsig gepflegt und nach verschiedenartigeren Verfahrungsweisen gelehrt wurde, als sie es eigentlich verdient.



VIII. Klostergelehrsamkeit des Mittelalters.



38. Kapitel.

Klostergelehrsamkeit bis zum Ausgange des X. Jahrhunderts.

Wir müssen den Faden wieder anknüpfen da, wo wir ihn abgebrochen haben, um aus Europa hinüberzuschweifen nach dem Osten und die Summe zu ziehen aus dem, was asiatische Völkerschaften im Laufe der Jahrhunderte aus dem mathematischen Wissen zu machen wußten, von welchem ihnen, wie wir in verschiedenen Kapiteln nachzuweisen gesucht haben, wenigstens was die geometrischen Teile und nicht unwesentliche Bruchstücke der algebraischen Teile betrifft, mancherlei von Griechenland aus überkam. Die Araber, das haben wir insbesondere gesehen, mit ihrer frischen Wüstenkraft, sie, die sich, zum Unheile ihres Reiches, zum Heile für die Wissenschaft, in den verschiedensten Zeiträumen mit nicht minder empfänglichen, nicht minder geistig unverbrauchten Elementen vermischten und ihnen sich unterwerfen mußten, waren die treuesten Erben. Sie haben das ihnen anvertraute Gut nicht nur zu bewahren, auch zu vermehren gewußt. Wohin die Araber, solange ihr Reich im Wachsen begriffen war, der Eroberungspfad führte, dahin nahmen sie ihre Wissenschaft mit, Krieger und Lehrer zugleich. Wo die Araber sich eindringenden Herrschern beugten, gaben sie diesen als ersten Tribut ihre Bildung. Wo die Araber aber nicht unterjocht, sondern verdrängt wurden, da nahmen sie auf der Flucht ihre Kenntnisse wieder mit fort, welche rasch sich anzueignen die Sieger noch nicht fähig waren. Das deutlichste Beispiel zeigt uns Spanien, wo mathematische Wissenschaft verkümmerte, nachdem die letzten Araber vom spanischen Boden verdrängt waren.

Jenen mittelasiatischen Steppenvölkern, die dem Dschingizchân und Tamerlan gehorchten, fehlte es an Bildungsfähigkeit keineswegs, und die Möglichkeit war einmal vorhanden, daß Stamm- oder Sittenverwandte derselben verhältnismäßig frühe in Griechenland selbst mit altgriechischer Bildung bekannt geworden wären. Eine andere Möglichkeit war die, daß der fränkische Stamm von griechisch-arabischer Bildung durchdrungen worden wäre. Beide Möglichkeiten haben sich nicht erfüllt. Theodosius der Große wehrte am Schlusse des IV. S.

den Strom der Völkerwanderung von den Balkanländern ab, so daß er erst bei der apenninischen Halbinsel den westlichen Lauf in einen südlichen verwandeln konnte. Die Scharen Attilas, Dschingizchâns Mongolen am nächsten verwandt, blieben gleichfalls nördlich in ihrer Überflutung Europas, die im V. S. kurz aber gefahrdrohend sich ergoß. Und als 732 ein westarabisches Heer die Pyrenäen überschritten hatte und eine Schlacht darüber zu entscheiden hatte, ob Christentum ob Islam siegen sollte, da gelang es Karl Martel bei Poitiers seine Fahnen aufrecht zu erhalten.

Wir haben keineswegs die zwecklose Absicht, Vermutungsgeschichte zu schreiben und darüber in Ausführungen uns zu ergehen, welche Wendung die Entwicklung der Wissenschaften, in erster Linie der Mathematik, genommen hätte, wenn nur eines jener Ereignisse anders ausgefallen wäre, genug, es war so, wie wir sagten. Griechischer Einfluß, unmittelbarer wie durch Araber vermittelter, blieb den in Europa außerhalb Griechenland und Italien angesiedelten Stämmen fremd, wenn wir von Spanien absehen, dessen Ausnahmestellung wir oben einige Worte gewidmet haben. Nur was durch römische Zwischenträger eingeführt werden konnte, kam der nordischen Mathematik, um uns dieses wenn auch im einzelnen nicht immer zutreffenden Sammelnamens zu bedienen, zugut. Wir wissen aus den Kapiteln, in welchen wir mit den Römern uns besonders beschäftigten, wie blutwenig das war, wenn auch immerhin mehr, als man lange Zeit meinte. Wir müssen jetzt verfolgen, wie jenes Wenige in fast noch absteigender Reihenfolge da und dort zu erkennen ist, bis seit den Kreuzzügen, also seit dem XII. S., die europäische Wißbegier sich hungrig abwandte von den stets leereren Säcken römischklösterlicher Speisekammern, um an den vollen Speichern arabischer Gelehrten sich so zu sättigen, daß die Überladung merklich wird, daß nicht alles verdaut werden konnte.

Vorläufig befinden wir uns noch in der Zeit, welche an unseren römischen Abschnitt sich anschließt, am Ende des VI. S. Damals wurde 570 in Carthagena Isidorus geboren[1]). Seine Mutter war die Tochter eines gotischen Königs, eine seiner Schwestern soll den Thron des Königs Levigild geteilt haben. Seine übrigen Geschwister waren sämtlich hohe kirchliche Würdenträger. Bei solchen Verbindungen kann es nicht Wunder nehmen, daß Isidorus schon nach kaum zurückgelegtem 30. Lebensjahre im Jahre 601 Bischof von Sevilla wurde, eine Stellung, die er bis zu seinem Tode 636 bekleidete. Aber Isidorus Hispalensis, wie er von seinem Wohnsitze heißt, recht-

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 277—279.

fertigte nachträglich die Wahl, die ihn getroffen hatte. Seine Beredsamkeit machte, um das Wort eines Schülers über ihn zu gebrauchen, seine Zuhörer erstarren. Beinamen wie „Zierde der katholischen Kirche“, wie „der hervorragende Gelehrte“ wurden ihm beigelegt, und zweimal 619 und 633 wurde ihm die Ehre zuteil, bei einem Konzil den Vorsitz zu führen. Seine Schriften waren zahlreich, doch haben wir es nur mit einem Werke zu tun, einer Art von Enzyklopädie in 20 Büchern, welche er verfaßte, und in welcher er sich wenn nicht der Form so doch dem Inhalte nach streng an die schon vorhandenen römischen Enzyklopädien eines Martianus Capella, eines Cassiodorius Senator anschloß, welche er von nun an ersetzte, fast verdrängte.

Die Ursprünge, Origines, oder auch die Etymologien ist der Titel des Werkes. Isidorus liebt es nämlich, die Erklärung des Sinnes eines Ausdruckes aus dessen sprachlichem Ursprunge zu entnehmen, und so bilden Wortableitungen einen großen Teil des umfassenden Werkes. Gleich zu Anfang ist die Wissenschaft als aus 7 Teilen bestehend angegeben. Es sind dieselben Teile, dieselbe Reihenfolge, welche wir bereits kennen. Es ist das Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik und das Quadrivium der mathematischen Wissenschaften: Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie. Die Kapitel 21 bis 24 des I. Buches handeln von den Abkürzungszeichen der Alten, doch würde man fehl gehen, wenn man hier die Apices suchen wollte. Sie sind ebensowenig behandelt wie gewisse musikalische Zeichen, deren die Römer sich doch unzweifelhaft bedienten. Nur im XV. Buche, Kapitel 15 und 16 von den Ackermaßen und von den Reisemärschen und im XVI. Buche, Kapitel 24, 25, 26 von den Gewichten, von den Maßen, von den Zeichen der Gewichte[1]) finden sich Maßvergleichungen und in dem letztgenannten Zeichen von Gewichtsteilen. Es sind das dieselben von den altrömischen sich unterscheidenden Namen und Zeichen, deren auch Victorius sich bedient hatte (S. 531), die auf dem Abacus in der gefälschten Geometrie des Boethius vorkommen, dem man also um dieser besonderen Zeichen wegen nicht ein späteres Datum als die Lebenszeit des Isidorus zuschreiben müßte[2]), sondern nur als die des Victorius, eine Notwendigkeit, welche durch die Lebenszeit des Boethius selbst reichlich erfüllt wäre. Jene vorerwähnten Kapitel des I. Buches der Origines enthalten dagegen Erklärungen von mancherlei grammati-

[1]) Diese 5 Kapitel sind abgedruckt bei Hultsch, *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae* II, 106—123. Auf pag. 114 lin. 6—12 findet sich eine Ableitung von *siclus* aus dem hebräischen *sicel*. [2]) Friedlein, Zahlzeichen und elementares Rechnen usw. S. 59.

schen Zeichen, von Sternchen, von besonderen Anführungszeichen für biblische Stellen und dergleichen mehr. Das III. Buch handelt von den vier mathematischen Wissenschaften, unter welchen, wie Isidorus sagt, die weltlichen Schriftsteller alle mit Recht die Arithmetik vorangestellt haben; denn sie bedürfe zu ihrer Darlegung keiner anderweitigen Vorkenntnisse, wie es bei der Musik, der Geometrie, der Astronomie der Fall sei. Diesem Beispiele folgend schickt auch Isidorus die Arithmetik voraus, deren Ursprung und Übergang zu den Römern er in den vielfach angeführten Worten schildert: „Man hält dafür, daß Pythagoras bei den Griechen die Wissenschaft der Zahl zuerst aufgeschrieben habe, daß sie alsdann von Nikomachus weitläufiger behandelt wurde; den Römern wurde sie durch Appuleius und Boethius bekannt." Im 3. Kapitel erklärt Isidorus die lateinischen Zahlennamen in einer Weise, welche dem Leser mitunter als Spott erscheinen müßte, könnte man nicht die feste Überzeugung von dem ernstesten wissenschaftlichen Streben des Isidorus haben. Da soll decem, zehn, von dem griechischen *δεσμεύειν*, zusammenbinden, herkommen, weil die Zehn alle niedrigeren Zahlen erst vereinige. Da stammt centum, hundert, von *κανθός*, das Rad, warum, wird nicht gesagt. Da wird mille, tausend, aus multitudo, die Menge, erklärt. Glücklicherweise wird der undankbare Gegenstand bald wieder verlassen, und die folgenden Kapitel bringen die bekannten Unterscheidungen der Zahlen in gerade und ungerade, in vollkommene und überschießende, in nach gegebenen Verhältnissen proportionale, in lineäre Zahlen, Flächenzahlen und Körperzahlen usw. Die Zahl hat für Isidorus eine solche Würde, daß er einem anderen kirchlichen Schriftsteller folgend in die Worte ausbricht[1]), welche von ihm aus sich durch die verschiedensten Schriftsteller weiter vererbt haben: „Nimm die Zahl aus allen Dingen weg, und alles geht zugrunde. Raube dem Jahrhundert die Rechnung und die Gesamtheit wird von blinder Unwissenheit ergriffen, und nicht kann von den übrigen Tieren unterschieden werden, wer die Verfahren des Kalkuls nicht kennt." Wir haben hier *computus* mit *Rechnung* übersetzt. Sollte es nötig sein zu beweisen, daß das Wort diese allgemeine Bedeutung besitzt, so könnten wir auf den Astrologen Julius Firmicus Maternus verweisen, wenn er sagt: Siehst Du, wie die welche die ersten Rechnungsverfahren *(computos)* lernen in langsamer Bewegung ihre Finger biegen[2])?

---

[1]) Origines Lib. III, cap. 4, § 4: *Tolle numerum rebus omnibus et omnia pereunt. Adime seculo computum et cuncta ignorantia caeca complectitur, nec differri potest a ceteris animalibus qui calculi nescit rationem.* [2]) Firmicus Maternus, Mathesis Liber I, cap. V, § 14 (ed. Sittl, Leipzig 1894, pag. 13

Aber wie hat man denn gerechnet? wird im stillen jeder Leser fragen. Darüber gibt Isidorus keinerlei Auskunft. Nur an einer Stelle sagt er uns, wie uns scheint, wie zu seiner Zeit nicht mehr gerechnet wurde. Im X. Buche, welches nicht weiter in Kapitel abgeteilt bestimmt ist, Wörter zu erklären, welche selbst in ziemlich alphabetischer Ordnung aufeinander folgen, heißt es in der 43. Nummer unter *calculator: a calculis i. e. lapillis minutis, quos antiqui in manu tenentes componebant numerum*, also Rechnen von Rechenpfennigen d. h. kleinen Steinchen, welche die Alten in der Hand zu halten und die Zahlen daraus zusammenzulegen pflegten.

Was in dem III. Buche von Geometrie, Musik und Astronomie vorkommt, ist noch dürftiger als das Arithmetische, auch in dieser Beziehung an die Vorgänger des Isidorus erinnernd. Die große Menge, auch der berühmten Gelehrten, wußte von diesen Teilen der Mathematik wenig mehr als einige Wort- und Sacherklärungen und mußte es dabei bewenden lassen. Auch Isidorus macht hierin keinerlei Ausnahme.

Das war, wie wir schon gesagt haben, das Werk, welches für lange Zeit die eine Hauptquelle des Wissens bildete, aus welcher die Nachkommen schöpften, während die Werke des Martianus Capella, des Cassiodorius Senator in den Hintergrund traten und nur Macrobius und Boethius einer Gunst sich erfreuten, welche dem einen für seine größere Selbständigkeit, dem anderen für seine größere Ausführlichkeit in der Tat gebührte.

Mehr vielleicht als durch seine Schriften machte sich Isidorus durch seine Fürsorge für den Unterricht verdient. Die Regel des heiligen Benedikt von Nursia hatte die Aufnahme von Kindern als Klosterzöglingen vorgesehen und Klosterschulen zum Bedürfnisse gemacht. Isidorus stiftete seit seiner Erhebung zum Bischofe gleichfalls eine Art von Schule, in welcher die notwendigsten Lehrgegenstände eingeübt wurden.

Etwa ein Jahrhundert nach der Geburt von Isidorus von Sevilla erblickte der Mann das Licht der Welt, zu welchem wir uns jetzt zu wenden haben, und der uns nach dem fernsten Norden von Europa führen wird: Beda, genannt der Ehrwürdige, venerabilis[1]). Die Ge-

---

lin. 30—31) *Vides ut primos discentes computos digitos tarda agitatione deflectant?* Die Mathesis ist, wie Mommsen (Hermes XXIX, 468—472. Berlin 1894) gezeigt hat, zwischen dem 30. Dezember 335 und dem 22. Mai 337 verfaßt.

[1]) Karl Werner, Beda der Ehrwürdige und seine Zeit. Wien 1875. Vgl. daneben auch die Vorreden von Giles zu dem I. und VI. Bande seiner Ausgabe von Bedas Werken: *Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia.* London 1843. 12 Bände 8°.

schichte dieses Mannes und seiner folgereichen Leistungen ist so untrennbar mit der Geschichte der Bekehrung der britischen Inseln verbunden, daß wir notwendig etwas weiter ausholen und bei dieser einen Augenblick verweilen müssen.

Irland war schon in der ersten Hälfte des V. S. von Gallien aus bekehrt worden. Klöster entstanden dort, in welchen, getreu den Überlieferungen des heiligen Benedikt und des Cassiodorius (S. 569), geistliche und weltliche Schriftsteller, lateinische sowohl als griechische, zum Gegenstande des Studiums gemacht wurden. Dazu gehörte besonders das Kloster Bangor, von welchem in der zweiten Hälfte des VI. S. der heilige Kolumban auszog, neue Klöster an verschiedenen Orten gründend, so das Kloster Luxeuil in Burgund, so Bobbio in Oberitalien, wo er selbst 615 starb. Andere irische Mönche zogen dieselbe Heerstraße des Glaubens durch Jahrhunderte hindurch. Die Klöster, welche von Kolumban, von seinen Landsleuten Gallus, Pirmin und anderen in Deutschland, in der Schweiz, in Norditalien eingerichtet worden waren, erhielten so immer frischen Zuzug, und in zierlichen irischen Buchstaben entstanden an den verschiedensten Orten saubere Abschriften des gemischtesten Inhaltes. Die Klöster irischen Ursprungs wetteiferten so in ihren bildungsfreundlichen Bestrebungen mit denen der Benediktiner, da und dort mit ihnen verschmolzen.

Gleichfalls von Irland aus ging ein früher Zug von Missionären hinüber nach der nahe gelegenen größeren Insel, nach Schottland und England. Allerdings war ihr Wirken dort nicht von nachhaltigem Erfolge. Nachdem am Anfange des V. S. bereits Ninian im südlichen Schottland das Christentum verbreitet hatte, wurde es nach der erobernden Einwanderung der Angeln und Sachsen um 450 teils wieder vernichtet, teils in die Gebirge zurückgedrängt. Unter Papst Gregor dem Großen begann von Rom aus 596 der wiederholte Versuch, jene Lande zu bekehren, und bald war Canterbury der Sitz eines Erzbischofs, und der König von Kent nahm den neuen Glauben an. So gab es auf der britischen Hauptinsel zwei Kirchen, die ältere und die jüngere, örtlich voneinander getrennt, in Gewohnheiten und Einrichtungen mehrfach voneinander abweichend, namentlich in einem Punkte, der von Wichtigkeit wurde, so geringfügig der Streitpunkt an sich uns erscheinen mag.

Die südliche, römische Festordnung verlangte, daß die Feier des Osterfestes als des Festes der Auferstehung frühestens am Abend des 14. Nisan, spätestens am Abend des 20. Nisan jüdischer Rechnung beginne. Die nordische, britische Ordnung wollte das Fest zwischen um einen Tag früher gelegenen äußersten Grenzen feiern.

Es kam im Jahre 664 zu einer öffentlichen Disputation über diesen Gegenstand unter dem Vorsitze Königs Oswin, und dieser entschied zugunsten der römischen Auffassung. Es läßt sich denken, daß solche Vorgänge ein reges Interesse für den Gegenstand erwecken mußten, über den man öffentlich gestritten hatte, ein Interesse, das in letzter Linie dem Rechner und seiner Kunst zugute kommen mußte. Der nun geeinigten Kirche festeren Zusammenhalt zu geben schickte Papst Vitalian, nachdem der Bischofssitz in Canterbury 669 erledigt war, zwei neue hochbegabte Männer, Theodor als Bischof, Hadrian als seinen Ratgeber. Theodors persönliche wissenschaftliche Neigungen begegneten sich mit dem eben hervorgehobenen Interesse, sei es, daß wir darin eine Gunst des Zufalles zu erblicken haben, sei es, daß bei seiner Wahl Rücksicht darauf genommen worden war. Er achtete streng darauf, daß für den ihm untergebenen angelsächsischen Klerus neben der heiligen Schrift und den mit dem Studium derselben zusammenhängenden sachlichen und sprachlichen Unterweisungen auch Metrik, Astronomie und kirchliche Festrechnung Gegenstände des klösterlichen Unterrichts wurden. Sprachstudien waren nicht weniger gefördert. Es gab zu Bedas Zeiten, also wenige Jahrzehnte nach Theodors um 690 erfolgtem Tode, Männer in England, welche des Griechischen und Lateinischen eben so gut wie ihrer eigenen Muttersprache kundig waren. Leider waren die griechischen Werke, welche sie lasen, nicht solche, wie wir sie zum Besten der mathematischen Wissenschaften wünschen müßten.

Wie wir früher gesagt haben, alles, auch das Griechische, kam von Rom, und griechische Mathematik war in Originalwerken darunter offenbar gar nicht vertreten. Es war schon verhältnismäßig sehr viel, daß überhaupt eine gewisse Neigung zur Erledigung kirchlichmathematischer Fragen anders als auf von auswärts eingetroffene Anordnung hin in den damals an der schottisch-englischen Grenze gegründeten Klöstern großgezogen wurde, eine Neigung, die von da aus, wie wir sehen werden, durch Schüler jener Klöster über Frankreich und Deutschland sich fortsetzte, während in den älteren irischen Klöstern z. B. an solche Fragen kaum gedacht wurde.

Um jene Zeit 674 und 682 war es, daß durch Biscop, einen edeln Than, der als Mönch und Abt den Namen Benedikt erhielt, dicht an der Grenze Schottlands, wo Tyne und Were unweit voneinander in das Meer sich ergießen, zwei Klöster erbaut und St. Peter und Paul geweiht wurden. Der Einrichtung der Klöster war durch Biscop, der vielfach Reisen nach Rom machte und stets neue Bücherschätze, Reliquien, Gemälde zur Ausschmückung der Kirche von dort mitbrachte, die Regel des Benediktinerordens zugrunde ge-

legt. In dieser Gegend ist Beda 672 geboren, in diesen Klöstern wurde er erzogen, hier verbrachte er den Verlauf seines ganzen Lebens in ruhiger Emsigkeit, hier starb er am 26. Mai 735, am Feste Christi Himmelfahrt.

Beda hat als ein Hauptwerk eine Kirchengeschichte hinterlassen, welche bis zum Jahre 731 hinabreicht, und an deren Ende er das Verzeichnis derjenigen Schriften gibt, welche er bis dahin — bis zu seinem 59. Lebensjahre, wie er sagt — verfaßt hat. Dadurch ist einerseits die Zeit seiner Geburt genau bestimmbar geworden[1]), andererseits auch möglich geworden, viele ihm früher wohl beigelegte und unter seine Werke aufgenommene Schriften als unecht wieder zu entfernen, da er unmöglich neben den Pflichten eines Messepriesters, die er zu erfüllen hatte, neben dem Unterrichte der zahlreichen Schüler, welche er heranbildete. in den vier Jahren, um welche er nur die Anfertigung jenes Verzeichnisses überlebte, vieles schriftstellerisch geleistet haben kann. Zwei Werke sind in dem Verzeichnisse als von Beda herrührend anerkannt, die in einem gewissen geistigen Zusammenhange stehen. Das eine, eine physische Weltbeschreibung, führt den Namen De natura rerum, über die Natur der Dinge. Es ist nach Plinius bearbeitet, wie Beda selbst an einzelnen Stellen erklärt. An die Weltkunde schließt sich sodann die Zeitkunde an, der die Abhandlung De temporibus, über die Zeiten, gewidmet ist. Diese Schrift gibt im 14. Kapitel selbst ihr Datum an, sie ist 703 verfaßt.

Eine ausführlichere Bearbeitung führt den Titel: *De temporum ratione*, über Zeitrechnung. Sie ist mindestens 14 Jahre später als die kürzere Fassung vollendet, da sie dem Abte Huaetberct zugeeignet ist, welcher erst 716 in diese Stellung eintrat. In der Vorrede beruft sich Beda ausdrücklich auf die beiden genannten Schriften von der Natur der Dinge und von den Zeiten. Sie seien nach dem Urteile derjenigen, welche sie zu benutzen Gelegenheit hatten, allzugedrängter Schreibweise gewesen, als daß sie den Nutzen hätten stiften können, den er beabsichtigte. Namentlich die Osterrechnung scheine einer weitläufigeren Auseinandersetzung zu bedürfen, und so habe er sich denn entschlossen, ein derartiges Lehrbuch der Zeitrechnung seinen Schülern zu übergeben. Als Quellen, welche Beda dabei benutzte, hat man Macrobius und Isidorus nachweisen können[2]). Für anderes sind uns seine Quellen unbekannt, wo er der älteste Schriftsteller ist, von welchem eine ausführlichere Darstellung des Gegenstandes sich erhalten hat. Wir meinen damit gleich das 1. Kapitel der Zeitrech-

[1]) Werner, Beda S. 81. [2]) Ebenda S. 122 und 125.

nung, von welchem wir schon (S. 527) ankündigend gesprochen haben. Es galt sonst auch wohl für eine selbständige Abhandlung unter dem Titel „Über die Fingerrechnung“, bis es auf Grund einiger Handschriften des britischen Museums an diesen seinen rechtmäßigen Platz gebracht wurde. Das gleiche Schicksal teilte das 4. Kapitel, welches für eine Abhandlung „Über die Rechnung mit Unzen“ galt[1]). Das erste Kapitel beziehungsweise die ganze Schrift über Zeitrechnung leitet Beda mit den Worten ein: „Wir hielten es für nötig, erst in Kürze die überaus nützliche und stets bereite Geschicklichkeit der Fingerbeugungen zu zeigen, um dadurch eine möglich größte Leichtigkeit des Rechnens zu geben; dann, wenn der Geist des Lesers vorbereitet ist, wollen wir zur Untersuchung und Aufhellung der Reihe der Zeiten mittels Rechnung kommen.“ Und einige Seiten später heißt es: „Bezüglich der oben bemerkten Rechnung kann auch eine gewisse Fingersprache gebildet werden teils zur Übung des Geistes, teils als Spielerei“ Man sieht hier einen scharfen Gegensatz[2]). Die Fingersprache ist, wenn auch Geistesübung mit ihr verbunden ist, nicht mehr und nicht weniger wie Spielerei. Das Fingerrechnen ist eine Notwendigkeit. Man hat gewiß mit Recht mehrfach aus diesen Stellen gefolgert, daß zu Bedas Zeiten ein Fingerrechnen, man würde wohl besser sagen ein Kopfrechnen mit Unterstützung durch die zur besseren Erinnerung an die allmählich sich ergebenden und im Gedächtnisse festzuhaltenden Zahlen vorgenommenen Fingerbeugungen, allgemein in Übung war. Beda lehrt in ausführlicherer Darstellung, wie man von der linken Hand beginnend und zur Rechten fortschreitend die einzelnen Zahlen darstellen solle. Er lehrt es im großen und ganzen in Übereinstimmung mit Nikolaus von Smyrna (S. 514—515), in Einzelheiten von ihm abweichend, so daß eine unmittelbare Abhängigkeit dieses letzteren Schriftstellers von Beda, an und für sich nicht recht wahrscheinlich, nur um so weniger anzunehmen sein dürfte[3]). Allein wenn nun der Schüler so vorbereitet ist, wenn er seinem Gedächtnisse überall, wo er geht und steht, mit den Fingern zu Hilfe kommen kann — denn das ist ja die Bedeutung der *solertia promptissima*, der stets bereiten Geschicklichkeit — wie verfuhr man dann eigentlich?

Wir sind nicht imstande, aus Bedas Schriften diese gewiß

[1]) Beda (ed. Giles) VI, 139—342 das Werk *De temporum ratione*. Dessen Caput 1. *De computo vel loquela digitorum* pag. 141—144 und Caput 4. *De ratione unciarum* pag. 147—149. [2]) Stoy, Zur Geschichte des Rechenunterrichtes I, 38 (Jena 1878) hat wohl zuerst durch Nebeneinanderstellung der beiden Ausdrücke darauf aufmerksam gemacht. [3]) Auch diese Bemerkung hat Stoy l. c. S. 36—37 gemacht.

wichtigste Frage zu beantworten. Beda sagt nicht eine Silbe über die Rechnungsverfahren selbst. Nur zweierlei können wir als Schlußfolgerung ziehen. Erstens, daß Beda bei seinem Schweigen nur an die verhältnismäßig sehr einfachen Rechnungen (hauptsächlich Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen durch 4) dachte, welche bei der kirchlichen Zeit- und Festrechnung vorkamen, und welche in der Tat leicht im Kopfe auszuführen waren. Zweitens können wir ihm unmittelbar entnehmen, daß es eine weitverbreitete Sitte war, die er schilderte. Er sagt nämlich, der heilige Hieronymus müsse schon das Verfahren des Fingerrechnens gekannt haben, da gewisse Anspielungen desselben nicht anders zu verstehen seien. Beda hat demgemäß bei Hieronymus das Fingerrechnen wiedererkannt, mit welchem er vertraut war und seine Schüler vertraut zu machen beabsichtigte. Eine Quelle muß also vor dem Tode des Hieronymus d. h. vor 420 vorhanden und wahrscheinlich in lateinischer Sprache vorhanden gewesen sein. Eine anderer Frage ist die, ob die Lehren sich an eine geschriebene Quelle anknüpften. Uns scheint es fast natürlicher, an eine durch Jahrhunderte sich fortsetzende mündliche Überlieferung der Fingerbeugungen zu glauben, wie das Rechnen unter Anwendung der Finger sich unzweifelhaft nur durch mündliche Lehre fortpflanzte. Diese unsere letztere Behauptung ist in der Natur der Dinge begründet, hat aber außerdem eine wesentliche Unterstützung in der Tatsache, daß wie Beda und Nikolaus von Smyrna so auch jener Araber, der in Versen die Fingerstellungen lehrte (S. 710), über das wirkliche Rechnen keine Silbe verliert.

Ist diese Lücke schon für das Rechnen mit ganzen Zahlen vorhanden, so kann man zum voraus versichert sein, daß ein umfassendes Bruchrechnen erst recht nicht gelehrt wird. In der Tat findet sich in dem 4. Kapitel über die Rechnung mit Unzen kaum mehr als die Einteilung des aus 12 Unzen bestehenden Asses und der Unze selbst, ein Beleg, wenn ein solcher verlangt würde, für den unmittelbar römischen Ursprung des Ganzen. Beda bemerkt, der Begriff als Gewicht habe den Ausgangspunkt gebildet, dann aber sei abgeleitet davon nur der Begriff des Ganzen und seiner Teile übrig geblieben. Wenn man von einem Ganzen sein Sechstel wegnehme, so nenne man den Rest *dextans* usw. Auch die Zeichen für die Brüche fehlen nicht. Solche waren, wie wir wiederholt zu bemerken hatten, seit Jahrhunderten in Gebrauch. Es hat wohl die Bedeutung des einen oder des anderen Bruchnamens sich verändert; es haben neue Namen sich eingeschoben; die Zeichen haben sich abgerundet, sind neuen Namen entsprechend neu hinzugetreten, aber begrifflich Neues tritt uns nicht entgegen.

Die Osterrechnung, der eigentliche Mittelpunkt der Zeitrechnung, gründet sich bei Beda wie bei Cassiodorius, wie bei anderen (S. 573) auf die 19 jährige Wiederkehr des Zusammenfallens von Sonnen- und Mondzeiten und stellt, wie wir oben andeuteten, an die Rechenkunst des Schülers, der nur diese Aufgabe zu lösen beabsichtigte, keine übermäßige Anforderung, so daß die Erfüllung der auf einem Ausspruche des heiligen Augustinus beruhenden Vorschrift[1]), es müsse in jedem Mönchs- und Nonnenkloster wenigstens eine Person vorhanden sein, welche es verstehe, die Ordnung der kirchlichen Feste und damit den Kalender für das laufende Jahr festzustellen, nicht gerade schwer war.

Dasselbe Jahr 735, in welchem Beda starb, war das Geburtsjahr Alcuins[2]). Er war ein vornehmer Angelsachse und hieß mit heimatlichem Namen Alh-win, d. h. Freund des Tempels, woraus eben Alcuin entstanden ist. Fast noch häufiger nannte er sich selbst Albinus. Sein Lehrer war Egbert von York, ein naher Freund Bedas, wie aus einem vertrauten Briefe Bedas an ihn über kirchliche Verhältnisse hervorgeht. Egbert legte an der mit einer reichen Bibliothek ausgestatteten Schule seines Bischofssitzes das neue Testament aus, die übrigen Fächer waren seinem Verwandten Aelbehrt anvertraut, zu welchem Alcuin in enge Beziehungen trat. Er begleitete ihn noch als Jüngling auf einer wissenschaftlichen Reise nach Rom, dem Hauptmarkte für die Erwerbung von Handschriften, er wurde sein Nachfolger in der Leitung der Yorker Schule, als Aelbehrt 766 nach Egberts Tode den erzbischöflichen Stuhl bestieg.

Alcuin erzählt uns selbst, worin der Unterricht an der Schule bestand. Die Geheimnisse der heiligen Schrift wurden erläutert. Daneben wurden Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Musik und Poesie gelehrt. Auch die exakten Wissenschaften kamen nicht zu kurz. Astronomie und eigentliche Naturgeschichte, die Osterrechnung bildeten besondere Lehrgegenstände, die in gleichem Inhalte uns auch bei Beda begegnet sind, und die von Alcuin mutmaßlich nicht viel anders gelehrt wurden als es bei seinen Vorgängern aufwärts bis zu Isidorus, zu Cassiodorius, zu Victorius der Fall gewesen war.

Er wurde durch die gleichen Werke römischer Gelehrsamkeit unterstützt, welche in der Büchersammlung von York sämtlich vor-

---

[1]) *Histoire littéraire de la France par des religieux Bénédictins* VI, 70, und Sickel, Die Lunarbuchstaben in den Kalendarien des Mittelalters. Sitzungsber. d. Wiener Akademie. Philosoph.-histor. Klasse XXXVIII, 153 (1875). [2]) Karl Werner, Alcuin und sein Jahrhundert. Paderborn 1876. Kurz, aber übersichtlich ist Dümmlers Artikel „Alkuin" in der Allgemeinen deutschen Biographie I, 343—348 (1875).

rätig waren. Hat doch Alcuin in dem Gedichte[1]), in welchem er der Unterrichtszweige gedenkt, auch ein Verzeichnis von solchen Schriften gegeben, die in York zu finden waren:

> Finden wirst dort du die Spur der alten Väter der Kirche,
> Finden was für sich der Römer im Erdkreis besessen
> Und was Griechenlands Weisheit lateinischen Völkern gesandt hat.
> Auch was das Volk der Hebräer aus himmlischem Regen getrunken,
> Oder was Afrika hat hellfließenden Lichtes verbreitet.

Natürlich ist bei dem letzten Verse vorwiegend an Augustinus zu denken, bei dem auf Griechenland bezüglichen an ihn selbst den scharfsinnigen Aristoteles — *ipse acer Aristoteles* — welche beide im weiteren Verlaufe ausdrücklich genannt sind. Kaum festzustellen dürfte freilich sein, ob aristotelische Originalschriften, ob, worauf die Bemerkung Griechenlands Weisheit sei den Lateinern zugesandt eher zu deuten scheint, nur die lateinischen Bearbeitungen durch Boethius vorhanden waren. Von römischen Schriftstellern waren nach Alcuins Aussage unter vielen anderen Victorinus, wahrscheinlich der Grammatiker dieses Namens aus dem IV. S., vielleicht aber auch der Schriftsteller, den wir als Victorius kennen gelernt haben, Boethius, Plinius vertreten. Beda wird neben diesen als ebenbürtiger Schriftsteller genannt.

Erzbischof Aelbehrt starb 780, und nun wurde Alcuin nach Rom gesandt, um für dessen Nachfolger die päpstliche Bestätigung einzuholen. Auf dieser Reise traf er in Parma mit Karl dem Großen zusammen, welcher ihn schon vorher sei es persönlich, sei es durch den Ruf der Gelehrsamkeit, der um den Yorker Schulvorsteher sich weiter und weiter verbreitete, kennen gelernt hatte. Karl wünschte ihn bei sich zu haben, um den Stand des Wissens in Deutschland auf eine bessere Stufe zu bringen, und nach Einholung der Erlaubnis seiner Vorgesetzten folgte Alcuin der kaiserlichen Einladung 782. Nach achtjährigem Aufenthalte an dem Kaiserhofe, der übrigens nicht an einem und demselben Orte sich aufhielt, sondern bald da, bald dort seinen Sitz hatte, kehrte Alcuin nach der Heimat zurück, dann wieder zu Karl, der ihn nicht missen wollte, und als Alcuin gebrechlich und von häufigen Krankheiten heimgesucht das beschwerliche Leben eines wandernden Hofstaates nicht länger mitmachen konnte, wurde ihm die ersehnte Zurückgezogenheit in einer Art, wie

---

[1]) *Poema de Pontificibus et Sanctis ecclesiae Eboracensis* (d. h. von York) in den *Monumenta Alcuiniana* (ed. Wattenbach et Dümmler). Berlin 1873 als VI. Band der *Bibliotheca rerum Germanicarum*. Der Studienplan ist geschildert v. v. 1431 sqq. (S. 124—125), das Bücherverzeichnis v. v. 1534 sqq. (S. 128).

er sich dieselbe keineswegs gedacht hatte. Karl der Große schickte ihn 796 als Abt nach dem Kloster St. Martin in Tours, dessen Mönche einer strengeren Zucht als unter dem gerade verstorbenen Abte in hohem Grade bedürftig waren. Alcuin hat hier eine berühmte Klosterschule gegründet, aus welcher zahlreiche Lehrer hervorgingen, die alsdann in gleichem Sinne, wie sie erzogen und unterrichtet worden waren, an anderen Orten wirkten. Alcuin hat auch die großartige Büchersammlung in Tours ins Leben gerufen. So waren seine letzten Lebensjahre reich erfüllt. Er starb den 19. Mai 804.

Die Bedeutung, welche Alcuin für die Geschichte der Mathematik besitzt, liegt auf zweifachem Gebiete. Sie ist zu suchen in seinen Verdiensten um das Unterrichtswesen und in seiner schriftstellerischen Tätigkeit.

Wir haben Alcuin am Morgen seines Lebens als Lehrer in York wirken sehen. Wir haben von den nachhaltigen Erfolgen andeutungsweise gesprochen, die seine Lehrtätigkeit in Tours am Abende seines Lebens gehabt hat. Lehrer war er auch am Hofe Karls des Großen. War doch der Kaiser selbst, der an Wissenslust es allen zuvortat, kaum des Schreibens kundig, und so der Schule nur dem Alter nach entwachsen. Die Roheit der Zeit brachte das nun einmal mit sich, und ihr müssen wir es auch zuschreiben, wenn wir dem Gelehrtesten der Gelehrten, wenn wir Alcuin selbst fast nichts nachrühmen können als eine Aneignung fremden Stoffes. Der Verkehr Alcuins mit den hochgestellten Schülern und Schülerinnen mußte selbstverständlich ein anderer sein als er in der Klosterschule gebräuchlich war, ein anderer auch als er zwischen denselben Persönlichkeiten und sonstigen Hofbeamten herrschte. Damit größere Zwanglosigkeit gestattet war, legte Alcuin allen Mitgliedern der Schule, den Kaiser und sich selbst nicht ausgenommen, Beinamen bei, die der Bibel oder dem Altertum entnommen waren. Der Kaiser war König David oder König Salomo, Alcuin war Flaccus, die geistreiche Guntrada, Karls Geschwisterkind, war Eulalia genannt usw. Damit aber der mitunter trockene Lehrgegenstand den Schülern nicht zuwider würde, kleidete der Lehrer die an sich ernsthaft gemeinten Fragen nicht selten in das Gewand scherzhafter Rätsel, mitunter sogar dem derben, unfeinen Ton huldigend, welcher am Karolingerhofe zu Hause war. Der von Alcuin auf solche Weise erteilte Unterricht fand begeisterten Anklang. Um so dringender wurde Karls Wunsch ähnlich gebildete Lehrer seinem Volke zu geben. Ein Kapitulare von 789 aus Aachen datiert bestimmt, die Domstifte und Klöster sollen öffentliche Knabenschulen unterhalten, in welchen der Unterricht in den Psalmen, in Noten, im

Gesang, im Computus, in der Grammatik erteilt werden solle[1]). Wir haben absichtlich das Fremdwort Computus hier beibehalten, um es zweifelhaft zu lassen, ob nur der vorzugsweise so genannte *computus*, d. h. die von uns mehrfach besprochene Osterrechnung gemeint sein mag, oder, wie es uns viel wahrscheinlicher däucht, da von einem Lehrgegenstande für irgend welche Knaben, nicht für angehende Mönche die Rede ist, das Rechnen überhaupt. Wenige Jahre später beruft Karl Theodulf als Bischof von Mainz (794) aus Italien, ihn an die Spitze einer Domschule zu stellen. Für den Unterricht darf nichts genommen werden, als was von den Eltern freiwillig gegeben wird. Daß die Kinder aber zur Schule geschickt werden, bleibt nicht dem freien Willen der Eltern überlassen. Mit Strafen werden diese zur Erfüllung ihrer Pflicht angehalten. Mit der Volksschule tritt der Schulzwang ins Leben[2]).

Wir haben von Alcuins schriftstellerischer Tätigkeit zu reden und bringen unter diesem Titel Aufgaben zur Sprache, von denen es allerdings nicht sicher ist, ob sie Alcuin angehören. Daß sie ein altes Gepräge tragen, mag schon daraus entnommen werden, daß sie früher in den Druckausgaben nicht bloß von Alcuins, sondern auch von Bedas Werken Aufnahme fanden, während sie diesem letztgenannten wohl unter keinen Umständen angehören[3]). Die Zuweisung an Alcuin beruht auf mehreren Gründen, deren jeder einzeln für sich nicht sonderlich schwerwiegend ist, die jedoch in ihrer Gesamtheit vielleicht genügen, den Ausschlag zu geben. Wir haben erst davon gesprochen, daß Alcuin es liebte, bei seinem Unterrichte eine gefällige, oft scherzhafte Form der Fragestellung oder der Beantwortung zu wählen, letztere Form insbesondere nach griechischem Muster des Atheners Secundus aus dem I. und II. S. n. Chr., von welchem einige Alcuinische Fragen und Antworten ethischer und kosmographischer Art wörtlich entlehnt erscheinen[4]). Die Rätselform ist aber auch die der Aufgaben zur Verstandesschärfung, *propositiones ad acuendos iuvenes*. Man hat ferner darauf aufmerksam gemacht, daß deren Schreibweise überhaupt mit der Alcuins übereinstimme[5]). Man hat weiter auf einen Brief Alcuins an Karl den Großen sich bezogen, in welchem der Briefsteller sagt, er schicke gleichzeitig einige Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Erheiterung[6]) und hat vermutet diese Proben seien eben jene Aufgaben, insgesamt oder teilweise. Dem

[1]) Werner, Alcuin S. 35. [2]) Lorenz von Stein, Das Bildungswesen des Mittelalters, II. Auflage, S. 66 (Stuttgart 1883). [3]) Bedae Opera (ed. Giles) Bd. VI. Vorrede S. XIII. [4]) Werner, Alcuin S. 18. [5]) Giles l. c. [6]) *Monumenta Alcuiniana, Epistula* 112, pag. 459: *Misi aliquas figuras Arithmeticae subtilitalis laetitiae causa.*

gegenüber hat man freilich einzuwenden gewußt[1]), unter Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Erheiterung habe Alcuin ganz anderes verstanden, nämlich Anwendung zahlentheoretischer Begriffe auf Bibelerklärung, wie sie in einzelnen seiner Briefe und Schriften vorkommen. So habe, nach ihm, Gott, der alles gut schuf, sechs Wesen geschaffen, weil 6 eine vollkommene Zahl sei; 8 aber ist eine mangelhafte Zahl,

$$1 + 2 + 4 = 7 < 8,$$

und „deswegen geht der zweite Ursprung des Menschengeschlechtes von der Zahl 8 aus. Wir lesen nämlich, daß in Noahs Arche acht Seelen gewesen, von welchen das ganze Menschengeschlecht abstammt, um zu zeigen, der zweite Ursprung sei unvollkommener als der erste, welcher nach der Sechszahl geschaffen wurde“[2]). Beispiele solcher Zahlenmystik könnten gehäuft werden. Man könnte an einen Brief Alcuins erinnern, in welchem von den Zahlen 1 bis 10 gesagt wird, welche Beziehungen zu Gegenständen der Heiligen Schrift sie haben[3]). Man könnte bis auf Isidorus zurück[4]) merkwürdige Gedankenverknüpfungen verfolgen, in deren Nachahmung Alcuin die Zahl 153 der Fische, welche Petrus auf einen Zug fing[5]), zu erklären weiß, ausgehend von

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17$$

in Verbindung mit $51 = 50 + 1$ usw.[6]). Wir lassen es dahingestellt, ob diese Verweisungen, mögen sie selbst dem, was Alcuin an Karl schickte, einen anderen Inhalt geben können als nach der zuerst ausgesprochenen Vermutung, in Widerspruch stehen zu der Annahme, Alcuin habe die Aufgaben zur Verstandesschärfung zusammengestellt. Wir geben zu bedenken, daß, wer nach der einen Richtung mit Zahlenspielereien, die ihm freilich mehr als das, die ihm heiliger Ernst waren, sich beschäftigte, auch nach der anderen Seite Freude an Zahlenbetrachtungen haben und erregen konnte.

Wir wenden uns zur Erörterung dessen, was die Handschriften zur Entscheidung der Frage, von wem die Aufgaben der Verstandesschärfung herrühren, beizutragen vermögen? Rechenrätsel, welche einander insgesamt ähnlich sehen, finden sich in den allerverschiedensten Handschriften vor[7]). Wohl die älteste solche Handschrift ist

---

[1]) Hankel S. 310—311. [2]) *Monumenta Alcuiniana, Epist.* 259, pag. 818 bis 821. [3]) Ebenda *Epist.* 260, pag. 821—824. [4]) Isidorus, *De numeris* cap. 27. Auf diese Quelle ist zuerst aufmerksam gemacht bei Werner, Gerbert von Aurillac. Wien 1878, S. 66, Anmerkung 2. [5]) Evangelium Johannes XXI, 11. [6]) Werner, Alcuin S. 153. [7]) Herm. Hagen, Antike und mittelalterliche Rätselpoesie. II. Ausgabe. Bern 1877. S. 29—34.

diejenige, aus welcher die uns hier beschäftigenden Aufgaben zum Abdrucke gelangt sind[1]). Sie gehört, wenn nicht alle Zeichen der Schriftvergleichung trügen, dem Ende des X. oder Anfange des XI. S., in runder Zahl dem Jahre 1000 an, und stammt aus dem Kloster Reichenau, welches auf einer Rheininsel am Ausgange des Bodensees durch den Irländer Pirmin um 725 gegründet worden war und wie wir uns erinnern (S. 577) schon 821 im Besitze einer schönen ordnungsgemäß aufgezeichneten Büchersammlung sich befand. Die Handschrift ist eine Sammelhandschrift und beginnt mit Alcuins Erläuterungen zur Genesis, welche durch den in einer Widmungsformel enthaltenen Namen ihren Verfasser selbst verraten. Die Erläuterungen schließen mitten auf der Vorderseite eines Blattes, und nun folgen ohne irgend welche Raumunterbrechung enge sich anschließend die Aufgaben zur Verstandesschärfung: *incipiunt capitula propositionum ad acuendos iuvenes* von dem gleichen Schreiber auf das Pergament gebracht. Ein Verfasser ist nicht angegeben, aber eben deshalb hat man gefolgert, Alcuin sei es, weil die Unmittelbarkeit des Anschlusses zu dieser Behauptung aufmunterte, welche in den schon angegebenen allgemeinen Betrachtungen Unterstützung fand.

Eines kann mit Bestimmtheit gesagt werden: die Handschrift rührt nicht von dem sachverständigen Sammler der Aufgaben her, möge er Alcuin oder wie immer geheißen haben, sondern von einem Mönche, der als Schreibkünstler geschickter war denn als Rechner, sonst würde er nicht so verhältnismäßig häufige Fehler in den Zahlen sich zuschulden haben kommen lassen, wie sie nur einem Abschreiber, nicht einem, der selbst rechnet, vorkommen können. Auch dieser Umstand dient dazu, die Entstehung der Sammlung in eine Zeit hinaufzurücken, die älter ist als das Jahr 1000, und wir machen darum von der nun einmal durch den Herausgeber[2]) von Alcuins Werken hergestellten Überlieferung Gebrauch, jene Aufgaben, die in einer Geschichte der Mathematik unter allen Umständen besprochen werden müssen, unter Alcuins Namen einzureihen. Sollten spätere Untersuchungen je einen anderen Verfasser an das Licht ziehen, so werden sie den Umstand doch sicherlich nicht zu entkräften imstande sein, daß er vor 1000 gelebt haben muß, daß also die Aufgaben ein Bild klösterlicher Gelehrsamkeit vor diesem Zeitpunkte uns bieten. Glänzend freilich ist das Bild nicht, aber

[1]) Über die Handschrift vgl. Agrimensoren S. 139—143. [2]) Abt Frobenius von St. Emmeran in Regensburg 1777. Sein weltlicher Name war Frobenius Forster. Er lebte 1709—1791. Vgl. Allgemeine deutsche Biographie VII, 163. Die *Propositiones ad acuendos iuvenes* sind abgedruckt in *Alcuini Opera* (ed. Frobenius) II, 440—448.

doch nicht so farblos wie nach den dürftigen Nachrichten, welche wir über das mathematische Wissen eines Isidorus, eines Beda allein zu geben imstande waren, erwartet werden möchte. Vielleicht ist zum Vergleiche darauf hinzuweisen, daß auch in einer Veroneser Handschrift des IX. Jahrhunderts eine poetisch eingekleidete arithmetische Aufgabe gefunden worden ist[1]).

Es sind algebraische und geometrische Aufgaben, welche hier auftreten, daneben solche, die nicht durch Rechnung, sondern mehr durch einen witzigen Einfall gelöst werden können, und überall, wo es möglich ist von einer Geschichte der betreffenden Aufgaben zu reden, d. h. ihr früheres Vorkommen zu bestätigen, sind es immer römische Quellen, auf welche man hinweisen muß. Von diesen Aufgaben seien einige hier erwähnt. Die 6. Aufgabe ist eine von denen mit nicht mathematischer Auflösung. Zwei Männer kauften für 100 solidi Schweine, je 5 Schweine zu 2 solidi. Die Schweine teilten sie, verkauften dann wieder 5 für 2 solidi und machten dabei ein gutes Geschäft, wie ging das zu? Sie hatten die 250 Schweine, welche sie gemeinschaftlich besaßen, in zwei gleiche Herden von je 125 Schweinen geteilt, so daß der eine alle fetteren, der andere alle weniger fetten Schweine vor sich hertrieb. Der erste verkaufte 120 von seiner Herde, indem er 2 für einen solidus gab, der zweite verkaufte gleichfalls 120, indem er 3 für einen solidus gab. Tatsächlich wurden 5 Schweine für 2 solidi hergegeben. Der Erlös des ersten betrug 60, der des zweiten 40 solidi, und damit war die Auslage gedeckt, während den Händlern noch 10 Schweine, je 5 von jeder Wertsorte, übrig blieben. — Die 8. Aufgabe ist eine Brunnenaufgabe, wie sie so häufig seit Heron uns begegneten. — Die 23. und 24. Aufgabe lehren die Fläche eines viereckigen und eines dreieckigen Feldes nach denselben Näherungsregeln messen, deren die gefälschte Geometrie des Boethius (S. 586) und die Vorschrift zur Juchartausmessung (S. 591) sich bedienen: das Viereck gilt als Produkt der halben Summen einander gegenüberliegender Seiten, das Dreieck als Produkt der halben Summe zweier Seiten in die Hälfte der dritten Seite. — An die Juchartausmessung erinnert auch die 25. Aufgabe von dem runden Felde, dessen Fläche gefunden wird, indem der Umfang 400 durch 4 geteilt und der Quotient quadriert, d. h. $\pi = 4$ angenommen wird. — Wir könnten noch recht vielerlei Aufgaben vergleichen und meistens Dinge erkennen, welche den römischen Ursprung wahrscheinlich machen. Nur drei Aufgaben heben wir noch hervor. Die 26. Aufgabe führt die Überschrift De cursu

[1]) E. Dümmler in der Zeitschr. f. deutsch. Altert. XXIII, 261 flg. (1879).

cbnks bc fugb lepprks. Nach Vertauschung von Konsonanten mit ihnen im Alphabete unmittelbar vorhergehenden Vokalen, wie sie (S. 803) auch bei Johannes von Sevilla an gewissen Stellen sich als notwendig erwies, wird daraus De cursu canis ac fuga leporis. Es ist die allbekannte Aufgabe von dem Hunde, welcher dem Hasen nachläuft, während der Hase 150 Fuß voraus ist, dagegen nur 7 Fuß weite Sprünge macht, der Hund aber 9 Fuß weit springt. Zum Zwecke der Auflösung wird 150 halbiert und daraus mit Recht gefolgert, daß der Hund den Hasen in 75 Sprüngen einholen werde. — Die 34. Aufgabe lautet wie folgt: Wenn 100 Scheffel unter ebensoviele Personen verteilt werden, so daß ein Mann 3, eine Frau 2 und ein Kind $\frac{1}{2}$ Scheffel erhält, wieviele Männer, Frauen und Kinder waren es? Die Antwort ist 11 Männer, 15 Frauen, 74 Kinder. Das ist die erste unbestimmte Aufgabe in lateinischer Sprache, die uns vorkommt. Es ist dabei bemerkenswert, daß der Text der Aufgabe die Möglichkeit nicht ganzzahliger Auflösungen ausschließt, daß von den ganzzahligen Auflösungen nur eine angegeben ist, daß die Art wie dieselbe gefunden worden sei, auch nicht einmal angedeutet ist. — Noch interessanter ist die 35. Aufgabe. Ein Sterbender verordnet letztwillig, daß, wenn seine im schwangeren Zustande zurückgelassene Witwe einen Sohn gebäre, der Sohn $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$, die Witwe $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ des Vermögens erben solle; gebäre sie aber eine Tochter, so solle diese $\frac{7}{12}$, die Witwe $\frac{5}{12}$ des Vermögens erben. Das ist dem Inhalte, wenn auch nicht den bestimmten Zahlen nach, die in den Pandekten enthaltene Teilungsfrage, deren römische Auflösung wir (S. 562) kennen gelernt haben. Der Sammler der Aufgaben zur Verstandesschärfung hat sich in der von ihm gegebenen Auflösung als einen Mann erwiesen, der in den Sinn letztwilliger Verfügungen einzudringen nicht imstande war, als einen Nachahmer der Römer, der unmöglich selbst Römer gewesen sein kann. Er löst deshalb auch die Aufgabe so verkehrt, als sie überhaupt allenfalls gelöst werden kann. Er sagt: Um Mutter und Sohn zu befriedigen, bedarf es 12 Teile, um Mutter und Tochter zu befriedigen, gleichfalls, zusammen also 24 Teile. Davon erhält in erster Linie der Sohn 9, die Mutter 3, in zweiter Linie die Mutter 5, die Tochter 7, die Teilung vollzieht sich also in dem Verhältnisse, daß die Mutter $\frac{3+5}{24} = \frac{1}{3}$, der Sohn $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, die Tochter $\frac{7}{24}$ der Hinterlassenschaft zu beanspruchen hat. — Wir haben unsere Auswahl mit einer Scherzfrage begonnen, welche durch Rechnung allein

nicht zu lösen ist. Mit der Erwähnung ähnlicher Aufgaben wollen wir schließen, nachdem wir die mathematisch interessanteren durchgesprochen haben. Da dürfte vor allem die 18. Aufgabe unsere meisten Leser wie eine Erinnerung aus der Kinderzeit anheimeln. Es ist die Aufgabe von dem Wolfe, der Ziege und dem Krautkopfe, welche in einem Boote, dessen Fährmann nur einen Reisenden gleichzeitig befördert, über einen Fluß gesetzt werden sollen, so daß niemals Ziege und Krautkopf oder Ziege und Wolf, also niemals zwei Feinde allein auf einem Ufer sich befinden sollen, während der Führer mit dem Boote unterwegs ist[1]). Noch ein zweites Rätsel, welches mit einigen anderen zusammen unter der besonderen Überschrift: „Rätsel zum Lachen" am Schlusse der Handschrift vereinigt ist, hat bis auf den heutigen Tag sich erhalten; es bezieht sich auf die von der Sonne verzehrte Schneeflocke, welche an dem im Winter blattlosen Baum haftete[2]).

So bergen die Aufgaben zur Verstandesschärfung mannigfachen Stoff in sich, der unverwüstliche Lebenskraft in Volkskreisen wie in halbwegs wissenschaftlichen Schulbüchern an den Tag gelegt hat. So befinden sich unter ihnen Aufgaben, welche auch nach rückwärts eine verfolgbare Geschichte besitzen, andere, welche zu immer erneuten Versuchen auffordern, die noch nicht gelungene Rückverfolgung zu vollziehen. Fragen wir uns, welche mathematische Anforderungen die Aufgaben an den, welcher der Lösung sich befleißigte, stellten, so sehen wir, daß er geometrisch nicht mehr zu wissen brauchte, als einige wenige dem praktischen Feldmesser gebräuchliche Formeln, algebraisch nicht mehr als die Behandlung der Gleichungen vom ersten Grade, daß Wurzelausziehungen nicht vorkommen, sondern nur die vier einfachen Rechnungsarten und diese fast ausschließlich an ganzen Zahlen.

Aber wie führte jene Zeit, wie führte Alcuin, wenn wir voraussetzen dürfen, die Sammlung rühre von ihm her, die Rechnungen aus? Wir haben (S. 829—830) bei Beda die gleiche Frage mit dem Zeugnisse des Nichtwissens abgelehnt, wir sind bei Alcuin bis zu einem gewissen Grade in derselben Lage, aber nur bis zu einem gewissen Grade. Zwei Stellen aus Alcuins Schriften führen nämlich zur Vermutung, er habe das Kolumnenrechnen und die Apices gekannt, welche wir bei Gelegenheit der gefälschten Geometrie des Boethius

---

[1]) Wenn Hagen l. c. S. 31 und Anmerkung 22 dieses Rätsel als in den *Annales Stadenses* vorkommend bezeugt, so ist damit für dessen Alter gar nichts gewonnen, da diese Annalen erst um 1240 geschrieben worden sind. [2]) Vgl. Max Curtze in einer Rezension unserer Agrimensoren in der Jenaer Literaturzeitung vom 12. Februar 1876.

beschrieben haben. Beide Stellen finden sich in Schriftstücken, welche wir schon angeführt haben, ohne jedoch diese bestimmten Sätze und deren Bedeutung hervortreten zu lassen. Wir haben den Unterrichtsplan, welchen Egbert an der Yorker Domschule einhalten ließ, aus einem Gedichte Alcuins, welches zwischen 780 und 796, wahrscheinlich sogar zwischen 780 und 782 entstand[1]), angegeben. Den 1445. Vers dieses langatmigen Gedichtes haben wir nachholend hier noch anzugeben: Egbert lehrte „diversas numeri species variasque figuras", auseinandergehende Arten der Zahl und deren verschiedene Gestalten. Wir möchten so übersetzen, weil wir entschieden glauben, daß der Genitiv numeri nicht minder zu variasque figuras als zu diversas species gehört, und ist diese Meinung richtig, so kannte nicht bloß Alcuin verschiedene Gestalten der Zahlen, so waren dieselben ein regelmäßiger Unterrichtsgegenstand in York, mutmaßlich wenn nicht zuverlässig auch später in Tours. Was aber konnten jene verschiedenen Gestalten der Zahlen sein? Wir sehen nur zwei Möglichkeiten der Erklärung. Entweder sind die Apices gemeint, wie sie in der gefälschten Geometrie des Boethius beschrieben sind, oder und vielleicht wahrscheinlicher die Dreiecke, Vierecke, Vielecke der Zahlen, die man aus der Arithmetik des gleichen Verfassers kannte. Beide Möglichkeiten sind vorhanden, und eine endgültige Entscheidung wird wesentlich von der Auffindung neuen Materials abhängen.

Die zweite Stelle könnte allerdings die Deutung auf die Apices begünstigen. Wir haben eines Briefes gedacht, in welchem Alcuin von arithmetisch-mystischen Erklärungen zu biblischen Texten Gebrauch macht. In eben diesem Briefe heißt es[2]): „Ebenso sehen wir die Reihenfolge der Zahlen in Gelenken, gleichsam gewissen Einheiten, durch endliche Gestaltungen zum Unendlichen wachsen. Denn die erste Reihenfolge der Zahlen ist von 1 bis zu 10, die zweite von 10 bis zu 100, die dritte von der Hundertzahl bis zur Tausendzahl." Das ist die älteste bestimmt nachweisbare Anwendung des Wortes articulus, Gelenk, für Zahlen, und zwar für Zahlen, welche die Rolle von Einheiten gleichsam spielen, d. h. etwas anders ausgesprochen runde Zahlen sind. Das ist zugleich die Hervorhebung der drei Hauptordnungen, in welche die Zahlen von 1 bis 1000 zerfallen, oder wieder etwas anders ausgesprochen der römischen Triaden. Beide

[1]) Über die Datierung vgl. Wattenbach in den *Monumenta Alcuiniana* S. 80. [2]) *Monumenta Alcuiniana, Epist.* 259, pag. 820. *Item progressionem numerorum articulis, quasi quibusdam unitatibus, ad infinita crescere per quasdam finitas formas videmus. Nam prima progressio numerorum est ab uno usque ad decem. Secunda a decem usque ad centum. Tertia a centenario numero usque ad millenarium.*

Kenntnisse sind dadurch bis vor das Todesjahr Alcuins 804, in welchem allerspätestens jener Brief geschrieben ist, hinaufgerückt, und es entstünde wenigstens die Frage, ob das Wort articulus für älter als die Apices zu halten ist?

Sei dem, wie da wolle, Eines können wir fortfahrend feststellen: eine Stetigkeit der Lehren, welche von dem Kloster St. Martin bei Tours ausgingen und an bestimmte Persönlichkeiten als Träger derselben sich anknüpften. Sehen wir, auf welche Weise dieselben nach Deutschland gelangten. In der Mitte des VIII. S. war in Fulda ein Kloster, begleitet von einer Klosterschule entstanden. Ratgar, der dritte Abt dieses Klosters 802—814 schickte, um die Schule auf die Höhe der Zeit zu bringen, drei junge Mönche nach St. Martin bei Tours, daß sie dort Alcuins Unterricht genössen und so zu vollendeten Lehrern würden. Einer dieser jungen jedenfalls unter den begabtesten Klosterzöglingen ausgesuchten Männer war Hrabanus Maurus[1]), der erste Lehrer Deutschlands, *primus praeceptor Germaniae*, wie er genannt worden ist. Die Verdienste desselben um die deutsche Sprache, welche er zu einem lateinisch-deutschen Bibelglossar anwandte, wie die meisten seiner zahlreichen Schriften liegen weit außerhalb des Bereiches unserer Untersuchungen. Wir würden uns nur mit den Schriften über die sieben freien Künste zu beschäftigen haben, welche er in mindestens ebensovielen Teilen behandelt hat, wenn dieselben uns erhalten wären. Leider ist dieses nicht der Fall. Die Arithmetik, die Musik, die Geometrie sind verloren gegangen. Statt einer eigentlichen Astronomie ist ein in Gesprächsform gehaltener Computus auf uns gekommen[2]), welcher, wie zahlreiche Stellen beweisen[3]), im Jahre 820 verfaßt ist. Dieser Computus ist ziemlich genau nach Bedas chronologischen Arbeiten gebildet und enthält kaum etwas für die Geschichte der Mathematik Wissenswertes, so daß man ihn wohl in negativer Weise verwertet hat, um zu schließen, ein Abacus und dergleichen könnten damals nicht Lehrgegenstände gewesen sein, weil auch gar nicht davon die Rede sei. Wir überlassen es unseren Lesern, wieviel Gewicht sie auf das Nichtvorhandensein einer Beschreibung in einer Schrift legen wollen, welche in innigem Zusammenhange mit anderen Schriften stand, die sämtlich verloren gegangen sind. Zu einer Bemerkung nötigt uns die Unparteilichkeit. In einem Kapitel des Computus des Hrabanus erscheinen in auffallendem Zusammenhange die Wörter

---

[1]) Werner, Alcuin S. 101—109. Dümmler, Hrabanusstudien in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1898, S. 24 flgg. [2]) Abgedruckt in Baluze, *Miscellanea* I, 1—92. Paris 1678. [3]) Ebenda pag. 43, 51 und häufiger.

digitus und articulus[1]). Sie betreffen nicht, wie man zunächst vermuten könnte, Finger- und Gelenkzahlen, sondern eine eigentümliche Gedächtnishilfe an den Knöcheln der Hand. Von älteren Schriften sind bei Hrabanus genannt: die Arithmetik des Boethius[2]), die Origines des Isidorus[3]), die Osterrechnung des Anatolius[4]). Zwei Jahre, nachdem Hrabanus seinen Computus verfaßt hatte, wurde er zum Abte seines Klosters gewählt und stand ihm 20 Jahre hindurch bis 842 mit wirksamem Eifer vor. Dann zog er sich in ein stilleres Leben zurück, welches er jedoch 847 wieder aufgeben mußte, um Erzbischof von Mainz zu werden. Als solcher starb er 856.

Männer der Fuldaer Schule trugen ihrerseits die Wissenschaft weiter, welche Hrabanus Maurus und seine Genossen aus Tours mitgebracht hatten. Walafried Strabo, 806 in Allemanien geboren, wurde 842 Abt zu Reichenau. Aus den Schriften dieses 849 verstorbenen Mannes und anderen gleichzeitigen Werken ist 1857 durch Pater Martin Marty in Einsiedeln eine Abhandlung „Wie man vor 1000 Jahren lehrte und lernte“ zusammengestellt worden, worin die Stelle vorkommt: „Im Sommer 822 begann ich unter Tattos Leitung das Studium der Arithmetik. Zuerst erklärte er uns die Bücher des Konsuls Manlius Boethius über die verschiedenen Arten und Einteilungen, sowie über die Bedeutung der Zahlen; dann lernten wir das Rechnen mit den Fingern und den Gebrauch des Abacus nach den Büchern, welche Beda und Boethius darüber geschrieben haben.“ Leider stammt diese Erzählung nicht aus einem wirklich vorhandenen Tagebuch, sondern wurde vom Verfasser als seinen persönlichen geschichtlichen Ansichten entsprechend Strabo in den Mund gelegt[5]), so daß man eine Beweiskräftigkeit dieser, wenn auf Angaben aus dem IX. S. gestützten, unwiderlegbaren Erzählung nicht zu behaupten vermag.

Ein anderer Schüler Hrabans war Heiric von Auxerre, der selbst wieder in Remigius von Auxerre[6]) seinen Nachfolger sich heranbildete. Schon vorher hatte Remigius in dem Kloster Ferrières den Unterricht von Servatus Lupus, einem Zöglinge des Klosters St. Martin bei Tours, genossen und so aus doppelter Vermittlung die wissenschaftlichen Anregungen Alcuins in sich aufgenommen. Remigius muß daher, wenn einer, als mittelbarer Schüler Alcuins gelten, und er selbst trat nach 877 an die Spitze einer Schule, deren spätere

[1]) Abgedruckt in Baluze, *Miscellanea* I, pag. 70—71. *De reditu et computo articulari utrarumque epactarum solis et lunae.* [2]) Ebenda pag. 7. [3]) Ebenda pag. 8. [4]) Ebenda pag. 33. [5]) Vgl. einen Brief von P. Marty an H. Suter in Zeitschr. Math. Phys. XXIX. Histor.-literar. Abtlg. [6]) Werner, Alcuin S. 110.

große Bedeutung uns nötigt, ihres Stifters zu gedenken. Es war eine Schule zu Paris, und zwar eine Schule, die nur als solche, nicht in Verbindung mit einem Kloster eingerichtet wurde. Aus ihr entwickelte sich später die Pariser Universität. Aber vor seiner Pariser Lehrtätigkeit machte sich Remigius um das Schulwesen einer Stadt verdient, welche uns im nächsten Kapitel von Wichtigkeit sein wird, um das Schulwesen von Rheims, wohin er durch den Erzbischof Fulco berufen worden war. Remigius starb 908.

Führten diese Männer die Lehren und das Lehrverfahren der Schule von St. Martin bei Tours in östlicher und nördlicher Richtung weiter, freilich ohne daß ihre Bemühungen von glänzendem Erfolge begleitet gewesen wären, indem vielmehr von der Mitte des IX. S. an die Zahl derer, welche realen Lehrgegenständen sich zuwandten, mehr und mehr wieder abnahm, zuletzt aus einzelnen Persönlichkeiten nur bestehend, so knüpft sich an einen anderen Zögling derselben Mutteranstalt eine südlich gewandte Fortleitung, an Odo von Cluny[1]). Ein Edelmann, der am Hofe Wilhelms des Starken des Herzogs von Aquitanien lebte, hatte lange kinderlos seine Nachkommenschaft, wenn ihm solche würde, dem Dienste des heiligen Martin zugelobt, und so war über die Bestimmung des jungen Odo schon verfügt, als er um 879 geboren wurde. Im Knabenalter in das Kloster St. Martin aufgenommen, genoß er den Unterricht des Scholastikus, d. i. des Stiftslehrers Odalric. Nicht ganz im Einklang mit seinen Lehrern, welche ihn länger bei weltlichen Lehrgegenständen festhalten wollten als es ihm behagte, verließ er Tours und begab sich zu Remigius nach Paris. Nach einiger Zeit kehrte er nach Tours zurück, wo aber das zügellose Leben, welches unter den dortigen Mönchen eingerissen war, ihn mit Widerwillen erfüllte. Nun zog er sich in die Zisterzienser-Abtei Baume zurück, welche mit verschiedenen anderen Klöstern im engsten Zusammenhange stand, und wurde 927, als der gemeinsame Abt Berno dieser Klöster starb, auf die letztwillige Verordnung des Verstorbenen hin zum Abte von Cluny gewählt. Mit eiserner Strenge führte er dort die Herrschaft, so daß sein Kloster und die damit verbundene Schule bald allgemein als Musteranstalten an Zucht und Ordnung galten, und er selbst bald da bald dorthin gerufen wurde, um gleiche Reformen einzuführen (wie z. B. nach dem am Anfange des X. S. in der Auvergne gegründeten Kloster Aurillac, dessen dritter Abt er war, wie 937 nach dem Mutterkloster des Ordens auf Monte Casino), oder um mannigfache Streitigkeiten zu schlichten. Odo starb 942 oder 943.

---

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 292—302. Werner, Alcuin S. 112—114.

Ein wahrscheinlich dem XII. S. angehörender unter dem Namen des Anonymus von Melk bekannter Schriftsteller, welcher in 117 Kapiteln in überaus trockenem aber dadurch nur um so vertrauenswerterem Tone einzelne Mönche nennt und deren Werke angibt, hat im 75. Kapitel zwei Schriften Odos gerühmt[1]): ein Werk über die Beschäftigungen von höchster Trefflichkeit und ein ziemlich brauchbares Zwiegespräch über die Kunst der Musik. Als Datum jener Schrift gilt 926, also die Zeit, welche der Erwählung Odos zum Abte vorauging, was die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit der Angabe nur erhöht. Viele mittelalterliche Abhandlungen über Musik haben handschriftlich sich erhalten, nicht gerade wenige davon sind auch gedruckt, und daunter sind mehrere, welche Odo von Cluny als Verfasser beigelegt werden. Eine solche Abhandlung, in verschiedenen Abschriften erhalten, entspricht der von dem Anonymus von Melk gegebenen Beschreibung insofern, als sie allein von allen in Gesprächsform abgefaßt und wirklich „ziemlich brauchbar" ist. Eine Handschrift dieser musikalischen Abhandlung stammt aus dem XIII. S. und gehört der Wiener Bibliothek an.

In demselben Bande, in welchem das Gespräch über Musik zum Abdrucke kam[2]), ist auch eine andere Schrift nach demselben dem XIII. S. entstammenden Wiener Kodex 2503, welcher jenes Gespräch über Musik enthält, veröffentlicht. Diese andere Schrift führt den Titel: „Regeln des Abacus von dem Herrn Oddo" und würde, wenn sie wirklich mit Recht Odo von Cluny beigelegt werden dürfte[3]), von ungemeiner geschichtlicher Bedeutung sein. Leider ist eine Gewißheit dafür so wenig vorhanden, daß die meisten Geschichtsforscher weit mehr der Auffassung sich zuneigen, die Regeln des Abacus seien nicht so gar lange vor Entstehung ihrer Niederschrift aus dem XIII. S. von irgend einem anderen späteren Oddo oder Odo nicht vor dem XI. oder XII. S. zusammengestellt, eine Meinung, für welche man allenfalls auch auf den Umstand sich beziehen könnte, daß Odo von Cluny, wie wir oben sahen, bei seinem eigenen Bildungsgange dem Verweilen bei ähnlichen Dingen sich widerwillig zeigte.

[1]) *Dialogum satis utilem de Musica arte composuit. Scripsit praeterea librum praestantissimum monachisque utilissimum, librum videlicet Occupationum.* Als Randzahl steht daneben 926. [2]) *Scriptores ecclesiastici de musica* herausgegeben durch Abt Martin Gerbert von St. Blasien. St. Blasien 1784. I, 252—264 der Dialog über Musik, ibid. 296—302 *Regulae Domini Oddonis super abacum.* Ambr. Sturm in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 139 (1902). [3]) Th. H. Martin, *Origine de notre système de numération écrite* in der *Revue archéologique* von 1856, S. 33 des Sonderabzuges hat wohl zuerst diese Autorschaft vertreten, eine Ansicht, der wir uns in den Math. Beitr. Kulturl. anschlossen.

Ohne diese Gründe als zwingend anzuerkennen, da man gar oft als Schüler andere Ansichten von dem zu Erlernenden oder zu Vernachlässigenden hat als später als Lehrer, können wir doch ebenso wenig eine unbedingte Widerlegung führen. Wir wollen daher diese Regeln erst im 40. Kapitel unter dem XII. S. näher beschreiben.

Wir wenden uns gegenwärtig zu einer Schrift, welche gesicherterer Entstehung eine Anzahl von Jahren vor 985 geschrieben ist und von Abbo von Fleury herrührt[1]). Abbo ist in Orleans geboren, hat an den uns bekannten Schulen von Paris und Rheims, zuletzt in seiner Vaterstadt Orleans studiert, und trat darauf in das Benediktinerkloster Fleury ein. Nachdem er ihm eine Anzahl von Jahren angehört hatte, trat er eine zweijährige Reise nach England an, und von dort zurückgekehrt wurde er Abt seines Klosters. Als solcher scheint er zu Gewaltmaßregeln, die sein leicht aufbrausender Zorn ihm eingab, geneigt gewesen zu sein, und er starb wirklich eines gewaltsamen Todes auf einer Reise, wie die einen sagen auf Anstiften eines seiner Mönche ermordet, wie die anderen sagen in einem auf dem Wege entstandenen Raufhandel. Sein Todesjahr war 1003 oder 1004. Auch die Angaben über die Reise nach England wechseln von den Jahren 960—962 bis zu den Jahren 985—987. In England hat Abbo grammatische Untersuchungen angestellt, welche er als Quaestiones grammaticales niederschrieb. Unter die grammatischen Untersuchungen gerieten auch Betrachtungen über die geheimnisvolle Bedeutung der einzelnen Zahlen, welche aber Abbo ziemlich kurz abtut, weil er, wie er sagt, ausführlich darüber in einem Büchlein gehandelt habe, welches er einst durch die Bitten seiner Klosterbrüder bezwungen zu dem Rechenbuche des Victorius über Zahl, Maß und Gewicht herausgegeben habe[2]). Da nun ein Kommentar zu dem Rechenknechte des Victorius (S. 531) sich aufgefunden hat, welcher zwar namenlos ist, aber in den ersten Einleitungszeilen genau dieselbe Redewendung von den nötigenden Bitten der Klosterbrüder, dieselbe Inhaltsangabe über Zahl, Maß und Gewichte aufweist, welcher Zahlenmystik bis zum Überdrusse breitschlägt, welcher handschriftlich nicht später als im XI. S. entstanden sein kann, welcher aber auch nicht früher als in karolingischer Zeit verfaßt sein kann, weil darin von dem Grammatiker Virgil von Toulouse und von der erst unter Pipin eingeführten Ein-

---

[1]) Christ, Ueber das *Argumentum calculandi* des Victorius und dessen Commentar (Sitzungsberichte der k. bair. Akademie der Wissenschaften zu München, 1863, I, 100—152). Über Abbos Persönlichkeit S. 118. [2]) *In libellulo quem precibus fratrum coactus de numero mensura et pondere olim edidi super calculum Victorii.*

teilung des Solidus in 12 Denare die Rede ist, so hat man aus allen diesen scharfsinnig entdeckten Merkmalen die Folgerung gezogen, daß man es nur mit dem Kommentare des Abbo von Fleury zu tun haben könne, von welchem dieser spätestens 987 sagte, daß er ihn einst, olim, also gewiß ziemlich viele Jahre früher verfaßt habe. Man konnte mit einigen Erwartungen an diesen Kommentar eines Mannes herantreten, welchen ein Zeitgenosse, Fulbert von Chartres, den hochberühmten Lehrer des ganzen Frankenlandes genannt hat[1]), und welcher in den einleitenden Worten sich seiner Eigenschaft als Rechenlehrer gewissermaßen rühmt. Seit seiner frühesten Jugend beklage er, daß die Kenntnis der freien Künste schwinde und kaum noch auf wenige sich beschränke, die habsüchtig ihrem Wissen einen Preis stellen. Daraus, nicht aus Stolz noch aus Neid möge man es ableiten, wenn er auf die Gemüter der weniger Unterrichteten durch Rechenunterricht wirke[2]). Abbo nennt an verschiedenen Stellen die älteren Schriftsteller, deren Werke ihm gedient haben. Martianus Capella und Boethius werden des öfteren angeführt, neben ihnen Chalkidius und Macrobius. Er war mit Schriften des Priscian bekannt, in welchen von den Zahlen die Rede ist, mit Isidorus und Beda, wohl auch noch mit anderen Quellen, die uns nicht mehr erhalten sind. Leider sind nur einzelne Stellen des umfassenden Kommentars abgedruckt, und in diesen ist die Ausbeute keineswegs den Erwartungen entsprechend. Man kann allenfalls einen Abschnitt über Zahlenbezeichnung an und mit den Fingern erwähnen, in welchem der sprachliche Ausdruck reiner sei als bei Beda, von welchem überdies einzelne Abweichungen stattfinden; es scheine, daß Abbo hier eine ältere Quelle ausschrieb[3]). Was das Rechnen mit ganzen Zahlen betrifft, so hat Abbo dem Multiplizieren, aber nicht dem Dividieren seine Aufmerksamkeit zugewandt. Er lehrt[4]) an einem gezeichneten Abacus mit senkrechten Kolumnen, daß Zehner mit Zehnern vervielfacht Hunderter geben, deren eigene Gelenkzahlen (*articuli*) dann Tausender sind. Er lehrt tabellarisch geordnete Vielfache von 7, von 59 kennen. Wir erfahren ferner, daß das Hersagen des Einmaleins in Wörtern der Vulgärsprache untermengt mit deutschen Klängen — z. B. cean, wohl für zehn — noch immer in den Schulen stattfand[5]), eine an sich ganz wissenswürdige Bemerkung, welche aber für die Frage, die wir schon wiederholt ge-

[1]) *Summae philosophiae Abbas et omni divina et saeculari auctoritate totius Franciae magister famosissimus.* [2]) Christ l. c. S. 121. [3]) Ebenda S. 125—126. [4]) Vgl. einige Bruchstücke aus Abbos Kommentar, welche von Bubnov, *Gerberti Opera mathematica* (Berlin 1899) pag. 199—204 zum Abdruck gebracht sind. [5]) Christ l. c. S. 108—109.

stellt haben, ohne sie jemals sicher beantworten zu können, für die Frage, wie die Klosterschule jener Zeit mit ganzen Zahlen rechnen lehrte, kaum einen Beitrag zu einer Beantwortung liefert. Das Einmaleins war stets und ist zu einem bequemen Rechnen notwendig, es ist seit den Griechen immer dabei benutzt worden, aber es ist nicht das Rechnen selbst. Es gibt uns nicht einmal Auskunft darüber, wie man Zahlen vervielfachte, deren eine mindestens größer als 10 ist, geschweige denn, daß es von den anderen Rechnungsverfahren uns unterrichte.

Über dieses Rechnen mit ganzen Zahlen erhalten wir erst Auskunft, wenn wir zu einem Schriftsteller uns wenden, der viel besprochen einen geistigen Mittelpunkt seiner Zeit gebildet hat, und der unsere ganze Aufmerksamkeit nunmehr in Anspruch nehmen soll: Gerbert.

39. Kapitel.

Gerbert.

So interessant das Leben Gerberts ist[1]), werden wir uns mit einem nur sehr kurzen Überblicke über dasselbe begnügen müssen, und würden noch kürzer uns fassen, wenn seine Leistungen nicht zum Teil nur dann verständlich wären, wenn man die Kenntnis der Verhältnisse, unter welchen sie entstanden sind, besitzt. Gerbert muß in der ersten Hälfte des X. S. wahrscheinlich von armen Eltern in der Auvergne unweit des Klosters Aurillac geboren sein. Dort wuchs er dann auf, erzogen durch den Scholastikus Raimund, der selbst ein Schüler Odos von Cluny war, und durch den nachmaligen Abt Gerald. Etwa 967 verließ Gerbert das Kloster mit Einwilligung seiner Obern, um den Grafen Borel von Barcelona, den eine politische Reise an dem Kloster vorbeigeführt hatte, in seine Heimat zu begleiten, und dort in der spanischen Mark gewann er sich in Hatto, dem Bischof von Vich, einen väterlichen Freund, bei welchem er weitere Studien machte, sich auch in der Mathematik vielfach mit Nutzen beschäftigte[2]).

[1]) Math. Beitr. Kulturl. Kapitel XXI und XXII, S. 303—329. Olleris, *Oeuvres de Gerbert*, Clermont-Fd. et Paris 1867. XVII—CCV. Karl Werner, Gerbert von Aurillac, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit. Wien 1878. Nicol. Bubnov, *Gerberti Opera mathematica*. Berlin 1899. [2]) Richerus, *Histor.* III, 43 (*Monument. German. Script.* III, 617) . . . *Hattoni episcopo instruendum commisit. Apud quem etiam in mathesi plurimum et efficaciter studuit.*

Das ist alles, was wir über den Unterrichtsgang Gerberts aus dem Munde seines Schülers Richerus wissen, der, so wenig zuverlässig er als Geschichtsschreiber im allgemeinen sich erweist, doch in dieser Beziehung unser Vertrauen verdient, da er seinen Lehrer aufs höchste verehrend lieber zu viel als zu wenig gesagt haben würde, wenn er mehr gewußt hätte. Er hätte uns z. B. nicht verschwiegen, wenn Gerbert sich bei Hatto Kenntnisse in der arabischen Sprache erworben hätte, wenn er die Gefahren nicht scheuend, welche den Christen in den arabischen Städten bedrohten und gerade damals unter den glaubenseifrigsten Emîren unvermeidliche und unübersteigliche Hindernisse bildeten (S. 793), unter die Gelehrten jenes Volkes sich gemischt hätte, um deren Wissen sich anzueignen.

So zerfällt von selbst die Notiz, welche einen Zeitgenossen Gerberts, den Chronisten Adhemar von Chabanois, zum Verfasser hat. Dieser erzählt nämlich: „Gerbert war aus Aquitanien von niederer Geburt. Er war seit seiner Kindheit Mitglied des Klosters des heiligen Geraldus von Aurillac. Er durchwanderte der Weisheit wegen erst Frankreich, dann Cordova. Er wurde dem König Hugo bekannt und mit dem Bistume Rheims beschenkt. Dann lernte Kaiser Otto ihn kennen, worauf er das Bistum Rheims verließ und Erzbischof von Ravenna wurde. Als später Papst Gregor, der Bruder des Kaisers, starb, wurde derselbe Gerbert scheinbar seiner Weisheit wegen vom Kaiser zum römischen Papste erhöht. Da veränderte er seinen Namen und hieß seit der Zeit Sylvester“ [1]). In dieser fast mehr als kurzen Lebensgeschichte ist Wahres und Falsches in buntem Wechsel gemengt, und falsch ist offenbar die Durchwanderung von Cordova, welche zu der Frankreichs in Gegensatz gestellt ist. Man hat eine Erklärung dazu darin gefunden [2]), daß für Adhemar, der, ähnlich wie es auch bei Richer der Fall ist, in Frankreich erträglich, außerhalb Frankreich ganz und gar nicht Bescheid wußte, Cordova das gesamte Land jenseits der Pyrenäen bezeichnete, die spanische Mark mit eingeschlossen, in welcher Gerbert tatsächlich seinen Aufenthalt nahm, so daß also ein eigentlicher Widerspruch gegen das von Richer uns wahrheitsgetreu Bezeugte nicht vorhanden sei.

Wohl liegt dagegen ein ausdrücklicher Widerspruch gegen die Beschränkung des Aufenthaltes Gerberts auf die spanische Mark in den Worten eines anderen Chronisten: Gerbert habe mit Bestimmtheit den Abacus den Sarazenen geraubt und die Regeln gegeben,

---

[1]) *Monument. German.* VI, 130. [2]) Büdinger, Ueber Gerberts wissenschaftliche und politische Stellung. Marburg 1851, S. 8.

welche von den schwitzenden Abacisten kaum verstanden werden[1]). Allein dieser Berichterstatter ist aus mancherlei Gründen zu verwerfen. Wilhelm von Malmesbury lebte als englischer Chronist aus der Mitte des XII. S. nach Zeit und Ort in einer Umgebung, in welcher durch die Übersetzungen arabischer Schriftsteller z. B. des Rechenbuchs des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî die Vermutung nahe gelegt wurde, ein irgendwie vereinfachtes Rechnen könne nirgend anders als bei den Arabern entstanden sein. Ferner ist seine Glaubwürdigkeit, soweit es um Gerbert sich handelt, eine so geringe als nur irgend möglich. Er verbrämt die Geschichte von dem Raube des Abacus mit den tollsten Zaubermärchen, die deshalb nicht wahrer sind, weil sie später da und dort Glauben fanden[2]). Er verwechselt mitunter sogar Gerbert mit Papst Johann XV. Kurz er ist alles eher als ein zuverlässiger Zeuge, wo er allein und gar in Widerspruch zu den zahlreichsten sonstigen Erwägungen aussagt.

Um 970 begleitete Gerbert den Bischof Hatto und den Grafen Borel nach Rom, wo er durch den Papst Johann XIII. dem deutschen Könige Otto I. vorgestellt wurde, und auf dessen Wunsch ihn als Lehrer irgendwo anzustellen erwiderte, er wisse zu diesem Zwecke in der Mathematik zwar genug, aber nicht in der Dialektik. Um darin sich weiter auszubilden ging nun Gerbert mit Ottos Einwilligung nach Rheims, wo er vermutlich zehn Jahre, von 972 bis 982, verweilte und eine anfangs gemischte Stellung einnahm, welche bald vollständig in die eines Stiftslehrers überging. Zu den Männern, welche ihn damals in der Dialektik, vielleicht auch noch in der Grammatik unterrichteten, welchen er aber dafür schon mathematischen Unterricht erteilte, gehörte nach aller Wahrscheinlichkeit Constantinus, der von einem späteren Aufenthaltsorte den Namen Constantinus von Fleury erhalten hat.

Wir sind wieder durch Richerus in die Lage versetzt, den Lehrplan genau schildern zu können, welchen Gerbert als Scholasticus in Rheims einzuhalten pflegte[3]). Zuerst wurden die Schüler an philosophische Auffassung gewöhnt. Die Hilfsmittel waren griechische Werke in lateinischer Übersetzung, zumeist in der des Konsul Manlius, d. h. des Boethius. Darauf folgte die Rhetorik verbunden mit dem Lesen lateinischer Dichter, und nach ihr eigentlich dialektische Übungen, die unter der Leitung eines besonders dazu angestellten Lehrers stattfanden. Von dieser Abteilung der Unterrichts-

---

[1]) *Abacum certe a Saracenis rapiens regulas dedit quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur.* [2]) Doellinger, Papstfabeln des Mittelalters. München 1863. [3]) Richerus, *Histor.* III, 46—54. Das letzte dieser Kapitel handelt vom Abacus (*Monument. German. Script.* III, 618).

gegenstände unterscheidet Richerus alsdann ganz besonders die mathematischen Fächer, auf welche Gerbert viele Mühe verwandte. Er begann mit der Arithmetik als dem ersten Teile, ließ darauf die Lehre vom Monochorde und die ganze Musik folgen, ein für Frankreich fast ganz neues Kapitel der Wissenschaften, und lehrte alsdann die Astronomie, deren schwer verständlichen Inhalt er durch mancherlei Vorrichtungen zu erläutern wußte. Richerus nennt die wichtigsten astronomischen Apparate, deren Gerbert sich bediente. Sie weisen ebenso wie das beim Unterrichte in der Musik gebrauchte Monochord ausschließlich auf griechisch-römische Quellen hin[1]). Die dem mathematischen Unterricht von Gerbert zugrunde gelegten Bücher nennt Richerus nicht.

Sollen wir daraus den Schluß ziehen, es seien überhaupt Bücher dabei nicht benutzt worden? Es will fast so scheinen. Wenigstens wird sonst einigermaßen unbegreiflich, wie in späterer Zeit jener Constantinus, den wir eben genannt haben, an Gerbert die Bitte um schriftliche Mitteilung des früher Gelehrten richten konnte. Damit ist freilich keineswegs ausgeschlossen, daß Gerbert selbst, als Lehrer, sich an schon vorhandene Schriften anlehnte, Schriften jedenfalls griechisch-römischen Ursprunges gleich den Kenntnissen, welche ihren Inhalt bildeten. Wir müssen annehmen, es sei die Arithmetik des Boethius darunter gewesen, nicht aber die übrigen Schriften des gleichen Verfassers, sondern nur Auszüge und Bearbeitungen derselben von uns freilich nicht näher bekannten Persönlichkeiten. Diese Meinung wird wesentlich unterstützt in ihrem negativen Teile durch den Umstand, daß Gerbert, wie wir noch sehen werden, erst viel später mit der Astronomie und vielleicht mit der Geometrie des Boethius bekannt wurde, in ihrem positiven Teile durch das letzte Kapitel von Richers Erzählung, in welchem von der Geometrie und von dem Rechenunterrichte die Rede ist.

„Bei der Geometrie wurde nicht geringere Mühe auf den Unterricht verwandt. Zur Einleitung in dieselbe ließ Gerbert durch einen Schildmacher einen Abacus, d. h. eine durch ihre Abmessungen geeignete Tafel anfertigen. Die längere Seite war in 27 Teile abgeteilt, und darauf ordnete er Zeichen, 9 an der Zahl, die jede Zahl darstellen konnten. Ihnen ähnlich ließ er 1000 Charaktere von Horn bilden, welche abwechselnd auf den 27 Abteilungen des Abacus die Multiplikation oder Division irgendwelcher Zahlen darstellen sollten, indem mit deren Hilfe die Division oder Multiplikation so kompendiös vonstatten ging, daß sie bei der großen Menge von Beispielen

---

[1]) Büdinger l. c. S. 38—42.

viel leichter verstanden als durch Worte gezeigt werden konnte. Wer die Kenntnis davon sich vollständig erwerben will, der lese das Buch, welches Gerbert an C. den Grammatiker schrieb. Dort findet er es zur Genüge und darüber hinaus beschrieben."

Fragen wir uns sogleich, bevor wir weitergehen, ob diese Stelle in Einklang zu bringen wäre mit der Annahme, Wilhelm von Malmesbury hätte mit seiner allein dastehenden Behauptung von dem arabischen Ursprunge des Abacus doch recht. Wir müssen mit entschiedenstem Nein antworten. Das Rechnen als Teil der Geometrie ist nicht arabisch. Kolumnen sind, wenigstens in der zweiten Hälfte des X. S. soweit wir irgend wissen, nicht arabisch. Der Gebrauch von nur neunerlei Zeichen, also ohne die Null, ist nicht arabisch. Das alles stimmt aber vollkommen zur Geometrie des Boethius, wenn dieselbe echt wäre, stimmt also auch vermutlich selbst in der Zugehörigkeit des Rechnens zur Geometrie mit römischen Traditionen, die sich in den Klöstern erhalten hatten, und deren der Fälscher der Geometrie des Boethius sich nachmals bediente, um seiner unzweifelhaft geschickt angelegten Fälschung den Schein der Wahrheit zu verleihen.

Läßt sich doch eine ähnliche Tradition gerade in der Zeit, um welche es sich gegenwärtig handelt, auch an einem ganz anderen Orte nachweisen, wo Gerbert nicht lebte, wohin seine Lehre, die Lehre eines damals noch unbekannten einflußlosen Mönches, so rasch unmöglich gedrungen sein kann. Ein Mönch mit Namen Walther[1]) ist gerade damals in Speier aufgewachsen, von wo er den Beinamen Walther von Speier erhielt. Er schrieb dann dort als Subdiakonus, und zwar im Jahre 983, ein umfangreiches Gedicht über das Leben des heiligen Christoph[2]). Im ersten Gesange schildert er den Studiengang, welchen er selbst durchgemacht hatte. Die Einrichtung desselben geht auf Bischof Baldrich zurück, der 970—987 dem Bistume vorstand und, von St. Gallen dahingekommen, die Unterrichtsweise seines früheren Aufenthaltes mitbrachte. Was also Walther von Speier 983 schildert, ist nichts anderes als die Art und Weise, in welcher vor 970, mithin zu einer Zeit, während welcher Gerbert noch in der spanischen Mark sich aufhielt, in St. Gallen unterrichtet wurde. Von dort gilt also folgendes:

Et postquam planas limabant rite figuras
Intervallorum mensuris et spatiorum
Ordine compositis, cubicas effingere formas
Nituntur, mediumque vident incurrere triplum.

---

[1]) Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter (4. Ausgabe 1877) I, 263. [2]) Abgedruckt in Bernh. Pez, *Thesaurus Anecdot.* II, 3, pag. 29—122. Die für uns wichtige Stelle pag. 42.

Collatum primi distantia colligat una,
Alterius numeros proportio continet aequa,
Respuit haec ambo mediatrix clausa sub imo.
Ordinibus Mathesis gaudebat rite paratis,
Haec missura tibi solatia, clare Boëti.

Inde Abaci metas defert Geometrica miras,
Cumque characteribus iniens certamina lusus
Ocyus oppositum redigens corpus numerorum
In digitos propere disperserat articulosque.

Inde superficies ponens ex ordine plures
Trigona tetragonis coniunxit pentagonisque,
Strenua Pyramidum speciem ductura sub altum.
Tum laterum miras erexit ut ipsa figuras,
Arripiens radium semetretas fecit agrorum,
Quos quodam refluus confudit tempore Nilus!
Tradidit et varias in secto pulvere metas.

Die ganze Stelle bezieht sich, wie wir um jedes Mißverständnis auszuschließen von vornherein bemerken, auf das Zahlenkampf genannte Spiel, welches Boethius im Gefängnisse zu seinem Troste erdacht habe (S. 580). Aber wichtiger als der wesentliche Inhalt der Stelle sind die für den Verfasser nebensächlichen für uns das Hauptaugenmerk bildenden Anspielungen. Wir erlauben uns, die in entsetzlichem Latein verfaßte dem schwülstigen Stile des Martianus Capella augenscheinlich nachgebildete Schilderung zunächst zu übersetzen: „Nachdem sie die ebenen Figuren regelrecht genau auszuführen verstanden mit nach der Ordnung zusammengesetzten Maßen der Zwischenräume und der Strecken, bestreben sie sich kubische Gestaltungen zu bilden, und sie sehen, daß dieselben auf ein dreifaches Mittel hinauslaufen. Eine und dieselbe Entfernung verbindet das, was durch das erste Mittel zusammengebracht ist; gleiches Verhältnis hält die Zahlen des zweiten zusammen; diese beiden Dinge verwirft die Mittlerin, welche unter dem letzten verschlossen ist. An regelrecht bereiteten Ordnungen erfreute sich die Mathematik, Dir, berühmter Boethius, diesen Trost zuschickend. Hierauf bringt die Geometrie die wundersamen Linien des Abacus herbei und mit den Zeichen die Kämpfe des Spieles beginnend hatte sie schnell Ordnung hineinbringend die gegenübergestellten Körper der Zahlen in Finger- und in Gelenkzahlen zerstreut. Hierauf stellte sie mehrere Oberflächen ordnungsmäßig hin, verband Dreiecke mit Vierecken und Fünfecken eifrig die Gestalt der Pyramide zur Spitze zuzuführen. Dann errichtete sie Figuren der Seiten wundersam wie sie selbst, machte den Maßstab ergreifend die regellosen Grenzen der Felder, welche zu einer Zeit zurückströmend der Nil vermengt hat, und sie überlieferte die verschiedenen Linien im Staube gezeichnet.“

Wir sehen hier die Kenntnis der drei verschiedenen Mittelgrößen, des arithmetischen, des geometrischen und des harmonischen Mittels, letzteres allerdings nur negativ geschildert als weder gleiche Entfernung noch gleiches Verhältnis zu den äußeren Gliedern aufweisend. Wir hören die seit Herodot unendlich oft wiederholte Erzählung von der Verwischung der Ackergrenzen durch den aus den Ufern getretenen Nil und von der so vermittelten Erfindung der Geometrie. Wir erkennen in der letzten Zeile einen Halbvers des römischen Satirendichters[1]), der sich in dieser Umgebung recht verlassen vorkommen muß. Wir vernehmen, daß die Geometrie den Abacus herbeibringt und die Zahlen in Finger- und Gelenkzahlen zerstreut. Das sind aber gerade dieselben Begriffsobjekte, welche Gerbert vereinigt benutzt hat, und sie weisen mit Notwendigkeit darauf hin, daß damals an verschiedenen Orten die Erinnerung an Lehren, vielleicht ein Werk vorhanden gewesen sein muß, welches in seiner Anordnung an dasjenige mahnt, welches nachmals Geometrie des Boethius hieß, und daß die Quelle, aus welcher diese Erinnerung geschöpft war, eine römische gewesen sein muß. Dabei sehen wir sogar von der Anrufung des Boethius selbst in unserer Stelle ab, wiewohl man in ihr eine gewisse Gedankenbeziehung zu einem Ausspruche der Chronik von Verdun[2]) erkennen möchte. In dieser Chronik ist nämlich Gerbert ein zweiter Boethius genannt, wodurch, wenn nicht die Quelle alles seines Wissens doch jedenfalls so viel gesichert ist, daß die damalige Zeit gewohnt war, Boethius als den allgemeinen Lehrer insbesondere für mathematische Gegenstände zu betrachten.

Damit sind wir wieder zu Gerbert zurückgelangt, dessen Lehrtätigkeit in Rheims, wie wir sagten, bis etwa 982 gedauert hat. Etwa ein Jahr vor dem Ende dieser Zeit, um Weihnachten 980, war Gerbert als Begleiter des Bischofs Adalbero von Rheims in Ravenna am Hofe Otto II., den er gleich seinem Vater für sich einzunehmen wußte. Er zeichnete sich in einer öffentlichen Disputation über philosophisch-mathematische Gegenstände, welche er gegen einen der ersten Dialektiker der Zeit bestand[3]), und aus welcher er wenn nicht als Sieger doch unbesiegt hervorging, indem der Kaiser am späten Abend wegen Ermüdung der Zuhörer den noch andauernden Redekampf unterbrach, rühmlichst aus, und mutmaßlich infolge dieser zum Kaiser angeknüpften Beziehungen wurde Gerbert als Abt an das Kloster Bobbio versetzt, jenes reiche Kloster an der Trebbia, wo der irische Glaubensprediger Columban gestorben ist, wo handschrift-

---

[1]) Persius Satyr. I, 132: *Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas scit.* [2]) *Monument. German.* VI, 8. [3]) Werner, Gerbert S. 46—55.

liche Schätze aller Art den wissensdurstigen Geist empfingen, wo insbesondere damals der Codex Arcerianus vorhanden war, die Sammlung römischer Feldmesser, von welcher früher (S. 552) die Rede war. Gerbert hat, das werden wir noch nachweisen, diese Sammlung in Bobbio studiert und in Verbindung mit anderen römischen Schriftstellern, deren Persönlichkeit sich nicht genau feststellen läßt, zur Grundlage einer eigenen Geometrie gemacht, welche während des Aufenthaltes in Bobbio entstand.

Dieser Aufenthalt währte allerdings nicht lange. Otto II. starb am 7. Dezember 983. Er allein war Gerberts Freund gewesen, während Papst Johann XIV. geradezu als dessen persönlicher Gegner aufgefaßt werden muß. An diesem letzteren hatte mithin Gerbert nichts weniger als eine Stütze in den Kämpfen, welche er, der aufgedrungene Fremdling, als Abt von Bobbio zu bestehen hatte. Widerspenstigkeit der untergebenen Mönche, Anfeindungen umwohnender Großen, welche Güter des Klosters an sich gerissen hatten, vereinigten sich, Gerbert den dortigen Aufenthalt zu verleiden, und kurz nach dem Tode Otto II. war er wieder in Rheims, in der Umgebung seines dort lebenden Freundes, des Bischofs Adalbero. Seine äußeren Geschicke, welche mit der politischen Geschichte der damaligen Zeit im engsten Zusammenhange stehen und namentlich durch das freundschaftliche Verhältnis, welches Gerbert an die noch lebenden weiblichen Persönlichkeiten der deutschen Kaiserfamilie, an die Mutter Theophania und an die Großmutter Adelheid des jungen Otto III. fesselte, beeinflußt worden sind, sind ungemein wechselnd. Wahrscheinlich im Sommer 983 schrieb Gerbert von Bobbio aus an Adalbero über wissenschaftliche Funde, welche ihm geglückt seien[1]), er möge sich nur Hoffnung machen auf acht Bücher des Boethius über Astronomie und ganz Ausgezeichnetes über Figuren der Geometrie und nicht minder Bewunderswertes, was er allenfalls noch finden werde. Das ist die Stelle, auf welche man sich zu beziehen pflegt, um das Vorhandensein der Geometrie des Boethius in jener Zeit zu begründen (S. 576), um zugleich zu begründen, daß Gerbert dieselbe in der frühen Zeit seines ersten Rheimser Aufenthaltes nicht zur Benutzung gehabt haben kann.

Wahrscheinlich 990 im Lager Hugo Capets, welcher damals Laon belagerte, schrieb Gerbert einen anderen dem Mathematiker nicht uninteressanten Brief an Remigius von Trier[2]). Es ist aller-

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 76, pag. 44: *et quae post reperimus speretis: id est VIII volumina Boetii de astrologia praeclarissima quoque figurarum geometriae aliaque non minus admiranda si reperimus.* [2]) Ebenda

dings nur eine im Texte recht sehr verderbte Antwort auf zwei verloren gegangene Anfragen und darum nicht mit aller Bestimmtheit herzustellen. Die wahrscheinlichste Übersetzung lautet: „Das in bezug auf die erste Zahl hast Du richtig verstanden, daß sie sich selbst teilt, weil einmal eins eins ist. Aber deshalb ist nicht jede sich selbst gleiche Zahl als ihr Teiler zu betrachten; z. B. einmal vier ist vier, aber deshalb ist nicht vier der Teiler von vier, sondern vielmehr zwei, denn zwei mal zwei sind vier. Ferner das Zeichen 1, welches unter der Kopfzahl X steht, bedeutet X Einheiten, welche in sechs und vier zerlegt das anderthalbmalige Verhältnis gewähren. Dasselbe ließe sich auch an zwei und drei sehen, deren Unterschied die Einheit ist."

Wieder um einige Jahre später fällt, wahrscheinlich in den Spätsommer 994, ein Brief Otto III. an Gerbert[1]), der inzwischen 991 zum Metropolitan von Rheims gewählt worden war, wozu ihn schon 988 der sterbende Adalbero bezeichnet hatte, der aber seiner unter Widerwärtigkeiten der verschiedensten Art errungenen Stellung nicht froh werden konnte. Gerbert hatte offenbar an Otto geschrieben und ihm Verse zugeschickt, oder gefragt, ob Otto welche zu machen verstehe, denn nur so hat der Schluß von Ottos Brief einen Sinn, worin es ohne jeden Zusammenhang mit vorhergehendem heißt, daß er bisher keine Verse gemacht, wenn er aber diese Kunst mit Erfolg erlernt haben werde, wollte er so viele Verse senden als Frankreich Männer zähle. Für uns hat nur eine frühere Stelle des Briefes Bedeutung, in welcher Otto die dringende Einladung an Gerbert ergehen läßt, persönlich zu kommen, in ihm der Griechen lebendigen Geist zu erwecken und ihm das Buch der Arithmetik zu erklären, damit er, vollkommen durch die Beispiele desselben belehrt, etwas von der Feinheit der Altvorderen verstehe. Mit größter Wahrscheinlichkeit ist als das Buch der Arithmetik, von welchem hier die Rede ist, die Arithmetik des Boethius erkannt worden, und die Tatsache, daß jenes Werk damals am Kaiserhofe vorhanden war, ist durch das Auffinden einer etwa gleichalterigen, zwar lückenhaften aber sehr richtigen Handschrift zur Gewißheit geworden[2]). Otto war 987 der

Epistola 124, pag. 68. Wir geben die Übersetzung aus Math. Beitr. Kulturl. S. 318 nach Friedleins Verbesserungen des lateinischen Textes. Friedleins Übersetzung dagegen [Zeitschr. Math. Phys. X, 248, Anmerkung **] halten wir am Anfange für ganz falsch, während der Schluß nicht nennenswert von dem unsrigen abweicht.

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 208, pag. 141—142. Vgl. Werner, Gerbert S. 93. [2]) Der *liber mathematicalis* des heiligen Bernward im Domschatze zu Hildesheim, eine historisch-kritische Untersuchung von H. Düker. Beilage zum Programm des Hildesheimer Gymnasium Josephinum für 1875.

Schüler Bernwards, des Bischofs von Hildesheim. Der Domschatz dieser alten Stadt bewahrt aber unter dem Namen des *liber mathematicalis* des heiligen Bernward eine durch diesen verbesserte wenn nicht gar durchweg mit einer älteren Handschrift verglichene Abschrift der Arithmetik des Boethius, an deren damaligem Vorhandensein demnach nicht der leiseste Zweifel übrig bleibt[1]). Ob Otto bereits durch Bernward mit dem Inhalte des Werkes bekannt gemacht Gerbert noch um die nähere Erläuterung zu bitten beabsichtigte, ob er das Werk nur von Hörensagen oder durch ohne Hilfe unternommene und deshalb fruchtlos gebliebene eigene Durchsicht kannte, das sind Fragen untergeordneten Ranges, auf welche eine Antwort schwerlich gefunden werden möchte. Gerbert nahm die Einladung an und sagte dabei anknüpfend an Ottos eigene Worte: „Wahrlich etwas Göttliches liegt darin, daß ein Mann, Grieche von Geburt, Römer an Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichem Rechte nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht“[2]).

Davon, daß auch andere Weisheit möglich sei, daß Araber sich um die Mathematik verdient gemacht hätten, ist hier, wo es so nahe lag, den künftigen Lehren, welche Gerbert dem jungen Fürsten erteilen sollte und wollte, diesen erhöhten Reiz fremdartigen Ursprunges zum voraus zu verleihen, mit keinem Buchstaben die Rede, so wenig wie an irgend einer anderen Stelle der von Gerbert herrührenden Briefe oder Werke. Es ist wahr, Gerbert redet um 984 während seines zweiten Rheimser Aufenthaltes zu zwei verschiedenen Persönlichkeiten[3]), zu Bonafilius dem Bischofe von Girona und zu seinem alten Lehrer dem Abte Gerald von Aurillac, von einer Schrift des weisen Josephus, des Spaniers Josephus über Multiplikation und Division der Zahlen, welche Adalbero zu besitzen wünsche, und welche ersterer oder letzterer zu besorgen gebeten wird, letzterer mit Berufung darauf, daß der Abt Guarnerius ein Exemplar in Aurillac zurückgelassen habe. Man hat in diesem Weisen, in diesem Spanier Iûsuf ibn Hârûn al Kindi vermutet[4]), weil derselbe um 970 in Cordova lebte. Allein von diesem Iûsuf weiß man nicht, daß er sich je mit mathematischen Studien beschäftigt haben sollte, und daß der

[1]) Daß in der zweiten Hälfte des X. S. die Arithmetik des Boethius in Deutschland genau bekannt war, ist durch eine Stelle des Schauspiels Hadrian der Hrotsvitha von Gandersheim gesichert, welche bei Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter (Berlin 1887) S. 83—85 in der Note abgedruckt ist. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 209, pag. 142. [3]) Ebenda Epistola 55, pag. 34 und Epistola 63, pag. 38. [4]) Suter in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik X, 79 (1900).

„Spanier Josephus“ ein Araber gewesen sei, ist aus seinem Namen ebensowenig wie aus sonstigen Gründen zu schließen. Die Sprache, in welcher der Betreffende schrieb, war ohne Zweifel nicht die arabische, sondern die lateinische, denn was hätte sonst Adalbero mit dem Buche anfangen können, weshalb hätte Guarnerius es in Aurillac zurücklassen sollen zu einer Zeit, in welcher gewiß Kenntnis der arabischen Sprache in den Klöstern vergeblich gesucht worden wäre? Wenn nicht alles täuscht, so ist hier der Angelpunkt, um welchen weitere Forschungen nach dem weisen Josephus sich werden drehen müssen, nachdem andere Versuche[1]) schlechterdings zu keinem Ergebnisse geführt haben. Man wird Handschriftenkataloge insbesondere von spanischen und südfranzösischen Bibliotheken nach lateinisch geschriebenen Stücken mathematischen Inhaltes eines Josephus durchmustern müssen. Ein solcher Katalog aus dem XVIII. S. gibt z. B. an[2]), der Codex CXV der ehemaligen (jetzt in Paris befindlichen) Bibliothek des Erzbischofs Charles de Montchal von Toulouse enthalte eine vielleicht von Josephus verfaßte Geometrie. Nur freilich ist gerade diese Spur nicht weiter zu verfolgen, wie an Ort und Stelle vorgenommene Untersuchungen bewiesen haben[3]).

Auf ein arabisches Werk ist wahrscheinlich nur ein aus wenigen Zeilen bestehender Brief zu beziehen[4]), welcher dem gleichen Zeitraume wie die beiden ebenerwähnten Briefe angehören dürfte, und in welchem Gerbert von einem gewissen Lupitus von Barcelona, um welchen er selbst sich keinerlei Verdienst erworben habe, vermöge seines hohen Geistes und seiner freundlichen Sitten das von ihm übersetzte Buch über Sternkunde erbittet und sich zu jeglichem Gegendienste bereit erklärt. Jenes Buch kann nicht leicht ein anderes als ein arabisches gewesen sein. Aber auch dieses hat Gerbert wohl nie früher und ebensowenig auf seinen Brief hin zu Gesicht bekommen, wenn man diesen Schluß aus dem Umstande ziehen darf, daß, wie in früherer so in späterer Zeit mit einer einzigen weiter unten zu berührenden Ausnahme, keinerlei Spuren arabischer Sternkunde bei Gerbert erkennbar sind. Dergleichen bedurfte es freilich auch nicht für die Dinge, welche Gerbert vornahm, und welche von trigonometrischen Rechnungen, einem Gegenstande, bei welchem der Gegensatz zwischen griechisch-römischen und arabischen Lehren sich be-

[1]) Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Eine Studie von Professor Dr. H. Weißenborn, Berlin 1892. [2]) Bern. de Monfaucon, *Bibliotheca bibliothecarum manuscriptarum* I, 902. Wir wurden durch M. Curtze auf diese Angabe aufmerksam gemacht. [3]) Briefliche Mitteilung von Tannery. [4]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) Epistola 60, pag. 36.

sonders gezeigt haben müßte, vollkommen frei waren. Solcher bedurfte er z. B. nicht durchaus bei der Herrichtung einer Sonnenuhr in Magdeburg, welche er zwischen 994 und 995 vollzog, und zu deren Richtigstellung er Beobachtungen des Polarsternes machte[1]).

Das Wanderleben Gerberts hatte mit der Reise nach dem Kaiserhofe keinen Ruhepunkt erreicht. Bald sehen wir ihn nach Frankreich zurückkehren, um auf der Synode zu Mouson sein Recht auf das Bistum Rheims persönlich zu verteidigen, bald finden wir ihn in Ottos Heerlager auf einem Feldzuge gegen slavische Stämme an Elbe und Oder, bald überschreitet er im Gefolge Otto III. die Alpen, um dem wüsten Regimente ein Ende zu machen, welches in Rom herrschte und dem deutschen Könige sowohl Ärgernis bereitete als die erwünschte Gelegenheit zur Einmischung gab. Am 9. Mai 996 starb Papst Johann XV., unter dem Drucke der Nähe des deutschen Heeres wurde Bruno aus dem sächsischen Fürstenhause als Gregor V. zum Papste gewählt, am 21. Mai krönte der neue Papst bereits Otto in Rom zum Kaiser. Gerbert blieb auch nach des Kaisers Abreise in Rom als Ratgeber des noch jugendlichen Papstes. Er erfüllte diese Aufgabe so pflichtgetreu, daß er 998 mit dem Bistume Ravenna belohnt wurde, und im folgenden Jahre erfüllte sich der Schicksalsspruch:

Scandit ab R Gerbertus in R, post Papa viget R,

der ihm in dreifacher Erhebung ein dreifaches *R* verheißen hatte, von Rheims nach Ravenna, von Ravenna nach Rom! Gregor V. starb am 5. Februar, Gerbert feierte am 2. April 999 seine Inthronisation unter dem Namen Sylvester II. Er verwaltete den päpstlichen Stuhl fast genau vier Jahre lang bis zu seinem Tode, der am 12. Mai 1003 erfolgte.

Die letzten sieben Lebensjahre Gerberts, welche er demnach politisch und kirchlich überaus beschäftigt in Italien zubrachte, gaben ihm daneben Gelegenheit zu schriftstellerischer Tätigkeit. Er verfaßte eine freilich nur aus zwölf Hexametern bestehende Inschrift zu einem Denkmale des Boethius, mit welchem Otto III. zu Pavia auf seine Veranlassung das Grab des in den Klosterschulen beliebtesten Schriftstellers schmückte[2]). Er schrieb mutmaßlich um 997 eine Abhandlung über das Dividieren, welche dem Constantinus von Fleury gewidmet ist und als jene Schrift betrachtet wird, von der Richer

---

[1]) *In Magdaburgh orologium fecit, illud recte constituens considerata per fistulam quadam stella nautarum duce* sagt darüber Thietmars Chronik L. VI, cap. 61. Thietmar † 1019 als Bischof von Merseburg. Vgl. Werner, Gerbert S. 221. [2]) Ebenda S. 328.

spricht, indem er diejenigen, welche die Division und die Multiplikation großer Zahlen erlernen wollen, auf das Buch verweist, welches Gerbert an C. den Grammatiker schrieb. Als Papst sogar fand Gerbert Zeit, einen astronomischen Brief an Constantinus, der inzwischen im Jahre 995 Abt von Mici geworden war, zu schreiben[1]. Als Papst erhielt er einen Brief geometrischen Inhaltes von Adalboldus über die Ausmessung des Kreises und der Kugel[2], in dessen Schreiber man wohl berechtigt ist, Adelbold von Utrecht zu erkennen, einen Gelehrten, der in vielen Sätteln gerecht, Schriften über Musik[3], aber auch ein Geschichtswerk hinterlassen hat, welches an Thietmars Chronik sich anlehnt[4]. Vielleicht in die gleiche Zeit fällt ein Schreiben Gerberts an denselben Adalboldus über einen geometrischen Gegenstand, von dem wir noch zu reden haben. Gelegenheit bietet uns die Gesamtbesprechung der mathematischen Schriften Gerberts, zu welcher wir jetzt übergehen, und bei welcher wir erst die geometrischen, dann die arithmetischen Dinge behandeln.

Die Geometrie[5] Gerberts ist in mehreren lückenhaften, sodann in vollständigem dem XI. S. angehörendem Texte[6] in der Münchener Handschrift 14836 und auch in einer bis gegen das Ende vollständigen dem Stifte St. Peter in Salzburg angehörenden Handschrift erhalten. Die Entstehungszeit der Salzburger Handschrift dürfte ziemlich genau bestimmbar sein. Im Jahre 1127 wurde das Kloster St. Peter durch einen furchtbaren Brand zerstört. Damals konnten nur wenige Schriftstücke gerettet werden, und Codex a. V. 7, welcher die Gerbertsche Geometrie enthält, befindet sich nicht unter den als geborgen bekannten. Von da an wurde nur um so emsiger an der Wiederbeschaffung einer Bibliothek gearbeitet, und es existierte bereits wieder um 1160 ein Katalog, der sich erhalten hat. In ihm kommt aber vor: Hermannus contracus (*sic!*) super astrolabium, d. i. dasjenige Werk, mit welchem Codex a. V. 7 beginnt. Da nun eine anderweitige Abschrift des gleichen Werkes, die mit jenem Katalogeintrag gemeint sein könnte, in St. Peter nicht vorhanden ist, so glauben wir uns um so berechtigter, eben jenen Codex darunter zu verstehen und anzunehmen, er sei zwischen 1127 und 1160 geschrieben, als alle Zeichen der Schriftvergleichung hiermit in Einklang stehen.

---

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 479: *Gerbertus Constantino Miciacensi Abbati.* Über Constantinus vgl. Bubnov pag. 6, Note 3. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 471—475. [3]) Werner, Gerbert S. 69. [4]) Ebenda S. 222. [5]) Agrimensoren S. 150 flgg. [6]) Curtze, Die Handschrift Nr. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik VII, 75—142 (1895).

Die Glaubwürdigkeit dieser sauberen, unserer Auseinandersetzung zufolge nicht später als höchstens 1150 mithin nicht ganz anderthalb Jahrhunderte nach Gerberts Tode entstandenen Abschrift, welche in ihren Anfangsworten sich selbst als Geometrie des Gerbert benennt, ist mit Rücksicht auf Einzelheiten und insbesondere auf die ungemein verschiedenartigen Gegenstände, welche in ihr zur Rede kommen, angezweifelt worden und auch der Münchener Handschrift hat man kein größeres Vertrauen entgegengebracht. Die Münchener Handschrift trug ursprünglich keinen Verfassernamen. Erst nachträglich, aber immerhin in noch recht früher Zeit[1]) ist der Titel *Geometria Gerberti* dem dem Sammelbande vorausgehenden Inhaltsverzeichnisse eingefügt worden. In der Salzburger Handschrift ist die Überschrift *Incipit Geometria Gerberti* und der Text, jene in roter, dieser in schwarzer Tinte, unzweifelhaft von demselben Schreiber zu Pergament gebracht. Als feststehend ist also zu betrachten, daß in der ersten Hälfte des XII. S. als einheitliches Werk Gerberts galt was schon 100 Jahre früher, wenig mehr als 50 Jahre nach Gerbert, als ein einheitliches Werk vorhanden war. Der Geschichte der Mathematik liegt ganz gewiß mehr an diesem einheitlichen Vorhandensein als daran, ob der Verfasser, der vor 1050 in lateinischer Sprache schrieb, Gerbert hieß oder irgend einen anderen Namen führte. Um nicht an unseres Erachtens ziemlich müßigen Streitfragen zu haften, erklären wir, daß wir Gerbertsche Geometrie nennen, dessen Verfasser möglicherweise einen anderen Namen führte. Es ist nicht zu verkennen, daß kleine Widersprüche, Wiederholungen und dergleichen den Eindruck hervorbringen, es sei einzelnes vom Abschreiber verfehlt worden, der z. B. ein Kapitel, das im Urtexte zuerst an einer Stelle vorkam, dann durch den Verfasser anderswohin gebracht und an der früheren Stelle durchstrichen wurde, zweimal abgeschrieben haben kann. Dagegen sind jene großen Verschiedenheiten behandelter Dinge umgekehrt danach angetan, die Echtheit der Gerbertschen Geometrie vollauf zu beglaubigen. Wir haben (S. 554) uns darüber ausgesprochen, was bei römischen Feldmessern zu finden war. Geometrische Definitionen und einfachste Sätze der Geometrie der Ebene, Maßvergleichungen und feldmesserische Vorschriften, geometrische Rechnungsaufgaben und die Lehre von den figurierten Zahlen, das alles bildete, meistens nachweislich aus Heron übernommen, den Gegenstand ihrer unselbstständigen Schriftstellerei. Genau dasselbe finden wir in Gerberts Geometrie, müssen wir in ihr finden, wenn der Verfasser zu sammeln und durch gleichmäßige Schreibweise zu vereinigen trachtete, was

[1]) Curtze l. c. S. 78 und 79.

ihm aus römischen Quellen sei es in Bobbio durch den Codex Arcerianus, sei es durch andere Quellenschriften, bekannt geworden war. Namentlich für den dritten Teil der Gerbertschen Geometrie ist der Nachweis geführt worden[1]), daß geradezu nichts in demselben steht, was nicht dem Codex Arcerianus entnommen sein kann. Am schlagendsten für die Benutzung des Codex Arcerianus ist wohl das Auftreten jenes Schreibfehlers aus Nipsus (S. 556), wo das Wort hypotenusae hinter podismus ausgefallen ist, im 42. Kapitel der Gerbertschen Geometrie. Aber der Verfasser war kein gewöhnlicher Abschreiber. Er bemerkte, daß hier nicht alles in Ordnung war, und um den Sinn der Stelle zu retten, legte er im 10. Kapitel die Definition nieder, die schräg von oben nach unten, oder von unten nach oben gezogene Linie heiße Hypotenuse oder auch Podismus[2]). Ja er freute sich dieser Definition so sehr, daß er im 12. Kapitel verschiedentlich Podismus sagte, wo Hypotenuse gemeint ist. Es war allerdings ein unfehlbares Mittel, die Richtigkeit einer Nipsusstelle zu wahren, wenn man ihr zuliebe eine neue Worterklärung schmiedete, wenn man, um dieser Eingang zu verschaffen, das neue Wort sofort in Gebrauch nahm.

Wenn sich der Verfasser der Gerbertschen Geometrie hier nicht als hervorragenden Geometer bewährte, so ist dieses ebensowenig der Fall, wenn er im 9. Kapitel den inneren, beziehungsweise den äußeren Winkel für gleichbedeutend mit einem spitzen, beziehungsweise stumpfen Winkel hält. Er faßt den rechten Winkel mit einem wagrechten, einem zu diesem senkrechten Schenkel als ursprünglich gegeben auf. Damit ein spitzer Winkel entstehe, muß der zweite Schenkel, der ihn mit dem wagrechten Schenkel bilden soll, im Innern des rechten Winkels liegen, außerhalb dagegen wenn ein stumpfer Winkel entstehen soll. Das ermangelt ja nicht eines gewissen Scharfsinnes, nur zeugt es dafür, daß wer so schrieb die Euklidischen Elemente nicht kannte, wo im 16. Satze des I. Buches innere und äußere Winkel, d. h. innere und äußere Dreieckswinkel, unzweideutig erklärt sind.

Wir haben die unmittelbare Quelle wenigstens einer großen Abteilung von Gerberts Geometrie im Codex Arcerianus erkannt. Andere Quellen gibt der Verfasser selbst an. Er nennt wenigstens folgende Schriftsteller: Pythagoras im 9. und 11. Kapitel, Platons Timaeus im 13. Kapitel, des Chalkidius Kommentar zu dieser letzteren Schrift im 1. Kapitel, Eratosthenes im 93. Kapitel, den Kommentar

---

[1]) Agrimensoren S. 229, Anmerkung 304. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (edit. Olleris) pag. 417: *Illa autem quae, obliqua iusum sive susum deducta, hebetis vel acuti anguli effectrix videtur hypotenusa id est obliqua sive podismus nominatur.*

des Boethius zu den Kategorien des Aristoteles im 8. Kapitel und endlich die Arithmetik des Boethius in der Vorrede, im 6. und im 13. Kapitel. Wir können es dahingestellt sein lassen, ob alle diese Zitate des Verfassers eigener Gelehrsamkeit entstammen oder selbst wieder zum Teil abgeschrieben sind, jedenfalls wird man andere Namen, Namen, welche nicht nach Griechenland und Rom verweisen, vergeblich suchen. Der mittlere Teil der Gerbertschen Geometrie, Kapitel 16 bis 40, dem Raume nach ein starkes Vierteil des Werkes, enthält kein Zitat und hat bisher noch nicht zurückgeführt werden können. Es ist die praktische Feldmessung, welche hier gelehrt wird, in Vorschriften Höhen, Tiefen und Entfernungen zu messen[1]).

Da begegnet uns, um nur einiges zu nennen, im Kapitel 16 eine Methode, nach welcher der Beobachter stehend und durch ein unter 45 Grad geneigtes Astrolabium visierend eine Höhe messen soll. Da lehren die Kapitel 21 und 22, teilweise auch 24, Höhenmessungen aus dem Schatten. Im 22. Kapitel ist als einzige (S. 857) angekündigte Verwandtschaft zu Arabischem das auch ausschließlich in der Salzburger Handschrift an dieser Stelle vorkommende Wort *halhidada* zu bemerken, welches zweimal, das zweite Mal in der Form *alhidada*, vorkommt[2]). Wir deuten uns diese einzige Ausnahme als eine von den (S. 860) erwähnten kleinen Abschreibersünden. Das Wort wird in der Vorlage Randbemerkung gewesen und in den Text herüber genommen worden sein, ganz ähnlich wie es in einer Archimedhandschrift mit dem Worte Ellipse ging, dessen Archimed sich zuverlässig nicht bedient haben kann. Daß unsere Erklärung das Richtige zu treffen scheint, geht auch daraus hervor, daß die Münchener Handschrift, welche gerade den feldmesserischen Abschnitt in offenbar viel zweckmäßigerer und klarerer Anordnung besitzt, als man es der Salzburger Handschrift nachrühmen kann, jenes 22. Kapitel überhaupt nicht aufweist[3]).

---

[1]) Agrimensoren S. 162—165. Bubnov l. c. hält diese mittlere und die letzte Abteilung für eingeschoben, während die erste Abteilung seiner Ansicht nach von Gerbert herrühren kann. Tannery (*Une correspondance d'Écolâtres du XI Siècle*) hält die beiden ersten Abteilungen für nicht-Gerbertisch und schreibt die letzte Abteilung Gerbert in dem Sinne zu, es sei ein von diesem herrührender Auszug aus römischen Feldmessern. [2]) Das arabische Wort al-'idâda bedeutet eigentlich einen Türpfosten, dann als technischer Ausdruck ein Lineal. Die Engländer gebrauchen seit Ende des XVI. S. das Wort in der Verketzerung *athelida*. Weigand, Deutsches Wörterbuch, 2. Auflage 1876, ist der Meinung, aus diesem *athelida* sei unter Vereinigung mit dem vorgesetzten Artikel *the* das sonst in seiner Ableitung unerklärliche Theodolit entstanden. Vgl. K. Zöppritz in den Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge XX, 175—176 (1883). [3]) Curtze l. c. S. 96.

Im 24. Kapitel knüpft sich dann wieder ganz in römischer Weise eine Methode an, bei der von der Mißlichkeit eines Verfahrens gesprochen wird, welches den Beobachter zwingt, sein Gesicht glatt an die Erde zu drücken. Da erinnert an Epaphroditus (S. 556) und an Sextus Julius Africanus (S. 440) eine im Kapitel 31 gelehrte Höhenmessung mit Hilfe eines massiven rechtwinkligen Dreiecks von den Seitenlängen 3, 4 und 5. Wieder eine den Hilfsmitteln nach verschiedene Höhenmessung ist sodann die im Kapitel 35, welche wir die Messung mittels der festen Stange nennen wollen, da sie darauf hinausläuft, eine Stange von bekannter Höhe in den Boden zu befestigen und alsdann rückwärts gehend den Punkt aufzusuchen, von welchem aus die Sehlinie aus dem Auge des Beobachters nach der Stangenspitze in ihrer Verlängerung die Spitze des zu messenden Gegenstandes, eines Turmes oder dergleichen, erreicht. Kapitel 38 und 39 messen Flußbreiten, die Aufgabe des Nipsus wie vor ihm des Heron. Kapitel 40 endlich kennzeichnet sich selbst als militärische Methode zur Höhenmessung. Zwei Pfeile werden, ein jeder an eine lange Schnur befestigt, gegen die Mauer abgeschossen, auf deren Höhenmessung es abgesehen ist, und zwar richtet man den einen Schuß nach der Spitze, den anderen nach dem Fuße der Mauer. Die beidemal abgewickelten Schnurlängen geben Hypotenuse und Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe zu berechnen nunmehr keine Schwierigkeit mehr hat.

Solche Methoden werden nicht auf einmal erfunden. Der Verfasser dieser Abteilung, wer es auch gewesen sein mag, ob Gerbert, ob ein anderer Schriftsteller im oder vor dem XI. S., ob ihm die ganze Gerbertsche Geometrie, ob nur deren mittlere Abteilung angehört, erhebt auch keinerlei Anspruch darauf als Erfinder angesehen zu werden. Er sagt stets „die Höhe usw. wird gemessen", niemals „ich messe" auf diese oder jene Weise, und um derartige Worte der Aneignung war das Mittelalter nie verlegen, selbst wo sie nicht vollständig der Wahrheit entsprachen. Sagt doch der Verfasser der ersten Abteilung, bevor er im 13. Kapitel höchst unbedeutende Bemerkungen ausspricht „Ich glaube unter keiner Bedingung schweigend an Ausblicken vorbeigehen zu sollen, welche, während ich dies schrieb, die eigene Natur mir eröffnete"[1]). Ein Weiteres tritt hinzu, welches erst im folgenden Bande im 42. Kapitel zur vollen Geltung kommen kann. Am Anfang des XIII. S. finden wir einige dieser Messungsmethoden,

---

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 425: *Sed nequaquam silentio puto transeundum quod interim dum haec scriptitarem ipsa mihi natura obtulit speculandum.*

aber nicht alle bei einem Schriftsteller wieder, von welchem kaum anzunehmen ist, er habe aus der Gerbertschen Geometrie geschöpft, so daß die unmittelbare weniger wahrscheinlich sein dürfte, als eine beiden gemeinsame Abhängigkeit von einer noch älteren, jedenfalls römischen Quelle, mag deren Urheber Frontinus oder Balbus geheißen, oder einen anderen bekannten oder verschollenen Namen geführt haben. Von dieser Annahme aus steigert sich die Wichtigkeit von Gerberts Geometrie nach zwei Seiten hin. Sie lehrt uns nicht bloß, was durch Jahrhunderte hindurch von Methoden der Feldmessung sich erhalten hat, sie füllt uns auch eine empfindliche Lücke in unserer Kenntnis der römischen Verfahrungsweisen aus, wenn wir nicht gar in Erinnerung an die Erzählung des Polybius (S. 362), es sei möglich die Höhe einer Mauer von weitem zu messen, für die Entstehung mancher Methoden bis in das griechische Altertum hinaufgreifen müssen.

Was den ersten Teil dieser Geometrie betrifft, so haben wir schon auf die Definition von *podismus* aufmerksam gemacht, welche in ihm sich befindet. In ihm kommt auch das Wort *coraustus* für Scheitellinie vor, den griechisch-römischen Ursprung bezeugend. Andere Bemerkungen lassen sich an Definitionen und einfachste Sätze der Geometrie kaum knüpfen. Sie sind uns höchstens als Stilprobe von Wert, in welcher die dem Verfasser eigene behäbige Breite hervortritt, ein Bestreben, recht klar zu sein, welches er aber niemals dadurch betätigt, daß er Sätze kürzer faßte und den Sinn Verwirrendes wegließe, sondern stets so, daß er von dem Seinigen beifügt.

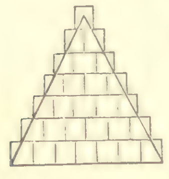
Mit dem dritten Teile haben wir uns oben so weit beschäftigt, daß wir seine Quellen enthüllten. Einige wenige Gegenstände müssen wir noch aus ihm hervortreten lassen. Wir haben (S. 377) die heronische Konstruktion des regelmäßigen Achtecks ausgehend von dem Quadrate besprochen; wir haben (S. 560) die Figur, an welcher die Richtigkeit der Konstruktion sich nachweisen läßt, bei Epaphroditus wiedergefunden; wir haben sie (S. 586) bei dem Fälscher des Boethius auftreten sehen. Die Gerbertsche Geometrie hat die Konstruktion selbst im Kapitel 89 aufbewahrt, die Figur dagegen nicht abgebildet, weder bei Gelegenheit der Konstruktion, noch bei Gelegenheit der Achteckszahlen. Überhaupt fühlte der Verfasser offenbar deutlicher als die römischen Schriftsteller, die ihm als Vorlage dienten, daß die Lehre von den figurierten Zahlen nur gewohnheitsmäßig in die Geometrie aufzunehmen sei, nicht eigentlich dort ihren richtigen Platz habe; der ganze Gegenstand war ihm klarer. Er hat nicht eine einzige Figur in seinen arithmetischen Kapiteln benutzt. Er hat für die Fünfecks- und Sechseckszahlen die richtigen Formeln angegeben, wo Epaphroditus und der gefälschte Boethius sich Rechenfehler zu-

schulden kommen ließen. In der Gerbertschen Geometrie finden wir in Kapitel 55 die allgemeine Formel, um aus der Seite die Polygonalzahl, in Kapitel 65 diejenige, um aus der Polygonalzahl die Seite zu entnehmen, in ihr zweimal in Kapitel 60 und 62 die Formel, welche die Pyramidalzahl aus der Seite und der Polygonalzahl entstehen läßt. Die Summierung der Reihe der Kubikzahlen ist dagegen nicht in Gerberts Geometrie übergegangen. Es kann wohl sein, daß der Verfasser den betreffenden Paragraphen des Epaphroditus nicht verstand, wie er im Codex Arcerianus auf ihn stieß, und wer möchte ihm das verübeln, da gerade jener Paragraph dort eine so verderbte Gestalt angenommen hat[1]), daß er kaum zu verstehen ist, es sei denn, man wisse schon, nach welcher Formel Kubikzahlen sich summieren und ermittle rückwärts aus dieser Kenntnis die richtige Lesart.

Man hat die arithmetischen Kapitel von Gerberts Geometrie als Zeugnis für die Unechtheit der ganzen Schrift angerufen. Wir halten gerade umgekehrt diesen dritten Abschnitt für gesichertes Eigentum Gerberts. Gerbert, das haben wir in dem biographischen Teile dieser Erörterung gesagt, hat auch als Papst noch einen Brief von Adelbold von Utrecht erhalten. In demselben ist, wie oben angedeutet, von der Ausmessung des Kreises und der Kugel die Rede, deren Körperinhalt, *crassitudo*, dadurch gefunden werde, daß von dem Kubus des Durchmessers $\frac{10}{21}$ abgezogen, beziehungsweise $\frac{11}{21}$ genommen werden. Ein anderer Brief des Adelbold an Gerbert ist verloren gegangen, dagegen ist Gerberts Antwort erhalten und z. B. in der Handschrift des Salzburger St. Peterstiftes, welche die Gerbertsche Geometrie enthält, hinter der Geometrie und in unmittelbarem Anschluß an jenen Brief Adelbolds über den Kugelinhalt vorhanden. Daraus hat sich die Vermutung gebildet, hier liege wohl die Antwort auf ein späteres Schreiben vor, und mit Rücksicht auf die Aufschrift des erhaltenen Briefes Adelbolds „an Gerbert den Papst“ mußte man sie in die letzten Lebensjahre Gerberts setzen. Adelbold hatte, wie wir aus Gerberts Antwort ersehen, Skrupel darüber bekommen, daß das Dreieck in seiner Fläche zweierlei Ausmessung besitzen sollte. Er konnte nicht begreifen, wie das gleichseitige Dreieck, dessen Seite die Länge 7 besitzt, ebensowohl den Flächeninhalt 28 $\left(=\frac{7\cdot 8}{2}\right)$ als auch den Flächeninhalt 21 $\left(=\frac{7\cdot 6}{2}\right)$ besitze. Gerbert erläutert ihm die Sache ganz richtig. Der wirkliche geometrische Flächeninhalt, sagt er, ist 21 und er gibt dabei die Regel: die Höhe des gleichseitigen Dreiecks

[1]) Agrimensoren S. 127—128.

sei immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite. Die andere Zahl 28, fährt Gerbert fort, sei nur arithmetisch als Fläche zu nehmen und besage, man könne in das Dreieck 28 kleine Quadrate mit der Längeneinheit als Seite einzeichnen, freilich so, daß Überschüsse über das Dreieck erscheinen, wie der Augenschein (Fig. 114) am deutlichsten lehre. Gerbert, sagte man nun, hat also hier deutlich für die Geometrie verworfen, was in Gerberts sogenannter Geometrie gelehrt ist, mithin ist letztere unecht.


Fig. 114.

Dieser Einwurf ist vollkommen nichtig. Wir wollen nicht bloß darauf hinweisen, daß es eine und dieselbe Handschrift aus der Mitte des XII. S. ist, welche beide Schriftstücke für Gerbert in Anspruch nimmt, noch darauf, daß die Geometrie, wenn sie in Bobbio unter Benutzung des dort befindlichen Codex Arcerianus geschrieben wurde, etwa 20 Jahre älter als der Brief an Adelbold ist, und daß in 20 Jahren Ansichten auch über wissenschaftliche Dinge sich klären und ändern können. Wir geben vielmehr namentlich zu bedenken, was wir oben schon auf den Inhalt der arithmetischen Kapitel selbst uns stützend gesagt haben, daß Gerbert diesen Abschnitt seiner Geometrie als das erkannte, was er war, und ihn wohl überhaupt nur darum aufnahm, weil er auch in seinen Musterwerken sich an ähnlicher Stelle vorfand. Ja man kann umgekehrt den Brief eine willkommene Bestätigung der Geometrie nennen, wenn Adelbold, dessen Anfrage ja verloren ist, gerade auf Gerberts Geometrie, wie wir vermuten, sich berief, um die falsche Zahl 28 neben der als richtig bekannten Zahl 21 durch ein Zeugnis zu stützen, welches von dem, an welchen er seine Anfrage richtete, nicht zurückgewiesen werden konnte. Zu dieser Vermutung führen nämlich die Anfangsworte von Gerberts Brief hin[1]): „Unter den geometrischen Figuren, welche Du von uns entnommen hast, war ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 30 Fuß lang war, die Höhe 26 Fuß, die Fläche gemäß der Vergleichung von Seite und Höhe 390.“ Diese Figur nebst den genannten Zahlenwerten ist nämlich in Gerberts Geometrie der Inhalt von Kapitel 49.

Zugleich zeigt sich in der Tat eine Ansichtsänderung Gerberts. Während er in dem aus Epaphroditus entnommenen Kapitel der Geometrie noch $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ rechnete, sagt er jetzt, wie wir gesehen haben, im Verlaufe des Briefes, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks sei

[1]) *In his geometricis figuris, quas a nobis sumpsisti, erat trigonus quidam aequilaterus, cuius erat latus XXX pedes, cathetus XXVI, secundum collationem lateris et catheti area CCCXC.*

immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite, und darin steckt der Näherungswert $\sqrt{3} = \frac{12}{7}$, dessen Vorkommen bei irgend einem früheren Schriftsteller wir nicht zu bestätigen imstande sind, während er (S. 225) Baumeistern der Perikleischen Zeit bekannt gewesen zu sein scheint, vielleicht auch in den Bauschulen erhalten blieb, weil er bequemerer Rechnung als der heronische Näherungswert, wenn auch weniger genau als jener ist. Der Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ findet sich, um dieses gelegentlich hervorzuheben, gleichfalls in der dritten Abteilung von Gerberts Geometrie, in Kapitel 66.

Diese Schriften Gerberts, von welchen wir bisher gehandelt haben, waren geometrischen Inhaltes. Zwei andere beziehen sich auf Rechenkunst. Zunächst ist aus zwei dem XI. und dem XII. S. angehörenden Handschriften durch den letzten Herausgeber von Gerberts Werken eine Abhandlung: Regel der Tafel des Rechnens, *Regula de abaco computi* überschrieben und als von Gerbert herrührend bezeichnet zum Drucke befördert worden[1]). Der Titel dieser ausführlichen Abhandlung ist nicht ohne Interesse in der Richtung, daß in ihm das Wort Computus unzweifelhaft nicht als Osterrechnung, sondern als Rechnen im allgemeinen zu übersetzen ist, eine erweiterte Bedeutung, deren Möglichkeit wir (S. 834) betonten. Er findet seine Beglaubigung, wenn eine solche nötig erschiene, in einer Äußerung eines Schriftstellers des XI. S., der im folgenden Kapitel von uns besprochen werden muß, Bernelinus. Dieser redet nämlich von der „Regel“ des Papstes[2]). Wir werden indessen gleich nachher ausführlicher über die Verfasserfrage zu reden haben, wenn wir über den Inhalt der Regel im klaren sein werden, und über diesen kommen wir am raschesten hinaus, wenn wir denselben als in wesentlicher Übereinstimmung mit den seinerzeit im 27. Kapitel geschilderten rechnenden Abschnitten der Geometrie des Boethius anerkennen. Die Multiplikationsregeln sind soweit fortgesetzt, daß höchstens 27 Kolumnen des Abacus in Anspruch genommen werden, wodurch eine Übereinstimmung mit Richers Schilderung des Rechenbrettes, welches Gerbert in Rheims seinem Unterrichte zugrunde legte, hergestellt ist. Allerdings scheint ein nur flüchtiger Blick auf die Regel dieser Bemerkung zu widersprechen. Wo z. B. die Multiplikation von Einern in Zehner, in Hunderter usf. gelehrt wird, heißt es ausdrücklich, es

---

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 311—348. [2]) Ebenda pag. 357: *Si domini papae regula de his subtilissime scripta tantum sapientissimis non esset reservata, frustra me ad has compelleres scribendas.*

gebe 25 Fälle, und ähnlich, wenn der Multiplikator und ihm entsprechend der Multiplikandus von höherer Ordnung gedacht sind. Da könnte man auf das Vorhandensein von nur 26 Kolumnen zu schließen sich versucht fühlen, wenn man zu erwägen vergißt, daß die zählenden Ziffern beider Faktoren für sich ein zweiziffriges Produkt zu liefern imstande sind, also in der Tat das Vorhandensein einer bei manchen Multiplikationen freibleibenden, bei anderen zu benutzenden 27. Kolumne voraussetzen. Das Dividieren ist das komplementäre, sofern der Divisor aus Zehnern und Einern besteht. Besteht derselbe aus Hundertern und Einern, so wird wieder, wie bei Boethius, eine Einheit höchster Ordnung des Dividenden fürsorglich beseitigt und dann zunächst durch die Hunderter des Divisors geteilt, als wären sie von Einern gar nicht begleitet. Das Bruchrechnen bildet den Schluß und wendet diejenigen Brüche an, welche wir als ursprünglich römische Duodezimalbrüche wiederholt in Frage treten sahen.

Die ganze Schrift ähnelt in ihrer breitspurigen Stilistik der Geometrie Gerberts. Sie trägt, wie wir fast überflüssigerweise bemerken, in jeder Zeile ein durchweg römisches Gepräge. Man kann sogar einiges Erstaunen darüber an den Tag legen, daß nur die gemeinen römischen Zahl- und Bruchzeichen vorkommen, daß weder im fortlaufenden Texte, noch auf den Zeichnungen des Abacus, welche in der Handschrift jüngeren Datums sich vorfinden, jene Apices benutzt sind, welche doch nach Richers nicht mißzuverstehender Schilderung Gerbert in Rheims zu benutzen pflegte. Das läßt einigen Zweifel in die Meinung setzen, Gerbert habe gerade während seiner Rheimser Lehrzeit die Regel aufgeschrieben, beziehungsweise seinem dortigen Unterrichte zugrunde gelegt, eine Meinung, welche in weiterem Widerspruche gegen unsere (S. 850) begründete Ansicht steht, Gerbert habe dort überhaupt nicht nach einem den Schülern in die Hände gegebenen Buche das Rechnen gelehrt, in Widerspruch auch gegen die Worte Richers, man solle Gerberts Buch an C. den Grammatiker zu Rate ziehen. Konnte Richer so schreiben, wenn die ausführliche Regel älteren Datums als das Buch an Constantinus war, in welchem wir sogleich eine wesentlich kürzere Darstellung kennen lernen werden? Mußte Richer die Regel, wenn sie in Rheims in Gebrauch war, nicht unbedingt kennen, während seine Worte die Vermutung erwecken, er wenigstens habe nur von einer Schrift über Rechenkunst aus Gerberts Feder gewußt? Ähnliche nur noch stärkere Bedenken sind einer Berner Handschrift der Regel entnommen worden[1]. Die Vermutung, jene Handschrift gehöre dem

[1] Gerbert und die Rechenkunst des X. Jahrhunderts von Dr. Alfred Nagl

IX. S. an, sie sei also längere Zeit vor Gerberts Geburt geschrieben, hat sich allerdings als irrig erwiesen. Die Zeit der Niederschrift wird nicht über das X. S. hinaufzurücken sein[1]), und somit könnte das Original allenfalls um 970 entstanden sein. Aber aus dem Berner Kodex geht deutlicher als aus dem dem Drucke der Regel zugrunde gelegten hervor, daß man überhaupt nicht eine Abhandlung, sondern deren zwei vor sich hat, eine über das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen, eine zweite über das Bruchrechnen, und da nur von einer Schrift Gerberts die Rede sein könnte, so wäre mindestens die zweite Abhandlung einem Verfasser zuzuweisen, der spätestens als Gerberts Zeitgenosse lebte, der durch seine Duodezimalbrüche sich als Schüler römischer Rechenkunst zu erkennen gibt, und der mit diesen Brüchen die komplementäre Division ausübt! Wieder eine andere Auffassung ist diejenige[2]), welche die ganze Schrift Gerbert abspricht und sie zwar auch als aus verschiedenen Bestandteilen zusammengesetzt erachtet, aber Heriger von Lobbes für den Verfasser des ersten Hauptteiles hält. Heriger habe etwa zu gleicher Zeit in Lobbes wie Gerbert in Rheims gelehrt, so daß eine Beeinflussung des einen durch den anderen, Gerberts durch Heriger wie Herigers durch Gerbert, ausgeschlossen erscheine. Wir verzichten darauf eine Entscheidung zu treffen, wo nirgend strenge Beweise vorliegen, vielmehr nur Vermutung gegen Vermutung steht. Uns darf die eine Behauptung genügen, in welcher, soweit wir sehen, alle übereinstimmen, daß die Regel zu Gerberts Lebzeiten verfaßt ist, und daß die komplementäre Division aus Rom stammt.

Dagegen wird gegen eine andere Schrift Gerberts kein Zweifel erhoben. Büchlein über das Dividieren der Zahlen, *libellus de numerorum divisione*, ist die Überschrift der Abhandlung[3]), welche durch einen Brief an Constantinus eingeleitet, kürzer und weniger klar, als die Regel es tut, den genau gleichen Gegenstand behandelt gleichfalls ohne der Zahlzeichen auch nur mit einer Silbe zu gedenken. Der Einleitungsbrief lautet in seinen ersten wichtigen Sätzen wie folgt[4]): „Der Stiftslehrer Gerbert seinem Constantinus. Die Gewalt der Freundschaft macht fast Unmögliches möglich, denn wie würde ich versuchen, die Regeln der Zahlen des Abacus zu erklären, wenn Du nicht, Constantinus, mein süßer Trost der Mühen, die Veran-

(Wien 1888, Sonderabdruck aus Bd. 116 der Sitzungsberichte der phil.-histor. Klasse der Wiener Akademie).

[1]) So das Ergebnis genauer Erwägungen von Herrn Delisle in Paris.
[2]) Bubnov S. 205, Note 1. [3]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 349—356.
[4]) Math. Beitr. Kulturl. S. 320 verbessert nach dem in der Ausgabe von Olleris abgedruckten gereinigten Texte.

lassung bötest? So will ich denn, obwohl etliche Jahrfünfe vergangen sind, seit ich weder das Buch in Händen hatte noch in Übung war, einiges in meinem Gedächtnisse zusammensuchen, und es zum Teil mit denselben Worten, zum Teil demselben Sinne nach vorbringen." Es geht daraus hervor, daß Gerbert zu Constantinus auch wohl früher schon in dem Verhältnisse des Lehrers zum Schüler gestanden haben muß, weil er sonst nicht den Titel Stiftslehrer mit seinem Namen in Verbindung gebracht hätte, was er außerdem nur dreimal in den uns bekannten Briefen tat[1]). Wir wissen auch, daß die Bekanntschaft beider aus den Jahren 972 bis 982 herrührt, aus der Zeit, in welcher Gerbert wechselweise lernend und lehrend aus der Stellung des Stiftsschülers in die des Stiftslehrers übersprang, um dann wieder für einzelne Stunden in die erstere zurückzukehren. An jene Zeit erinnert Gerbert offenbar mit den Worten, es seien etliche Jahrfünfe, *aliquot lustra*, vergangen, und diese Zeit von mindestens 15 bis 20 Jahren zu der des Rheimser Aufenthaltes hinzugefügt liefert etwa das Jahr 997, in welchem (S. 858) der Brief an Constantinus höchst wahrscheinlich geschrieben ist. Seit einigen Jahrfünfen, sagt Gerbert, habe er weder das Buch in Händen noch irgend Übung gehabt, und der letzte Teil dieses Satzes bezieht sich zuverlässig nicht auf Übung im Rechnen, sondern im Rechenunterrichte, denn das ist es, was Constantinus von ihm verlangte. Ein Buch zum Rechenunterrichte war es also auch, welches als seit vielen Jahren vermißt bezeichnet ist. Damals, als Gerbert noch in Rheims lehrte, ja da hatte er das Buch, damals ließ er auch die Vorschriften sich aber- und abermals von den Schülern hersagen, sagte er sie ihnen vor, stets dieselben Ausdrücke gebrauchend, und nur dadurch wird es ihm möglich, auch jetzt noch teils mit denselben Worten wie damals teils dem Sinne nach das Gleiche aus dem Gedächtnisse wieder herzustellen. Und so sind wir nun zu der letzten Frage gelangt: Was für ein Buch war es denn, von welchem Gerbert redet? Man hat vermutet, die „Regel" sei damit gemeint. Wir haben die Gegengründe entwickelt, welche uns gegen diese Vermutung einnehmen. Sollten sie als entscheidend angesehen werden, dann muß es freilich ein anderes Buch gewesen sein, überhaupt kein von Gerbert selbst verfaßtes, für welches er auch wohl eine andere Bezeichnung gehabt hätte, als kurzweg das Buch, *librum*. Auch das Buch des weisen Josephs des Spaniers kann es nicht wohl gewesen sein, da dieses im

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) *Epistola* 11: *Gerbertus quondam scolasticus Ayrardo suo salutem* (pag. 7). *Epistola* 17: *Hugoni suo Gerbertus quondam scolasticus* (pag. 10). *Epistola* 142: *Gerbertus scolaris abbas Remigio monaco Treverensi* (pag. 78).

Jahre 984, wie wir sahen (S. 856), von Rheims aus gesucht wurde. Aber über diese negative Bestimmung, welches Buch es nicht war, das Gerbert vermißte, kommen wir freilich nicht hinaus. Die „Regel“ ist sodann von Gerbert als Papst — wie der Ausspruch des Bernelinus gleichfalls verstanden werden kann — verfaßt worden, erst nachdem das Büchlein für Constantinus aus dem Gedächtnisse zusammengeschrieben war. Gerbert, nehmen wir an, beabsichtigte, nachdem er den Gegenstand sich wieder vollständig gegenwärtig gebracht hatte, ihn endgültig und in genügender Klarheit für jeden Leser abzuschließen. Doch gleichviel. Diese kleinen Meinungsverschiedenheiten sind im Grunde sehr geringfügig gegenüber der Aufgabe, die uns bleibt: zu zeigen, welche Bedeutung Gerberts Lehren von Anfang an besessen und mehr und mehr gewonnen haben.

Die realistischen Studien[1]) waren mehr und mehr aus den Klöstern verschwunden, in welchen sie unter Alcuins unmittelbarem und mittelbarem Einflusse ein, wie es schien, ewiges Bürgerrecht sich erworben hatten. Nur ganz vereinzelt waren noch Mönche zu finden, welche weltliches Wissen besaßen oder nach solchem strebten. Büchersammlungen von mehr als 15 oder 20 Bänden gab es nur in den wenigsten Klöstern. Die Bücher selbst waren ihrer Seltenheit wegen einzeln an Kettchen befestigt. Der Abt hatte nicht einmal das Recht sie nach auswärts zu verleihen, außer nach bestimmten anderen Klöstern, welche einen Mitbesitz an den Büchern genossen. Nun trat Gerbert auf. Er gab dem Unterrichte zu Rheims, wo die Erinnerung an Remigius, der einst jene Schule zu Ansehen brachte, fast verloren gegangen war, ein neues Leben. Er lehrte freilich nicht wesentlich Neues, aber er lehrte es mit neuem Erfolge, und der Erfolg wuchs noch mit der Zunahme der persönlichen Bedeutung des Lehrers. Gerbert hatte allen Anfeindungen zum Trotze die höchste Stufe kirchlicher Würden erstiegen. Er war ein Papst an Sittenreinheit einzig dastehend unter den Päpsten seines Jahrhunderts, welche in wüster Sinnlichkeit dem heiligen Charakter ihrer Stellung Hohn boten, so daß ihr Regiment mit Recht als eine Pornokratie hat verunglimpft werden können. Ganz natürlich, daß jetzt die Gerbertsche Schule an Ansehen gewann. Der Glanz des Lehrers strahlte auf seine früheren Zöglinge zurück, gab ihnen selbst eine höhere Weihe. So würde es unzweifelhaft, wenn vielleicht auch nur mit kurz andauerndem Erfolge, gewesen sein, wenn die Lehren Gerberts weniger klar, weniger nützlich, weniger vortrefflich gewesen

---

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris): *Vie de Gerbert* pag. XXIV—XXXIII ist eine sehr hübsche Übersicht über den Geisteszustand der Zeit.

wären. Um wieviel mächtiger mußte die Wirkung sein, wo der innere Wert dem äußeren Rufe gleich kam, wo unter päpstlicher Fahne zur Modesache wurde, was verdiente keiner Mode unterworfen zu sein. Jetzt regte es sich wie auf ein gegebenes Zeichen aller Orten. Die Bibliotheken wurden wieder zahlreicher. Neue Abschreiber vervielfältigten die selten gewordenen Schriften. Der Unterricht, und was für uns allein in Betracht kommt, auch der mathematische Unterricht nahm an Umfang zu.

Gerberts Geometrie scheint freilich trotz oder vielleicht wegen ihrer verhältnismäßig höheren wissenschaftlichen Bedeutung eine rechte Wirkung nicht erzielt zu haben. Die geometrische Unwissenheit war, wie wir mehrfach hervorgehoben haben, bei Römern und folglich auch bei Schülern der Römer eine noch dichtere als die arithmetische. Der Boden war in diesem Gebiete noch weniger zubereitet fruchtbaren Samen aufzunehmen. Was wir wenigstens von mönchischen Versuchen in der Geometrie vor Gerbert kennen, beschränkt sich auf eine Zeichnung[1]), welche ein Schreiber des X. oder XI. S. einem Auszuge aus der Naturgeschichte des Plinius beifügte, und in welcher man eine graphische Darstellung unter Zugrundelegung des Koordinatengedankens erkannt hat. Wir stellen nicht in Abrede, daß hier der Anfang zu einer Betrachtungsweise vorhanden ist, die am Ende des XIV. S. an Wichtigkeit und Verbreitung gewann und das Wort latitudines, welches Plinius noch als Breite braucht, mit dem Sinne der Abszissen begabte, aber in der Zeit, in welcher jene Figur entstand, fällt es uns schwer an das Bewußtsein ihrer Tragweite zu glauben. Auch von Nachfolgern Gerberts in geometrischen Untersuchungen ist so wenig bekannt, daß wir es füglich hier anschließen können. Da ist zunächst von Briefen zu reden, deren Schreiber teils wenig bekannt teils unbekannt sind, aber alle der ersten Hälfte des XI. S. angehören. Da überdies sämtliche zehn Briefe sich handschriftlich in Paris und nur in Paris erhalten haben, so war es durchaus gerechtfertigt, sie gemeinschaftlich dem Drucke zu übergeben[2]). Zuerst sind 8 zwischen Radulf von Lüttich und Regimbold von Cöln gewechselte Briefe zum Abdruck gebracht. Dann folgt ein weiterer Brief an Regimbold, dessen Schreiber sich als Mönch B. bezeichnet, eine Bezeichnung welche vollständiger Namenlosigkeit gleichkommt. Das letzte Stück der Sammlung führt einzig

[1]) S. Günther, Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes in den Abhandlungen der naturf. Gesellsch. zu Nürnberg VI. Separatabdruck S. 20 flgg. und 48—49. [2]) *Une correspondance d'écolâtres du XI. Siècle publiée par* M. Paul Tannery et M. l'abbé Clerval in den *Notices et extraits* XXXVI, 487—543. Paris 1900.

den Titel *De Quadratura Circuli.* Radulf von Lüttich wird gemeinsam mit Regimbold von Cöln als Mathematiker aus der unmittelbar auf Gerbert folgenden Zeit gerühmt[1]), allein diese Erwähnung ist durch keinerlei Beziehung auf ältere Schriftsteller gestützt und darum unverwertbar. Der einzige Zeuge, welchen man anrufen könnte ist Adelmann, der in seinen Versen auf berühmte Zeitgenossen Regimbold von Cöln nennt und von ihm sagt, er habe sich lange in Lüttich aufgehalten[2]). Alles, was wir sonst wissen, stammt aus dem Briefwechsel selbst. Regimbold hat bei vorübergehendem Besuche in Chartres dort mit dem berühmten Bischof Fulbert verkehrt[3]) und erwähnt diesen Besuch mit der Bitte Radulf möge bei Fulbert eine Erkundigung einziehen. Fulberts Todestag war der 10. April 1028, also ist der Brief vor diesem Tage geschrieben. Regimbold nennt ferner den Bischof Adelbold von Utrecht[4]), und dieser gelangte 1010 zu der ihm beigelegten Würde, also ist der Brief nach 1010 geschrieben. Mehr aber, als daß der Briefwechsel der Zeit zwischen 1010 und 1028 angehört, läßt sich nicht behaupten. Es ist ja ganz interessant, daß Regimbold sagt, er lehre seit mehr als 20 Jahren[5]), er werde nächstens nach Rom reisen[6]), daß von Wazo in einer Weise die Rede ist, als wäre er Regimbolds Lehrer gewesen[7]), aber zur genaueren Datierung der Briefe dienen diese Tatsachen keineswegs. Der Briefwechsel selbst geht davon aus, Boethius habe in seinen Erläuterungen zu den Kategorien des Aristoteles gesagt: *scimus triangulum habere tres interiores angulos equos duobus rectis*[8]). Diese Behauptung wird nach verschiedenen Richtungen besprochen. Radulf hält den Satz von der Winkelsumme eines Beweises wert und sucht ihn für das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck zu liefern, indem er die Diagonale eines Quadrates zieht. Bei dieser Gelegenheit bemerkt er, das Quadrat über der Diagonale sei das Doppelte des ursprünglichen Quadrates und die Diagonale selbst sei $\frac{7}{5}$ der Quadratseite[9]). Regimbold dagegen entnimmt dem *Geometricum* des Boethius die Diagonale sei $\frac{17}{12}$ der Quadratseite[10]). Der Herausgeber des Briefwechsels hat mit Recht hervorgehoben,

[1]) Karl Werner, Gerbert von Aurillac, die Kirche und Wissenschaft seiner Zeit S. 77 (Wien 1878). [2]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 522 lin. 14. [3]) Ebenda pag. 532 lin. 22—23. [4]) Ebenda pag. 522 lin. 13 *Trajectensem Episcopum Adelboldum.* [5]) Ebenda pag. 529 lin. 24. [6]) Ebenda pag. 532 lin. 4. [7]) Ebenda pag. 522 lin. 14 und pag. 531 lin. 8. [8]) Ebenda pag. 518 lin. 12. [9]) Ebenda pag. 515 lin. 24 *superbipartiens quintas.* [10]) Ebenda pag. 525 lin. 2—4 *In Geometrico dicit Boethius: Omne diagonium equilateri quadrati habet ipsum latus in se et eius quincuncem.*

diese Regel oder $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ finde sich in keiner dem Boethius zugeschriebenen Geometrie, auch nicht in der gefälschten, sie sei dagegen im 66. Kapitel von Gerberts Geometrie, also in deren dritten Abteilung vorgetragen (S. 867). Es leuchtet ein, daß hieraus nur eine einzige Folgerung gezogen werden darf, diejenige daß im ersten Viertel des XI. S. in Cöln eine Geometrie des Boethius bekannt war, welche nicht mit irgend einer von den Handschriften übereinstimmte, die heute mit Recht oder Unrecht Boethius zugeschrieben werden. Regimbold wendet nun die Regel, daß die Hypotenuse des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks $\frac{17}{12}$ seiner Kathete sein muß, weiter an, um aus dem gegebenen Umfange die einzelnen Seiten zu finden. Diese Rechnung ist dadurch besonders merkwürdig, daß Regimbold sich nicht, wie Radulf es tut, mit den römischen Duodezimalbrüchen begnügt um die Seitenlängen annähernd zu berechnen, sondern daß er den Bruch $\frac{17}{246}$ anwendet[1]. Einen weiteren Gegenstand des Briefwechsels bilden die Ausdrücke *pedes recti, quadrati, crassi,* deren Bedeutung Radulf entfallen war, bis Regimbold sie ihm als Längen, Flächen und Körpermaße in Erinnerung bringt. Da fällt es Radulf ein, daß er in Chartres die Erklärung aus dem Albinus kennen gelernt habe, und er benutzt die Gelegenheit um Regimbold dreist zu bitten, ihm den Albinus oder, wenn der nicht vorhanden sein sollte, den sogenannten Podismus zuzuschicken[2]. Ob Albinus irgend ein Werk Alcuins war, ob der Podismus einen Auszug aus römischen Feldmessern bezeichnete, wenn nicht Gerberts Geometrie, darüber ist nichts bekannt, und ebenso verhält es sich mit einer von Regimbold angerufenen Regel der Divisionen und der Brüche, welche vorschreibe, wenn der Divisor den Dividendus übersteige, solle man den Dividendus als Rest bezeichnen oder zur intellektualen Division seine Zuflucht nehmen[3]. Der letztere Ausdruck bedeutet offenbar einen gewöhnlichen Bruch wie das vorerwähnte $\frac{17}{246}$. Fast noch mehr Interesse als an den auf Rechnung bezüglichen Fragen hatten aber Radulf sowohl als Regimbold daran, was Boethius wohl unter inneren und unter äußeren Dreieckswinkeln verstanden habe. Wir erinnern uns, daß im 9. Kapitel der Gerbertschen Geometrie (S. 861) die gleiche Frage dahin beantwortet wurde, der spitze Winkel sei ein innerer, der

[1] *Correspondance d'écolâtres* pag. 526 lin. 3 *X et VII ducentesimas quadragesimas sextas siliquas.* [2] Ebenda pag. 531 lin. 15—20. [3] Ebenda pag. 518 lin. 21—24.

stumpfe ein äußerer, bei jenem liege der mit der Grundlinie den spitzen Winkel bildende Schenkel im Inneren eines rechten Winkels, bei diesem befinde sich der den stumpfen Winkel bildende Schenkel außerhalb des rechten Winkels. Genau die gleiche Meinung besitzt Regimbold[1]). Auch Fulbert setzte den inneren und spitzen, den äußeren und stumpfen Winkel einander gleich, aber mit anderer Begründung: bei dem spitzwinkligen Dreiecke falle die Senkrechte von der Dreiecksspitze auf die Grundlinie in das Innere des Dreiecks, bei dem stumpfwinkligen Dreiecke falle sie außerhalb[2]). Radulf endlich meint, von inneren Winkeln rede man in der Ebene, von äußeren im Raume[3]). Im Laufe des Briefwechsels erscheinen noch andere Deutungsversuche, auf welche wir einzugehen verzichten.

Ob der Mönch B. von dem Briefwechsel zwischen Regimbold und Radulf Kenntnis hatte, läßt sich weder behaupten noch leugnen. Jedenfalls beginnt er seinen Brief an Regimbold mit der Verdoppelung des Quadrates, von der er behauptet sie sei durch Messung möglich, in Zahlen unmöglich[4]). Man solle die Diagonale des kleineren Quadrates, welche $\frac{17}{12}$ von deren Seite sei, als Seite des größeren Quadrates benutzen. Wir fassen die bei uns gesperrt gedruckte Behauptung so auf, daß B. das Bewußtsein hatte $\sqrt{2}$ könne durch Rechnung niemals genau, sondern nur annähernd, etwa in der Größe $\frac{17}{12}$ gefunden werden, während die Konstruktion des doppelten Quadrates mittels der Diagonale des einfachen Quadrates vollziehbar sei. Als zweite Aufgabe gilt für B. die Quadratur des Kreises. Auch auf sie verweist eine Stelle aus den Erläuterungen des Boethius zu den aristotelischen Kategorien. Aristoteles hatte die Kreisquadratur als möglich aber als unbekannt bezeichnet. Boethius hatte dazu bemerkt[5]), jene Unbekanntschaft gelte nur für die Zeit des Aristoteles, später habe man den Kreis quadrieren lernen. Ob Boethius das archimedische $\pi = \frac{22}{7}$ für genau richtig hielt, ob er, wie vermutet worden ist[6]), an eine Quadratur mittels eigens dazu erfundener Kurven, wie die Quadratrix, dachte, ist wohl nicht zu entscheiden. Jedenfalls rechnet B. mit der archimedischen Zahl, wenn er den Durchmesser 7, den Kreisumfang 22 wählt und $\frac{7}{2}$ mal $\frac{22}{2}$ als Kreisfläche findet; das sei die alte Regel für den Kreis in den geometrischen Schriften[7]).

---

[1]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 526 lin. 16—27. [2]) Ebenda pag. 532 lin. 27—28. [3]) Ebenda pag. 520 lin. 14—15. [4]) Ebenda pag. 533 lin. 13—14: *et hoc in mensura, in numeris nunquam.* [5]) Ebenda pag. 534. [6]) Ebenda pag. 508 in der Einleitung Tannerys. [7]) Ebenda pag. 534 letzte Zeile: *Haec in Geometricis vetusta circuli habetur regula.*

Welche Schriften B. hier meint, ob vielleicht die *Geometrica* das gleiche bedeuten, was bei Regimbold *Geometricum Boethii* heißt[1]), darüber kann man nicht entscheiden, nur so viel scheint aus dem Wortlaute hervorzugehen, daß B. von einer ganz bestimmten, Regimbold, an den sein Brief gerichtet ist, wie ihm bekannten älteren Schrift redet. Als Seite des $\frac{154}{4} = 38{,}5$ großen Quadrates[2]) bezeichnet B. die Länge $6 + \frac{1}{5} + \frac{1}{200} = 6{,}205$. Als weniger beschwerliche Quadratur des Kreises könne man sich damit begnügen $\frac{5}{4}$ des Durchmessers als Diagonale des Quadrates zu benutzen[3]). Augenscheinlich entspricht diese Vorschrift dem Werte $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Das letzte anonyme Stück der im Druck vereinigten Sammlung heißt *De Quadratura Circuli*[4]). Diese kleine Schrift lehrt verschiedene Quadraturen kennen, unter welchen wir nur die erste hervorheben, welche $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers als Quadratseite wählt, d. h. $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ setzt, wie es im Rechenbuche des Ahmes der Fall war. Da kein einziges Vorkommen dieses Wertes in den fast 3000 Jahren, um welche Ahmes von der anonymen Schrift absteht, bekannt ist, so dürfte nach unserem heutigen Wissen eine Abhängigkeit ausgeschlossen sein, man wird vielmehr an eine selbständige Nacherfindung zu denken haben[5]). Der Anonymus spricht nach der Quadratur des Kreises auch noch von äußeren und inneren Winkeln, welche er wie Regimbold als stumpfe und spitze Winkel deutet, und von der Winkelsumme eines gleichseitigen Dreiecks, welches er zu einem doppelt so großen Rechtecke vervollständigt, dadurch an Radulfs Beweisführung bei dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke erinnernd.

Nächst den in der beschriebenen Sammlung vereinigten Stücken haben wir ein von Franco von Lüttich verfaßtes Werk in 6 Büchern über die Quadratur des Kreises[6]) zu nennen. Eine Chronik[7]) berichtet, die Schrift über die Quadratur des Kreises sei dem Erz-

[1]) *Correspondance d'écolâtres* pag. 525 lin. 2. [2]) Ebenda pag. 535 lin. 1—2. [3]) Ebenda pag. 536 lin. 21—24. [4]) Ebenda pag. 536—538. [5]) Ebenda pag. 512 lin. 6—11 in Tannerys Einleitung. [6]) Ang. Mai, *Classici autores e vaticanis codicibus editi* III, 346—348. Roma 1831, veröffentlichte Bruchstücke davon. Dr. Winterberg gab das ganze Werk heraus. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik IV, 137—183 (1882). Im Anschluß ist S. 183—190 noch eine zweite nicht von Franco herrührende kleinere Schrift über die Quadratur des Kreises zum Abdrucke gebracht. Wir zitieren Franco mit der betreffenden Seitenzahl. [7]) Sigebert Gembl. Chron. ad ann. 1047 bei Pertz Mon. VIII, 359. Vgl. Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande II, 68, Anmerkung 278.

bischof Hermann gewidmet, und da Hermann II., der allein in Frage steht, von 1036 bis 1055 Erzbischof von Cöln war, so würde dadurch die Entstehungszeit jener Schrift in sehr enge Grenzen eingeschlossen. Die in Rom erhaltene Handschrift nennt den Namen des Erzbischofs, dem das Werk zugeeignet ist, nicht, und so erscheint jene Angabe immerhin zweifelhaft. In der Vorrede sagt Franco, die Kenntnis der Kreisquadratur von Aristoteles ausgehend habe sich, wie man behaupte, unzweifelhaft bis zu Boethius erhalten[1]), dann sei alles so sehr verloren gegangen, daß alle Gelehrten von Italien, von Frankreich und von Deutschland hierin Fehler machten. Unter denen, welche sich vergebliche Mühe gaben, sei Adelbold gewesen, dann Wazo, der größte der Gelehrten[2]) und Gerbert, der Wiederhersteller der Wissenschaft. An anderen Stellen wird auf Gerbert, auf Regimbold und Racechin[3]) Bezug genommen. Auch der Arbeiten des Boethius über Kreisquadratur wird wiederholt gedacht[4]), an deren Vorhandensein also damals kein Zweifel obwaltete. Wir wissen, daß die Erläuterungen des Boethius zu den aristotelischen Kategorien damit gemeint sind. Franco zeigt sich in der ganzen Schrift als gewandten Rechner, dem namentlich die Anwendung von Brüchen — die durchweg römische Duodezimalbrüche sind — keine Schwierigkeit bereitet. Sein geometrisches Wissen dagegen ist so gering, daß nicht einmal die Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes bei ihm anzunehmen ist. Die geschichtliche Ausbeute ist dem entsprechend eine hauptsächlich arithmetische. Wir erfahren, daß Regimbold $\sqrt{2}$ durch $\frac{17}{12}$ ersetzte[5]), was wir aus Regimbolds Briefen schon wissen, ein Wert, den (S. 436) Theon von Smyrna kannte, den (S. 640) wahrscheinlich auch Inder benutzten. Wir hören[6]), daß die Kreisfläche bald als Quadrat von $\frac{7}{8}$ des Durchmessers, bald als Quadrat des vierten Teils der Peripherie betrachtet wurde. Beide Verfahren sind uns bekannt, jenes aus Indien (S. 641), dieses aus spätrömischen Feldmessern (S. 591). Ferner hält Franco selbst[7]) $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates, rechnet also mit

$$\pi = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 3{,}24\,.\,.$$

Daß die Kreisfläche des Kreises vom Durchmesser 14 durch die Zahl 154 dargestellt werde, zeigt Franco[8]), indem er den Umfang,

[1]) *Eius itaque scientiam haud dubium ferunt usque ad Boetium perdurasse.* Franco 143. [2]) Wazo starb 1048 als Bischof von Lüttich. [3]) Franco 158 und häufiger. [4]) Ebenda 166, 184. [5]) Ebenda 158. [6]) Ebenda 145. [7]) Ebenda 187. [8]) Ebenda 152.

welcher die Länge 44 habe, in 44 gleiche Teile zerlegt und jeden Endpunkt eines Teiles mit dem Kreismittelpunkt verbindet. So entstehen 44 Dreiecke, welche paarweise in entgegengesetzter Richtung aneinander gelegt je ein Rechteck, im ganzen deren 22 liefern mit den Seitenzahlen 1 und 7. Auch diese Beweisführung erinnert so sehr an die des Inders Gaṇeça (S. 656), daß man versucht wird, nach einer beiden gemeinschaftlichen Quelle zu fahnden. Wir wollen endlich noch bemerken, daß Franco von den Streitigkeiten über die Bedeutung eines äußeren und eines inneren Winkels weiß[1]) und sich dahin entscheidet, ein äußerer Winkel sei ein solcher der außerhalb der betreffenden Figur liege.

Hier ist der Ort einzuschalten, was wir von der gefälschten Geometrie des Boethius wissen. Es ist blutwenig. Die Erlanger Handschrift gehört dem XII. S. an. Damals spätestens ist also das ungemein geschickt gemachte Schriftstück verfaßt worden. Es war dadurch vorbereitet, daß ältere Handschriften zwar keineswegs gleichen Inhalts, aber fast gleichen Titels vorhanden waren, deren einige bis auf den heutigen Tag erhalten sind. Damit stehen wir am Ende unseres Wissens. Wer der Fälscher war, und — eine Frage, die sich aufdrängen muß — was er mit seiner Fälschung beabsichtigte, das hat noch niemand erörtert, noch niemand zu erörtern gesucht. Überlassen wir es anderen Forschern hier Vermutungen aufzustellen. Wir verlassen die Geometrie der Zeit vor dem Schlusse des XII. S. und kehren zu der (S. 871) unterbrochenen Geschichte der Rechenkunst zurück.

Das Kolumnenrechnen fand mit Gerberts wachsendem Ansehen allgemeine Verbreitung. Wir dürfen uns mit der so allgemeinen Behauptung nicht begnügen, wir müssen ihr näher treten. Sie wird uns die Gelegenheit geben, die Männer zu nennen, welche aus Gerberts Schule hervorgegangen jene Verbreitung vollzogen, wird uns zugleich Gelegenheit geben, zu sehen, wie seit 1100 etwa, seit dem Beginn der Kreuzzüge, wirklich Arabisches in das Abendland eindrang, wie ein eigentümlicher Kampf um das Dasein zwischen der alten und neuen Rechenkunst sich entspann, zwischen dem Kolumnenrechnen und dem Zifferrechnen, deren jedes seine Vertreter besaß. Man hat sich daran gewöhnt, diese Vertreter als Abacisten und Algorithmiker zu bezeichnen, und unter diesen Sammelnamen wollen wir sie kennen lernen.

---

[1]) Franco 143—144.

40. Kapitel.

Abacisten und Algorithmiker.

Bei den Versuchen den Abacus mit den eigentümlichen Zeichen, die wir Apices nennen, nach aufwärts zu verfolgen, ist in früheren Werken stets von einer rätselhaften Handschrift der Kapitularbibliothek von Ivrea die Rede gewesen[1]), welche nach der Ansicht eines im allgemeinen zuverlässigen Handschriftenkenners von einer Hand des X. S. herrührte oder gar, wie eine nachgelassene Notiz desselben Gelehrten meinte, am Hofe Karls des Großen geschrieben ward[2]). Es sei eine Anweisung zum Dividieren in arabischen Ziffern. Alle diese Angaben sind nun freilich wesentlichen Abänderungen zu unterwerfen. Genaue wiederholte Untersuchung der Handschrift[3]) hat ergeben, daß sie erst dem XI. S. angehört, mithin in die Zeit fällt, welche wir in diesem Kapitel[4]) zu besprechen haben, in die Zeit nach Gerbert, wenn auch vielleicht nicht viel später als er. Der Inhalt ist ein eigentümlicher.

Zuerst ist als Aufgabe gestellt, 1111111537 durch 809 zu dividieren, wobei der Quotient 1373438 erscheint und 195 übrig bleibt. Aufgabe und Auflösung sind teils in Worten, teils in römischen Zahlzeichen geschrieben. Dann folgen 19 Hexameter, welche auf das Rechnen auf dem Abacus sich beziehen, welche aber vollständig zu verstehen uns nicht gelungen ist. Hieran schließt sich die Wiederholung der Aufgabe und ihre Auflösung im Kolumnensysteme geschrieben, aber ohne daß senkrechte Striche die einzelnen Rangordnungen trennten. Zwölf Kopfzahlen genügen den Abacus anzudeuten. Über ihnen steht der Dividend, unter ihnen der Divisor, unter diesem der Rest, unter diesem wieder der Quotient, sämtlich in richtiger Ordnung, so daß also bei Niederschreibung des Divisors 809 unter der Kopfzahl der Zehner ein freier Raum blieb. Die Kopfzahlen des 12reihigen Abacus sind durch römische Zahlzeichen angegeben, die sämtlichen anderen Zahlen durch Apices. Endlich folgt wieder nur in Worten und ohne durch irgend ein Beispiel

---

1) Friedlein, Gerbert, die Geometrie des Boetius und die indischen Ziffern. Erlangen 1861, S. 41, Anmerkung 20 hat zuerst die Mathematiker auf diese Handschrift aufmerksam gemacht. 2) Bethmann im Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde, herausgegeben von Pertz IX, 623 und XII, 594. 3) Reifferscheid in den Sitzungsberichten der philosoph.-histor. Klasse der k. Akademie der Wissenschaften. Wien 1871. Bd. 68, S. 587—589 die Beschreibung des Codex LXXXIV, die dem XI. S. angehöre. Dann „f. 87. 88 Allerlei von späteren Händen". 4) Unsere Angaben beruhen auf einem Faksimile, welches Fürst Bald. Boncompagni die große Güte hatte, für uns in Ivrea durchpausen zu lassen.

Unterstützung zu finden die Vorschrift, wie man bei der Division durch einen aus Hundertern, Zehnern und Einern bestehenden ununterbrochen dreiziffrigen Divisor — *tres sint divisores nullo interposito* — verfahren solle in offenbarer Anlehnung an die „Regel“ Gerberts. Alles zusammen füllt nur eine einzige Seite und dürfte, wenn auch nicht so alt wie die einen hofften, die anderen fürchteten, doch einiges Interesse nicht entbehren, so daß ein vollständiger richtiger Abdruck des kurzen Stückes immerhin wünschenswert erscheint.

Ein Schüler Gerberts war vielleicht Bernelinus, der in Paris ein durch den Druck veröffentlichtes Buch über den Abacus geschrieben hat[1]). Bernelinus beruft sich (S. 867) auf die Regel des Papstes Gerbert, die freilich nur für die Weisesten geschrieben sei, und darauf, daß sein Freund Amelius, auf dessen Andrängen er sein Werk verfasse, es verweigerte, an die Lothringer sich zu wenden, bei welchen diese Lehren in höchster Blüte ständen. Nur diese beiden Erwägungen vereinigt hätten ihn zum Schriftsteller gemacht. Er beginnt sodann mit der Schilderung des Abacus und zeigt darin seine Selbständigkeit, denn Gerbert selbst hat weder in der Regel, wenn die (S. 867) als solche bezeichnete Schrift wirklich von ihm herrührt, noch in der Abhandlung für Constantinus eine solche Schilderung an die Spitze zu stellen für nötig gehalten, ein Umstand, welchen wir uns nur so erklären können, daß Gerbert den Abacus nicht als etwas Neues oder Schwieriges betrachtete, sondern als ein alt- und allbekanntes Hilfsmittel, während die Divisionsregeln allerdings wenig bekannt gewesen sein müssen. Der Abacus war, nach Bernelinus, eine vorher nach allen Seiten sorgsam geglättete Tafel und pflegte von den Geometern mit blauem Sande bestreut zu werden, auf welchen sie auch die Figuren der Geometrie zeichneten. Bis zur Höhe der eigentlichen Geometrie wolle er sich aber nicht erheben, er bemerke nur, daß zu rechnerischen Zwecken die Tafel in 30 Kolumnen abgeteilt werde, von welchen 3 für die Brüche aufzubewahren, die übrigen 27 nach Gruppen von je 3 zu bezeichnen seien. Die erste Kolumne wird nämlich durch einen kleinen Halbkreis abgeschlossen, die zweite und dritte zusammen durch einen größeren, alle drei gemeinsam durch einen noch größeren. Bernelinus sagt zwar nicht Kolumnen, sondern Linien, *lineas,* aber er meint es so, wie wir es ausgesprochen haben, da ja ein Abschluß von einer, von zwei, von drei Linien durch an Größe verschiedene Halbkreise nicht gedacht werden kann, sondern nur von Kolumnen. In jeder Dreizahl von Kolumnen, deren es unendlich viele geben kann, ist eine Kolumne der Einer, eine der

[1]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 357—400 *Liber Abaci.* Die Anfangsworte lauten: *Incipit praefatio libri abaci quem iunior Bernelinus edidit Parisiis.*

Zehner und eine der Hunderter zu unterscheiden, welche der Reihe nach mit *S* und *M*, mit *D*, mit *C* bezeichnet werden sollen. *C* sei nämlich Anfangsbuchstabe von *centum*, *D* von *decem*, *M* von *monas* — Bernelinus schreibt dafür fälschlich *monos* — oder von *mille*, *S* endlich von *singularis*. In den Zahlzeichen spiegele die Gruppierung nach drei Kolumnen sich gleichfalls ab, da ein Horizontalstrich, *titulus*, über dem I, dem X, dem C dieselben vertausendfache. Der Beschreibung der Kopfzahlen, welche über sämtliche Kolumnen sich fortsetzen und mit den Bezeichnungen der in jeder Dreizahl unterschiedenen Rangordnungen nicht zu verwechseln sind, läßt sodann Bernelinus die Schilderung und Abbildung der neun Zahlzeichen folgen. Es sind die Apices, welche hier auftreten, wenn uns dieses Wort ein für allemal die betreffenden Zeichen vertreten soll, von denen schon soviel die Rede war. Außerdem könne man sich auch griechischer Buchstaben bedienen, und hier enthüllt Bernelinus wiederholt, wie vorher durch Anwendung des ungriechischen monos, eine mangelhafte Kenntnis dieser Sprache. Die Zahl 6 läßt er nämlich durch Σ bezeichnen, während bekanntlich ϛ das richtige Zeichen wäre. — Das Einmaleins schließt sich an, bei welchem eine zunächst sehr auffallende Lücke sich darbietet: die Produkte gleicher Faktoren, also 1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3 bis 9 mal 9 fehlen, warum? ist nicht gesagt. Wir können nur einen Grund vermuten, darin bestehend, daß die Quadrierung einziffriger Zahlen, und nur um diese handelt es sich, in dem Grade eine Ausnahmerolle spielte, als die sogenannte regula Nicomachi (S. 433) zur Ausführung derselben allgemeiner bekannt war, als irgend andere Regeln. Daß freilich jene Regel besonders erwähnt werde, muß man aus unserer fast zaghaft ausgesprochenen Meinung nicht schließen wollen. Bei der Multiplikation der einzelnen Rangeinheiten bedient sich Bernelinus der Wörter Finger- und Gelenkzahl. Eine Erklärung würde man auch hier vergebens suchen, doch steht dabei die Veranlassung auf festerem Boden. Wir wissen durch Beispiele aus den verschiedensten Zeiten, daß jene Wörter so bekannt waren, daß jede Erläuterung überflüssig erscheinen mußte. Als Ende des ersten Abschnittes, der also bis zur M u l t i p l i k a t i o n einschließlich sich erstreckt, ist die Ausrechnung von 12^2, von 12^3, von 12^4, von 12^5, von

$$12 + 12^2 + 12^3 + 12^4 + 12^5$$

zu betrachten, wobei wir vielleicht in Erinnerung bringen dürfen, daß 12 die Grundzahl des römischen Bruchsystems ist.

Der zweite Abschnitt handelt von der e i n f a c h e n D i v i s i o n, d. h. von denjenigen Teilungen, bei welchen der Divisor ein Einer oder ein einfacher Zehner ist. Drei Fälle sind dabei unterschieden,

der erste, wenn der Divisor der Reihe nach in allen Stellen des Dividendus enthalten ist und nur bei den Einern allenfalls ein Rest bleibt, wie z. B. 668 geteilt durch 6; der zweite, wenn Reste auch bei früheren Stellen bleiben, beziehungsweise wenn der Divisor einen höheren Wert hat als einzelne Stellen des Dividendus, so daß zwei Stellen des Dividendus zur Vornahme der Teilung gemeinsam betrachtet werden müssen, wie z. B. 888 geteilt durch 5 oder 333 geteilt durch 6; endlich der letzte Fall, wenn der Divisor ein Zehner ist, z. B. 1098 geteilt durch 20. Die Divisionen können dabei mit oder ohne Differenz, d. h. als komplementäre Division oder gewöhnlich vollzogen werden. Auf dem Abacus werden dabei vier Horizontallinien gezogen, welche von oben nach unten die erste, zweite, dritte, vierte Zeile heißen mögen. Auf die erste Zeile schreibe man den Divisor, beziehungsweise bei der Division mit Differenz auch seine Ergänzung zu 10, oder im dritten Falle zu 100. Die zweite Zeile enthält den Dividendus, die dritte ebendenselben noch einmal geschrieben, die vierte den Quotienten. Die Zahl der zweiten Zeile bleibt im ganzen Beispiele unverändert. Die Zahlen der darunter folgenden Zeilen werden, wie es der Sand des Rechenbrettes leicht gestattet, fortwährend verändert. Die Division 668 : 6 sieht z. B., wenn das Auslöschen und Ersetzen von Ziffern durch Durchstreichen derselben bildlich dargestellt werden darf, folgendermaßen aus:

Division 668 : 6 mit Differenz

C	*D*	*S*
		6
		4
6	6	8
~~6~~	~~6~~	~~8~~
~~2~~	~~4~~	~~4~~
~~1~~	~~8~~	~~8~~
~~1~~	~~4~~	~~8~~
	~~2~~	2
	~~4~~	
	~~6~~	
	~~2~~	
	~~2~~	
	~~6~~	~~6~~
	~~2~~	~~2~~
	~~1~~	~~2~~
1	1	1

Division 668 : 6 ohne Differenz

C	*D*	*S*
		6
6	6	8
~~6~~	~~6~~	~~8~~
		2
1	1	1

Der Wortlaut der Rechnung ist bei der Division mit Differenz folgender: 10 in 600 geht **60** mal, aber 4 mal 60 oder 240 sind wieder beizufügen; 10 in 200 geht **20** mal, aber 4 mal 20 oder 80 sind wieder beizufügen, und nun schreiben wir statt 60 + 40 + 80 ihre Summe 180 und sagen weiter 10 in 100 geht **10** mal mit einer nötigen Ergänzung 4 mal 10 oder 40, welche mit 80 zusammen 120 liefert. Jetzt ist 10 in 100 wieder **10** mal enthalten, und die Ergänzung 4 mal 10 oder 40 gibt mit 20 zusammen 60. Man dividiert weiter 10 in 60 geht **6** mal, die Ergänzung ist 4 mal 6 oder 24. Mithin sagt man geht 10 in 20 weitere **2** mal mit der Ergänzung 4 mal 2 oder 8. In der einheitlichen Kolumne sind jetzt vorrätig 8 + 4 + 8 oder 20. Zehner sind wieder hergestellt und 10 in 20 geht **2** mal. Die Ergänzung 2 mal 4 oder 8 ist durch 10 nicht mehr teilbar, nur noch durch 6, wobei **1** als Quotient, 2 als Rest erscheint. Alle Quotiententeile vereinigt geben so den Gesamtquotient 60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = **111** nebst dem Reste 2. Wir wollen nicht versäumen, hier gelegentlich auf die nicht unwichtige, wenn auch nur negative Tatsache hinzuweisen, daß die hier beschriebene Ordnung des Divisors, des zweimal angeschriebenen Dividenden, des Quotienten bei keinem Araber vorkommt.

Der dritte Abschnitt ist der zusammengesetzten Division gewidmet, welche auch wieder ohne Differenz oder mit Differenz ausgeführt wird. An neuen Gedanken ist hier so wenig zu gewinnen, als an neuen Ausführungsmethoden, es ist eben nur wieder die Unterscheidung in viele Fälle, wie sie dem Geübten, insbesondere dem mathematisch denkenden Geübten sehr überflüssig erscheint, wie sie aber dem Schüler eines ersten Rechenunterrichtes wünschenswert, ja unentbehrlich sich erweisen mag.

Ein vierter Abschnitt lehrt das Rechnen mit Brüchen, natürlich mit Duodezimalbrüchen der uns bekannten Art. „Lasse uns denn zu der Abhandlung über die Gewichtsteile und ihre Unterabteilungen kommen, und wundere Dich nicht, wenn darin Richtiges mir entging, denn die Unbequemlichkeit der Weinlese beschäftigt meine Seele mannigfaltig, auch habe ich als Muster kein Werk als das des Viktorius, und dieser ist bei dem Bestreben kurz zu sein, außerordentlich dunkel geworden“[1]). Wir haben diese Stelle ihrem Wortlaute nach eingeschaltet, um an ihr die Richtigkeit einer Bemerkung

[1]) *Nunc itaque ad unciarum minutiarumque tractatum veniamus, in quo si quid me veritas praeterierit minime mireris, cum et vindemiarum importunitate meus animus per diversa quaeque rapiatur, et nullius praeter Victorii opus habeam exemplar, qui, dum brevis studuit fieri, factus est obscurissimus.*

über den Calculus des Viktorius zu erweisen. Das Vorhandensein jenes Rechenknechtes (S. 531) kann nun und nimmermehr als Zeugnis dafür angerufen werden, daß der Zeit, in welcher er entstand, das Rechnen auf dem Abacus fremd gewesen sei. Wir finden hier in Bernelinus einen Mann, der dieses Rechnen selbst lehrt, der es mit einer Klarheit lehrt, welche die Darstellungen Gerberts übertrifft, und derselbe Bernelinus sieht in dem Calculus des Viktorius nichts weniger als einen überwundenen Standpunkt. Er findet ihn außerordentlich dunkel, also schwierig und verkennt nicht die Notwendigkeit mehr zu tun als nur hinzuschreiben, daß $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$ sich zu $\frac{1}{4}$ multiplizieren. Er erläutert vielmehr, man müsse den einen Bruch als Einheit betrachten, von welcher so viele Teile zu nehmen seien, als der andere ausspreche[1]), und erörtert dieses an verschiedenen Beispielen, darunter an solchen, bei welchen die nur begrenzt vorhandenen Duodezimalbrüche nicht gestatten anders als nur mittels eines gesprochenen Bruches zu verfahren, wie z. B. duella multipliziert in triens. Unter duella versteht man 8 scripulae, deren 24 auf eine uncia oder auf $\frac{1}{12}$ des as als Grundeinheit gehen; unter triens versteht man 4 Unzen. Wir würden also römische Gedankenfolge so viel als möglich uns aneignend sagen: $\frac{1}{36}$ sei mit $\frac{1}{3}$ zu vervielfachen und gebe $\frac{1}{108}$ oder $\frac{1}{9}$ von $\frac{1}{12}$, beziehungsweise $\frac{1}{9}$ Unze. Weil ferner die Unze 24 Skrupeln hat, so ist ihr $\frac{1}{9}$ so viel wie $\frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}$ Skrupeln. Aber zwei Skrupeln heißen emisescla und so ist das Produkt eine emisescla und ihr Drittel. Auch Bernelinus kommt zu diesem Ergebnisse. Duella in trientem ducta fit emisescla et emisesclae tertia sagt Bernelinus. Die Rechnung, die ihn dahin führt, mündet darin, es sei $\frac{1}{3}$ der duella zu nehmen, aber gerade diese letzte Ausführung unterschlägt er. Das Bruchrechnen war in der Tat, wie an der kurzen Auseinandersetzung, die wir hier gaben, erkannt werden wird, ein schwieriges, wäre sogar für uns noch schwierig, wenn wir in derselben Gewohnheit befangen wären, die Brüche nicht durch Zähler und Nenner, sondern unter Anwendung von Namen auszusprechen, welche zwar dem Geübten beim Hören sogleich ver-

---

[1]) *Quaelibet unciarum vel minutiarum in quamcumque unciarum vel minutiarum fuerit ducta totam partem illius in qua ducitur quaerit, quota ipsa est assis.*

ständlich sind, aber zur Rechnung immer erst wieder in die Begriffe verwandelt werden müssen, mit welchen sie sich decken.

Ist es, fragen wir, denkbar, daß Gerbert für das ganzzahlige Rechnen, welches solchen erheblichen Schwierigkeiten nie ausgesetzt war, arabische Methoden sich angeeignet und in seiner Schule verbreitet hätte, daß er dagegen das weit anlockendere Rechnen mit Sexagesimalbrüchen vernachlässigt und weder selbst angewandt noch einem einzigen Schüler mitgeteilt hätte? Wir können unseren Unglauben damit begründen, daß die ersten Übersetzungen aus dem Arabischen sich sofort der Sexagesimalbrüche bemächtigten (S. 718), daß die ersten nachweislichen Bearbeitungen (S. 801) es ebenso machten.

Bernelinus lehrt in Anschluß an die Multiplikation der Brüche auch noch deren Division, welche er komplementär ausführt, indem er den Divisor zur nächsten ganzen Einheit ergänzt, und sodann den Quotienten jedesmal neu verbessert, nachdem die notwendige Richtigstellung der Teilreste eingetreten ist.

Wir haben nur eines noch unserer Darstellung hinzuzufügen, beziehungsweise zu verhüten, daß man ihr etwas entnehme. Bernelinus, sagten wir, bilde die neun Apices ab. Man darf daraus nicht schließen wollen, daß sie im weiteren Verlaufe der Schrift benutzt werden. Nur auf dem Abacus konnte ohne Null oder — wovon wir später auch ein Beispiel kennen lernen werden — ohne abwechselnde Verwendung von Apices und römischen Zahlzeichen ein regelmäßiger Gebrauch der Apices stattfinden. Bernelinus hat aber in seinem Werke nirgend einen Abacus gezeichnet, kann sich also in der einzig in Worte gefaßten Darstellung der Regeln und der Beispiele nur römischer Zahlzeichen bedienen. Wenn wir oben bei der Division den Abacus wirklich abbildeten, so haben wir uns damit eine Untreue der Berichterstattung zuschulden kommen lassen; wir haben zur größeren Deutlichkeit gezeichnet, was Bernelinus nur erklärt, dessen Nachahmung er seinen Lesern zumutet, ohne ihnen ein Muster vorzulegen.

Um die Zeit des Bernelinus hat auch Guido von Arezzo sich mit dem Abacus beschäftigt, der um 1028 eine Abhandlung über die Kunst der Rechnung auf der mit Sand bedeckten Tafel verfaßte[1]).

Erhalten hat sich ferner die Abhandlung über den Abacus von Hermannus Contractus[2]). Sie ist kurz und bündig, lehrt das

[1]) *Nouveau traité de Diplomatique par deux religieux de la congrégation de S. Maur T. IV, préface,* pag. VII. Paris 1759. [2]) Aus einem Karlsruher und einem Münchener Kodex veröffentlicht durch Treutlein im *Bullettino Boncompagni* X, 643—647 (1877).

Multiplizieren und Dividieren auf dem Abacus, dessen vier wagrechte Zeilen unterschieden werden, während von einer gruppenweisen Vereinigung der Kolumnen zu je dreien Abstand genommen ist, auch eine Beschränkung der Anzahl dieser Kolumnen nicht stattfindet, von denen vielmehr gesagt ist, daß sie, jede die vorhergehende um das Zehnfache übersteigend, in das Unendliche sich erstrecken[1]). Das Dividieren ist einfach oder zusammengesetzt und kann in beiden Fällen mit oder ohne Differenz vollzogen werden. Hermann hat, wie wir von Radulph von Laon, einem Schriftsteller des XII. S., der uns gleich nachher beschäftigen wird, erfahren, nächst Gerbert am meisten für die Verbreitung des Kolumnenrechnens getan. Es hat darum Interesse hervorzuheben, daß von anderen Zahlzeichen als den gewöhnlichen römischen bei ihm mit keiner Silbe die Rede ist.

Hermannus Contractus hat noch zwei andere Schriften verfaßt, deren wir trotz ihres nicht eigentlich mathematischen Inhaltes kurz gedenken möchten. Er hat über jenes eigentümliche Zahlenspiel, die Rhytmomachie, geschrieben. In der Beschreibung einer dem XI. bis XII. S. entstammenden Handschrift dieser Abhandlung ist der Anfang derselben abgedruckt[2]), welcher die Erfindung dem Boethius zuweist, in Übereinstimmung, wie wir uns erinnern (S. 852), mit Walther von Speier. Diese Übereinstimmung kann uns übrigens nicht verwundern, wenn wir uns ins Gedächtnis zurückrufen, daß Speier von St. Gallen her seinen Studienplan erhielt, kurz bevor Walther dort erzogen wurde, und zugleich berücksichtigen, daß auch in Reichenau ein strenger Abt ebendaher das Regiment führte kurz bevor Hermann in die Schule trat.

Hermann hat ferner zwei Bücher über den Nutzen des Astrolabiums verfaßt, welche in dem Salzburger Kodex aus der Mitte des XII. S., welcher eine Haupthandschrift von Gerberts Geometrie uns darstellte (S. 859), den Anfang jenes so wichtigen Sammelbandes bildet[3]). Die Echtheit der Bezeichnung könnte, wenn man jenem Kodex allein Glauben zu schenken Bedenken trüge, noch besonders nachgewiesen werden. Das 2., 3. und 4. Kapitel des II. Buches[4]) beschäftigt sich nämlich in einer mutmaßlich von Makrobius abhängigen Fassung mit der seinerzeit durch Eratosthenes vollzogenen Messung des Erdumfanges. Der Verfasser will aus dem Umfange den Durchmesser berechnen und sich dabei der archimedischen

[1]) *Sicque in ceteris unaquaque linea decuplum aliam superante usque in infinitum progreditur.* [2]) *Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts of G. Libri.* London 1859, pag. 103, Nr. 483. Vgl. auch E. Wappler, Bemerkungen zur Rhytmomachie in Zeitschr. Math. Phys. XXXVII, Histor.-literar. Abtlg. S. 1—17 (1892). [3]) Agrimensoren S. 176. [4]) Ebenda S. 177.

Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ bedienen, d. h. er hat $\frac{7}{22}$ des Erdumfanges von 252 000 Stadien zu ermitteln. Dazu ist eine mittelbare Methode angewandt[1]), welche auch im 56. Kapitel von Gerberts Geometrie, wir wissen freilich nicht aus welcher Quelle, hat nachgewiesen werden können[2]). Es wird nämlich, um $\frac{21}{22}$ zu erhalten, zuerst $\frac{1}{22}$ des Umfanges abgezogen, dann von jenen $\frac{21}{22}$ der dritte Teil genommen: „Gegeben ist der Umkreis 252 000. Sein $\frac{1}{22}$ beträgt 11 454 $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{22}$. Durch Abziehen bleibt 240 544 $\frac{1}{2}$ und $\frac{21}{22}$, deren Drittel mit 80 181 $\frac{1}{2}$ und $\frac{7}{22}$ den Durchmesser liefert.“ Das waren freilich Brüche, wie sie Bernelinus z. B. nie geschrieben hätte, wie sie aber auch bei einem griechischen Schriftsteller, der Stammbrüche zu brauchen gewohnt war, nicht vorgekommen wären. Es waren Brüche, welche darauf hinweisen, daß, wer sie schrieb, das Bewußtsein hatte, man könne Bruchrechnungen auch anders als an den römischen Minutien oder zwölfteiligen Brüchen vollziehen, ohne jedoch vollständig in das andere Verfahren eingedrungen zu sein. Wir haben in einem Briefe Regimbolds (S. 874) ein ähnliches Beispiel kennen gelernt. Um so unverständlicher mußte das so Herausgerechnete einem Leser erscheinen, welcher neben ganzen Zahlen nur römische Minutien kannte. Ein solcher Leser war aber Meinzo der Stiftslehrer von Konstanz. In einem Briefe, der, wie man Grund hat anzunehmen, spätestens im Anfange des Jahres 1048 geschrieben ist, wandte er sich um die ihm nötige Erklärung an Hermann, und damit ist der Beweis geliefert, daß Hermann wirklich der Verfasser jener Kapitel, beziehungsweise der sie enthaltenden und unter seinem Namen auf uns gekommenen Schrift über den Nutzen des Astrolabiums ist. Auf diesen Nachweis einiges Gewicht zu legen haben wir aber einen sehr triftigen Grund, indem die genannte Schrift unverkennbar unter arabischem Einflusse verfaßt ist, und arabischer Einfluß durch dieselben deutlichen Anzeigen auch in einem anderen Texte der Bücher über das Astrolabium zu Tage tritt, welcher im übrigen an Verschiedenheiten gegen die auch im Druck bekannten Texte nicht arm ist[3]). Einigermaßen verstümmelte, aber immer noch erkennbare arabische

[1]) Ein Schreiben Meinzos von Konstanz an Hermann den Lahmen, herausgegeben von E. Dümmler im Neuen Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde V, 202—206. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 453.
[3]) *Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts of G. Libri.* London 1859, pag. 103, Nr. 483.

Wörter, wie walzachora, almuchantarah, almagrip, almeri, walzagene usw. kommen nämlich an den verschiedensten Stellen jener Bücher vor[1]) und fordern die Frage heraus, wie Hermann dazu kam, dieser Wörter sich zu bedienen?

Lassen wir Hermanns Leben rasch an uns vorüber gehen[2]). Dem schwäbischen Grafen Wolverad wurde 1013 ein Knabe Hermann geboren, welcher mit sieben Jahren, also 1020, der Schule, wahrscheinlich in Reichenau, übergeben wurde, wo ein Verwandter von Hermanns Mutter mit Namen Rudpert als Mönch lebte. Hermann selbst wurde im Alter von dreißig Jahren, 1043, unter die Zahl der Mönche aufgenommen. Er lehrte mit herzgewinnender Liebenswürdigkeit, welche ihm Schüler von den verschiedensten Orten herbeizog. Er starb nur 41 Jahre alt am 24. September 1054. Von sehr früher Zeit an waren seine Gliedmaßen schmerzhaft zusammengezogen, wovon ihm der Name Hermannus Contractus geworden ist. Er saß immer in einem Tragstuhle, er konnte ohne Hilfe nicht einmal seine Lage ändern, ja er konnte nur mit Mühe verständlich sprechen.

Es ist nicht denkbar, daß Hermann in Gesundheitsverhältnissen, wie wir sie schildern mußten, noch vor seinem 30. Jahre — später ist es gar nicht möglich — Reisen gemacht haben sollte, von welchen er die Kenntnis der arabischen Sprache mitgebracht hätte. Es ist nicht denkbar, daß von solchen Reisen nirgend, auch nicht andeutungsweise die Rede wäre. Er müßte also das Arabische, wenn er dessen mächtig war, in Reichenau selbst sich angeeignet haben. Das setzt voraus, daß es dort entweder Persönlichkeiten gab, welche Unterricht in jener Sprache zu erteilen befähigt waren oder aber eine geschriebene Sprachlehre und ein desgleichen Wörterbuch, beides Annahmen, welche sich nicht wohl verteidigen lassen. Dazu kommt, daß von Kenntnissen Hermanns im Arabischen keiner seiner zahlreichen älteren Lobredner etwas weiß, daß nur seit dem XV. S. die Behauptung sich findet, Hermann habe Schriften des Aristoteles aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt, eine Behauptung, die nach aller Wahrscheinlichkeit auf einer Verwechslung beruht[3]). Ein solcher Übersetzer war nämlich ein gewisser Hermanus Alemannus, der unmöglich derselbe sein kann wie der unsrige, da er von Persönlichkeiten spricht, die erst dem XIII. S. angehören. In der Vorrede zur Übersetzung

[1]) Jourdain, *Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote.* 2. édition. Paris 1843, pag. 146. [2]) Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter (4. Ausgabe 1877) II, 36—40 unter Benutzung von Heinr. Hansjakob, Herimann der Lahme. Mainz 1875. [3]) Jourdain l. c. pag. 135—147. Chapitre III, § XI: *D'Hermann surnommé Contractus et d'Hermann l'Allemand. Erreurs des biographes à leur égard.*

der Poetik des Aristoteles insbesondere nennt er den Bischof Robert von Lincoln mit dem dicken Kopfe, Robertus grossi capitis Lincolniensis episcopus, welcher 1253 starb, zwei Jahrhunderte später als der Mönch von Reichenau. Alle diese Gründe zusammengenommen lassen die gerechtesten Zweifel obwalten, ob Hermann der Lahme der arabischen Sprache mächtig war, mächtig gewesen sein kann, und da auf der anderen Seite kein Zweifel möglich ist, daß arabische Ausdrücke in seinen Büchern über das Astrolabium vorkommen, so ist nur ein Ausweg aus diesem Dilemma: daß Hermann jene Bücher unter Benutzung von damals bereits vorhandenen lateinischen Übersetzungen arabischer astronomischer Schriften anfertigte, denen er jene verketzerten Kunstausdrücke entnahm[1]. Daß es in der Tat solche Übersetzungen gab, wenn auch vermutlich nur in sehr geringer Anzahl, wissen wir. Wir wissen, daß Lupitus von Barcelona ein astronomisches Werk übersetzt, daß Gerbert nach dieser Übersetzung Verlangen getragen hat (S. 857), und dieses oder ein ähnliches mag Hermanns Quelle gewesen sein.

Dem XI. S. gehören noch verschiedene andere Schriftsteller an, welche über den Abacus und verwandte Gegenstände schrieben, oder in ihren Klöstern schreiben oder abschreiben ließen[2]. Zu denen, welche Abschriften aller Art anfertigen ließen, gehören Werner und Wilhelm von Straßburg, sowie Fulbert von Chartres, und es ist gar nicht unmöglich, daß unter des letzteren Einflusse jene Handschrift des Anonymus von Chartres entstand, der wir (S. 590) einige Bemerkungen gewidmet haben. Fulbert von Chartres hat selbst Verse über die Duodezimalbrüche, versus de uncia et partibus eius, verfaßt[3]. Als große Astronomen werden genannt Engelbert von Lüttich, Gilbert Maminot von Lisieux, Odo Stiftsherr von Tournai. Über den Abacus schrieb Heriger von Lobbes, einem bei Lüttich gelegenen vielgerühmten Kloster, von dessen hierher gehörenden Schrift bereits (S. 869) die Rede war. Heriger war der Freund, vielleicht der Lehrer von Adelbold von Utrecht, der jedenfalls seine Erziehung in Lobbes erhielt[4]. Über den Abacus schrieben auch Helbert von St. Hubertus in den Ardennen, Franco von Lüttich, den wir schon (S. 876) als Geometer kennen lernten. Auch Radulf von Lüttich und Regimbold von Cöln (S. 872)

[1] Jourdain l. c. pag. 147: *Il est plus naturel de croire qu'il composa ses deux traités d'après les traductions qui avaient cours alors, mais qu'il ne fit aucune version de l'arabe.* [2] Math. Beitr. Kulturl. S. 332. [3] Werner, Gerbert S. 64, Anmerkung 4. [4] C. Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège.* Vgl. *Bulletin de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 461.

wurden aus der unmittelbar auf Gerbert folgenden Zeit als Mathematiker gerühmt[1]). Viele, ja die meisten Pflanzstätten mathematischer Bildung, von welchen die hier genannten Persönlichkeiten ihren Namen, aus welchen sie ihr Wissen erhielten, liegen in ziemlich engem Kreise um Lüttich herum, damals dem geistigen Mittelpunkte von Lothringen und bestätigen so ein Wort des Bernelinus: bei den Lothringern blühe die Kunst des Abacus[2]).

Wir überspringen nun fast ein Jahrhundert, um von einem Manne zu reden, der am Anfange des XII. S. tätig war, und dessen Schrift über den Abacus gegenwärtig veröffentlicht ist und uns Gelegenheit zu vielfachen Bemerkungen gibt. Wir meinen Radulph von Laon, der 1131 gestorben ist[3]). In Laon war um 1100 eine hochberühmte Klosterschule, welche ihre Blüte namentlich Anselm verdankte, der Leuchte Frankreichs, wie seine Bewunderer ihn nannten, dem Lehrer des fast noch bekannteren Abelard. Radulph war Anselms Bruder und, wie er, Lehrer an der Klosterschule, bevor er zum Bischofe eingesetzt wurde. Er schrieb, wie gesagt, über den Abacus, und eine Einleitungsstelle beschäftigt sich mit der geschichtlichen Entwicklung der Rechenkunst auf dem Abacus[4]): „Jetzt ist zu besprechen, welcher Wissenschaft diese Vorrichtung hauptsächlich dient. Der Abacus erweist sich als sehr notwendig zur Untersuchung der Verhältnisse der spekulativen Arithmetik; ferner bei den Zahlen, auf denen die Tonweisen der Musik beruhen; desgleichen für die Dinge, welche durch die emsigen Bemühungen der Astronomen über den verschiedenen Lauf der Wandelsterne gefunden sind und über deren gleiche Umdrehung dem Weltall gegenüber, wenn auch ihre Jahre je nach dem Verhältnisse der ungleichen Kreise sehr verschiedenes Ende haben; weiter noch bei den dem Platon nachgebildeten Gedanken über die Weltseele und zum Lesen all der alten Schriftsteller, welche ihren scharfsinnigen Fleiß den Zahlen zuwandten. Am allermeisten aber zeigt der Gebrauch dieser Tafel sich bequem und wird von den Lehrern der Kunst benutzt bei Auffindung der Formeln der geometrischen Disziplinen und bei Anwendung derselben auf die Ausmessung der Länder und Meere. Allein die Wissenschaft, von der ich eben rede, ist fast bei allen Bewohnern des Abendlandes in Vergessenheit geraten, und so wurde auch diese Kunst des Rechnens beim Aufhören der Kunst, als deren Hilfsmittel sie erfunden worden

---

[1]) Werner, Gerbert S. 77. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 357. [3]) *Histoire littéraire de la France* VII, 89 sqq., 143. Der arithmetische Tractat von Radulph von Laon, herausgegeben von A. Nagl, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik V, 85—134 (1890). [4]) *Compt. Rend.* XVI, 1413, Anmerkung 1.

war, nicht gar groß beachtet; ja sie kam in Mißkredit, und nur Gerbert, genannt der Weise, ein Mann von höchster Einsicht, und der vortreffliche Gelehrte Hermann und deren Schüler pflanzten einiges bis zu unseren Zeiten fort; in ihnen zeigt sich noch ein schwacher Abfluß jener Quellen der genannten Wissenschaft."

Es sind hier, der zu Radulphs Zeit vorhandenen wissenschaftlichen Überzeugung folgend, Sätze ausgesprochen, welche durchweg mit den Ansichten in Einklang stehen, welche wir schon die ganze Zeit her vertreten haben: Der Abacus ist sehr notwendig zum Verständnis der Platoniker; die Mathematiker bedienten sich seiner hauptsächlich bei Berechnungen aus dem Bereiche der Feldmeßkunst, und als diese letztere Kunst schwand, da wurde auch der Abacus fast vergessen; Gerbert und Hermann und ihre Schulen haben nicht etwa den Abacus neu eingeführt oder gar erfunden, sie haben die halbwegs vergessene Kunst nur in einiger Erinnerung erhalten. Von Arabern, bei welchen die Kunst geblüht haben könnte, ist auch bei Radulph mit keinem Worte die Rede. Wir schalten hier vorgreifend ein, daß auch von einem anderen Schriftsteller ein sehr beredtes Schweigen zu melden ist, daß auch Atelhart von Bath, welcher, sei es vor sei es nach Radulph, jedenfalls am Anfange des XII. S. über den Abacus schrieb, in dieser Abhandlung den Abacus wohl den Pythagoräern zuwies, dagegen der Araber keine Erwähnung tat, er, der vollkommen Arabisch konnte und Übersetzungen aus dem Arabischen vollzogen hat, daß er zugleich des Zusammenhanges des Abacus mit der Geometrie sich wohl bewußt war[1]), und daß er von Brüchen ausschließlich die römischen Minutien benutzte. Endlich ist hervorzuheben, daß sowohl bei Atelhart als bei Radulph von einer *divisio aurea* und einer *divisio ferrea* die Rede ist[2]), Ausdrücke, auf welche wir etwas weiter unten zurückkommen.

Radulph begnügt sich nicht, der Verbreitung, des Verschwindens, des Auffrischens des Abacus zu gedenken; er spricht auch über dessen Erfindung und Einrichtung, und dabei bedient er sich der Apices, die wir nur der Bequemlichkeit halber in unserer Übersetzung durch die gewöhnlichen Zahlzeichen wiedergeben[3]): „Bei der Zeichnung dieser Tafel, wie wir zu sagen angefangen haben, wird die Menge der Zwischenräume in drei mal neun eingeteilt, d. i. nach

---

[1]) Chasles in den *Compt. Rend.* XVI, 1410—1411 und XVII, 147. Die ganze Abhandlung ist veröffentlicht im *Bullettino Boncompagni* XIV, 91—134 (1881) unter Vorausschickung gelehrter biographischer und bibliographischer Untersuchungen des Fürsten Bald. Boncompagni, ebenda pag. 1—90. [2]) Darauf hat H. Eneström (*Biblioth. Mathem.* 3. Folge VII, 83—84) aufmerksam gemacht. [3]) *Journal Asiatique* 1863, I. Halbjahr, pag. 48-49, Anmerkung 3.

der Gestalt eines Würfels, welcher die Länge drei auch nach der Breite und Höhe in gleichen Abmessungen vermehrt. Und da die Assyrer für die Erfinder dieses Instrumentes gehalten werden, welche der chaldäischen Sprache und Buchstaben sich bedienten, und beim Schreiben rechts anfingen und nach links fortfuhren, so beginnt gemäß des den Erfindern in fortgesetzter Verbreitung schuldigen Ansehens die Zeichnung dieser Tafel zur Rechten und setzt ihre Länge nach links fort. Die Zwischenräume selbst sind aber so unterschieden, daß, während jeder einzelne seinen oberen Abschluß hat, auch je drei von dem Anfange bis zum Ende der Tafel durch obere Abschlüsse endigen, so daß, indem je drei Zwischenräume immer durch einen Halbkreis geschlossen sind, auf der ganzen Länge der Tafel IX obere Abschlüsse gefunden werden. Der erste Abschluß dreier Zwischenräume ist mit dem Zeichen der Einheit überschrieben, welche mit chaldäischem Namen igin heißt; 1 stellt die Gestalt eines lateinischen Buchstaben dar. Man erkennt, daß dieses deshalb geschieht, damit jene drei Zwischenräume, welche das Zeichen der Einheit vorbemerkt haben, bezeugen, daß sie dadurch den ersten Rang erlangt haben. Der zweite Abschluß von drei Zwischenräumen trägt dieses Zeichen der zwei 2, welches bei den vorgenannten Erfindern andras heißt, damit durch diese Wendung erklärt werde, jene drei Zwischenräume, über welchen es geschrieben ist, nehmen den zweiten Rang für sich in Anspruch. Der dritte Abschluß von drei Zwischenräumen lehrt, daß er den dritten Rang einnehme, dadurch, daß er mit folgender Gestalt der drei 3 bezeichnet ist, welche bei den Chaldäern ormis genannt wird. Ähnlich bezeugt auch der Abschluß der vierten Ordnung, daß er den vierten Rang behaupte, indem über ihn dieses Zeichen 4 der vier geschrieben ist, das bei den Erfindern als arbas gilt. Nicht weniger kündigt die fünfte Ordnung an, sie halte den fünften Rang ein, weil sie diese Gestalt 5 der fünf trägt, welche quimas heißt. Ebenso gehabt sich die sechste Ordnung als sechste, weil sie als Aufschrift das Zeichen 6 oder sechs hat, welches caltis heißt. Auch die siebente ist durch folgende Gestalt 7 der sieben bezeichnet, welche zenis heißt. Die achte hat folgende Form 8 der acht, welche man temeniam nennt; und die neunte ist mit dieser Figur 9 der neun bezeichnet, welche bei den Erfindern celentis genannt wird. Bei der letzten Ordnung wird auch die sipos genannte Figur ⊙ angeschrieben, welche, wiewohl sie keine Zahl bedeutet, doch zu gewissen anderen Zwecken dienlich ist, wie im folgenden erklärt werden wird."

Wir werden Radulphs Beispiel folgend auch erst nachher von dem sipos und seiner Benutzung reden, anderes vorausschicken. Es

könnte zunächst auffallen, daß Radulph wiederholt von der Länge der Tafel redet, wo wir die Breite genannt erwarten. Allein wie Heron im Anschlusse an ägyptische Übung (S. 395) Breite die kleinere, Höhe die größere Abmessung nannte, ohne auf die Lage selbst zu achten, so ist für Vitruvius nur derselbe Gegensatz bei der Anwendung der Wörter Breite und Länge maßgebend[1]), und Radulph steht mit Beibehaltung dieser altertümlichen Sitte durchaus auf römischem Boden. Der mit 27 Kolumnen ausgestattete Abacus mußte mehr breit als lang erscheinen, die Breite deshalb als Länge benannt werden.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf den assyrischeu oder chaldäischen Ursprung, den Radulph für den Abacus, für die Apices und für deren Namen in Anspruch nimmt. Wir pflichten entschieden der Meinung bei, welche hierin ein Anlehnen an griechische Erinnerungen findet[2]), die manche astronomische und anderweitige Kenntnisse von den Chaldäern ableiteten. Warum sollte Radulph statt der Assyrer nicht die Araber oder die von diesen stets als Erfinder der Zahlzeichen gerühmten Inder genannt haben, wenn er von ihnen wußte? Sein Schweigen ist mithin als Beweis anzusehen, daß ihm und mit ihm gewiß den Zeitgenossen, vor welchen er durch Gelehrsamkeit sich auszeichnete, ein Vorkommen des Abacus bei den Arabern gerade so unbekannt war wie bei uns.

Drittens müssen wir zu jenen rätselhaften Wörtern uns wenden, die uns von Radulph als desselben chaldäischen Ursprunges wie der Abacus genannt werden. Wir haben (S. 584) von Wörtern gesprochen, welche nicht im Texte, aber auf dem Abacus zwischen dem I. und II. Buche der Geometrie des Boethius vorkommen und dort möglicherweise erst nachträglich ihren Platz gefunden haben. Es sind dieselben, die wir hier nach Radulph mitgeteilt haben. Dieselben finden sich in zehn Versen eines lateinischen Pergamentkodex des Vatikan[3]):

Ordine primigeno sibi nomen possidet Igin.
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat Arbas.
Significat quinos ficto de nomine Quimas.
Sexta tenet Calcis perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos Temenias exprimit unus.
Terque notat trinum Celentis nomine rithmum.
Hinc sequitur Sipos est, qui rota namque vocatur.

---

[1]) Agrimensoren S. 67 und 196, Anmerkung 129. [2]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 49. [3]) Vat. Univ. 5327, wie wir freundlicher Mitteilung von Prof. L. Gegenbauer entnehmen. Die gleichen Verse

Der Sinn dieser Verse, welche vielleicht nur als Gedächtnisverse zu betrachten sind, welche die Einprägung jener fremdartigen Wörter erleichtern sollen, dürfte aus folgendem Übersetzungsversuche[1]) sich ergeben:

Igin führet das Zeichen in erster Stelle zum Namen.
Auf den zweiten der Plätze erhebet *Andras* den Anspruch.
Dann als erste einfache Zahl folgt *Ormis* auf jene.
Zweimal zeiget die Zwei das jetzt nachfolgende *Arbas*.
Quimas bildet die Fünf mit ausersonnenem Namen.
Ihrer Vollkommenheit freut sich die *Calcis* an sechseter Stelle.
Siebenfältiger Ehre erglänzet am würdigsten *Zenis*.
Und die glückselige Acht zeigt nur *Temenias* einzig.
Dreimal schreibet die Drei das Zeichen mit Namen *Celentis*.
Ähnlich gestaltet dem Rade ist, was hier *Sipos* ich nenne.

Eben dieselben Wörter finden sich bei einem etwas jüngeren Zeitgenossen Radulphs, von dem wir noch zu sprechen haben, Gerland, und bei verschiedenen Schriftstellern bis in das XIV. S. herab[2]). Meistens fehlt das Wort *sipos*. Hat nun Radulph recht, wenn er die Wörter aus dem Chaldäischen herstammen läßt, und sind sie in der Tat ebenso alt, ebenso lange in Gebrauch als der Abacus, oder wenigstens als die Apices? Würde die letzte Frage noch weiter eingeschränkt auf die Zeit der Neubelebung und allgemeinen Verbreitung des Abacus- oder Kolumnenrechnens, so wäre sie entschieden mit Nein zu beantworten. Gerbert, Bernelinus, Hermann der Lahme benutzten jene Wörter nie, und sie sind doch als die hervorragendsten Lehrer zu betrachten. Auch aus keinem anderen Schriftsteller des XI. S. wird das Vorkommen jener Wörter uns berichtet, und erst im XII. S. scheinen sie aufzutreten. Allerdings steht diese Tatsache in Widerspruch zu den Worten Radulphs, der die Entstehung der Wörter in graue Urzeit zurückverlegt.

Vielleicht sind die Wörter selbst geeignet den Zweifel zu lösen? Ein Assyriologe will fünf derselben als assyrisch erkannt haben[3]); *igin* sei *ischtin*, *arbas* sei *arba*, *quimas* sei *χamsa*, *zenis* wohl in der

---

nur unter Weglassung des auf *celentis* bezüglichen hat Chasles, *Aperçu hist.* pag. 473, deutsch S. 540, aus dem Kodex von Chartres veröffentlicht, in welchem auch die Geometrie des Anonymus von Chartres (S. 590) steht.

[1]) Math. Beitr. Kulturl. S. 244. [2]) *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 578–579. [3]) Lenormant, *La légende de Sémiramis, premier mémoire de mythologie comparative* pag. 62 in den *Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles-lettres de Belgique*. T. XL (Bruxelles 1873). Frühere Untersuchungen vgl. bei Vincent in Liouville, *Journal de mathématiques* IV, 261 und in der *Revue archéologique* II, 601; Math. Beitr. Kulturl. S. 245–246; Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 51; *Oeuvres de Gerbert* (ed. Olleris) pag. 579–581.

gleichfalls vorkommenden Form *zebis* sei *schibit*, *temenia* sei *schumunu*. Es gehört immerhin eine gewisse Phantasie dazu, um diese Verwandtschaften als offenkundig anzuerkennen. *Arbas*, *quimas*, *temenias* sind allerdings als semitisch wohl von allen Untersuchern anerkannt worden, aber ohne daß Einigkeit darüber stattfände, ob das Arabische, das Hebräische oder das Aramäische die Grundformen geliefert habe, worauf es natürlich nicht wenig ankommt, wenn das Alter und die Überlieferungsweise der Wörter geprüft werden wollen. Mit der semitischen Ursprungserklärung der anderen Wörter geht es nicht so leicht. Man hat sie freilich ingesamt arabisch deuten wollen, aber fraget nur nicht wie, möchte man ausrufen. *Caltis*, 6 und *zenis*, 7 sollen als *cadis* und *zebis* aus der entsprechenden arabischen Kardinal-, *igin*, 1 aus der arabischen Ordinalzahl stammen; *ormis*, 3 und *celentis*, 9 sollen ihren Wert vertauscht haben, alsdann aber wieder arabische Klänge geben, und *andra*, 2 soll diesem Ursprunge gleichfalls nicht widersprechen, vorausgesetzt daß man das arabische Wort schlecht gelesen habe. Andere, weniger leicht mit Verstümmelungen und Wertvertauschungen zufrieden, haben zwar *igin* aus dem Hebräischen, dem Persischen, der Berbersprache, *andras* aus dem Hebräischen, dem Arabischen, *zenis* aus dem Hebräischen abgeleitet, aber, wie wir durch die Nebeneinanderstellung der beigezogenen Sprachen andeuteten, wieder in fast unlösbarem Widerspruche zueinander, einig nur in dem Verzichte auf jegliche Erklärung für *ormis*, *calcis*, *celentis*. Semitisch also, den Schluß können wir allenfalls ziehen, sind die fremden Zahlwörter nicht ausnahmslos. Man hat auch versucht, einige der Wörter, welche besondere Schwierigkeiten bereiten, *ormis* und *celentis*, aus dem Magyarischen herzuleiten[1]). Eine andere Richtung schlugen alsdann Gelehrte ein, welche den hebräischen Ursprung von *arbas*, *quimas*, *temenias* als mit der alexandrinischen Heimat der sämtlichen von ihnen als neupythagoräisch vermuteten Wörter wohl vereinbarlich zugaben, dagegen die anderen aus dem Griechischen ableiteten, und zwar aus Wörtern, welche Begriffen entsprachen, die in der Tat in der Zahlensymbolik der späten Pythagoräer mit den betreffenden Zahlen im Zusammenhang stehen. *Igin* soll aus ἡ γυνή, *andras* aus ἀνδρές, *ormis* aus ὁρμή entstanden sein, weil die 1 das Weibliche, die 2 das Männliche, die 3 die Vereinigung beider bedeute; *calcis*, welches auch in den Formen *caltis* und *chalcus* vorkommt, sei nach einer Meinung καλότης, weil die 6 dem Begriffe

---

[1]) Fr. Th. Köppen, Notizen über die Zahlwörter im Abacus des Boethius (in dem VI. Bande der *Mélanges Gréco-Romains tirés du Bulletin de l'Acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg*).

des Vollkommenen und des Schönen entspreche, während die andere Meinung *chalcus*, *χαλκοῦς* damit rechtfertigt, daß *χαλκοῦς* und *οὐγγία* Synonyma seien, die Alten aber nach einer Behauptung des Cassiodorius in einem Briefe an Boethius[1]) für 6 auch Unze sagten. Eine Ableitung von *zenis* als Tochter des Zeus beruht darauf, daß die 7 bei Theon von Smyrna Athene genannt wird[2]), eine dem Sinne nach ähnliche von *celentis* aus *σελήνη* darauf, daß 9 die Zahl der Jungfrau ist[3]), die Mondgöttin aber sich vor allen der Jungfräulichkeit erfreut. Andere dagegen wollen *celentis* von *θηλυντός* weibisch, oder vielmehr unter der Annahme, das Anfangs-*α* eines Wortes könne, auch wenn es verneinende Bedeutung habe, wegfallen, von *ἀθηλυντός* nicht weibisch, kräftig, ableiten, weil die 9 den Begriff der Kraft in sich schließe. So steht eine nicht unbedingt zu verwerfende Anzahl von Erklärungen der fremdklingenden Zahlwörter Radulphs zu Gebote. Weiter aber als bis zur Ablehnung der unbedingten Verwerfung möchten wir unsere Zustimmung doch nicht erstrecken und betrachten das Rätsel als immer noch nicht mit Gewißheit aufgelöst, gern bereit eine zuverlässigere Deutung jener Wörter freudig zu begrüßen, welche auch die Frage nach der Zeit der Entstehung endgültig beantworten würde.

Wir gehen nunmehr mit Radulph zu dem letzten Zeichen des *sipos* über, zu dem Kreise mit angedeutetem Mittelpunkte, jene Figur „welche, wiewohl sie keine Zahl bedeutet, doch zu gewissen anderen Zwecken dienlich ist, wie im folgenden erklärt werden wird" (S. 892) Radulph erfüllt das gegebene Versprechen treulich[4]). Der vorsichtige Abacist — *providus abacista* — wird, sagt er, unter den anderen Zeichen auch ein nach Art eines Rädchens — *in modum rotulae* — gestaltetes *sipos* sich auf Marken — *in calculis* — anfertigen, und nun erläutert er deren Gebrauch. Wir begnügen uns, ohne wörtlich zu übersetzen, auf den Kernpunkt hinzuweisen. Wenn die Multiplikation mehrziffriger Zahlen miteinander vorgenommen wird, so kommt es darauf an, immer zu wissen, wo man mit dem Vervielfältigen halte. Ist dieses schon notwendig, wofern alle Zwischenrechnungen stehen bleiben, so ist es noch weit unerläßlicher, wenn, wie wir von Bernelinus gelernt haben, Ziffern fortwährend verändert wurden. Sei es daß man auf dem Sande neue Zeichen schrieb, sei es daß man auf dem vom Schildmacher hergerichteten Abacus neue Marken auf-

[1]) *Variae I*, epist. 10: *Senarium vero, quem non immerito perfectum docta Antiquitas definuit, unciae, qui mensurae primus gradus est, appellatione signavit.* [2]) Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) pag. 103, lin. 1—5. [3]) Theologumena (ed. Ast) pag. 58, lin. 12 flgg. [4]) Woepcke im *Journal Asiatique* für 1863, I. Halbjahr, pag. 246—247, Anmerkung 1.

legte, in beiden Fällen war dem vor Augen befindlichen Teilergebnisse nicht anzusehen, welchem Augenblick der Rechnung es entstamme. Da trat das *sipos* in seine Rechte. Man rückte nämlich eine solche Marke längs den Ziffern des Multiplikators von der Rechten zur Linken fort, um anzugeben, mit welcher Stelle man gerade vervielfache; um aber auch zu wissen, welchen Abschnitt der Vervielfältigung jeder Multiplikatorsziffer mit dem ganzen Multiplikandus man schon ausgeführt habe, ließ man gleichzeitig eine zweite *sipos*-Marke längs des Multiplikandus fortrücken. Man sieht somit: das *sipos* ist keine Null, ist, wie Radulph ganz richtig bemerkt, überhaupt kein Zahlzeichen, sondern nur ein Rechnungsbehelf ähnlich dem Pünktchen, dessen auch wohl in der heutigen Zeit Rechner beim Dividieren sich bedienen, sowie beim Multiplizieren vielziffriger Zahlen miteinander, vorausgesetzt, daß sie diese letztere Rechnung so vollziehen, daß alle Zwischenrechnungen bis zum Hinschreiben der einzelnen Ziffern des Gesamtproduktes im Kopfe vorgenommen werden. Daß beim *sipos* ein Kreis das Pünktchen umschließt, ist vielleicht nur die Zeichnung einer runden Marke überhaupt und die Ähnlichkeit mit dem Zeichen der Null eine durchaus zufällige. Was das Wort *sipos* betrifft, so ist es kaum weniger zweifelhafter Bedeutung als die anderen Wörter, von welchen wir oben gesprochen haben, denn wenn die einen es mit dem aṣ-ṣifr (leer) der Araber, andere es mit dem *saph* (Gefäß) der Hebräer in Verbindung setzen, leiten noch andere, offenbar hier weit mehr in Übereinstimmung mit der Verwendung des *sipos*, es von ψῆφος (Rechenmarke) ab. Man ist sogar so weit gegangen[1]) zu fragen, ob nicht das arabische aṣ-ṣifr selbst als Lehnwort mit dem griechischen ψῆφος in Zusammenhang zu bringen sei.

Wir können hier einschaltend auch das Wort *abacista* hervorheben, durch welches Radulph den auf dem Abacus Rechnenden benennt. Der Name[2]) geht mindestens bis auf Gerbert zurück, der sich in seiner Geometrie desselben bedient, und seine Nachfolger gebrauchen bald dieses Hauptwort, bald ein von demselben abgeleitetes Zeitwort *abacizare*[3]), welches Rechnen auf dem Abacus bedeutet. Die Hochschätzung Gerberts als desjenigen, welcher das Rechnen mehr als jemals früher zum Gemeingute gemacht hat, spricht sich in dem gleichfalls einmal aufgefundenen Worte *gerbertista*[4]) für Rechner aus.

---

[1]) Karl Krumbacher, Woher stammt das Wort Ziffer (chiffre)? in den *Études de philologie néogrecque publiées par M. Jean Psichari.* Paris 1892. Dagegen Derselbe, Noch einmal das Wort Ziffer, in der Byzantinischen Zeitschrift. Leipzig 1893. [2]) Math. Beitr. Kulturl. S. 331. [3]) Franco 185. [4]) *Oeuvres*

Jüngerer Zeitgenosse Radulphs war, wie wir schon sagten, Gerland[1]). Er war Schüler des von dem Bistum Besançon abhängigen Benediktinerklosters in der Stadt gleichen Namens. Er wirkte selbst dort als Stiftslehrer, dann als Prior in den Jahren 1131 und 1132. Im Jahre 1148 begleitete er nebst Theodorich von Chartres den Erzbischof Adalbero von Trier zu einem Reichstage nach Frankfurt und führte mit seinem Reisegefährten während der Rheinfahrt ein glänzendes Wortgefecht. Er schrieb unter anderem einen Komputus, d. h. wie wir wissen, eine Anleitung zur Osterrechnung, und eine Abhandlung über den Abacus, die in einer Karlsruher Sammelhandschrift aus dem XII. S., die also jedenfalls kurz nach der Abfassung der Abhandlung entstanden sein muß, sich erhalten hat[2]).

Wir heben nur weniges als bemerkenswert aus ihr hervor. Gerland benutzt die fremdartigen Zahlwörter beim Rechnen selbst: *Igin pone iuxta andram*, setze *igin* neben *andras* usw. Er benutzt ferner fortwährend einen gezeichneten Abacus, dessen einzelne Kolumnen Bogen, *arcus*, heißen und einen oberen Abschluß durch einen Kreisbogen finden. An einer einzigen Stelle vereinigt er, wie Bernelinus, wie Radulph es vorschrieben, überdies Gruppen von drei Kolumnen unter einem größeren Kreisbogen und von diesen dreien selbst wieder zwei unter einem mittelgroßen Bogen; allein dabei macht sich eine Verschiedenheit gegen Bernelinus geltend, denn Bernelinus will (S. 880) den mittelgroßen Bogen über die Zehner- und Hunderterkolumne gezeichnet haben, worin ein guter Sinn liegt, der der Unterscheidung von Einern und Nichteinern der betreffenden Gruppe, Gerland dagegen vereinigt, man weiß nicht wozu, die Einer- und Zehnerkolumne unter einem mittelgroßen Bogen. Die Zahl der Kolumnen ist 12, also auch nicht mit jenen Vorgängern in Übereinstimmung. Eine andere Handschrift von Gerlands Abacusregeln hat 15 Kolumnen, und überhaupt ist der Wechsel in diesen Anzahlen ein sehr häufiger und nur darin beschränkt, daß die Kolumnenzahl stets durch 3 teilbar die Bildung von Triaden gestattet[3]); neben 27 kommen beispielsweise auch 30 Kolumnen vor, mutmaßlich so zu erklären, daß neun Gruppen von je 3 Kolumnen mit den Wörtern *igin* bis *celentis* überschrieben waren und dann noch eine zehnte Gruppe hinzugenommen wurde, um die Überschrift *sipos* verwerten

---

de Gerbert (ed. Olleris) pag. XXXVII aus dem Codex von Montpellier Nr. 491.

[1]) Boncompagni im *Bullettino Boncompagni* X, 653—656. [2]) Zum Drucke befördert durch Treutlein in dem *Bullettino Boncompagni* X, 595—607. [3]) *Compt. Rend.* XVI, 1405.

zu können, deren Sinn allmählich verloren ging, als man mit der wirklichen Null der Araber bekannt wurde. Beim Dividieren lehrt Gerland nicht das komplementäre, sondern das unmittelbare Verfahren sowohl an dem Beispiele 120 : 3 als an dem Beispiele 100 : 11, bei welchem letzteren das übrig bleibende 1 zur Fortsetzung der Division in Duodezimalbrüche verwandelt wird.

Greifen wir jetzt aus der zahlreichen Menge von dem Verfasser und der Abfassungszeit nach nicht genau bestimmbaren Schriften über den Abacus noch einige heraus, die uns bemerkenswerter erscheinen und möglicherweise in die Zeit gehören, bis zu welcher wir gelangt sind. Dem XII. S. entstammen nach der Ansicht der meisten Oddos Regeln des Abacus[1]) (S. 845). Diese Regeln beginnen wieder mit einer an geschichtlichen Erinnerungen reichen Einleitung: „Will einer Kenntnis des Abacus haben, so muß er Betrachtungen über die Zahlen sich aneignen. Diese Kunst wurde nicht von den modernen Schriftstellern erfunden, sondern von den Alten, und wird deshalb von vielen vernachlässigt, weil sie durch die Verworrenheit der Zahlen sehr verwickelt ist, wie wir aus der Erzählung unserer Vorfahren wissen. Erfinder dieser Kunst war Pythagoras, wie uns mitgeteilt wird. Deren Übung ist bei einigen Dingen notwendig, weil ohne Kenntnis derselben kaum irgend jemand es in der Arithmetik zur Vollkommenheit bringen, noch die Lehren der Kalkulation d. h. des Komputus verstehen wird. Hätten doch unsere heiligen Weisen niemals die für die heilige Kirche notwendigen Regeln auf das Ansehen jener Heiden gestützt, wenn sie gefühlt hätten, es sei eine müßige Kunst, die jene lehrten. Will z. B. einer die Bücher Bedas des Ehrwürdigen über den Komputus lesen, so wird er ohne Besitz dieser Kunst wenig Nutzen erzielen können. Eben sie ist in dem Quadrivium, d. h. in der Musik, Arithmetik, Geometrie und Astronomie so notwendig und nützlich, daß ohne sie fast alle Arbeit der Studierenden zwecklos erscheint. Wir glauben, daß sie vor alters griechisch geschrieben und von Boethius ins Lateinische übersetzt wurde. Aber das Buch über diese Kunst ist zu schwer für den Leser, und so haben wir einige Regeln hier auseinandergesetzt.“

Wir sehen hier in den geschichtlichen Angaben eine ziemliche Übereinstimmung mit denen Radulphs, jedoch so, daß keiner der

[1]) *Scriptores ecclesiastici de musica* (ed. Mart. Gerbert). St. Blasien 1784, I, 296—302: *Regulae Domni Oddonis super abacum.* Vgl. Math. Beitr. Kulturl. S. 295—302. Die wichtigsten Gründe, welche für eine späte Lebenszeit Oddos sprechen, bei R. Peiper auf S. 216—220 des Supplementheftes zu Zeitschr. Math. Phys. XXV (1880) und bei A. Nagl, Gerbert und die Rechenkunst des X. Jahrhunderts S. 33.

beiden Schriftsteller eine Abhängigkeit von dem anderen verrät, die Allgemeinheit der Überlieferung also durch ihre ähnlichen Behauptungen nur um so sicherer bestätigt wird. Wenn Radulph die Notwendigkeit des Abacus zum Verständnis Platons betont, führt Oddo das Rechnen auf demselben auf Pythagoras zurück. Wenn Radulph ihn der Geometrie dienen läßt, ist er bei Oddo dem ganzen Quadrivium ein nützliches Hilfsmittel. Wenn Radulph die Kunst in Mißkredit, fast in Vergessenheit geraten läßt, bis Gerbert und Hermann sie erneuerten, spricht Oddo die Meinung aus, Boethius habe darüber eine Schrift aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt, aber dieses Buch sei zu schwierig, und deshalb setze er seine Regeln auseinander. Die letztere Bemerkung Oddos verdient unsere ganz besondere Aufmerksamkeit, da es schwer fällt, dieselbe nicht auf die gefälschte Geometrie des Boethius zu beziehen. Dann muß aber Oddo nach der Entstehung dieser Geometrie, d. h. nicht früher als im XII. S. seine Regeln verfaßt haben.

Die Benennung der Einer und Zehner als Finger- und Gelenkzahlen, der Kolumnen als Bögen, die Vereinigung von je drei Bögen zu einer mit einem größeren Bogen überspannten Gruppe, das Auftreten der Apices, das sind lauter Dinge, die Oddo mit vielen gemein hat. Die Zahlennamen *igin* usw. kommen bei ihm nicht vor, und das könnte Anlaß geben, ihn für einen Zeitgenossen eines früheren als des XII. S. zu halten. Bei der Multiplikation unterscheidet er die beiden Faktoren als Summe, *summa*, und Grundzahl, *fundamentum*, wovon jene oben, diese weiter unten geschrieben wird. Das Produkt kommt zwischen beide Zeilen zu stehen[1]). Dabei findet zwischen den Faktoren Gegenseitigkeit statt: „Mag man 5 mal 7 oder 7 mal 5 nehmen, so entsteht XXXV.“ Der Gegensatz der Schreibweise in diesem Satze, die Darstellung einziffriger Zahlenwerte durch Apices, mehrziffriger durch römische Zahlzeichen, ist die naturgemäße Folge des Nichtvorhandenseins der Null, ohne welche die Apices die längste Zeit über nur dann Stellenwert erhielten, wenn sie einem Abacus eingezeichnet waren.

Ein einziges Beispiel vom Gegenteil ist bis jetzt bekannt geworden[2]). In einer Handschrift der alexandrinischen Bibliothek zu Rom, welche um das Jahr 1200 herum entstanden ist, findet sich

---

[1]) *Summa vocatur quod in summitate arcuum; fundamentum autem quidquid inferius disponitur. Et quod ex utroque numero procedit multiplicato inter duas lineas ponitur.* [2]) Enrico Narducci, *Intorno ad un manuscritto della Biblioteca Alessandrina contenente gli apici di Boezio senz' abaco e con valore di posizione* in den *Memorie dell' Accademia Reale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Serie 3. Vol. 1. Seduta dell' 8. aprile 1877.

nämlich auf zwei eigentümlichen kreisrunden Figuren eine ziemliche Menge von Zahlen, teils einziffrige, teils zweiziffrige. Sie sind mit geringfügigen Ausnahmen durch Apices geschrieben, die zu diesem Zwecke offenbar Stellungswert erhielten. Daß aber dem Schreiber die Null noch nicht bekannt war, oder, was auf das Gleiche herauskommt, daß er sie noch nicht zu gebrauchen wagte, geht mit Bestimmtheit daraus hervor, daß mitten zwischen den Apices die römischen Zeichen für X und XX vorkommen.

Doch wir kehren zu Oddo zurück. Nach den Multiplikationsregeln gelangt er zur Division und unterscheidet, wie wir es schon wiederholt und auch in der gefälschten Geometrie des Boethius gefunden haben, die einfache, die zusammengesetzte und die unterbrochene Division, je nachdem der Divisor einstellig ist, mehrstellig in aufeinander folgenden Kolumnen, oder mehrstellig, aber so, daß dazwischen eine Kolumne leer bleibt. Der Dividend steht hier in der Mitte, der Divisor oben, der Quotient unten[1]), und es ist nicht zu verkennen, daß hier eine völlig gleichmäßige Anordnung wie bei der Multiplikation gewählt ist, die das Produkt zwischen beide Faktoren stellt. Allerdings sind wir genötigt, die Stellung aus Oddos Worterklärungen zu entnehmen, denn die Zeichnung eines Abacus kommt bei ihm nicht vor. Er vollzieht die Divisionen unmittelbar, nicht komplementär, und überhaupt fühlt er sich bei der übernommenen Aufgabe, die Division in ihren drei Fällen schriftlich erklären zu müssen, nicht wohl. Schon bei der zusammengesetzten Division sagt er: „das Alles läßt sich viel leichter mit einem einzigen Worte mündlich als schriftlich abmachen"[2]). Nach der Division folgen die Brüche, d. h. wie immer Duodezimalteile des as. Oddo prunkt dabei mit einer gewissen Gelehrsamkeit, er sagt dragma sei griechisch, sichel hebräisch usw., eine Gelehrsamkeit, welche er, wie richtig bemerkt worden ist[3]), sich leicht in dem etymologischen Werke des Isidorus von Sevilla verschaffen konnte. Er dividiert sodann 1001 durch 1000 und verwandelt die zunächst übrig bleibende Einheit in immer kleinere Bruchteile, bis deren Anzahl 1000 übersteigt und eine Fortsetzung der Division zuläßt. Die Verwandlung selbst, aufeinander folgende Multiplikationen erfordernd, wird auf dem Abacus ausgeführt. Schließlich kann man freilich nicht weiter zu noch niedrigeren Einheiten übergehen. Da hört denn auch die Division auf, und man könne am Ende sich nicht wundern, wenn bei

---

[1]) *Quidquid dividendum est in abaco in medio ponitur; divisores praeponuntur; denominationes autem, hoc est partes divisae supponuntur.* [2]) *Quae omnia magis unicae vocis alloquio quam scripta advertuntur.* [3]) Friedlein in der Zeitschr. Math. Phys. IX, 326.

den Bruchteilen etwas übrig bleibe, da auch andere Künste in vielen Punkten wacklig seien[1]).

> „Nur der die Dinge gemacht und bewahrt mit schützendem Walten
> Ist mit jedwelcher Macht allein für vollkommen zu halten."
>
> *Rerum vero parens, qui solus cuncta tuetur,*
> *Cum sit cunctipotens, perfectus solus habetur.*

Eine anonyme Schrift über den Abacus[2]), einer Münchener Handschrift aus der Mitte des XII. S. entstammend und folglich spätestens gleichzeitig mit Radulphs oder mit Gerlands Arbeiten entstanden, zieht unsere Aufmerksamkeit dadurch auf sich, daß sie einige Kunstausdrücke enthält und deutlich erklärt, welchen wir (S. 891) bei Atelhart von Bath und bei Radulph von Laon bereits begegnet sind. Sie nennt nämlich das unmittelbare Divisionsverfahren das der goldenen Division, das komplementäre das der eisernen, jenes, weil es leicht zu verstehen und über die Annehmlichkeit des Goldes hinaus ergötzlich ist, dieses dagegen weil es allzuschwer ist und gewissermaßen die Härte des Eisens überbietet[3]). Die Apices sind einmal gezeichnet und griechische Buchstaben als mit ihnen abwechselnd auftretend genannt, ähnlich wie es bei Bernelinus der Fall war, und eine andere Ähnlichkeit mit diesem Schriftsteller besteht darin, daß für 6 nicht der richtige griechische Buchstabe angegeben ist, allerdings auch nicht Σ, sondern ein großes lateinisches *S*. Weitere Ähnlichkeiten mit Bernelinus könnten noch darin gefunden werden, daß im ganzen Verlaufe der Schrift die Apices nicht weiter benutzt werden, daß kein Abacus gezeichnet ist, daß aber die Regeln mit ungemeiner Klarheit an Beispielen erläutert werden, bei welchen durchgängig nur römische Zahlzeichen in Anwendung kommen. Die Zahlenbeispiele selbst sind nicht die gleichen bei beiden. In dieser Beziehung sind überhaupt die Abacisten sehr unabhängig voneinander.

Es ist uns nicht erinnerlich, daß irgend zwei derselben in der Benutzung des gleichen Zahlenbeispiels zusammenträfen. Dagegen ist uns ein Beispiel Gerlands in seiner ganzen Einkleidung bei einem Algorithmiker begegnet, welcher spätestens am Ende des XII. S. gelebt hat.

Unter Algorithmikern verstehen wir diejenigen Schriftsteller,

---

[1]) *Nec mirandum est aliquid de minutiis superesse, cum alias artes in multis videam vacillare.* [2]) Abgedruckt im *Bullettino Boncompagni* X, 607—625. Über die Handschrift vgl. Treutlein ebenda pag. 591 unter 2. [3]) Ebenda pag. 609: *Dicuntur aureae divisiones eo quod ad intelligendum faciles et super auri gratiam sint delectabiles; sicut contra ferreae que sunt nimis graves quasi ferri duriciam preponderantes.*

welche ihre unmittelbare Abhängigkeit von arabischen Vorbildern durch Vorkommen des bald mißverstandenen Wortes algorithmus, durch Anwendung des Stellenwertes der Ziffern mit Einschluß der Null, durch Nichtanwendung des Abacus, durch den beiden letzten Eigentümlichkeiten entsprechende Rechnungsverfahren an den Tag legen. Wozu indessen in allgemeinen Sätzen die Erkennungszeichen algorithmischer Schriften erörtern, deren beide hervorragendsten wir in früheren Kapiteln einzeln besprochen haben, die lateinische Übersetzung des Rechenbuches des Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî (S. 714 flgg.) und die an dasselbe Werk sich anlehnende ausführliche Schrift des Johannes von Sevilla (S. 800 flg.)?

Wir müssen einen Blick auf die allgemeinen Verhältnisse werfen, welche die Entstehung dieser Übersetzungen begleiteten. Gerbert war für uns am Ende des X. S. vor allen Dingen der glänzende Lehrer gewesen, der den Unterricht in den mathematischen Wissenschaften, so viel oder wenig aus römischen Quellen ihm davon zur Kenntnis gelangt war, neu belebte. Auch der Geschichte der Philosophie gehört der Philosoph auf dem Stuhle St. Peters an[1]). Nicht bloß das Rechnen auf dem Abacus wurde von seinen Schülern, als sie selbst zu Lehrern geworden waren, über Frankreich, Deutschland und Italien verbreitet, von wo sie einst zu den Füßen des Rheimser Stiftslehrers gepilgert waren, es machte überhaupt um die Mitte des XI. S. ein neuer Aufschwung des wissenschaftlichen Denkens sich geltend. Lanfrank, am Anfang des Jahrhunderts in Pavia geboren, in Frankreich herangebildet, führte die Dialektik in die Theologie ein und ließ den Sinn für aristotelische Schriften erstarken. Freilich kannte man sie zunächst nur aus Bearbeitungen des Boethius, aber da und dort waren doch immer einzelne Männer zu finden, welchen das Griechische geläufig genug war, ihnen zu gestatten, die Urquelle aufzusuchen, und so entstanden jetzt schon einige wenige neuere Übersetzungen. Die dadurch genährte und wachsende Neigung mit allem bekannt zu werden, was Aristoteles, dessen Name mehr und mehr den Inbegriff aller Wissenschaft darstellte, geschrieben hatte, trat besonders in zwei Ländern hervor: in England, wohin Lanfrank als Erzbischof von Canterbury gekommen war, und in Italien, wo gleichfalls eine bestimmte Persönlichkeit, Anselm der Peripatetiker, nicht zu verwechseln mit dem Bruder Radulphs von Laon, den geistigen Mittelpunkt der neuen Bewegung bildete. Deutschland beteiligte sich erst,

[1]) Herm. Reuter, Geschichte der religiösen Aufklärung im Mittelalter I, 78 flgg. Berlin 1875.

nachdem, man kann fast sagen, Missionsreisende für die dialektischen Studien es durchzogen hatten, wozu eben jener Anselm der Peripatetiker gehörte.

Aber wie sollte man die Begierde nach der Kenntnis aristotelischer Schriften stillen? Griechische Texte waren nur in seltensten Handschriften zugänglich. Man erfuhr, daß die Araber eifrige Philosophen waren, daß auch sie keinen der Alten höher schätzten, als Aristoteles, daß bei ihnen Übersetzungen und Erläuterungen in Menge zu finden waren. Arabisches war schon früher, jedenfalls schon am Ende des X. S. ins Lateinische übersetzt worden. Wir erinnern an die Übersetzungen astronomischer Schriften, welche Lupitus von Barcelona angefertigt, Gerbert zu besitzen gewünscht hat, wir erinnern an die Vorlage Hermann des Lahmen für seine Bücher über das Astrolabium. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, daß wir somit es keineswegs an sich für unmöglich halten, daß Gerbert bei seinem Aufenthalt in der spanischen Mark durch Übersetzungen auch mit arabischer Rechenkunst hätte bekannt werden können, sondern daß wir nur durch den allerdings entscheidenden Umstand bewogen sind, diese Kenntnis in Abrede zu stellen, daß gar nichts zwischen Gerbert und den Arabern gemein ist, durchaus gar nichts in der Anordnung wie in der Ausführung der Rechnungen als nur neun Ziffern ohne das zehnte Zeichen der Null, und daß diese Gemeinschaft sich uns hinreichend mittels römischer Erinnerungen erklärt, während jeder andere Erklärungsversuch an der verhältnismäßigen Geringfügigkeit des Gemeinschaftlichen neben den weit überwiegenden Verschiedenheiten scheitert.

Jetzt suchte man, etwa vom Jahre 1100 an, noch mehr der arabischen Bearbeitungen griechischer Schriftsteller habhaft zu werden und sie in das Lateinische zu übertragen. Dazu kommt ein anderer Umstand, der, scheint es uns, nicht übersehen werden darf, wenn es sich darum handelt, ein geistiges Bild jener Zeit zu entwerfen und die mehr und mehr sich geltend machende Einwirkung arabischer Wissenschaft auf das Abendland zu schildern. Mit dem Jahre 1100 beginnen die Kreuzzüge. Jeder wissenschaftliche Zweck war denselben fremd, aber wissenschaftliche Erfolge haben sie gehabt. Wir haben (S. 778) berührt, daß die Kreuzfahrer im Oriente auf eine ihnen überlegene Bildung stießen, daß zwei Jahrhunderte lang der Verkehr ein meistens feindlicher, aber in längeren Pausen auch ein nachbarlich freundlicher war. Wie ehedem nestorianische Christen die Ärzte der Chalifen gewesen waren und zur Einführung griechischer Wissenschaft unter die Araber das meiste beigetragen haben, so bildete jetzt wieder medizinisches und astrologisches Wissen den

Freipaß, auf welchen hin arabische und jüdische in arabischer Schulung gebildete Ärzte und Sterndeuter an den christlichen Höfen erschienen. Sie kamen von Osten her, aber auch Spanien stellte seine Männer, und Sizilien lieferte für ganz Unteritalien im XII. und mehr noch im XIII. S. den belebenden geistigen Sauerstoff.

Für Italien waren die Kreuzzüge noch in mehreren anderen Beziehungen von nicht zu unterschätzenden Folgen[1]). Die Menschenmasse, welche in den Kreuzzügen sich nach Osten wälzte, die einen getrieben von heiligem Glaubenseifer, die anderen beseelt von dem Wunsche die äußeren Vorteile zu genießen, zu welchen die Kreuznahme berechtigte, die dritten mit fortgerissen von dem allgemeinen Zug, bezifferte sich auf viele Millionen. Die meisten nahmen ihren Weg über Italien; nicht wenige kehrten bis dahin, aber auch nur bis dahin zurück. Der kaufmännische Geist der Italiener wußte aus dieser Strömung vielfach Nutzen zu ziehen. Italiener — Lombarden wie man sie gewöhnlich nannte — erschienen in den Mittelpunkten, wo Kreuzfahrer sich sammelten, boten gegen wertvolles Pfand und hohen Zins ihre Geldhilfe an, welche gern in Anspruch genommen ihnen gestattete, aus dem Gewinne ganze Straßen zu bauen, die bis auf den heutigen Tag sich nach ihnen benennen. Die zurückkehrenden Kreuzfahrer ließen sich nicht minder ausnutzen. Sie brachten Beutestücke mit, die sie in Geld umsetzten, um den üppigeren Neigungen zu genügen, welche sie insbesondere in bezug auf Speisen und Kleidung angenommen hatten. Und wieder waren es die Italiener, die vorzugsweise es auszubeuten wußten, daß die Gewürze, die Seide des Orients zu Lebensbedürfnissen geworden waren. An der Nordküste Afrikas, wie in Ägypten, wie an dem Strande des ehemaligen Tyrus entstanden italienische Handelsplätze, überall in nächster Beziehung zu arabischen Kaufleuten und, wie wir (S. 817) schon angedeutet haben, hier nicht ohne Einfluß auf das Wissen derselben, andererseits jedenfalls auch von ihnen Samen erhaltend, dessen Keimen wir im nächsten Bande dieses Werkes verfolgen müssen, wenn wir in den reichen italienischen Städten uns umsehen, deren Bürger die Feder nicht bloß zum Eintrag gewinnbringender Handelsgeschäfte in ihre kaufmännisch geführten Bücher, sondern auch zu streng wissenschaftlichen Arbeiten zu benutzen wußten und sich zu Trägern mathematischer Fortentwicklung machten.

Wir haben einen der ersten Schriftsteller, der nachweislich mit der Übersetzung mathematischer Schriften aus dem Arabischen sich

[1]) De Choiseul-Daillecourt, *De l'influence des croisades sur l'état des peuples de l'Europe.* Paris 1809.

beschäftigte, schon einigemal genannt: Atelhart von Bath[1]). Sein Hauptwerk „Fragen aus der Natur“ enthält Bemerkungen, welche vermöge der Persönlichkeiten, auf die sie sich beziehen, nur in den ersten 30 Jahren des XII. S. niedergeschrieben sein können, und somit zur Feststellung der Lebenszeit ihres Verfassers führten. Atelhart hat, um zur Kenntnis der arabischen Sprache zu gelangen, weite Reisen gemacht. Er ist in Kleinasien, in Ägypten, in Spanien gewesen, überall die gleichen wissenschaftlichen Zwecke verfolgend und um ihretwillen tausend Gefahren trotzend. Wir wissen schon, daß Atelhart die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî übersetzt hat, daß von ihm eine lateinische Bearbeitung der euklidischen Elemente[2]) nach dem Arabischen herrührt (S. 713). Ob Atelhart es war, welcher die Übersetzung des Rechenbuches Alchwarizmîs anfertigte, konnte nicht mit Bestimmtheit festgestellt werden. Merkwürdig wäre es um deswillen, weil Atelhart auch über den Abacus geschrieben hat (S. 891) und somit Abacist und Algorithmiker in einer Person wäre.

Als Schüler Atelharts bezeichnet sich selbst Ocreat der Verfasser eines Auszuges aus einer arabischen Schrift über Multiplikation und Division in den Einleitungsworten: *Prologus H. Ocreati in Helceph ad Adelhardum Baiotensem magistrum suum*[3]). Man möchte zunächst an Atelhart von Bath als Lehrer denken. Dann müßte es aber Adelhardum Bathonensem heißen. Die Form Baiotensem zwingt einen im übrigen unbekannten Atelhart von Bayeux anzunehmen. Ferner hat man in Helceph den Namen des arabischen Schriftstellers erkennen wollen, von welchem die durch Ocreatus (der Gestiefelte?)[4]) ausgezogene Abhandlung herrührte. Man ist jedoch zu der nachträglichen sehr anmutenden Meinung gekommen, es sei Helceph die Verketzerung von *Al kâfî*, die genügende Untersuchung, und Ocreatus' Vorlage sei ähnlich betitelt gewesen wie die Schrift Alkarchîs, von der wir unter dem Namen *Al kâfî fîl hisâb* gehandelt haben (S. 762 flg.). Wir erinnern uns, daß wir dem Auszuge Ocreatus' (S. 433) die Bemerkung entnahmen, Nikomachus habe das Quadrat a^2 mittels einer

[1]) Jourdain, *Recherches sur les anciennes traductions latines d'Aristote* (2ième édition) pag. 27, 97—99, 258—277. [2]) Vgl. darüber einen Aufsatz von Weißenborn in dem Supplementhefte zur historisch-literarischen Abteilung der Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV (1880). [3]) Jourdain l. c. pag. 99, Anmerkung 1 hat auf diese in einer Pariser Handschrift des XIII. S. enthaltene Abhandlung hingewiesen. Zum Abdrucke gelangte sie im Supplementhefte der histor.-literar. Abtlg. Zeitschr. Math. Phys. Bd. XXV (1880) mit einer Einleitung von C. Henry, welcher wir die von L. Rodet herstammende im Texte folgende Vermutung über Helceph entnehmen. [4]) Auf diese mögliche Bedeutung des Namens hat uns W. Wattenbach aufmerksam gemacht.

Art komplementärer Multiplikation sich zu verschaffen gewußt. Ob diese Angabe der arabischen Vorlage entstammt, ob sie durch Ocreatus etwa einer damals noch vorhandenen Bearbeitung des Nikomachus von Appuleius entnommen wurde, ist durchaus nicht zu entscheiden. Ein Johannes Ocreatus wird in dem englischen Handschriftenkataloge als Euklidübersetzer genannt. Ob dieses auf einem Mißverständnisse beruht, wäre an Ort und Stelle zu untersuchen[1]).

Am Anfange des XII. S. lebte auch Plato von Tivoli oder Plato Tiburtinus[2]), der vermeintliche Übersetzer des Albattânî, durch welchen, wie man früher annahm, das Wort Sinus (S. 737) in die Trigonometrie eingeführt worden sei. Wenn nicht Albattânîs Astronomie hat Plato doch verschiedene astrologische Schriften übersetzt. Eine derselben unter dem Titel: Astrologische Aphorismen von oder an Almanṣûr hat Plato in Barcelona angefertigt und im Jahre 530 der Hidschra, d. h. 1136 n. Chr. beendigt[3]). Auch die aus dem Hebräischen des Abraham Savasorda durch Plato übersetzte praktische Geometrie, welche in mehrfachen Handschriften vorhanden ist, trägt ein Datum 510 arabischer Zeitrechnung d. h. also 1116 und ist als ältestes Zeugnis seiner Wirksamkeit aufgefaßt worden. Unter den mittelbar aus dem Griechischen stammenden Werken ist die mathematisch wichtigste Schrift, welche Plato aus dem Arabischen übersetzt hat, die Sphärik des Theodosius.

Noch ein Übersetzer, an welchen wir uns zu erinnern haben, ist Gerhard von Cremona[4]). Zufolge einer sehr alten biographischen Notiz über denselben ist Gerhard 1114 in Cremona geboren, wurde frühzeitig von philosophischen Studien angezogen und fand insbesondere an der Astronomie seine Freude. Das Bedauern, der großen Zusammenstellung des Ptolemäus nicht habhaft werden zu können, vereinigt mit der, wir wissen nicht wie, erlangten Kenntnis, daß dieses Werk in arabischer Sprache vorhanden sei, führte Gerhard nach Toledo, wo er 1175 die Übersetzung des Almagestes aus dem Arabischen in das Lateinische vollendete[5]). Aber das war, wenn auch die Veranlassung, doch keineswegs die einzige Frucht seines Toledoer Aufenthaltes. Eine fast unglaublich große Menge von Schriften aller Art wird uns genannt, welche Gerhard aus dem Arabischen in das

[1]) Catalog. Mss. Angl. Tom. II pag. 247 Nr. 8639. Wüstenfeld, Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische S. 23. [2]) B. Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo.* Roma 1851. [3]) Vgl. Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. Bd. XII, S. 26. [4]) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo.* Roma 1851. [5]) Ebenda pag. 18.

Lateinische übertrug[1]), so daß wir unter Erwägung des Todesjahres Gerhards, welches auf 1187 fiel, kaum annehmen dürfen, daß alle seine Übersetzungen erst nach der des Almagestes angefertigt worden sein sollten. Unter den mathematischen Schriften, welche Gerhard bearbeitet haben soll, sind 15 Bücher des Euklid genannt, jedenfalls seine Elemente und die beiden Bücher, welche lange als 14. und 15. Buch mitgeschleppt wurden. Von der Übersetzung der euklidischen Elemente sind teils Bruchstücke teils vollständige Handschriften in Paris, in Boulogne sur mer, in Brügge aufgefunden worden[2]). Deren Wortlaut läßt mit höchster Wahrscheinlichkeit darauf schließen, daß zu Gerhards Zeiten außer den arabischen Übersetzungen Euklids, deren eine ihm als Vorlage diente, auch eine ihm bekannte und von ihm mitbenutzte lateinische Übersetzung aus dem Griechischen vorhanden war, eine Tatsache, die uns nicht allzusehr in Erstaunen setzen kann, wenn wir an das Palimpsest von Verona (S. 565) denken. Von Gerhards weiteren Übersetzungen werden uns genannt Euklids Buch der gegebenen Dinge, die Sphärik des Theodosius, ein Werk des Menelaus. Diese zahlreichen Übersetzungen ursprünglich griechischer Schriften bilden die geschichtliche Bedeutung Platos und Gerhards. Nur was sie in lateinischer Sprache boten, konnte zu europäischem Besitze werden und ist es geworden, wie wir im II. Bande uns überzeugen werden. Gerhard übersetzte ferner auch mit gleichem geschichtlichen Erfolge geometrische Schriften von arabischen Verfassern, von den drei Brüdern, von Tâbit, aber auch die Algebra des Alchwarizmî[3]). Da Gerhard, wie wir wissen, eine Algebra übersetzt hat (S. 803), welche erhalten ist und als von der des Muhammed ibn Mûsâ verschieden sich erwies, so ist entweder in jener alten Notiz ein kleiner Irrtum vorhanden, oder wir müssen annehmen, Gerhard habe neben der Algebra des Muhammed ibn Mûsâ auch jene andere vollkommnere übersetzt, die nur in dem genannten Verzeichnisse fehle, eine Annahme, welche darin ihre Stütze findet, daß jenes Verzeichnis auch sonst nicht ganz vollständig ist und medizinische Schriften des Râzi, des Ibn Sina, des Albucasis vermissen läßt, von deren Übersetzung durch Gerhard uns anderweitig berichtet wird[4]). Vielleicht darf man darauf gestützt auch einen Algorithmus des Meister Gerhard, der handschriftlich in London sich befindet[5]), unserem Gerhard von Cremona überweisen. Das wäre alsdann der erste Algorithmus von bekanntem abendländischem Verfasser, den

[1]) B. Boncompagni, Gherardo Crem. pag. 4—7 und 12. [2]) Björnbo in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge VI, 242—248. [3]) B. Boncompagni, Gherardo Crem pag. 5: *Liber alchoarismi de iebra et almucabula tractatus* I. [4]) Ebenda pag. 12. [5]) Ebenda pag. 57.

wir zu nennen hätten. Vielleicht gibt es noch eine zweite umfangreichere Handschrift desselben Algorithmus in einem Vatikankodex, der den *Tractatus magistri Gernardi*[1]) enthält. Genauer werden wir auf diesen Algorithmus, der unter dem Namen Algorithmus demonstratus ohne Bezeichnung eines Verfassers 1533 gedruckt worden ist, erst im II. Bande und zwar im 43. Kapitel eingehen.

Auch Rudolf von Brügge, der im Jahre 1144 das Planisphärium des Ptolemäus nebst den Erläuterungen eines gewissen Maslama al Madjriti dazu bearbeitete[2]), gehört unter die Übersetzer des XII. S.

Den Algorithmus des Johannes von Sevilla müssen wir wiederholt an dieser Stelle in Erinnerung bringen, um nochmals einige Einzelheiten zu betonen, die, wenn auch nicht so wesentlich wie das Vorkommen des Wortes Algorithmus, der Null[3]) und dagegen das Nichtvorkommen eines Abacus, doch als kennzeichnend genug sich erweisen, um sofort die Verschiedenheit der Quellen für Abacisten und Algorithmiker hervortreten zu lassen. Der Algorithmiker nennt die Inder, der Abacist nicht. Der Algorithmiker schildert Verdoppelung und Zweiteilung als besondere Rechnungsverfahren, bevor er zur Multiplikation und Division übergeht, der Abacist nicht. Der Algorithmiker lehrt Wurzelausziehungen, der Abacist nicht. Der Algorithmiker benutzt Sexagesimalbrüche nach indischem, der Abacist Duodezimalbrüche nach römischem Vorbilde. Allen diesen Verschiedenheiten gegenüber, zu welchen wir noch beifügen können, daß die Zahlwörter *igin* usw., welche bei Abacisten vorkommen, bei Algorithmikern, so viel wir wissen, nie gefunden worden sind, ist es nur die Übersetzung von Einer und Zehner durch *digitus* und *articulus*, welche Algorithmikern und Abacisten gemeinsam ist. Aber wir wiederholen hier, was wir früher gesagt haben (S. 802), der Algorithmiker bediente sich dieser Wörter, weil nur sie in seiner Zeit landläufige waren. Er dachte dabei so wenig an Übernahme von Ausdrücken aus einem ganz anderen Gedanken- und Bildungskreise, wie da wo er irgend eines Zahlwortes sich bediente. Ihm hieß *digitus* Einer, *articulus* Zehner genau mit der gleichen Unbefangenheit wie *septem* sieben, *viginti* zwanzig. Es gab ihm in latei-

[1]) Björnbo in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XIV, 149—150 (1902). P. Duhem in der *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge VI, 9—15 (1905). [2]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 511, deutsch S. 595, hat den Namen unrichtig *Molsem*. Der richtige Namen wurde von Steinschneider angegeben. *Bibliotheca Mathematica* 3. Folge III, 76 (1902). [3]) Wie langsam übrigens die Null sich einbürgerte vgl. Wattenbach, Anleitung zur lateinischen Palaeographie. 4. Auflage. Leipzig 1886. S. 104.

nischer Sprache keine anderen Wörter für diese Begriffe als die genannten, und er fühlte sich weder verpflichtet, noch berechtigt, neue Wörter einzuführen, wo es nur um alte Begriffe sich handelte. Der Algorithmiker stellt, das bleibt unter allen Umständen wahr, eine spätere Entwicklung dar als der Abacist, und hat, wenn Ähnlichkeiten auch anderer Art auftreten, sicherlich aus seinen abendländischen Vorgängern geschöpft.

Ein Beispiel solcher Art scheint ein Algorithmus zu gewähren, der einer nicht später als 1200 geschriebenen früheren Salemer, jetzt Heidelberger Handschrift entstammt[1]). Er enthält die sämtlichen wesentlichen Merkmale der Algorithmiker, aber darüber hinaus die komplementäre Multiplikation[2]) fast in derselben Form, wie wir sie früher (S. 528) hauptsächlich der Ähnlichkeit des Gedankens mit der komplementären Division wegen als römischen Ursprunges vermutet haben. „Ziehe, so schreibt der Verfasser vor, die Differenz des einen Faktors von dem anderen Faktor ab, der Rest gibt die Zehner, dann multipliziere die Differenzen beider Faktoren miteinander, und Du hast die Summe der ganzen Zahl.“ Wir haben freilich diese komplementäre Multiplikation, die der Formel

$$a \cdot b = 10(a - (10 - b)) + (10 - a) \cdot (10 - b)$$

gehorcht, bei keinem älteren Schriftsteller, weder bei irgend einem Abacisten noch bei einem Araber gefunden, nur Ocreatus' Regel des Nikomachus ist ihr einigermaßen verwandt, aber um so gewisser scheint es uns, daß nur ein römisch gebildeter Rechner sich ihrer bedienen konnte. Darin beirrt uns auch der Umstand nicht, daß die komplementäre Division bei unserem Verfasser nicht Eingang gefunden hat. Wohl fand solchen, wie schon (S. 902) angekündigt, ein Rechenbeispiel Gerlands. Gerland stellt die Aufgabe: unter elf Krämer die Summe von 100 Mark zu verteilen[3]) und findet als Quotient 9 nebst Bruchteilen, die in den bekannten duodezimalen Untereinheiten ausgesprochen werden. Unser Algorithmiker hat die Division von 100 Librae durch 11 vollzogen und jeder Teilhaber ist ihm ein Krämer, *institor*[4]). Die eine bei der Division übrig bleibende *libra* verwandelt er nun freilich nicht in Zwölftel, sondern er setzt sie gleich 40 *solidi*. Der weitere Rest von 7 *solidi* wird in *nummi* verwandelt, deren 12 einen *solidus* ausmachen. Wieder bleiben bei der Division 7 *nummi* übrig, und für diese solle man Eier kaufen, deren die Krämer bei der Mahlzeit sich erfreuen werden. Für jeden

---

[1]) Abgedruckt in der Zeitschr. Math. Phys. X, 1—16. [2]) Ebenda S. 5. [3]) *Bullettino Boncompagni* X, 604: *Sint XI institores et dividantur inter eos C marcae.* [4]) Zeitschr. Math. Phys X, 7: *Exemplum librarum C.*

nummus erhält man 13 Eier, im ganzen also 91, und teilt man auch diese wieder durch 11, so bleibt abermals ein Rest von 3 Eiern. Die soll man dem zum Lohne geben, der die Teilung vollzogen hat, oder sie gegen Salz umtauschen, welches vermutlich zu den Eiern gegessen werden soll.

Andere Algorithmiker aus der Zeit, welche wir hier besprechen, also bis etwa zum Jahre 1200, sind gewiß noch mannigfach in handschriftlichen Texten vorhanden, aber im Drucke nicht veröffentlicht worden. Spätere Schriften der gleichen Natur müssen wir zur Behandlung uns aufbewahren, wenn wir das XIII. S. zu schildern haben werden, und mit noch späteren Perioden fällt erst die Erinnerung an den Ursprung des Abacus zusammen, die z. B. in Bildwerken aus dem Jahre 1500 etwa nachzuweisen wäre.

Wir schließen hier unsere Darstellung zunächst ab. Das Jahr 1200 ist für die Geschichte der europäischen Mathematik ein allzuwichtiges, um nicht durch das Ende eines Bandes ihm auch äußerlich die Bedeutung beizulegen, welche es verdient. Mit dem Jahre 1200 ist das christliche Abendland im Besitze der Rechenkunst aus den verschiedensten Quellen, im Besitze der Null und des durch sie ermöglichten vollen Stellenwertes der Ziffern. Die Algebra als Lehre von den Gleichungen ersten und zweiten Grades ist durch Gerhard von Cremona zugänglich geworden. Die Geometrie des Euklid, die Astronomie des Ptolemäus, Schriften des Theodosius, des Menelaus sind in lateinischen Übersetzungen vorhanden. Das Bewußtsein, wo weitere griechische Schriften erhaltbar sein müssen, die zum voraus begründete Wertschätzung derselben macht sich mehr und mehr geltend. In diesem Augenblicke auftretende mathematische Geister trafen in eine glückliche Zeit. Zum ersten Male war ihnen wieder genügender Stoff gegeben, mit welchem ihre Erfindungsgabe sich beschäftigen, von welchem aus sie wesentliche Fortschritte machen konnten. Und wie das im Winde fliegende Samenkorn meistens ein Fleckchen Erde findet, in welchem es sich entwickelt, so hat die Schöpfungskraft dafür gesorgt, daß kaum jemals Gedanken zugrunde gehen, die dem geistigen Luftzuge einmal angehören. Es finden sich zur rechten Zeit die rechten Männer. Zwei Namen seien hier ankündigend genannt, welche die Träger der neu sich entfaltenden Wissenschaft für uns werden: L e o n a r d o d e r P i s a n e r und J o r d a n u s N e m o r a r i u s.

Ergänzungen und Verbesserungen.

Zu S. 163—164. Herr Junge macht uns brieflich darauf aufmerksam, daß die (S. 164, Anmerkung 1) angegebenen beiden Erklärungsversuche von Martin und Hultsch wesentlich voneinander abweichen. Ersterer habe die Timäusstelle erklärt durch die Proportion: Feuer zu Luft wie Wasser zu Erde; letzterer dagegen habe zwei aufeinanderfolgende stetige Verhältnisse angenommen: Feuer zu Luft wie Luft zu Wasser wie Wasser zu Erde, und in der Tat schließe diese Übersetzung sich dem Texte des Timäus besser an. Für die auf S. 164 gegebene Auseinandersetzung der Begriffe von Flächen- und Körperzahlen ist es allerdings ziemlich gleichgültig, welcher Verdeutschung man den Vorzug gibt.

Zu S. 502. Herr Eneström (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 203) rückt gestützt auf Untersuchungen von Tannery und von Heiberg die Lebenszeit des Eutokius um etwa 50 Jahre hinauf. Dieser sei etwa 480 geboren und nicht Schüler des Isidorus, sondern des Ammonius (S. 500) gewesen.

Zu S. 717. Herr Eneström (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 204—205) hält die Musterrechnung von 46468 : 324 für unrichtig und schlägt eine andere Anordnung derselben vor. Das Original enthält keinerlei Musterrechnung, eine solche war vielmehr nach dem beigegebenen Texte herzustellen, und da scheint in der Tat die Eneströmsche Anordnung Vorzüge vor der früher angenommenen zu besitzen.

S. 760—762. Herr Suter hat von dem Leidener Ms. 556 (Warn.), in welchem Al-Nasawîs Befriedigender Traktat fol. 68^v—79^v sich befindet, Einsicht genommen und hat darüber (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge VII, 113—119) berichtet. Wir entnehmen seinem Berichte folgende wichtige, vorher nicht bekannte Tatsachen. Al-Nasawî lehrt die Division von Brüchen dadurch zu vollziehen, daß er Divisor und Dividend gleichnamig macht. Er sagt also dem Sinne nach

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Er gibt aber auch die Regel von der Multiplikation mit umgekehrtem Divisor oder

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Die Quadratwurzelausziehung wird zuerst in allgemeinen wenig deutlichen oder nur lückenhaft erhaltenen Vorschriften gelehrt, dann an dem Beispiele: Quadratwurzel aus 57342 erläutert. Das Verfahren ist geradezu modern. Die Zahl wird von der Rechten beginnend in zweistellige Gruppen zerlegt und $2^2 = 4$ als der 5 nächstliegende Quadratzahl erkannt. Diese 4 zieht Al-Nasawî von der 5 ab und dividiert mit dem Doppelten von 2 oder mit 4 in 17. Der Quotient ist 3, worauf 3 mal 43 oder 129 von 173 abgezogen den Rest 44 läßt. Durch $2 \times 23 = 46$ wird nun in 444 dividiert, wodurch 9 als Quotient erscheint. Dann ist 9 mal 469 oder 4221 von 4442 abzuziehen und läßt 221 als Rest. Das um 1 vermehrte Doppelte von 234 ist aber 469, also $\frac{221}{469}$ noch zu 239 als Quadratwurzel hinzuzufügen. Man erkennt in dieser Auseinandersetzung die Formel $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$ und den für die bruchweise Annäherung gebrauchten Wert $\sqrt{A^2 + r} \sim A + \frac{r}{2A+1}$. Die Kubikwurzelausziehung schließt sich an und wird an dem Beispiele der Kubikwurzel aus 3652296 erläutert. Wir gehen hier rascher über unsere Vorlage hinweg und bemerken nur, daß sie den Gebrauch der Formel $(a+b)^3 = a^3 + [3a^2 + (3a+b)b]b$ zu erkennen gestattet. Was aber die weitergehende bruchweise Annäherung betrifft, so vermutet zwar unser Berichterstatter, sie habe sich nach der Formel $\sqrt[3]{A^3 + r} \sim A + \frac{r}{3A^2 + 3A + 1}$ gerichtet, kann jedoch diese Vermutung nicht durch den erhaltenen Text bestätigen. Dagegen kommt in dem 4. dem Rechnen mit Sexagesimalbrüchen gewidmeten Buche deutlich zu erkennen, daß Al-Nasawî gleich dem von Johannes von Sevilla (S. 801) übersetzten Schriftsteller den Gebrauch von Dezimalbrüchen bei der Ausziehung von Quadratwurzeln liebte. Er setzt z. B. $\sqrt{17^0} = \frac{1}{100}\sqrt{170000^0} = \frac{1}{100} \cdot 412^0 = 4^0\,7'\,12''$.

Zu S. 805. Wir haben leider versäumt in unserem Handexemplare seinerzeit anzumerken, daß die von Ibn Chaldûn erwähnte Vorlage des Ibn Albannâ inzwischen näher bekannt geworden ist. Wir sehen uns dadurch genötigt, noch nachträglich auf Herrn Suters ausführlichen Aufsatz „*Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el Ḥaṣṣâr*“ (Bibliotheca Mathematica, 3. Folge II, 12—40) hinzuweisen, welcher in unseren Text hätte hineingearbeitet werden sollen. Diese Vorlage scheint dem XII. S. anzugehören.

Register.

A.

Aasuchet 57.
Abacist 511. 849. 878. 879—902. 906. 909. 910. 911.
Abacista 514. 849. 896. 897.
Abacizare 897.
Abacus 41—42. 88—90. 130—134. 320. 440. 529—531. 567. 583. 584. 586. 589. 591. 592. 609. 670—671. 718. 785. 806. 807. 817. 823. 839. 841. 846. 848. 850—853. 867. 868. 869. 878. 879. 880. 881. 882. 885. 886. 889. 890. 891. 892. 893. 896. 897. 898. 899. 900. 902. 903. 906. 909.
Abacus in Graeco 320.
Abakuc (für eine Persönlichkeit gehalten) 714.
Abax 130—131.
Abbasiden 696. 697. 706. 741. 787.
Abbo von Fleury 845—847.
ʿAbd Almelik 464. 696.
ʿAbd Arrahmân 707. 792.
ʿAbd Arrahmân III 792. 793.
Abdera 191.
Abelard 890.
Abmessung, größere, durch ein Kunstwort bezeichnet 98. 394. 422. 727. 893.
Abraham bar Chijja ha Nasi s. *Abraham Savasorda*.
Abraham der Patriarch 32. 33. 44. 86.
Abraham Savasorda 797—800. 907.
Abschnitt 389.
Absonderung 387.
Abû Dscha'far Alchâzin 774.
Abudsched 708.
Abû Ġâlib 762. 763.
Abû Hanîfa 761.
Abû Hasan 702.
Abû Jakûb Ishâk ibn Hunein 703.
Abû'l ʿAbbâs 696.
Abû'l ʿAbbâs Fadl îbn Hâtim 701.
Abû'l Dschûd 759—760. 774. 783. 787.
Abulpharagius 260. 464. 503. 504. 701. 730. 742.
Abû'l Wafâ 704. 742—748. 754. 763. 787. 788. 795.
Abû Mûsâ Dschâbir 722.
Abû Nasr 748.
Abû Sahl ben Tamim 603.
Abû Schudschâ ʿBûjeh 741.
Abû Zakarîjâ el Hassar 913.
Abzügliche Zahlen 471.
Achmim s. Rechenbuch von *Achmim*.
Achteck 377. 400. 401. 560. 586. 864.
Achterprobe 808.
Açoka 596. 603.
Adala = *Gleichsein* 815.
Adalbero von Rheims 853. 854. 855. 856. 898.
Adalbero von Trier 898.
Adam 222.
Addition, Alter derselben 8.
Additionsverfahren 671. 716. 811.
Adelbold von Utrecht 859. 865. 866. 873. 889.
Adelheid 854.
Adelmann 873.
Adhemar von Chabanois 848.
Adrastus 433.
ʿAdud ed Daula 742.
Adulitische Inschrift 259.
Aelbehrt 831. 832
Aeschylus 190.
Agana 31.
Agatharchus 190.
Agenor 32.
Agrargesetzgebung 552.
Agrimensoren 555.
Agrippa 541.
Ahas 50
Ahmed ibn ʿAbdallâ Habasch = *Al Hâsib*.
Ahmed ibn Jussuf 738.
Ahmes, der König 58.
Ahmes, der Verfasser eines mathematischen Handbuchs 58. 59. 60. 65. 68. 73. 74. 76. 78. 79. 80. 85. 90. 91. 92. 94 98. 100. 101. 109. 163. 271. 276. 312. 394. 395. 425. 466. 480. 504. 615. 618. 642. 646. 718. 876.
Aiguillon 423.
Akademie 212. 213. 215. 219. 234. 251. 327. 428.

Akropolis 223.
Al ʿAbderî 807.
Alahdab 805.
Al Antâkî 761.
Al ʿAsîz 788.
Al Basra 696. 697. 738. 789.
Albategnius = *Al Battânî* 736.
Al Battânî 736—738. 741. 747. 787. 795.
Albinus = *Alcuin* 831. 874.
Al Bîrûnî 597. 624. 701. 710. 715. 757 —759. 787.
Albucasis 908.
Al Bûnî 741.
Al Bustî 763.
Al Buzdschânî = *Abûʿl Wafâ* 742.
Alchaijâmî s. *ʿOmar Alchaijâmî.*
Alchoarismus 715.
Alchocharithmus 715.
Al Chodschandî 748. 752. 753. 787.
Al Chwarizmi s. *Muhammed ibn Mûsâ al Chwarizmî.*
Alcuin 831—841. 842. 871. 874.
Al dschebr 715. 719. 722. 769.
Aleni 667.
Alexander s. *Ptolemaeus XI.*
— *Aphrodisiacus* 202. 204. 408.
— *der Große* 33. 38. 151. 246. 251. 252. 258.
— *Polyhistor* 644.
— *Severus* 438. 562.
Alexandria 110. 117. 119. 258—259. 296. 327. 334. 361. 362. 364. 366. 381. 409. 427. 428. 465—466. 491. 496. 500. 503. 592. 600. 605. 676.
Alexandrinische Bibliotheken 259. 327. 329. 427. 496. 503—504.
Alexandrinische Literaturperiode 259. 425.
Al farâ id 729.
Al Fazârî 697 698.
Algebra 715. 719. 721. 794. 803.
Algebraische Auffassung bei den Griechen 158—159. 404. 406. 455. 466. 474. 485.
Algebrista 722.
Algoritmi 714.
Algorithmiker 511. 878. 902—911.
Algorithmus, Ableitungsversuche des Wortes 714—715. 721.
— *demonstratus* 909.
— *linealis* 563.
Al Hakam II 792. 793.
Al Hakim 788. 792.
Al Harrânî = *Tâbit ibn Kurrah.*
Al Hasan ibn as Sabbâ 775.
Al Hâsib 701.
Alh-win = *Alcuin* 831.
Alhazen = *Ibn Alhaitam* 789.
Alhidada 862.
Alischbîlî 794.
Al kâfî fîl hisâb 708. 718. 762—767. 906.
Alk'aim 774.
Alkalasâdî 810—816.
Alkalsâwî 810.
Alkalwadânî 761.
Alkarchî 708. 760. 787. 798. 808. 906.
Al Karmânî 738. 793.
Alkauresmus 715.
Al Kindî 718. 761. 762—773.
Alkinous 177.
Al Kûhî 742. 748—750. 759. 787.
Allioli 49.
Allman 107. 136. 141. 142. 144. 152. 169. 185. 192. 590.
Al Madschrîtî 735. 738. 793.
Almagest 39. 277. 318. 333. 412. 415 —422. 433. 442. 447. 508. 599. 602. 659. 702. 705. 742. 907. 908. 911.
Al Mâhânî 774.
Al Mahdî 696. 707.
Al Mamûn 694. 696. 698. 700. 702. 711. 713. 730. 733. 738. 761.
Al Mansûr 696. 697. 698. 700.
Al Melik ar Rahîm 774.
Almucabala 803.
Al Mukâbala 715. 719. 722. 769.
Almukaddasî 738.
Al Muktadir 695.
Al Mustaʿ sim 778.
Al Muʿtadid 704. 734. 736.
Al Muʿtasim 761.
Al Nairîzî 386. 387. 701. 736.
Al Nasawî 760—762. 765. 912—913.
ἄλογον 182. 192. 269. 764.
Alp Arslan 774.
Alphabetische Reihenfolge 121—122. 605. 708.
Al Sindschârî = *As Sidschzî* 750.
Altai 19
Al Tûsî = *Nasîr Eddîn* 779.
Amarâja 600.
Amasis 138.
Amelius 880
Amenemhat I 106. 109. 385.
— *III* 57 59. 74 106. 109.
Ameristus 146.
Amethistus 146.
Ammonius Sakkas 457. 500.
— *von Alexandria* 500. 501. 575 912.
ʿAmr ibn ʿUbaid 697.
Amthor 312.
Amyklas von Heraklea 243.
Analemma 423 443. 660
Analogie 165. 238—239.
Analysis 220—221. 230. 235. 241. 247.
ἀναφορικός des Hypsikles 360—361.
Anatolius 458. 464. 842.
Anaxagoras von Klazomenae 188—190. 194. 197. 202. 212. 271.
Anaximander von Milet 50. 145—146.
Anaximenes 50. 146. 189.
Andras 893 flgg.
Andronikos II Palaealogos 508. 510.
— *III* 510.
Anfangsbuchstaben als Bezeichnung dienend 120. 205. 470. 471. 472. 524. 604. 614. 620. 621. 709. 804. 814. 815.

Angelsachsen 10.
Anharmonisches Verhältnis 414. 452.
Annales Stadenses 839.
Anonymus von Byzanz s. *Feldmesser von Byzanz.*
— *von Chartres* 590 889. 894
— *von Melk* 844.
Anselm der Peripatetiker 903. 904.
— *von Laon* 890.
Ansse de Villoison 155. 188. 202. 459.
Anthemius von Tralles 501. 502.
Anthologie 461—462. 510.
Antiphon der Historiker 150.
— *der Mathematiker* 202—203. 204. 271. 301. 303.
Antoninus 415. 428. 562. 563.
Antonius 427. 596.
— *Diogenes* 154.
ἀόριστον 158. 470.
Apagogischer Beweis 182. 221—222. 247. 268. 301. 305. 340.
Âpastamba 636. 637. 639. 641 643. 644.
Apepa 58.
Apices 584. 585. 591. 604. 605. 609. 711. 823. 839. 840. 841. 868. 879. 885. 893. 900. 901. 902. 904.
— *mit Stellungswert ohne Null* 901.
Apollodor 136.
Apollodorus der Rechenmeister 154. 180. 320.
Apollodotus 180.
Apollonius Epsilon 330. 333.
— *von Pergae* 196. 227. 244. 245. 291. 333. 334. 349. 350. 380. 426. 448. 454. 502 570. 704. 705 764.
— *von Pergaes Kegelschnitte* 196. 244. 245. 288. 304. 334—343. 358. 444. 448. 452. 489. 496. 502. 554. 704. 749. 751.
— *von Pergaes kleinere Schriften* 343—349. 359. 360. 364. 380. 445. 448. 452. 453. 454. 455. 585. 790.
— *von Tyana* 154.
Apophis 58.
Aporie 255.
ἀποτεμνόμεναι 337.
Apotome (Bedeutung als Irrationalzahl) 270. 348.
ἀποτομή (geometrische Strecke) 389. 555.
Appuleius von Madaura 428. 429. 563—564. 567. 570. 824. 907.
Araber 173. 296. 307. 360. 377. 386. 387. 414. 415. 433. 464. 503—504. 516. 592. 597. 602. 607. 666. 668. 684. 686. 693—817. 821. 822. 848. 849. 851. 856. 857. 878. 885. 887. 888. 889. 893. 895. 904. 905. 906. 907. 908. 909. 910.
Arabische Übersetzungen griechischer Werke 287. 294. 298. 341. 344. 365. 412. 414. 696. 702—706. 761. 780. 787.
Aratus 362. 409.
Arbas 893 flgg
ἄρβηλος 298.
Arcerius 551.
ἀρχαί 320.
Archimedes von Syrakus 195. 211. 260 261. 266. 295—326. 334. 341. 346. 349. 350. 356. 364. 367. 378. 379. 380. 381. 387. 405. 413. 426. 465. 493. 496. 502. 521 545. 570. 575. 667. 704. 705. 764. 862
— *Kreisrechnung* 297. 300—303. 316—318. 350. 358. 372—374. 474. 646 648. 654. 659. 767. 790. 799. 875. 886.
— *Kronenrechnung* 310—312. 325—326 345. 462. 544.
— *Kugel und Zylinder* 226. 241. 261. 266. 297. 308—309. 314. 330. 354. 412. 703. 749. 774.
— *Quadratur der Parabel* 241. 297. 304—305. 323—324. 379.
— *Rinderproblem* 312—313. 462.
— *Sandeszahl* 321—323. 612—613. 758.
— *Schneckenlinien* 195. 297. 306—307 313—314. 558. 768.
— *Siebeneck* 307. 377.
— *Wahlsätze* 297. 298—300. 353. 414.
Archimenides = *Archimed* 705. 706.
Architas Latinus 224. 586. 589. 590.
Archytas von Tarent 165. 166. 212. 215. 226. 227—229. 230. 233. 235—236. 239. 243. 254. 294. 330. 451. 589. 590.
Arcufication 658.
Arcus 898. 900.
Ardhajiâ 658. 737.
Arenarius 321.
Argyrus s. *Isaak Argyrus.*
Arier 595.
Aristaeus der Ältere 245. 249. 335. 448.
— *der Jüngere* 245.
Aristarchus von Samos 321. 419. 447. 704.
Aristonophos Vase 178.
Aristophanes 130. 178. 514.
Aristoteles 38. 117. 118. 138. 183. 193. 203. 219. 251—257. 259. 331. 345. 381. 422. 428. 455. 497. 501. 545. 574. 575. 701. 797. 832. 888. 889. 903. 904.
— *Analyt. post.* 252. 271. 272.
— *Analyt. prot.* 182.
— *Ethic.* 201.
— *Kategor.* 162. 575. 862. 873. 875. 877.
— *Mechan. Quaest.* 254—256.
— *Metaphys.* 86. 102. 154. 158. 160. 168. 169. 174. 215. 253.
— *Physica* 161. 162. 203. 204. 253. 409. 455. 504.
— *Problem.* 247. 253.
— *Sophist.* 198.
Aristoxenus von Tarent 153. 157. 257. 544.
Arithmetica (Göttin) 527. 567.
Arithmetik = *Zahlentheorie* 156. 225. 252.

Arithmetik des Boethius 570. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 583. 587. 724. 799. 842. 850. 855. 856. 862.
ἀριθμητικά des Diophant 466.
Arithmetica speciosa = Buchstabenrechnung 473.
Arithmetik (praktische der Araber) 704. 716. 729—730.
— (spekulative der Araber) 704. 716. 756.
Arithmetisches Dreieck 687.
ἀριθμοὶ σχηματογραφθέντες 431. 579.
ἀριθμός = unbekannte Zahl 470. 620. 723.
Arjuna 612.
Arkadius 495.
Arneth 263. 291. 650. 657.
ἀρπέδων 385.
Arsamites = Archimed 705.
Arsanides = Archimed 705.
Arsinoe 327.
Artabasdes 513. 514.
Artes liberales 543. 569. 578. 823. 841.
Articuli 583 802. 804. 840. 841. 846. 852. 853. 881. 900. 909.
ἄρτιοι 159.
Âryabhaṭṭa 598. 600. 601. 602. 605. 606. 616. 617. 618—621. 623—624. 625. 628. 630. 635. 645. 646. 649. 654. 657. 786.
Âryabhâṭṭîyam 598. 605.
As, eine Gewichtseinheit 526. 830.
Aschbach 792.
Asklepius von Tralles 215. 503.
Aṣl 753.
Ass = Stellenzeiger 812. 816.
Aṣ Ṣâgânî 742. 750.
Assassini 775.
Asses 57.
As Sidschzî 733. 735. 750—751 787.
As ṣifr 711. 897.
Assurbanipal 122.
Assyrer, Erfinder des Abacus 892. 893. 894.
Ast 429. 459.
Astrolabien 750. 785. 862. 886.
Astrologische Aphorismen Almanṣûrs 907.
Astronomie, Erfindung derselben 32—33. 38. 86. 103.
— *des Boethius* 575—576. 577. 582. 587. 850. 854.
Astronomische Brüche 366.
Asura Maya 599. 600.
Asychis 57.
ἀσύμμετρον 269.
Asymptoten 192. 230. 292. 310. 337. 338. 351.
Atabeddîn = Ġijât eddîn Alkûschî 782.
Atelhart von Bath 713. 891. 906.
— *von Bayeux* 906
Athbasch 122.
Athen 119. 178—179. 188—189. 201. 213. 238. 259. 366. 496. 567. 697. 702.
Athenaeus von Kyzikus 247.
Athenaeus 326.
Atilius Fortunatianus 297.
Atomistiker 174. 175. 198.
Attalus 340. 341. 427.
Attila 822.
Aufgabe des Pappus 452.
Aufsteigende Kettenbrüche 71. 478. 813.
Augur 535. 538.
Augustinus 741. 831. 832.
Augustus 457. 541. 543. 553. 596.
Aurillac 843. 847. 856. 857.
Ausmessung der Jucharte 591.
Autolykus 293. 360. 447. 704.
αὐτὸς ἔφα 152.
Avicenna 730. 756—757. 908.
Auwalî 753.
Axiome 222.
Ayrardus 870.
Azteken 9.
Ägypter 20. 32. 33. 47. 55—113. 120. 121. 135. 139—140. 145. 159. 163. 166 170. 178. 184. 186. 205. 215. 216. 259. 271. 276. 310. 319. 328. 329. 381. 394. 404. 407. 425. 455. 464. 504. 522. 604. 615. 620. 635. 637. 643. 647. 651. 717. 718. 723. 727. 728. 755. 788—792. 813. 876. 893.
Ägyptischer Aufenthalt des Anaxagoras 189. 190, *des Demokritus* 150. 191. 192, *des Eudoxus* 150. 215. 238, *des Platon* 150. 215, *des Pythagoras* 148—151. 189. 644, *des Thales* 136. 138—141. 189.
Ähnliche Winkel 138. 140.
— *Zahlen* 185. 224. 267. 270.
Ähnlichkeit 97. 99—101. 113. 214.
Ähnlichkeitspunkte 452.
Ärzteschulen der Nestorianer 695. 701.
Äthiopen 12. 55.

B.

Babylonier 10. 11. 19—51. 120. 132. 133. 145. 151. 159. 167. 178. 181. 186. 238. 361. 404. 416. 432. 459. 526. 600. 603. 608. 609. 613. 616. 634. 643. 645. 665. 668. 676. 689. 697.
Babylonischer Aufenthalt des Pythagoras 151—152. 186. 238.
Bachet de Meziriac 466. 472.
Badie = Kubikwurzel (sumerisch) 27.
Baehr 540.
Bagdad 697. 778.
Baillet 504.
Bailly 50.
Baktrien 20.
Balbus (Feldmesser) 553. 555. 563. 864.
— (Oberwegemeister) 541. 553.
Baldrich 851.
Balsam 333.

Baluze 841. 842.
Bangor 826.
Barhebraeus = *Abulpharagius* 504.
Barlaam 509—510.
Barocius 498. 506.
Basylides von Tyrus 359.
Baudhâyana 636. 638. 639. 640. 642. 643.
Baume 843.
Bayley (E. Clive) 131. 603.
Beda Venerabilis 527. 825—830. 831. 832. 834. 839. 841. 842. 846. 899.
Beer (E. E. F.) 123.
Befreundete Zahlen 167. 225. 627. 735. 739. 793. 805.
Behâ Eddîn 718. 784—786. 812.
Belger 502.
Belisar 568.
Belos 33.
Belzoni 108.
Benary 9.
Benecke 217.
Benedict von Nursia 568. 569. 826.
Benfey 595.
Berenike 336.
Berger 328. 362.
Bergh 437.
Bernard 344.
Bernelinus 867. 871. 880—885. 887. 890. 894. 898. 902.
Bernhardy (G.) 327.
Berno 843.
Bernward von Hildesheim 855.
Berosus 42. 50. 145.
Bertin 21. 40.
Bertrand (Jos.) 669.
Berührungen des Apollonius 343. 345. 448. 452. 453.
Beschränkung des Zahlenbegriffes 23. 126. 133. 672.
Besthorn 736.
Beta als Beiname 329.
Bethmann 879.
Bewegungsgeometrie 209. 227. 300. 330. 345. 353. 370. 734. 751.
Beweisführung durch Anschauung 113. 140. 143. 656. 680. 744. 745. 754. 763.
Bezold (C.) 12. 19. 27. 28. 47.
Bhaskara Âcârya 598. 599. 600. 608. 616—619. 623. 625. 626. 627. 628. 630. 631. 632. 633. 639. 653—655. 659—660. 680. 725. 744. 745.
Bhaṭṭa Utpala 600.
Bhaû Dajî 599.
Biancani = *Blancanus* 252. 253.
Bianchini 467.
Biblische Schriften 16. 23. 24. 34. 35. 44. 48. 49. 50. 56. 122. 125. 824. 835.
Bienaymé 159.
Bienenzellen 740.
Biering 211.
Biernatzki 181. 664. 670. 671. 674. 679. 683. 684. 685. 687. 688.
Bikelas 505.
Billeter (Gustav) 561.
Binarsystem 10. 675.
Binomialkoeffizienten 687. 777.
Binomiale 270. 348.
Björnbo (Axel Anthon) 411. 412. 803. 908. 909.
Biot (Ed.) 664. 665. 666. 673. 674. 677 688.
— *(J.)* 39
Birs Nimrud 38.
Biscop 827.
Bissextiles Jahr 540.
Blass (F.) 194. 211. 215. 219. 295. 408.
Blume 532. 564.
Bobbio 575. 826. 853. 854. 861. 866.
Boeckh (A.) 128. 161. 166. 175. 184. 248. 336. 408. 409.
— *(L.)* 235.
Boethius 165. 429. 526. 563. 564. 570. 573—590. 592. 724. 823. 824. 825. 832. 842. 846. 849. 852. 853. 858. 862. 873. 875. 877. 886. 896. 899. 900. 903.
Boethus 409.
Bogenabschluß von Kolumnen 806. 880. 892. 898. 900.
Bogenlinien 212. 231. 243.
Boissier 542.
Boissonade (J. F.) 500.
Bolaner 10.
Boll (Franz) 415.
Bombelli (Rocco) 522. 523. 527. 529.
Bonafilius 856.
Boncompagni (Prinz Baldas) 415. 588. 711 und häufiger. 794. 803. 804. 879. 891. 898. 907. 908.
Bongo (Pietro) 4.
Bonjour 408.
Bopp (Karl) 576.
Borchardt (Ludwig) 99. 101. 109.
Borel von Barcelona 847. 849.
Borghorst (Gerhard) 458.
Bosmans (Henri) 682. 797.
Brâhmaṇas 595. 797.
Brahmanismus 596.
Brâhma-sphuṭa-siddhânta 598. 699.
Brahmagupta 598. 600. 608. 616. 619. 623. 625. 628. 630. 646—653. 699.
Brandes 408.
Brandis (Ch. A.) 254.
— *(J.)* 36. 42.
Brandt (Samuel) 573. 575. 576. 579.
Braunmühl (Adalbert von) 362. 412. 419. 423. 657. 713. 736. 738. 746. 751. 779. 783. 795.
Brennpunkte 339. 344. 452.
Brennspiegel 326. 344. 354. 502.
Bretschneider 135. 136. 145. 146. 174. 178. 179. 185. 191. 194. 196. 197. 201. 202. 203. 210. 227. 230. 231. 237. 240. 246. 248. 360. 410.
Brockhaus 603. 638.
Brockmann 573.

Bruchrechnungstabelle 586. 589.
Bruchzerlegungstabelle 62—70. 76.
—, *Entstehung derselben* 65—67. 70.
Bruchbrüche 813.
Brüche 12. 23. 31. 43. 61. 68. 70. 84. 85. 128. 165. 187. 395. 467. 525. 526. 531. 586. 587. 613. 614. 718. 762. 813. 830. 874. 912.
—, *aussprechbare* 68. 718. 764.
Brugsch 73. 74. 82. 98. 100. 104.
Brunck 461.
Brunnenaufgaben 391. 462. 619. 837.
Bryson von Heraklaea 203. 204. 271.
Bubnov (Nicolaus) 846. 847. 859. 862. 869.
Buchbinder (Fr.) 282.
Buchstaben zur Bezeichnung unbekannter Größen 205. 253. 347. 455. 470. 620. 804. 815.
Buddha 612.
Buddhismus 596. 603. 666. 668.
Büchel (C.) 477. 478.
Büdinger 848. 850.
Bürk (Albert) 636—639. 641.
Bugia 807—808.
Bujiden 741. 774.
Bullialdus 434.
Bungus 4.
Bunte 295. 326.
Buramaner 10.
Burgess 599.
Burja 254. 255.
Burnell 604.
Busiris 149. 150.
Busse (A.) 501.
Buzengeiger 308.
Byzanz 119. 201. 392.

C.

Cabasilas 509.
Caecilius Africanus 562.
Caesar 426. 539—541. 542. 561.
Calculi 529. 825.
Calculus des Victorius 531. 566. 845.
Caltis 893 flgg.
Camerer 185.
Canacci (Rafaele) 722.
Canarische Inseln 422.
Cappelle (J. P. van) 254. 255.
Caraibische Sprachen 9.
Cardo 534. 538.
Carra de Vaux 365.
Casiri 713.
Cassiodorius 366. 428. 543. 563. 564. 568—572. 573. 575. 576. 578. 579. 823. 825. 831. 896.
Castelli (Benedetto) 269.
Caturveda s. *Prithudaka.*
Caussin 514. 701. 789.
Cavedoni 537.
Cean = *zehn* 846.
Cedrenus 32.
Celentis 893 flgg.
Celsus, Ingenieur 553. 555. 563. 564.
— *Jurist* s. *Juventius Celsus.*
Census 731. 768. 804.
Ceylon 603. 604. 606.
$\chi\alpha$ = *Strick* (ägyptisch) 104.
Chafra 56.
Chaignet 148. 150. 159. 161. 162. 166. 174. 175. 184. 235.
Chalcis 51.
Chaldaea 20. 21. 33. 39. 56. 86.
Chaldäer = *Sterndeuter* 45. 532.
Chalif = *Nachfolger* 694.
Chalkidius 846. 861.
Chalkus 132. 133. 896.
Chambers (J.) 509.
Chammuragas 31.
Champollion 82. 83.
Chang-Dynastie 664.
Charistion 424. 704.
Chasles (Michel) 278. 284. 288. 335. 348. 420. 449. 450. 452. 490. 588. 590. 650. 713. 789. 790. 891. 894. 909.
Cheoù lỳ 669.
Cheou sin 664.
Cherbonneau 807.
Cheroboskos 122.
Chinesen 10. 16. 24. 41. 43. 88. 181. 456. 634. 663—690. 693. 744. 783
Chin tsong 666.
Chioniades von Konstantinopel 509.
Choiseul-Daillecourt (de) 905.
Chosrau I Anôscharwân 503. 697. 702.
Christ 531. 845. 846.
Christensen 285.
Christoph Columbus 794.
Chronik von Verdun 853.
Chrysippus 256. 362.
Chrysococces 509.
Chufu 56.
Cicero 120. 192. 215. 295. 308. 409. 455. 539. 542. 561. 564. 578.
Cissoide 350. 354—355.
Claudius 457. 596.
Clausen 208.
Clavius 181.
Clemens Alexandrinus 104. 191.
Clerval 872.
Codex Arcerianus 551—560. 561. 564. 861. 865. 866.
Colebrooke 467. 599. 608. 611. 616—619. 621—633. 635. 646—649. 651. 653—657. 659. 698.
Columban 826. 853.
Columella 547—549.
Commandinus 183. 287. 423. 444. 498.
Computus = *Rechnen* 824. 834. 867.
— *paschalis* s. *Osterrechnung.*
Conchoide 195. 196. 350. 446. 638.
Concilium von Nicaea 572.
Confucius 663. 664. 665.
Constantinus von Fleury (oder von Mici) 849. 851. 858. 859. 868. 869—870. 871. 880.

Conze 175.
Corasprache 9.
Coraustus 555. 864.
Cordova 793. 848.
Corssen 524. 526.
Cosinus 658. 796.
Cossali 463. 722.
Crassitudo 865.
Cribrum 332.
Çrîdhara 600. 618. 624. 625.
Cristini 535.
Crönert (W.) 333. 358.
Cruma 537.
Çûdras 595.
Çulvasûtra 635—645. 755.
Curtze (Max) 372. 386 und häufiger. 468. 576. 648. 734. 736. 780. 798. 799. 839. 857. 859. 860. 862.
Cyrillus 495.

D.

Daedala, die großen 35.
Daedalus 151. 163. 352.
Dänen 9. 12.
Dajacken 12.
Damascius von Damaskus 501. 502. 702.
Damasias 137.
Damaskus 464. 696. 697. 701.
Daraga 131.
Daten des Archimed 307.
— *des Euklid* 282—285. 448. 489. 500. 790. 908.
Decantare 531.
Dechales (Milliet) 146.
Decimana quintaria 534.
Decimanus 534. 535. 538.
Decker 136.
Decussatio 524.
δεδόμενα 282.
Dee (John) 287.
Deecke (W.) 524.
Definitionen 219. 222. 277. 298. 307. 361. 365. 367. 382. 387. 388. 393. 554. 566. 570. 650. 651. 727. 764. 766. 860. 861. 864.
De Gelder 434.
Degree 131.
Delambre 789. 794.
Delisches Problem 212. 232. 233.
Delisle 869.
Delitzsch 25. 31. 36.
Demaratus von Korinth 523.
Demetrius von Alexandria 414.
Demme 222.
Demokritus von Abdera 104. 136. 150. 151. 190. 191—193. 198. 244. 264. 381. 385.
Demotische Schrift 81.
Dendera 104.
Descartes 452.
Determination s. *Diorismus*.
Detlefsen 173.
Dezimalsystem, Ursprung desselben 7. 8. 253.
διαίρεσις 287.
Diameter = *Diagonale* 208. 218. 376.
Diametralzahlen 436—437. 460. 475. 755.
Diels 136. 202.
Dieterici 173 516. 738. 740.
Differentia 585. 716. 802.
Digiti 9. 583. 802. 804. 842. 852. 853. 881. 900. 909.
Digits 583.
Dikaearchus 257. 293. 381
Dinostratus 196. 197. 243. 246—247. 301. 306.
Diodor, Geschichtsschreiber 33. 38. 45. 55. 57. 103. 151. 190. 191. 295. 326.
Diodorus, Mathematiker 443.
Diogenes Laertius 86. 118. 132. 136. 137. 138. 141. 145. 151. 152. 153. 154. 179. 180. 190. 191. 192. 193. 198. 213. 214. 216. 220. 229. 238. 249. 320.
Diokles 309. 350. 354—355. 356. 363. 407. 425.
Diokletian 441.
Dionysius von Syrakus 215.
—, bei Heron vorkommend 388.
—, Freund des Diophant 469. 471.
Dionysodorus 380. 411—412.
Diophantus von Alexandria 361. 463—488. 492. 493. 496. 507. 510. 557. 564. 601. 620. 621. 622. 624. 625. 628. 696. 704. 705. 723. 725. 726. 742. 752. 755. 768. 770. 772. 773. 813. 815.
Dioptra 257. 293. 366. 381. 382—383. 537. 542. 544. 750.
Diorismus 208. 209. 219. 237. 250. 266. 309. 341. 402. 403. 749. 772—773. 776.
Dirham 720. 804.
Dirichlet 687.
Divisio aurea = *gewöhnliche Division* 891. 902.
— *ferrea* = *komplementäre Division* 891. 902.
Division zur Bildung von Zahlwörtern benutzt 12.
— 72. 289. 493—494. 612. 671. 717. 761—762. 812—813. 846. 868. 874. 879. 881—883. 887. 899. 901. 902. 912.
Diwânîziffern 709.
Dodekaeder 174. 175. 176. 177. 237.
Döllinger 849.
Dominicus Gondisalvi 797.
Domitianus 550. 551.
Domninos von Larissa 500.
Doppelmayr 468.
Dorer 119.
Dorischer Dialekt 296. 309.
Dositheus 297.
Dragma 804. 901.
Drei Brüder 733—734. 799. 908.
Dreieck 46. 93. 111. 138. 141—144. 145. 262. 307. 413.

Dreieck, gleichschenkliges 93. 97. 111—112. 138. 143. 176. 371.
—, *gleichseitiges* 143. 177. 549. 555. 586. 865—866.
Dreiecke, aneinanderhängende 390. 399. 652. 653.
Dreieckszahl 159. 168. 169. 248. 249. 252. 312. 432. 460. 485. 628. 688. 840. 865—866.
Dreiteilung eines Winkels 47. 196—197. 300. 315. 353. 446. 735—736. 749—751. 759. 773.
Dreiteilungen 429—430.
Dresler 211.
Dridha 628.
Droysen 553.
Dschâbir ibn Aflah 722. 794—796.
Dschadwal 812.
Dschaʿfar aṣ Ṣâdiḳ 722.
Dschahala 815.
Dschaib 737.
Dschamschîd s. *Ġijât eddîn Alkâschî.*
Dschibrîl ibn Brachtischûʿ 695.
Dschidr 723. 724. 804—815.
Dschingizchân 778. 821. 822.
Dschundaisâbûr 695. 701.
Düker 855.
Duella 530.
Dümichen 104. 106. 110.
Dümmler 831. 832. 837. 841. 887.
Dürer (Albrecht) 641.
Duhalde 88. 670.
Duhamel 220.
Duhem (P.) 254. 294. 424. 704. 909.
Duodezimalbrüche 525—526. 530. 551. 566. 830. 868. 869. 874. 877. 881. 883. 884. 887. 891. 899. 901. 909. 910.
Duodezimalsystem 10. 11. 881.
Dupuis 222.
Dupuy 502.
Durchschnittspunkte von Kurven 340.
Duris 136.
δύναμις 207. 470. 723. 767.

E.

Ebene Örter 248.
Eberhard 515.
Ebers 58.
Edfu 110—112. 385. 394. 395. 646.
Egbert von York 831. 840.
ἔγγιστα 310.
Eglaos 327.
εἶδος = *Glied* 473.
Ejectura 555.
Einheit keine Zahl 158. 165. 435. 507. 587. 715—716. 784.
Einmaleinstabelle 29. 85. 431. 531. 579. 755. 846. 847. 881.
Eisenlohr (August) 28. 59. 82 s. *Papyrus Eisenlohr.*
Ekbatana 38.
ἐκβληθεῖσα 389. 555.
ἐκεῖνος ἔφα 152.
Elam 31.
Elementardreieck 176. 177. 184. 225.
Elemente der Arithmetik 429.
Elementenschreiber außer Euklid 201. 202. 210. 211. 237. 247. 260. 261. 274. 381. 414.
Elfeck 378.
Elferprobe 766.
Elieser 44.
ἕλιξ 326.
Ellatbau 31.
ἐλλιπεῖς 168.
Ellipse 98. 171. 244. 283. 288. 290. 291. 306. 309. 310. 335. 490. 500. 733. 862.
ἔμβαδον 555.
Embadum 555.
Emir Abû'l Wafâ 415.
Empedokles von Agrigent 174.
Endō (Toshisada) 689.
Eneström (Gust.) 716. 737. 756. 891. 912.
Engelbert von Lüttich 889.
Engländer 15.
Ennodius 573.
Enzyklopädien 543. 566. 569. 576. 823.
Epakte 572.
Epanthem des Thymaridas 158. 286. 455. 462. 624.
Epaphroditus 552. 553. 556—560. 586. 619. 768. 863. 864. 865. 866.
ἐφοδικόν 379.
ἔφοδος 158.
Epigonenzeit 349. 363.
Epigramme algebraischen Inhaltes 285. 286. 312. 462. 463. 465. 510.
ἐπιμόριον 165.
Episemen 127.
Eratosthenes von Kyrene 211—212. 213. 226. 231. 232. 233. 234. 243. 245. 257. 260. 293. 327—333. 349. 350. 353. 360. 381. 409. 445. 448. 861. 886.
Erbteilungen 562—563. 728—729. 799. 838.
Erde. eirund 543.
Etrusker 522. 523. 524. 532. 537. 543.
Etymologien lateinischer Zahlwörter 824.
Eudemus von Pergamum 334. 340.
— *von Rhodos* 118. 135. 138. 144. 152. 171. 193. 203. 204. 205. 226. 227. 229. 257. 331. 348.
Eudoxus von Knidos 151. 196. 212. 231. 232. 233. 234. 238—243. 248. 260. 269. 272. 275. 276. 277. 293. 330. 356. 362. 407.
Euklid von Megara 261. 590.
— 110. 138. 144. 165. 180. 206. 245. 260—294. 297. 301. 304. 305. 315. 316. 330. 332. 333. 334. 335. 339. 341. 348. 349. 358. 360. 380. 381. 382. 387. 405. 407. 411. 413. 420. 429. 447. 448. 452. 455. 462. 465. 489. 564. 567. 571. 581. 586. 590. 597. 657. 696. 702. 704. 725. 749. 770. 780. 790. 908.

Euklidische Form 275—276. 396. 487.
— *Irrationalitäten* 270. 348.
Euklids Elemente 141. 142. 161. 164. 165. 168. 180. 181. 182. 183. 190. 192. 220. 237. 241. 261—278. 305. 348. 358. 359. 386. 387. 413. 438. 445. 446. 447. 448. 452. 461. 486. 487. 491. 565. 567. 571. 575. 577. 580. 581. 588. 628. 639. 651. 655. 667. 702. 705. 727. 735. 745. 753. 764. 766. 770. 777. 780. 793. 798. 861. 906. 908. 911.
Euphranor 239.
Euripides 188. 212. 638.
Eustathius 131.
Euting 125.
Eutokius von Askalon 118. 143. 211. 226. 227. 229. 231. 232. 234. 244. 293. 295. 301. 309. 318. 330. 334. 345. 350. 354. 368. 371. 372. 407. 412. 424. 443. 493. 502. 764. 912.
Evolute 342.
Ewald 9.
Examios 136
ἑξηκοστά 420.
Exhaustion 204. 221. 242. 247. 269. 272. 305. 307. 310. 321.
Experiment, mathematisches 153. 170. 177. 181. 187. 240.
ἐνϑυγραμμικός 158.

F.

Faber Stapulensis 576.
Fabricius 260. 327. 332. 333. 360. 411. 491. 492.
Fachr al mulk 762.
Fachrî 762. 767—773.
Fälschung der Geometrie des Boethius 224. 587. 588. 590. 766. 802. 823. 837. 839. 851. 864. 867. 868. 874. 878. 900.
Fälschungen im II. S. v. Chr. 427.
Faktorenzahl 225.
Falscher Ansatz, doppelter 372—374. 398. 732—733. 808—810.
— *Ansatz, einfacher* 76. 78—79. 95—96. 480—481. 615. 618.
Falsche Sätze scherzweise aufgestellt 310.
— *Umkehrung eines Satzes* 483.
Far' 753.
Favaro (Antonio) 269. 535. 667.
Favorinus 145.
Fehlen allgemeiner Methoden 349.
Feldereinteilung 28. 68. 92. 328. 538. 550.
Feldmesser 144—145. 383.
— *von Byzanz* 144. 364. 506. 510.
Feldmeßkunst 294. 381—385. 406. 438—440. 506. 510. 532. 535—538. 542. 551. 554—555. 667. 676. 677. 688. 785. 799. 860. 862. 863. 864.
Feldmeßwissenschaft 381. 406. 474. 510. 542. 586. 587. 860.
Fenchu 121.
Ferdinand der Katholische 794.
Fermat (Peter von) 466.
Ferramentum 537.
Ferrières 842.
Festa 155. 459.
Feuertelegraphie 440.
Figar 698. 699.
Figur der Braut 786.
— *der Gesundheit* 178. 206.
Figura alkata 736.
Figurenbezeichnung 93. 163. 205. 206. 647. 670. 721. 724—725. 727. 734.
Figuren der geometrischen Kunst 576. 581. 582.
Figurierte Zahlen 431. 579.
Fihrist 693. 701. 703. 704. 718. 736. 748. 796.
Finalbuchstaben 126. 470.
Fingerrechnen 6—7. 41. 86—87. 130. 514—515. 527—528. 529. 567. 609. 710. 824. 825. 829. 830.
Fingersprache 830.
Fingerzahlen s. *Digiti.*
Firmicus Maternus 527. 825.
Fischer 45.
Flächenanlegung 171. 174. 176. 262. 266—267. 283. 289—291. 333.
Flächenberechnung 28. 92—98. 110—112. 163. 271. 799.
— *falsche* 172—173. 549—550. 740.
Flächenzahl 158. 163. 267. 270. 432. 824.
Flaschenzug 326.
Flauti 230.
Flügel 738. 739. 761.
Flurkarten 542.
Flußbreite zu messen 383. 439—440. 538. 785. 863.
Fong siang schi 676.
Formaleoni 40.
Fragmente von Kahun 59. 65. 79—80. 94—96. 99.
Franco von Lüttich 876—878. 897.
Französische Bauernregel 528.
Franzosen 9. 15. 528.
Friedlein (Gottfried) 41. 107. 120. 135 und häufiger. 146. 194. 217. 219. 248. 356. 358. 387. 440. 458. 498. 510. 522. 523. 525. 531. 563. 577 und häufiger. 579. 686. 823. 855. 879. 901.
Friedrich II. 778.
Frobenius Forster 836.
Frontinus 550. 551. 552. 555. 586. 590. 864.
Fünfeck 49. 109. 177—179. 265. 273. 376. 393.
Fünfeckszahl, falsch berechnet 557—558. 586.
Fu hi 43. 663. 664. 675. 677.
Fujisawa (R.) 689.
Fulbert von Chartres 846. 873. 889.
Fulco 843.
Fulda 841. 842.

G.

Gärtnerkonstruktion der Ellipse 733.
Galen, der Arzt 214.
Galenus = Pediasimus 510.
Galilei 269.
Gallier 176.
Gallus 826.
Ganeça 600. 618. 635. 654. 878.
Gangâdhara 600.
Gartz 260. 702. 780.
Gaubil 88. 668. 675. 680.
Gauß 156. 317. 687.
Gazzera 537.
Geber 722. 794.
Geberscher Lehrsatz 796.
Gedächtnisverse 803. 804.
Gegenbauer (Leopold) 893.
γέγονε = er blühte 261.
Geiger (Lazarus) 5.
Gelenkzahlen s. *articuli.*
Gellius Aulus 542.
Gelon 297. 322. 326.
Gelzer 137.
Gematria 43—44. 125. 126. 462. 567.
Geminus von Rhodos 118. 142. 144. 156. 244. 245. 334. 335. 350. 356. 367. 406—411. 416. 425. 499.
Genocchi (Angelo) 786.
Geodäsie unterschieden von Geometrie 252. 271. 293. 350. 381.
Geographie 328. 422.
Geographische Länge und Breite 362. 383. 422.
Geometrie, Erfindung derselben 55. 57. 59. 86. 102. 103. 135. 389. 853.
— *des Boethius* 571. 576—590. 850. 854. 873. 874. 876.
Geometrische Algebra 285.
Geometrischer Ort 144. 221. 229. 248. 249. 280. 281. 282. 331. 340.
Geometrische Versinnlichung von Zahlen 163.
Gerade Zahlen von ungeraden unterschieden 64. 159. 160. 161. 224. 430. 507. 824.
Gerad und ungerad, ein Spiel 159.
Gerald 847. 856.
Gerbert, Abt von St. Blasien 844. 899.
— *(Papst Sylvester II.)* 575. 577. 582. 847—878. 879. 880. 885. 886. 887. 889. 891. 894. 897. 903. 904.
Gerbertista 897.
Gerbillon 667.
Gerhard von Cremona 415. 736. 737. 794. 796. 800. 803. 805. 907—908.
Gerhardt (Carl Immanuel) 218. 444. 445. 450. 511. 514.
Gerland 894. 898. 899. 902. 910.
Gerling 198.
Gernardus 909.
Geschichte der Mathematik 51. 118. 135. 249. 257. 389. 407. 890—891. 899—900.
Gesellschaftsrechnungen 77. 310—312. 619. 683. 684.
Gesenius 707.
Gesetz der Größenfolge 14. 21. 25. 36. 44. 83. 84. 120. 123. 124. 126. 127. 672.
Gewichtezieher 369. 450.
Ghana 616.
Ġijât eddîn Alkâschî 781—783. 788.
Gilbert Maminot von Lisieux 889.
Giles 825. 834.
Ginzel (F.) 37.
Giordano (Annibale) 449.
Gizeh 82.
Glaisher 453.
Glaukos 211. 212. 638.
Gleichgewicht der Ebenen 323.
Gleichheitszeichen 75. 472. 815.
Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten 74. 395. 513. 623. 838.
— *ersten Grades mit mehreren Unbekannten* 158. 285—286. 624. 773.
— *zweiten Grades mit einer Unbekannten* 263. 266. 285. 363. 405. 460. 473—477. 617. 622. 624—626. 719—721. 753.
— *zweiten Grades mit zwei Unbekannten* 95—96. 284.
— *höherer Grade, die auf den zweiten zurückführbar sind* 771. 773.
— *dritten und höheren Grades* 309. 314—315. 354. 477—478. 527. 685. 687. 749. 750. 773. 776 781—783. 787. 788.
— *unbestimmte ersten Grades* 312. 478. 628—630. 685—687. 689. 837. 838.
— *unbestimmte zweiten Grades* 436. 478. 479. 480. 615. 630—633. 724. 772—773.
— *unbestimmte höheren Grades* 478. 752. 785.
— *unbestimmte mit mehr als zwei Unbekannten* 630. 685—687. 689. 752.
Gnomon 50. 145. 161—163. 190. 192. 252. 432. 494. 536. 544. 631. 639. 644. 721. 754. 769.
Görland 203. 252.
Göthe 183.
Goldner Schnitt 178—179. 240—241. 263. 265. 292.
Goldne Zahl 572.
Golenischeff 59.
Goodwin 89.
Gordianus 457.
Goten 11.
Gow 125. 222. 229. 448.
Grade der Kreisteilung 37. 47. 50. 131. 360. 361. 366. 416. 681. 682.
Gradmessung 328. 360. 713. 886.
Graeko-Italer 521—523.
Gram 675.
Graphische Methoden 362.

Gregor der Große 565. 826.
— *V.* 848. 858.
Gregoras (Nikephoros) 508.
Gregory 260. 262. 276. 287. 293.
Griechen 11. 12. 15. 16. 33. 42. 44. 51. 86. 89. 117—517. 521. 523. 528. 536. 541—543. 544. 545. 554. 559. 570. 601. 619. 620. 621. 622. 624. 627. 676. 690. 701—706. 722—727. 729. 735. 749. 754. 763. 770. 773. 776. 784. 821. 822. 827. 850. 856. 886. 890. 891. 895. 896.
Griffith (F. Ll.) 59.
Größenverhältnisse menschlicher Körperteile 214. 544. 740.
Groma 536—537. 542.
Gromatici 537.
Grundzüge des Archimed 320. 321.
Gruppe 166. 235.
Gruppierung von Zahlzeichen 21. 83.
Grynaeus 498.
Guarnerius 856.
Gubârziffern 712. 811. 816.
Günther (Siegmund) 40. 179. 316. 397. 453. 515. 538. 635. 669. 758. 856. 872.
Guido von Arezzo 885.
Guichart 131.
Guignes (de) 88. 675.
Guldinsche Regel 450.
Gundermann (Gotthold) 711.
Gundobad 573.
Gurke 786.

H.

Haas 597.
Habakuk 44.
Hadrian 461. 489. 562.
Hadschî Chalfa 729. 775. 810.
Hâdschâdsch ibn Iûsuf ibn Maṭar 702.
Haebler 38. 50.
Hafṣ ibn ʿAbdallâh 701.
Hagen 835. 839.
Hak = Abschnitt (ägyptisch) 97. 111.
Hakimitische Tafeln 788—789.
Halbiëren 85. 319. 717. 761. 764.
Halhidada 862.
Halley 343. 344. 412. 490.
Halma 277. 395. 406. 414. 491 und häufiger.
Hammer-Purgstall 741.
Handasa = Geometrie 809.
Han-Dynastie 665. 685.
Hankel (Herrmann) 4. 7. 10. 13. 123. 125. 143. 183. 185. 194. 203. 208. 219. 220. 234. 260. 277. 420. 463. 467. 479. 634. 647. 650. 693. 701. 722. 723. 732. 736. 742. 748. 750. 769. 782. 786. 789. 794. 835.
Hansjakob 888.
Harmonikalen 490.
Harmonische Proportion 166. 338.
— *Teilung* 338. 490. 491.
Harpedonapten, ἁρπεδονάπται = Seilspanner 104. 192. 381. 385. 637.
Hârûn ar-Raschîd 695. 696. 700. 702.
Hatto, Bischof von Vich 847. 848. 849.
Hau = Haufen (ägyptisch) 74. 395. 455. 466. 620. 723.
Hawâʿî 816.
Hayashi (Tsuruichi) 689.
Heath 192. 299. 463. 470. 471.
Hebelgesetz 255.
Hebräer 20. 44. 122. 125—127. 145. 173. 412. 427. 665. 668. 709. 728. 823.
Heiberg (J. L.) 202. 248. 252. 254. 260 und häufiger. 278. 288. 292. 293. 295. 296 und häufiger. 299. 304. 307. 313. 317. 331. 333 und häufiger. 345. 354. 355. 392. 411. 414. 443. 458. 489. 490. 499. 502. 575. 579. 588. 736. 912.
Heiric von Auxerres 842.
Helbert von St. Hubert in den Ardennen 889.
Helceph 906.
Helikon 232.
Helmund 19.
Heng ho cha = Sand des Ganges 669.
Henry (C.) 492. 906.
Heraklides 295. 334.
Heriger von Lobbes 869. 889.
Hermeias 500.
Hermann (Gottfried) 555.
— *II., Erzbischof von Köln* 877.
Hermannus Alemannus 888.
— *Contractus* 859. 885—889. 891. 894. 900. 904.
Hermotimus von Kolophon 248.
Herodianische Zeichen 120—121. 125. 129. 133. 191.
Herodianus 120.
Herodorus 203.
Herodot 35. 38. 39. 50. 55. 57. 88. 89. 92. 102. 104. 130. 132. 136. 137. 145. 150. 319. 853.
Heronische Frage 363—368.
Heronas 368. 503.
Heron der Ältere = Heron von Alexandria 368.
— *der Jüngere = Feldmesser von Byzanz* 367. 506.
—, *Lehrer des Proklus* 368. 497.
— *metricus* 366. 541.
— *von Alexandria* 102. 119. 162. 177. 224. 227. 231. 256. 297. 318. 362. 363—406. 408. 409. 411. 412. 423. 426. 429. 440. 443. 450. 454. 455. 462 465. 466. 474. 480. 495. 499. 510. 541. 545—547. 554—556. 561. 564. 567. 586. 624. 637. 643. 646. 647. 648. 649. 652. 653. 654. 657. 705. 725. 727. 734. 750. 764. 785. 837. 863. 893.
Herons anderes Buch 392—394. 404.
— *Metrica* 318. 362. 364. 370—382. 385. 392. 393—394. 399. 548. 647. 733.

Herons Sammlungen 177. 224. 242. 297. 356. 388—392. 393—394. 395—405. 484. 488. 489. 513. 548. 647. 727. 837.
— *Dreiecksformel* 371. 374—375. 382. 385. 389. 390. 397. 402. 555. 590. 646. 649. 728. 734. 764. 799.
Herschel (Clemens) 551.
Hertzberg 496. 497. 502.
Herzog 122.
Hesychius 36.
Heteromeke Zahl 160. 163. 183. 184.
Hiao wen ti 665.
Hidschra 695.
Hieratische Schrift 81. 83—85. 121.
Hieroglyphen 81—83. 121.
Hieron 295. 311. 326.
Hieronymus von Rhodos 138.
— 830.
Hiksos 57. 58.
Hilfswinkel 789.
Hilgard (Alfred) 122.
Hiller (Eduard) 160 und häufiger. 257. 327. 330. 434.
Hilprecht (H. V.) 28—29.
Himly 34.
Himmelsglobus 326.
Hincks 24. 26.
Hindi = indisch 809.
Hindukusch 20.
Hin-Dynastie 664.
Hinzuzufügende Zahlen 471.
Hipparchus 39. 256. 361—363. 364. 365. 367. 377. 378. 383. 399. 407. 408. 411. 412. 413. 414. 416. 422. 496. 743.
Hippasus 175. 236. 239.
Hippias von Elis 146. 193—197. 198. 246. 306.
Hippokrates, der Arzt 194. 597. 701.
— *von Chios* 194. 200—213 214. 219. 226. 242. 247. 269. 271. 272. 300. 652. 790.
Hippolytos 461.
Hippopede 196. 242. 243. 353. 356.
Hischâm 794.
Hitzig 44.
Hoche (Richard) 158 und häufiger. 495. 496. 503. 686.
Hochheim (Adolf) 708 und häufiger. 762.
Höhenmessung 257. 362. 383. 440. 556—557. 648. 863. 864. s. *Schattenmessung.*
Hoeiti 665.
Hoernle (Rudolf) 598. 614. 615.
Hofmann (G.) 137.
Hohlfeld (P.) 183.
Homer 121. 130. 131. 151.
Hoppe (Edmund) 363. 365. 545—547.
Horapollon 84. 110.
Horatius 10. 235. 299. 561. 590.
Horn (W.) 238.
Horner 685.
Horus 110. 157.
Hô tû 674. 675.
Housel 336.
Hrabanus Maurus 841—842.
Hrotswitha von Gandersheim 856.
Huaetberct 828.
Huâng tì 664. 669. 671. 674. 677.
Huây nân tsè 664.
Hugo, bekannt mit Gerbert 870.
— *(Graf Leopold)* 175.
— *Capet* 848. 854.
Hûlâgû 778.
Hultsch (Fr.) 128. 129. 133. 164. 192. 222. 223. 246. 293. 317. 326. 363 und häufiger. 411. 441. 442. 443. 444. 447. 450. 460. 492. 498. 502. 505. 536. 545. 553. 561. 724. 731. 767. 823. 912.
Humboldt (Alexander von) 45. 328.
Hunain ibn Ishâk 415. 702.
Hunrath 317. 648.
Hunu = Feldmesser (ägyptisch) 104.
Hurûf aldschummal 709. 757.
Hydrostatisches Prinzip 325.
Hyginus, Astronom 553.
—, *Feldmesser* 535. 536. 553. 599. 601.
—, *Militärschriftsteller* 553.
Hypatia 491. 495—496.
Hyperbel 171. 230—231. 244. 283. 288 290. 305. 309. 335. 751. 759. 777.
Hypotenuse, das Wort 184.
Hypsikles von Alexandria 245. 260. 344. 358—361. 363. 416. 432. 464. 487. 501. 557. 565. 704. 761.

I.

1 bei Figuren vermieden 206. 228. 330. 331. 439. 724—725. 726. 771.
Ibdi = Quadratwurzel (sumerisch) 26—28.
Ibn Aladamî 698. 701.
Ibn Albannâ 805—810. 913.
Ibn Alhaitam 789—792.
Ibn Alhusain 753—755.
Ibn Almunʿim 805.
Ibn Alsirâdsch 772.
Ibn aṣ-Saffâr 793.
Ibn aṣ-Samh 793
Ibn Bauwâb 708.
Ibn Chaldûn 729. 735. 805. 806. 913.
Ibn Challikan 742.
Ibn Esra 730.
Ibn Jûnus 788—789. 795.
Ibn Mukla 708.
Ibn Sînâ = Avicenna 730.
Ibrâhîm 730.
— *ibn Sinân* 749.
Ideler 238. 308. 416. 420. 539. 572.
Igin 893 flgg.
Ilchânische Tafeln 779.
Illa = außer 815. 816.
Imaginäre Zahlen 402—403. 473—474. 626.
Imbarûr 778.
Inkommensurables 268. 277.

Inder 15. 39—40. 346. 427. 456. 457. 510. 592. 595—660. 669. 677. 680. 684. 687. 689. 693. 697—699. 710 —712. 722—728. 732. 739—740. 744. 745. 754. 757. 762. 763. 773. 784. 801. 804. 877. 878. 893. 909.
Indisch-Alexandrinische Beziehungen 427. 457. 466. 596. 599. 600. 605. 609. 621. 622. 624. 638. 643. 646. 648. 649. 653. 724. 740.
Indus 19.
Ine Sin 28.
Innenkreis des rechtwinkligen Dreiecks 556. 586. 589. 590.
Interusurium 561.
Involution 452.
Iran 19.
Iran = Heron 705.
Irenaeus 127.
Iron 366.
Irrationales 29. 94. 147. 153. 164. 181. 182. 183. 188. 192. 193. 198. 201. 213. 223. 236—237. 247. 252. 269—270. 285. 326. 348—349. 474—475. 502. 544. 570. 621. 626—627. 768. 875.
Isaak Argyrus 509.
Ishta karman 618. 732.
Isidorus, fälschlich angenommener Gatte der Hypatia 495.
— *von Alexandria* 500. 501. 912.
— *von Milet* 231. 244. 501.
— *von Sevilla* 429. 563. 822—825. 828. 831. 835. 837. 842. 846. 901.
Isis 157.
Isisfest 407. 408.
ἴσοι 472. 622. 815.
Isokrates 102. 104. 149—150.
Isoperimetrie 179. 357. 358. 446—447. 549. 706. 740.
Isopsephie 461—462.
ἱστορία πρὸς Πυθαγόρου 155.
Italien 119. 147.
Ivrea, Handschrift von 879—880.

J.

Jacobs (Friedrich) 461. 462.
— *(Hermann von)* 32.
Jahjâ ibn Chalîd 702.
Jahr 37. 77—78. 328—329. 508. 527. 539—540. 670. 677. 681. 775.
Ja'kûb ibn Târik 700.
Jâkût 708.
Jamblichus, Philosoph 51. 118. 131. 155. 158. 166. 167. 175. 188. 202. 213. 238. 332. 432. 456. 458—461. 464. 475. 485. 496. 624. 706. 735. 739.
— *Romanschriftsteller* 51.
Jan (C. von) 165. 459. 509. 566.
Janus 527. 540.
Japaner 689—690.
Java 607.
Jehova 126. 665.
Jiâ 658. 737.
Jiârdha 658.
Jîva 658. 737.
Johann XIII. 849.
— *XIV.* 854.
— *XV.* 849. 858.
Johannes von Damaskus 464. 696. 702. 725.
— *Hispalensis = Johannes von Luna.*
— *Hispanenis = Johannes vvn Luna.*
— *von Jerusalem* 463. 464. 487.
— *von Luna* 800—803. 804. 838. 903. 909. 913.
— *Palaeologus* 509.
— *Philoponus* s. *Philoponus.*
— *von Sevilla = Johannes von Luna.*
Jomard 82.
Jonier 119.
Jonisches Alphabet 121. 127.
Jordanus Nemorarius 911.
Josephus, Geschichtsschreiber 32. 86.
—, *der Spanier* 856. 870.
—, *der Weise* 856.
Jourdain 797. 888. 889. 890. 906.
Jugerum 549.
Julianus s. *Salvianus Julianus.*
— *Apostata* 457. 464. 495. 596.
Julien (Stanislas) 668. 671.
Julius Paulus 562.
Junge 308. 311. 912.
Junier 553.
Justinian 502. 503. 505.
Jûsuf ibn Hârûn al Kindi 856.
Juvenalis 527.
Juventius Celsus 562. 563.
Juxtaposition 22. 83. 123. 129.
Jyotisham 39.

K.

K, Zeichen für Cardo 534.
Ka'b 767. 768. 815. 816.
Kabbala 43.
Kâdîzâdeh ar-Rûmî 780. 781.
Kaempf 34. 35.
Kaestner 4. 507. 780.
Kahun s *Fragmente von Kahun.*
κάλαμος 385.
Kalender der Römer 13. 525. 539—540.
Kallimachus 327. 329.
Kallisthenes 38.
Kalpasûtra 636.
καμπύλαι γραμμαί s. *Bogenlinien.*
Kanghi 668. 688.
Kanishka 596.
Kanon 214.
Kanopus, Edikt von 78. 259. 328—329. 409.
Karaṇa 621. 639.
Karatheodory 779.
Kardaga 698. 699. 737.
Karl der Große 832. 833. 879.
Karl Martel 822.

Karnak 82.
Kassi 31.
Kassiterdynastie 31.
Kasteneinteilung 595.
Kategorientafel 160. 183. 236.
Kâtyâyana 636. 643.
Kegelschnitt 193. 196. 244—245. 288—292. 350. 490. 638. 751. 776. 777.
Kegelschnittzirkel 231. 244. 353. 751.
Keil 564.
Keilschrift 21. 24.
Kelten 9.
Kemâl Eddîn 778.
Kendra = ἡ ἐκ κέντρου 599.
Keou 679.
Kepler 308.
Kerbholz 83.
κεστά 438—440.
Kettenbruchalgorithmus 267. 317. 318. 437. 628. 630.
Kewitsch (G.) 32. 37.
Khe = ungefähr eine Viertelstunde (chinesisch) 39.
Kiă tsè 670.
Kieou tschan = die neun Abschnitte 670. 674. 682. 690.
Kießling 155. 459.
Kiêu lông 669.
Kikuchi (D.) 689.
Kimon 215.
King yu 679.
Kirchhoff (A.) 127.
Kiu kong yen 666.
Klammerauflösung 387.
Klamroth 702.
Kleiner Astronom 447. 705.
— *Sattel* 805.
Kleobuline 136.
Kleopatra 427.
Klosterbibliotheken 569. 577. 580 831. 832. 836. 871—872.
Klosterschulen 825. 831. 832. 833. 834. 840. 841. 843. 847. 849. 850. 851.
Klügel (Simon) 256. 451.
Kluge 501.
Kneucker 34.
Knoche 183. 237. 241. 242. 346. 498. 499.
κοχλία 326.
Kodrus 214.
Koehler 120.
Koeppen 895.
Körperliche Örter 248—249. 448.
Körperzahl 163. 267. 432. 824.
Kohl 10.
κοιλογώνιον 357.
Kombinatorik 249—250. 256—257. 270. 345. 362. 454. 501. 575. 619. 620.
Kommentare zu Euklid 237. 241. 275. 348. 381. 386. 387. 388. 424. 425. 443. 497—499. 502. 509. 736. 780. 793.
— *zu Nikomachus* 368. 429. 459—460. 503.
Kommentare zu Ptolemaeus 277. 357. 416. 442. 443. 491. 492. 512.
Komplanation eines Teiles der Kugeloberfläche 451.
Komplementäre Division 528. 585. 612. 718. 762. 765. 785. 812. 868. 869. 882. 885. 902. 910.
— *Multiplikation* 433. 528—529. 586. 612. 762. 765. 784. 785. 812. 907. 910.
Konen (H.) 632.
Konoide und Sphäroide des Archimed 297. 304. 306. 309—310. 335.
Konon von Samos 297. 306. 307. 336.
Konservative Kraft der Unwissenheit 173. 550.
Konstantin der Große 457. 458. 462. 463. 596.
— *Kephalas* 461.
Konstantinopel, Eroberung durch das Kreuzheer 508, *durch die Osmanen* 516. 783.
Koordinaten 108. 337. 383—384. 422. 533—534. 872.
Kopfrechnen 41. 531. 609. 610. 793. 816. 829.
Kopp 566.
Koppe 737.
Korea 690.
κορυστὸς γραμμή 555.
κορυφή 394. 555.
Kos 50.
Ko schan king 684.
κόσκινον 332.
Kosmische Körper 153. 174. 175.
Kotangententafel 738.
Kotijiâ 658.
Krähenindianer 13.
Kramajiâ 659. 699. 737.
Kranzrechnung 310.
Krates von Mallus 409.
Kreis 40. 47. 48. 97. 98. 138. 140. 141. 142. 178. 179. 202—204. 210. 265. 389. 556.
Kreisabschnitt 206—207. 378—379. 389. 549.
Kreisberührung 307.
Kreisbogen 196. 395—396.
Kreisteilung 37. 47. 50.
Kremer (A. von) 464. 667. 693—697. 708. 713. 729.
Kreuzzüge 508. 777—778. 785. 817. 822. 878. 904. 905.
Kroll 392.
Kronenrechnung 310—312. 325. 462. 544.
Krumbacher (Karl) 508. 510. 515. 897.
Krummbiegel 312.
Krummlinige Winkel 192. 264. 443—444.
Krümmungsmittelpunkt 342.
Kschattriyas 595.
Ktesibius 364. 367.
Kuas 88. 675.
Kubatur der Konoide und Sphäroide 309—310.

Kubikwurzel 30. 236. 316. 348. 374. 380. 406. 453. 480. 606. 616. 638. 684. 733. 755. 762. 777. 913.
Kubikzahl 26. 27. 45. 164. 167. 267. 432. 470. 483. 559. 560. 580. 619. 756. 865.
Kubische Reste 632. 756.
Kubitschek 133.
Kufische Schrift 708.
Kugel 175. 176. 179. 237. 425. 646. 786. 865.
— *und Zylinder des Archimed* 226. 241. 261. 266. 297. 308—309. 314. 330. 412. 703. 749. 774.
Kugeloberfläche 308. 590.
Kugelschnitt 308. 309. 314. 354. 381. 412. 749. 774.
Kugler (Franz Xaver) 31.
Kujundschik 27.
Künßberg 238.
Kurieraufgabe 623.
Kurven doppelter Krümmung 229. 411. 450. 451. 780.
Kusch 20.
Kuschiten 20.
Kûschjâr 761.
Kustâ ibn Lûkâ 365. 704. 761.
Kuṭṭaka 628—630. 687.
Kuu 679. 680.
κύβος 470. 767.
Kyros, Freund des Serenus 489.
Kyrus, Perserkönig 35. 136.
Kyzikenus von Athen 247.
Kyzikus 238.

L.

Lachmann 532. 553.
Lacroix 260.
Laertius s. *Diogenes*.
Lakedaemon 145.
Lalitavistara 612. 613.
La Loubère 635.
Landkarten 423.
Lanfrank 903.
Längster Tag 39. 41.
Laò tsè 665.
Larfeld (Wilhelm) 126.
Larsam 25.
Lassen 39. 605. 635.
Latitudines 872.
Latus rectum 337.
Laufer (Berthold) 34.
Lautere Brüder 516. 738—741. 793.
Lauth 57. 59.
Layard 47
Legendre 156.
Lehmann (C.) 37.
Leibniz 10. 218.
λεῖψις 471.
λῆμμα 241.
Lemmen des Pappus 279.
Lenormant 37. 43. 122. 894.
Leodamas von Thasos 194. 220. 235. 237.
Leon 237.
Leonardo von Pisa 551. 911.
Leonas 497.
Leonidas von Alexandria 462.
Le Paige (C.) 889.
Lepsius 25. 37. 39. 57. 78. 84. 87. 89. 92. 110. 112. 328.
Letronne 133.
Levi ben Gerson 780.
Levigild 822.
Levy (M. A.) 123.
Lex Falcidia 561. 562.
— *Genucia* 561.
Le yay jin king 684.
Liang jîn 676.
Liber augmenti et diminutionis 730—732.
Liber Charastonis 704.
Libri (Guillaume) 715. 719. 721. 730. 732. 768. 802. 803.
Lieou hin 665. 666. 678.
Lihn 687.
Lîlâvatî 598. 617. 623. 654. 659.
Limes 361. 764.
Lindemann (Ferdinand) 175. 176. 178.
Lineae 880. 886.
Lineae ordinatae 554.
Lineal 92. 94.
Lineare Örter 248.
Liptâ = *λεπτόν* 599.
Liu hwuy 684.
Livius 295. 299. 522. 565.
Loculus Archimedius 297.
Loftus 25.
Logistik = *Rechenkunst* 156. 252. 320. 704.
Lombarden 905.
Loria (Gino) 67. 119.
Lo schu 674. 675.
Lubnâ 792.
Lucian 169. 178. 214. 428. 429. 564.
Luftrechnen = *Kopfrechnen* 793. 816.
Lunula Hippocratis 206.
Lupitus von Barcelona 857. 889. 904.
Lu pu oei 678.
Luxeuil 826.
Lykurg 151.
Lysanias 327.

M.

Machinula 537.
Macrobius 87. 527. 539. 566. 825. 828. 846. 886.
Madhyama haraṇam 625.
Madschd Addaulah 761.
Madschhûl 815.
Maerker 242. 346.
Mafrûʿ 753.
Magdeburger Sonnenuhr 858.
Magie 45. 457.
Magisches Quadrat 438. 515—516. 635. 675. 688. 740—741. 786. 801.
Magnus 320.

Maġrib 708.
Mahler (Ed.) 137.
Maḥmûd der Gaznawide 757.
Mai (Aug.) 876.
Majer 219. 255. 292. 388. 424. 498. 499.
Mâl 723. 767. 768. 815.
Malaien 12.
Malchus 457.
Mamerkus 146. 193.
Mamertinus 146.
Mandschu 667.
Mangelhafte Zahlen 168. 430. 507. 835.
Manitius (Carl) 360. 362. 406. 410.
Manuel Moschopulos 515—516.
Maraja 779.
Marcellus 296.
Marco Polo 667.
Mariette 122.
Marinus von Neapolis 282. 489. 497. 500.
— *von Tyrus* 422.
Marquart 529.
— *(J.)* 12.
Marre (Aristide) 710. 726. 805.
Marryat 538.
Martianus Capella 527. 566—568. 569. 570. 823. 825. 846.
Martin (Thomas Henri) 131. 164. 168. 174. 222. 225. 358. 363. 366. 433. 488. 491. 500. 506. 525. 578. 582. 844. 912.
Marty 842.
Maslama al Madjriti 909.
Masoreten 126.
Maspero 19. 20. 31. 45. 55. 56. 57. 77. 82.
Massiver rechter Winkel 105. 440. 556. 863.
Masʿudî 602. 603. 701.
Maßvergleichungen 26. 68. 90—91. 389. 391. 395. 554. 612. 823. 860.
μαθήματα 216.
Mathematikerverzeichnis 135. 146. 147. 174. 188. 193. 201. 213. 234. 235. 237. 238. 240. 241. 243. 245. 247. 248. 257. 260. 356. 407.
Mathematische Zeichen 14. 74—75. 205. 471. 472. 620. 684. 685. 804. 813. 814. 815. 816.
Matthiessen 266. 284. 685. 686. 687. 810.
Maximum und Minimum 266. 309. 341—342. 357. 358. 446—447. 449. 452—453. 490. 549.
Maximus Planudes 461. 467. 510—513. 514. 515. 603 610. 717. 756. 762.
Mayas 9.
Mechanik 229. 233. 236. 254—256. 294. 296. 297. 323—326. 369. 423. 424. 449—450. 545—547. 704. 780.
— *des Boethius* 575.
Mediallinie 270. 348.
Medien 19. 45.
Mehrfache Lösung einer quadratischen Gleichung 476. 625—626. 720. 726. 770.
Meier (Rudolf) 363. 367.
Meinzo von Konstanz 887.
Mei wuh gan 688.
μῆκος 395. 422.
Melampus 151.
Melikschâh 774. 775.
Memphis 107.
Mena 56. 77.
Menaechmus 196. 212. 226. 229—231. 233. 243—246. 292. 330. 353.
Ménant 22.
Menelaus von Alexandria 365. 367. 412—414. 420. 425. 447. 448. 491. 539. 547. 549. 552. 705. 779. 908. 911.
Menephtah I 89.
Menes 56.
Menge (Heinrich) 260 und häufiger.
μηνίσκος 206.
Menkara 56.
μερισμός 289.
Merit = Hafen (ägyptisch) 93. 97. 205. 394.
Merx (Adalb.) 49. 123. 124.
Mesolabium 330.
Mesotäten 165. 238—239. 445. 454. 852. 853. 912.
Messer Millione 667.
Meßstange 538.
Messung mittels der festen Stange 863.
Metrodorus 462. 463.
Mexiko 9.
Michael Palaeologos 508.
μικρὸς ἀστρονομούμενος 447. 705.
Milet 50. 125. 137.
Militärische Höhenmessung 863.
Milleius = Menelaus 705.
Million 22. 23. 124. 126.
Minaraja 638.
Ming-Dynastie 666. 684. 688.
Minos 211. 638.
Minuten 416. 682.
Minutien = Duodezimalbrüche.
Mîram Tschelebî 781.
Misâhât 726—728.
Mischungsrechnung von Eßwaren 619.
Missionäre 667—668. 688.
Mittlere Bücher 705.
Mizraim 56.
Mnesarchus 147.
Mode in der Wissenschaft 259. 428. 505. 516. 872.
Modestus 368.
Mönchsleben 568—569. 571. 871—872.
Mohammed Bagdadinus 287.
Mohnkornlänge 321.
Molinet (Claude du) 87. 529.
Mollweide (Karl Brandau) 256. 317.
Molsem 909.
Mommsen 523. 525. 526. 553. 564. 573. 826.
μονάς 461. 470. 723.
Mondchen 207—210. 790.
Mongolen 666. 674. 684. 778. 822.
Môngtiên 664.

Monochord 153. 167. 850.
Montchal (Charles de) 857.
Monte Casino 568. 843.
Montfaucon (Bern. de) 320. 857.
Montferrier (A. S. de) 756.
Montucla (Jean Etienne) 43. 255. 325. 333. 360. 407. 509.
Moraspiel 90.
Morgen als Feldmaß 92.
Mortet (Victor) 552. 568. 570.
Moses Maimonides 794.
Müller (Ottfried) 523.
Muhammed, der Prophet 693. 695.
— *ibn Kâsim* 701.
— *ibn Mûsâ Alchwarizmî* 698. 700. 711. 712—733. 741. 742. 753. 761. 763. 769. 787. 800. 801. 802. 803. 849. 903. 906. 908.
— *ibn Mûsâ ibn Schâkir* 733.
Muhurta $= \frac{1}{30}$ *Tag* (indisch) 39.
Muʿizz Eddaula 741.
Mukarrar 806. 807.
Mukha 647.
Mûla = *Wurzel* (indisch) 616. 723—724.
Multiplikation, Alter derselben 8.
Multiplikationsverfahren 85. 318—319. 346. 431. 433. 445. 454. 493. 584. 585. 586. 610—611. 671. 688. 717. 761—762. 764. 784. 785. 812. 846. 867—868. 881. 884. 896. 900.
Munk 737.
Murr (Christian von) 468.
Mûsâ, Feldherr 706.
— *ibn Schâkir* 733.
Musaeus 151.
Museum in Alexandria 259.
Musik des Boethius 165. 575. 577. 578. 583.
— *der Welten* 155. 156. 435.
Musikalische Proportion 166. 432.
— *Schriften aus dem Mittelalter* 844.
— *Zahlenlehre* 153. 156. 184. 294. 423. 544.
— *Zeichen* 823.

N.

Nadika $= \frac{1}{60}$ *Tag* (indisch) 39.
Näherungswerte von $\sqrt{2}$ 181. 223. 317. 377. 378. 398. 400. 436—437. 475. 640. 641. 642. 643. 645.
— s. $\sqrt{2}$ (Quadratwurzel aus 2).
— *von* $\sqrt{3}$ 223. 316. 318. 372—374. 377. 378. 393. 397. 398. 399. 548. 586. 643. 728. 799.
— s. $\sqrt{3}$ (Quadratwurzel aus 3).
Nagl 133. 868. 890.
Namen bei den Arabern 699—700.
— *bei den Römern* 553.
Namenverunstaltungen 705.
Naramsin 31.
Nârâyana 635.
Narducci (Enrico) 789. 900.
Naṣîr Eddîn 779—780. 787. 795. 796.
Navarro 235.
Naxatra 39.
Nebi = *Holzpflock* (ägyptisch) 104.
Nebka 56.
Nebukadnezar 35. 38.
Nectanabis II. 238.
Negative Gleichungswurzeln 622. 626. 772.
— *Zahlen* 471. 620. 621. 622. 626. 685. 803.
Nen = *nicht* (ägyptisch) 112.
Neokleides 237.
Neptun 32.
Ner = *600* (sumerisch) 36. 37. 40. 42. 133. 532.
Nero 127. 462.
Nerva 542. 550.
Nes-chî Schrift 708.
Nesselmann 51. 127. 131. 156. 238. 269. 285. 312. 360. 407. 428. 430. 432. 433. 436. 460. 461. 463. 466. 467. 470. 472. 479. 483. 484. 485. 493. 496. 719. 786.
Nestorius 701.
Netzmultiplikation 611. 785. 812.
Neue Akademie 428.
Neuneck im Kreise 377. 759.
Neunerprobe 461. 611. 717. 756. 763. 766. 808.
Neuplatoniker 456—461. 496. 507. 569. 574. 584. 890.
Neupythagoräer 428. 465. 507. 584. 712. 716. 739. 895.
Neuseeländer 10.
Newbold (Wm. Romaine) 161. 266.
Niccheda 628.
Niebuhr 564.
Niederbretagner 10.
Nietzsche 117.
Nikephoros Gregoras 508.
Nikolaus Rhabda von Smyrna 513—515. 527. 710. 829. 830.
Nikomachus von Gerasa 158. 165. 166. 169. 170. 225. 332. 363. 368. 428—433. 434. 435. 455. 456. 459. 460. 464. 475. 516. 528—529. 559. 563. 564. 567. 570. 576. 579. 580. 581. 586. 686. 706. 716. 724. 735. 755. 824. 881. 906. 910.
Nikomedes 195. 196. 350—352. 356. 407. 425. 445.
Nikon 308.
Nikoteles von Kyrene 336.
Nil, Austreten desselben 55. 102—103. 135. 389. 791—792. 852. 853.
Niloxenus 138.
Ninian 826.
Ninive 20. 122.
Nippur (Tafeln von) 29.
Nipsus 552. 553. 556. 654. 861. 863.
Nirapavarta 628.

Nissen 522. 532. 533. 534. 536.
Nix (L.) 256 und häufiger. 363. 683.
Nizâm Almulk 774.
Nizze (Ernst) 296 und häufiger. 306. 335. 411. 490.
Noah 35. 56.
Nokk (A.) 293. 356. 411.
Nordamerikanische Naturvölker 538.
Null 30. 31. 112. 128. 170. 511. 592. 603. 607. 608. 609. 616. 617. 673. 711—712. 762. 851. 885. 897. 899. 900. 901. 904. 909.
— *als Gleichungswurzel vermieden* 772.
Numa 526. 527. 539.
Numeri figurati 579.

O.

Obelisk 390. 402.
Ocreatus 433. 906. 910.
Odalric 843.
Oddos Regeln des Abacus 844. 899—902.
Odo von Cluny 843. 844. 847. 899.
— *von Tournay* 889.
Ofterdinger (Ludwig Felix) 220. 287.
Oinopides, der Philosoph 35.
— *von Chios* 151. 188. 190. 191. 194.
Oktaden des Archimed 320—321. 346.
Oktodezimalsystem 10.
ὀκτόβοον 346.
Okytokion 345. 346.
Olleris 847. 854 und häufiger. 871. 898.
Omaijaden 696. 697. 701. 707. 741.
ʿOmar 503. 504. 695.
ʿOmar Alchaijâmî 774—777. 787. 788.
Omar-Cheian = *ʿOmar Alchaijâmî* 775.
Oppermann 317. 345.
Oppert (Jules) 19. 23. 28. 31. 35. 37. 41. 48. 50.
Oppositio 719.
Optik 293. 423. 447. 789.
Opuntius s. *Philippus Opuntius.*
Ordinaten 554.
Orestes 495.
Orientierung 15. 57. 104—105. 535—537. 599. 601. 635. 636. 637. 676. 677.
ὡρισμένον 158.
Ormis 893 flgg.
Orontes 41.
ὅρος 361. 764.
Orpheus 151.
Ort zu 3 oder 4 Geraden 339—340.
ὀρθία 337.
Ortstheorem 280. 281. 282. 790.
Osiris 157.
Osseten 10.
Osterrechnung 531. 572—573. 826. 827. 828. 831. 834. 841. 867. 898. 899.
Oswin 827.
Ottajano 449.
Otto I. 849.
— *II.* 854.
— *III.* 577. 854. 855. 856. 858.
Où wâng 43. 662. 676.
Ovidius 352.
Oxus 19.
Örter auf der Oberfläche 288. 448. 451.
Östliche Hau-Dynastie 678.

P.

$\pi = 2{,}25$ 396.
$\pi = \sqrt{8}$ 507.
$\pi = \frac{3}{4}\left(\frac{11}{7}\right)^3$ 786.
$\pi = 3$ 48. 109. 379. 403. 404. 507. 541. 643. 647. 681. 683.
$\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ 642. 877.
$\pi = 3\frac{1}{8}$ 544. 642. 876.
$\pi = \frac{157}{50}$ 684.
$\pi = 3{,}1416$ 346. 646. 654. 658. 728.
$\pi = 3\frac{17}{120}$ 422. 799.
$\pi = \frac{22}{7}$ 303. 378. 393. 403. 404. 422. 551. 590. 648. 654. 657. 684. 688. 728. 799. 875. 877. 878. 887.
$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ 98. 99. 109. 404. 642. 876.
$\pi = \sqrt{10}$ 647. 648. 649. 728.
$\pi = 3{,}2$ 48. 99.
$\pi = \left(\frac{9}{5}\right)^2$ 877.
$\pi = 4$ 591. 837. 877.
Pachymeres (Georgios) 508.
Pada 616.
Padmanâbha 600. 626.
Palaeologen 508—510.
Palimpsest von Verona 564—565. 581. 908.
Palmyra 123.
Pamir 19.
Pamphile 136.
Pao tschang schi 676.
Pappus von Alexandria 118. 119. 196. 197. 220. 225. 227. 245. 246. 248. 261. 275. 278. 279. 281. 283. 288. 291. 298. 307. 318. 330. 331. 334. 335. 340. 343. 344. 345. 346. 347. 351. 353. 356. 357. 364. 367. 370. 385. 410. 414. 423. 428. 441—455. 465. 484. 491. 492. 499. 550. 601. 706. 735. 740. 745. 764. 790. 791.
Papyrus Eisenlohr 57—81. 85. 91—94. 96—100. 186.
— *Sallier* 89.
Parabel 171. 229—231. 244. 288. 289. 291. 304—305. 309. 323—324. 335. 344. 502. 745—746. 759.
Parabelzirkel 231. 244.
Paraboloid 98.

παράδοξος γραμμή 414.
Parallellinien 46. 50. 171—172. 262. 277. 307. 388. 409. 424—425. 499. 554. 780.
Parallelogramm der Kräfte 255.
Paralleltrapez, gleichschenkliges 96. 97. 108. 376. 389. 394.
— *mit 3 gleichen Seiten* 208. 651. 652. 777.
Paramâdîçvara 600.
Paravey 24.
Parilienfest 536.
Pariser Gemme 529.
Parmenides 500.
Partsch 541.
Pascal (Blaise) 559.
Passahfest 572.
Pâtaliputra 598.
Patricius 578. 579. 581.
Patrikios 368. 389. 488—489. 557.
Pauli (C.) 524.
Pausanias 35.
Pediasimus 510.
Peiper 580. 899.
Peithon 489.
Pena 411.
Pendlebury 453.
Pentagramm 178. 206.
Perigenes 51.
Perikles 120. 178. 188. 213. 214. 259. 867.
Peripatetiker 117. 153. 216. 251. 257. 259. 540. 702.
περισσοί 159.
Perny 663. 664. 665. 669. 670. 671. 674.
Perseus 196. 356. 363. 407.
Persius 853.
Perspektive 108. 190. 310. 423.
Pertz 876. 879.
Peruaner 88.
Pesch (J. G. van) 497. 499.
Petau 408.
Petesuchet 57.
Petesuchis 57.
Petrie 59.
Pez 851.
Pfahlbauten am Pfäffikon-See 15.
Pheidias, Künstler 214.
— *Vater des Archimed* 295.
Philipp von Mazedonien 169. 213.
Philippus von Mende 248.
— *Opuntius* 169. 248. 312. 487.
Philo von Alexandria 125.
— *von Byzanz* 364.
— *von Tyana* 414.
Philolaus 161. 166. 175. 184. 266.
Philoponus 201. 203. 232. 500. 503. 504.
Philosophie der Mathematik in der Akademie 219.
Phöniker 20. 32. 33. 121—123. 135.
Phönix 32.
Photius 330.
Phylai 121.
Pick 528.
Pietschmann 19. 20. 31. 45. 55. 56. 57. 77. 82.
Pihan 608.
Pipin 845.
Pipping 408.
Piremus (ägyptisch) 99—100.
Pirmin 826. 836.
Pistelli 158 und häufiger. 459.
Planisphaerium 423.
Plato von Tivoli 737. 798. 800. 907.
Platon 42. 151. 154. 155. 172. 184. 193. 194. 212. 213—234. 235. 238. 240. 243. 248. 249. 250. 251. 259. 260. 270. 316. 329. 353. 361. 380. 389. 390. 428. 430. 434. 575. 589. 890. 900.
—, *Briefe* 215.
—, *Charmides* 319.
—, *Euthydemus* 157.
—, *Gesetze* 102. 217. 225. 248.
—, *Gorgias* 157.
—, *Hippias maior* 195.
—, *Hippias minor* 195.
—, *Lysis* 159.
—, *Menon* 171. 185. 217. 218. 219. 726.
—, *Nebenbuhler* 188. 189. 190.
—, *Parmenides* 219.
—, *Phaedon* 155. 175. 225.
—, *Phaedrus* 86. 102.
—, *Philebus* 184.
—, *Protagoras* 195.
—, *Republik* 157. 168. 180. 216. 222. 223. 347.
—, *Sophist* 500.
—, *Theaetet* 182. 207. 213. 215. 236. 237.
—, *Timaeus* 154. 164—165. 176. 225. 236. 861.
πλάτος 395. 422.
Plautus 527. 532.
Plectoidische Oberfläche 451.
πλευρά 724.
Plinius 38. 50. 57. 138. 146. 163. 173. 365. 412. 527. 539. 540. 541. 543. 828. 872.
Plotinus 457. 539. 567.
Plutarch 42. 43. 139. 152. 157. 168. 171. 177. 180. 184. 193. 232. 233. 234. 249. 256. 295. 460. 485.
ποδισμός 555.
Podismus 555. 556. 861. 864. 874.
Poggendorff 253. 667.
Pol eines sphärischen Bogens 420.
— *der Konchoide* 351.
Polardreieck 780.
Politische Arithmetik 514.
Polos 50.
Polybius 132. 173. 319. 362. 409. 864.
Polyeder s. *Vielflächner*.
Polygonalzahlen 169. 248. 249. 312. 361. 432. 464. 485—487. 567. 579. 580. 586. 590. 627—628. 840. 864. 865.
—, *Schrift des Diophant über* 361. 466. 467. 485—487. 557. 558. 560.
Polyklet 214.

Polykrates, Redner 149.
Pompeius 409.
Porisma 278—281.
Porismen des Diophant 467. 483.
— *des Euklid* 278. 281—282. 420. 448. 452. 790.
Porphyrius 33. 38. 118. 151. 154. 166. 188. 456. 457. 458. 501. 575. 706.
Poselger 254. 255.
Posidonius von Alexandria 198. 365. 409.
— *von Rhodos* 365. 388. 409.
Potentia 207.
Potenzen der unbekannten Zahl 470. 507. 621. 767—768.
Potenzgrößen 207.
Potone 249.
Pott 4. 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 34. 41. 83. 88. 92.
Poudra 423.
Prâcî 636.
Praecisura 555.
Prantl 876.
Prémare 668.
Primzahlen 160. 267. 268. 332—333. 430. 461. 507. 579.
Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit 253.
Priscianus 311.
Prisse d'Avennes 107.
Prittûdaka 619. 651.
Problem 275.
Produkt der Summen zweier Quadratzahlen 482.
Projektionsmethoden 423. 443.
Proklus Diadochus 107. 118. 135. 138. 141. 144. 146. 152. 156. 161. 171. 172. 173. 177. 180. 183. 185. 190. 193. 194. 195. 196. 213. 219. 220. 223. 224. 237. 241. 242. 245. 255. 260. 261. 264. 274. 275. 278. 279. 280. 287. 292. 326. 344. 348. 350. 351. 352. 356. 357. 367. 368. 381. 386. 388. 407. 410. 414. 424. 443. 457. 458. 489. 497—500. 567.
Proportionenlehre 73. 108. 156. 165—166. 225. 236. 238—240. 265. 272. 277. 331. 431. 432. 434. 445. 454. 580. 738. 763.
Proportionalteile 419—420.
Propositiones ad acuendos juvenes 834—839.
Protagoras 195. 199.
Protarch 359.
ψαμμίτης 321.
Psellus (Michael) 464. 506—508.
ψῆφος 897.
ψηφοφορία κατ' Ἴνδους 510.
ψευδάρια 278.
Pseudoboethius 581.
Ptolemaeus Euergetes 211. 243. 259. 327. 328. 333. 336. 540.
— *Lagi Soter* 259.
— *Philadelphus* 125. 259.
— *Philopator* 330. 333.
— *XI.* 110.
Ptolemaeus XIII. 366.
— *Hephaestio* 330.
— *(Klaudius)* 39. 119. 128. 318. 333. 394. 412. 414—425. 433. 434. 447. 457. 491. 495. 499. 509. 571. 575. 597. 600. 602. 659. 698. 702. 703. 704. 712. 737. 764. 795. 796. 799. 907. 908. 911.
Ptolemaeischer Lehrsatz 416. 764.
Puini (Carlo) 680.
Punktierkunst 45. 779.
Pyramidalzahlen 249. 487. 558—559. 628. 688. 865.
Pyramidenwinkel, Konstanz desselben 57.
πυρεῖον 344. 354.
Pythagoras 35. 148—188. 189. 223. 224. 238. 247. 270. 389. 390. 428. 429. 432. 457. 459. 464. 521. 567. 570. 575. 583. 639. 644. 645. 696. 725. 726. 735. 824. 861. 899. 900.
Pythagoräer 42. 107. 131. 147. 152—188. 193. 196. 198. 200. 201. 202. 213. 215. 216. 220. 235. 238. 252. 291. 335. 348. 428. 460. 559. 624. 735.
Pythagoräischer Lehrsatz 152. 179. 180. 181. 184. 185. 218. 263. 274. 371. 386. 636. 638. 639. 640. 647. 655. 656. 679. 680. 684. 726. 744. 877.
Pythagoräisches Dreieck 49. 51. 96. 105. 106. 170. 180. 187. 326. 371. 481. 544. 644. 679. 680. 786. 863.
Pythmen 347. 348. 461. 585.

Q.

Qa = *Höhe* (ägyptisch) 98. 394.
Qet = *Ähnlichkeit* (ägyptisch) 99.
Quadrat 92. 177. 183.
Quadratische Reste 435. 632. 752. 756. 763.
Quadratrix 195—197. 246—247. 306. 353. 354. 446. 450—451.
Quadratur der Ellipse 306. 379. 799.
— *des Kreises* 97. 189. 196. 197. 201. 210. 247. 271. 345—346. 378—379. 502. 507. 591. 641. 642. 643. 790. 837. 875. 876. 877. 878.
— *der Parabel* 241. 297. 304—305. 323—324. 379.
Quadratwurzel 28—30. 94—96. 112. 182. 223. 236. 302—303. 316—318. 371—374. 393. 397. 406. 436—438. 453. 475. 480. 492. 494—495. 502. 511—513. 514. 606. 616. 621. 638. 640. 647. 648. 684. 733. 755. 764. 766—767. 777. 785. 801. 814—815. 913.
$\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ 223. 398. 400. 436. 437. 640. 873.
$\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ 377. 378. 436. 437. 640. 867. 873. 874. 875. 877.

$\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ 318. 377. 378. 397.
$\sqrt{3} = \frac{26}{15}$ 318. 373. 393. 397. 398. 399. 548. 549. 586. 643. 728. 799. 866.
$\sqrt{3} = \frac{12}{7}$ 223. 867.
Quadratzahl 26. 27. 45. 160. 161. 162. 163. 164. 167. 168. 169. 170. 202. 236. 267. 312. 313—314. 432. 435. 460. 470. 479—480. 481. 485. 502. 529. 559. 619. 756. 840.
—, *welche um eine gegebene Zahl vergrößert oder verkleinert wieder Quadratzahl ist* 482. 483. 752—755.
Quadruvium 578. 823.
Quatuordecimani 572.
Quimas 893 flgg.
Quinarsystem 8. 9. 10. 32.
Quincke (Georg) 15.
Quintilian 173. 357. 527. 549—550. 566.
Quipu 88.

R.

Ra-ā-us 58.
Raab 198.
Racechin 877.
Rad des Aristoteles 255—256.
Radix 724. 804.
Radulf von Laon 886. 890—897. 898. 899. 900 902.
— *von Lüttich* 872. 873. 874. 875. 876. 890.
Ra-en-mat 58.
Rätselfragen 833. 834. 839.
Raimund, Stiftslehrer von Aurillac 847.
— *Erzbischof von Toledo* 796.
Rama Krishwa 601. 616.
Raml = Punktierkunst 45.
Ramses II. 92. 102. 108.
Randbemerkungen dringen in einen Text ein 276. 368. 862.
Ranganâtha 601.
Rask 603.
Ratgar 841.
Rationale Gleichungswurzeln allein gestattet 473—475.
— *rechtwinklige Dreiecke* 95—96. 184. 185—186. 187. 224. 270. 389. 390. 481. 484. 485. 555. 589. 628. 638. 645. 653. 752—755.
Rationalmachen von Brüchen 626—627. 814.
Raumkoordinaten 422.
Raumschnitt des Apollonius 343. 345. 364. 380.
Rawlinson 26. 27.
Râzi 695. 908.
Rechenbrett s. *Abacus*.
Rechenbuch von Achmim 59. 67. 504—505.
Rechenbuch von Bakhstâlî 598. 613—615. 618. 620. 621.
Rechenknecht 291.531.
Rechnen mit Marken 6. 41—42. 88—89. 510. 825.
Rechnende Geometrie = Feldmeßwissenschaft 381.
Rechnung auf der Linie 563.
Rechteck 49. 92—93.
Rechter Winkel 47. 49. 51. 94. 105—106. 138. 142. 161. 163. 190. 192. 371. 384. 385. 636. 637.
Redewendungen, mathematische, der Ägypter 65. 67. 72. 75. 98—100. 276. 394, *der Araber* 723. 815. 816, *der Griechen* 138. 158. 159. 190. 275. 393. 394. 470. 487. 555, *der Inder* 611. 614. 616. 617. 620. 621. 622, *der Römer* 531. 555.
Regeldetri 505. 514. 618. 633. 726. 763. 785. 815.
Regimbertus von Reichenau 577.
Regimbold von Köln 872. 873. 874. 875. 876. 877. 889.
Regiomontanus 467. 468. 780.
Regula elchatayn 732.
— *Nicomachi* 433. 528—529. 586. 881. 906. 910.
— *quatuor quantitatum* 795.
— *sermonis* 732.
— *sex quantitatum* 413. 420. 736. 779. 795.
Reichenau 577. 580. 836. 842. 888.
Reifferscheid 564. 879.
Reihen 159.
Reihe, arithmetische 25. 78—80. 113. 159. 167. 187. 313. 314. 361. 390. 460. 480. 507. 558. 559. 615. 619. 625.
—, *geometrische* 25. 80—81. 159. 167. 268. 305. 507. 619. 881.
— *der Biquadratzahlen* 781.
— *der Kubikzahlen* 432. 559. 619. 768. 769. 781. 784. 808. 865.
— *der Quadratzahlen* 313—314. 558. 619. 768. 784. 808.
Reimer 211. 212. 467.
Reinaud 457. 595. 597. 602. 603. 714. 715.
Reisen griechischer Philosophen: des Anaxagoras 189, *des Demokritos* 191, *des Eudoxus* 238, *des Oinopides* 190, *des Platon* 215, *des Pythagoras* 148—152. 176, 644, *des Thales* 136.
Reisner (G.) 11.
Rektifikation des Kreises 48. 247. 300—303. 354.
Religiöse Gegensätze bei den Arabern 765. 775. 788.
Remigius von Auxerre 842. 843. 871.
— *von Trier* 854. 870.
Remusat (Abel) 672.
Repräsentation 561.
Res 802. 804.
Restauratio 719. 803.

ῥητόν 182. 269. 764.
Reuter (Hermann) 903.
Revillout (Eugène) 60. 94. 96. 101.
Rhabda s. *Nikolaus Rhabda.*
Rheims 843. 848. 849. 853. 855. 856. 858. 867. 868. 869. 870. 871.
Rhind 57.
Rhodos 362. 383. 409. 422. 426.
Ricci 667.
Richardson 45.
Richerus 847. 848. 849. 850. 867. 868.
Richter (Adolf) 128.
— *(August)* 344.
Riese (Alexander) 523.
Rinderproblem des Archimed 312—313. 462.
ῥίζη 724.
Robert von Lincoln 889.
Rodet (Léon) 68. 73. 76. 81. 472. 476. 598. 605. 606. 616—625. 628. 630. 645. 646. 648. 657. 677. 718. 822. 906.
Roediger 514.
Römer 11. 12. 15. 45. 366. 409. 410. 425. 426. 457. 504. 521—592. 596. 619. 636. 671. 676. 728. 786. 837. 838. 849. 850. 853. 854. 856. 868. 869. 872. 877. 900. 902. 909. 910.
Römische Reichsvermessung 366. 540—541.
Röth 146. 148. 185.
Rohde (Erwin) 51. 261.
Romaka Pura 600.
Romulus 526. 539.
Rose (Valentin) 544.
Rosen 716 und häufiger. 727. 802.
Rossi (de) 522.
— *(Giovanni)* 537.
Rothlauf 215. 216. 217. 218. 219. 222. 236.
Rougé (de) 89.
Rudio (Ferdinand) 202. 205. 206.
Rudolf von Brügge 909.
Rudorff 532.
Rudpert 888.
Rûpa 614. 620. 684. 723.
Ruska (Julius) 737.

S.

Saba 464. 696.
Sachau (Eduard) 757.
Sacy (Sylvestre de) 707. 709.
Safech 104.
Sahib al Schorta 798.
Saʿîd 804.
Salaminische Tafel 133—134. 319. 440.
Salemer Algorithmus 910—911.
σαλίνον 299.
Sallier 89.
Salmân 702.
Salvianus Julianus 562.
Sâma çôdhanam = ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια 622.
Samarkand 781.
Sammelwörter verschieden nach der Art des Gezählten 5.
Σαμψ μπουχαρης 508.
Sandbestreute Tafel 131. 134. 566. 610. 611. 712. 762. 882. 885.
Sandrechnung des Archimed 321—323. 612. 758.
Sanskrit 595. 596. 605.
Saph 897.
Sar = 3600 (sumerisch) 36. 42.
Sargon I. 31. 38. 45.
Saryukin 31.
Sasuchet 57.
Sasyches 57.
Satz von den sechs Größen 161. 266. 412. 420—421. 736. 779. 795.
Sätze des Menelaus 413—414. 420—421.
Savilius 276. 277. 509.
Sayce 30. 31. 38. 45. 46.
Schachbrettartige Multiplikation s. *Netzmultiplikation.*
Schachspiel 635. 758.
Schack-Schackenburg 94. 95.
Schaewen (Paul von) 480.
Schâhruch 781.
Schai 723.
Schall 667.
Schaltjahr 78. 328—329. 409. 540. 573. 775.
Schams Addin al Mauṣilî 710.
Schamsaldîn von Bukhara 508.
— *von Samarkand* 508.
Schams ed Daula 756.
Schang kao 677. 679. 680.
Schapira (Herrmann) 24.
Scharaf ed Daula 742.
Schasu 57.
Schatten = Tangente 738. 748. 789.
Schattenmessungen zu Höhebestimmungen 138. 139. 144. 294. 390. 557. 648. 785. 862.
Schattenzeiger 50. 145. 535. 536. 676. 677. 738. 748 858.
Schaubach 188.
Scheffel als Feldmaß 92.
Scheil (F. V.) 28.
Scheitellinie 93. 394. 647.
Scheitelwinkel 138.
Schenkel (Daniel) 34.
Schenkl (H.) 203.
Schepss 576. 577.
Schiaparelli 238. 242.
Schiefe Ebene 449.
Schlagintweit 39.
Schlegel 669.
Schmidt (J.) 535.
— *(Max C. P.)* 184. 244.
— *(M.)* 346.
— *(W.)* 146. 155. 363. 364. 365. 366. 412. 537. 683.
Schnitt des rechtwinkligen Kegels 244. 334.
— *des spitzwinkligen Kegels* 244. 334.

Schnitt des stumpfwinkligen Kegels 244. 334.
Schnitzler 730.
Schöll-Pinder 504. 513.
Schöne (H.) 363. 364. 537.
σχοινίον 385.
σχοῖνος 385.
Schraube 326.
Schraubenfläche 451.
Schraubenlinie 411. 450. 451.
Schreibfehler im Codex Arcerianus 556. 860.
Schrift, Erfindung derselben 13.
Schröder (L. von) 636. 644.
Schrumpf 6.
Schulz (O.) 463. 466. 478. 482.
Schun tchi 667.
Schwerpunkt 323. 324. 449. 450.
Schwimmende Körper des Archimed 325.
Sciotherum 535.
Scriverius 552.
Scyllacium 568.
Scythianus 457.
Sechseck 47—48. 50. 109. 376. 393. 548. 740.
Sechseckszahl falsch berechnet 557—558. 586. 864—865.
Sechs Gleichungsfälle 719. 769.
Sechsersystem 10. 32.
Sechzig als unbestimmte Vielheit 34—35.
Sechzigstel 31. 420.
Secundus von Athen 834.
Sédillot 781. 789. 790.
Sehet! 656. 744. 878.
Sehnentafel 362. 367. 399. 412. 416. 419—420. 799.
Seidel 327.
Seilspannung 46. 48. 104—106. 113. 384—385. 637. 680.
Sekunden 416.
Seldschûk 774.
Seldschuken 741.
σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς 339.
Semes = *Schlägel* (ägyptisch) 104.
Semiten 20. 56.
Semuncia 530.
Senkereh, Tafeln von 25—30. 36. 755.
Sepher Yezirah 43. 603.
Seqem = *Vollendung* (ägyptisch) 71—73.
Seqt = *Ähnlichmachung* (ägyptisch) 99. 139. 145. 425.
Serenus von Antinoeia 489—491.
Sergius 464. 696.
Servatus Lupus 842.
Sesostris 92. 102.
Seti I. 108. 214. 384.
Sexagesimalbrüche 23. 31. 32. 366. 416. 492—495. 510. 512. 526. 613. 634. 718. 764. 801. 885. 909. 913.
Sexagesimalsystem 10. 24. 27. 40. 41. 42. 43. 361. 670. 677. 681. 757. 762.
Sexcenti = *unendlich viele* 532.
Sextus Empiricus 146.
Sextus Julius Africanus 438—440. 863.
Shadvidham = *6 Rechnungsverfahren* 616.
Sicel 823. 901.
Sicilien 119. 128. 147.
Siciliquus 530.
Sickel 831.
Siclus 823.
Siddhânta 599. 602. 699.
Siddhantaçiromani 598.
Sieb des Eratosthenes 332—333. 507.
Sieben als unbestimmte Vielheit 34.
— *freie Künste* s. *artes liberales.*
Siebeneck im Kreise 307. 376—377. 745.
Siebenerprobe 461. 611. 808.
Sigebert 876.
Signal 382.
Silius Italicus 295.
Simon (Max) 60. 94. 96.
Simplicius 202. 204. 208. 209. 409. 422. 500. 502. 540. 736.
Sinân ibn Alfath 730.
— *ibn Tâbit* 749.
Sind ibn ʿAlî 730.
Sindhind 602. 697. 698. 699. 712.
Sinus 423. 658. 737. 789. 796. 907.
— *von 225′* 659.
Sinussatz der ebenen Trigonometrie 779.
— *der sphärischen Trigonometrie* 748.
Sinustafeln 423. 659. 746—747. 789.
Sinus versus 658.
Sipos 892 flgg.
Sittl 824.
Skandinaven 10.
Smith 47.
Smot = *Ausrechnung* (ägyptisch) 68.
Smyrna 119.
Sodscha ibn Aslam 731.
Sokrates 202. 214. 215. 216. 217. 218. 219.
Solon 120. 134. 151. 214.
Sopater 458.
Sophienkirche in Konstantinopel 501.
Sophisten 193. 194—195. 203. 218. 256.
Soranzo 320.
Sosigenes 540.
Sosikrates 136.
Soss = *60* (sumerisch) 36. 42.
Spanische Omaijaden 707. 792—793.
Species 473.
Spengel (L.) 118. 204.
Speusippus 216. 249. 487.
Sphärik 156. 293. 411. 412. 447. 745.
Sphärische Spirale 451.
— *Trigonometrie* 412—414. 420—421. 658. 684. 738. 780. 789. 794—796.
Spirale (Maschine) 326.
Spirallinien 195. 297. 306—307. 313. 353. 446. 451.
Spiren 196. 242. 356. 380. 412.
Spirische Schnitte 242—243. 356.
Spitzenfigur 786.
Sprenger 738. 739.
S. Q. 555.

St. Emmeran in Regensburg 836.
St. Gallen 851. 886.
St. Martin bei Tours 833. 840. 841. 842. 843.
St. Peter in Salzburg 859. 865. 886.
Stadtmüller (Hugo) 462.
Stammbrüche 61. 62. 83. 84. 85. 125. 128. 166. 319. 395. 504—505. 526. 645. 718. 755. 764. 887.
—, *algebraische* 470. 768.
Stein (Lorenz von) 834.
Steindorff (G.) 56. 57. 89. 109.
Steinhart (Karl) 195.
Steinschneider (Moritz) 45. 703. 704. 705. 731. 735. 738. 748. 761. 793. 794. 797. 805. 907. 909.
Stella 537.
Stellungswert der Zahlzeichen 27. 30—31. 126. 127. 128. 606. 607. 608. 609. 616. 710. 785.
Stereographische Projektion 423.
Stereometrie 98—101. 155. 225. 229. 241. 271. 308. 350. 358. 390. 391. 401—403. 535. 565. 645. 646. 649. 728. 786. 799.
Stern (Ludwig) 58.
Stern = Winkelkreuz 381. 382. 537. 676.
Sternvieleck 177—178. 588—589. 786.
Stesichorus 146. 147.
Stetigkeitsbegriff 200. 203—204.
Stobaeus 35. 153. 159.
Stoeber 552.
Stoiker 198. 365.
στοιχεῖα 201. 261.
— *κωνικά* 303.
Stoy 87. 129. 130. 134. 514. 829.
Strabon 32. 35. 103. 150. 151. 215. 238. 411.
Studemund 206. 565.
Sturm (Ambros) 220. 231. 844.
Su schu kieou tschang 674.
Subtraktion zur Bildung von Zahlwörtern 11. 525.
Subtraktionsverfahren 610. 671. 716. 811. 816.
Suchet 57.
Suetonius 527.
Suidas 36. 41. 50. 146. 237. 327. 441. 442. 491. 495. 496.
Sumerier 19. 20. 24. 30. 32.
Sun tse 685.
Sung-Dynastie 666. 674. 678. 680.
Sunya 614. 712.
Sûrya 599. 712.
Sûryadâsa 600.
Sûrya Siddhânta 599—600. 609. 636. 657. 658.
Susemihl 235. 238. 258.
Sutek = Leiter (ägyptisch) 80.
Suter (Heinrich) 363. 660. 693. 697. 701. 703. 705. 710. 713. 718. 730. 731. 733. 736. 738. 739. 742. 748. 749. 750. 752. 753. 759. 761—763. 774. 775. 778—781. 784. 789. 790. 792—794. 805. 810. 842. 856. 912. 913.
Swán fă tóng tsāng 670.
Swán pân 669. 670. 671. 675.
Sylvester II. = Gerbert 858.
Symmachus 573. 574. 578.
Symbolische Positionsarithmetik 607—608.
συναγωγή 444.
Synesius 495.
Synkellos 36.
Synode von Mousson 858.
Synthesis 220—221. 230.
Syrakus 215. 295. 296. 308.
Syrer 124—125.
Syrianus 497.

T.

Tâbi 753.
Ṯâbit ibn Kurrah 167. 703—704. 734—736. 741. 749. 750. 787. 908.
Tacitus 523.
Tadmor 123.
Taë 684—685.
Tageseinteilung 39.
Takarrur 806. 807.
Talchîṣ = Auszug (arabisch) 806.
Talent 132. 133.
Talmud 48. 173.
Talus 163. 352.
Tamerlan 780. 821.
Tangente (trigonometrische) 738. 748. 789.
Tangentenproblem 265. 307. 749.
Tannery (Paul) 155. 158. 165. 198. 200. 202. 222. 249. 257. 293. 299. 319. 346. 372. 411. 414. 458. 461. 463. 464. 466 und häufiger. 490. 496. 504. 507. 510. 514. 552. 555. 559. 581. 857. 862. 872 und häufiger. 873. 875. 876. 912.
Taò 665.
Tara 812.
Taraha 812.
Tarh 812.
Târiḳ 706.
Tarquinius Priscus 526.
Ta schi 666.
Tatto 842.
Ta yen 685. 689.
Taylor 524.
Tâzy 666.
Tchao kun hiang 678.
Tcheōu-Dynastie 664. 678. 682.
Tcheou = Kreis (chinesisch) 677. 679.
Tcheōu kong 664. 670. 677. 678. 681.
— *lỳ* 664. 665. 666. 676. 677. 678.
Tcheou pei 677—679. 681. 682.
Tchin khang tching 666.
Tchin tong 666.
Tchintsoe 678.
Tchu hi 666.
Teilerfremde Zahlen 267. 430. 628. 629.
Teilung der Figuren Euklids 287—288. 380.
τέλειοι 168.

Temenias 893 flgg.
Temnonides 239.
Templum 532. 533. 534. 540.
Tennulius 158 und häufiger. 459.
Tepro = *Mund* (ägyptisch) 93.
Terentianus Maurus 542.
Terminus 361. 764.
Terquem (Olry) 333.
Tessareskoidekasiten 572.
Teta 56.
τεταγμένως κατηγμέναι 331. 554.
τετραγωνίζουσα 195.
τετράγωνος 207.
Tetraden des Apollonius 346—347. 690. 766.
Tetraktys 42.
Teuffel 543.
Thales von Milet 136—147. 150. 171. 189. 390. 557.
Thang-Dynastie 678. 685.
Theaetet von Athen 194. 235. 236—237. 245. 248. 260. 275. 276. 348.
Themistios 137. 141. 203.
Then wâng 664.
Theodolit 382. 750. 862.
Theodor, Bischof von Canterbury 827.
— *Tschabuchen von Klazomenae* 514.
Theodorich, König der Ostgoten 568. 569. 573. 574. 575.
— *von Chartres* 898.
Theodorus von Kyrene 182. 201. 213. 215. 226.
— *Meliteniota* 415. 509.
— *von Samos* 163.
Theodosius I. 441. 491. 495. 821.
— *von Tripolis* 293. 411. 412. 447. 448. 704. 908. 911.
Theodulf von Mainz 834.
Theon von Alexandria 128. 277—278. 318. 357. 362. 416. 421. 433. 441. 442. 463. 464. 487. 491—495. 499. 512. 582. 589. 764.
— *von Smyrna* 32. 33. 118. 154. 155. 156. 159. 160. 164. 168. 169. 185. 232. 233. 257. 317. 331. 428. 433—438. 454. 456. 460. 475. 491. 587. 640. 716. 755. 877. 896.
Theophanes 709.
Theophania 854.
Theophrastus von Lesbos 118. 193. 257. 259.
Theorem 275.
Thevenot 369. 370.
Theydius von Magnesia 247. 248.
Thibaut 39. 600. 636—641. 643.
Thietmar, Bischof von Merseburg 858.
Thorbecke (August) 568. 569.
— *(Heinrich)* 693.
Thot 77. 86.
Thrasyllus von Mende 428. 433.
Thukydides 172. 214.
Thurot 325.
Thymaridas 158—159. 286. 455. 462. 470. 624.
θυρέος = *Schild* (als Namen der Ellipse) 292.
Tiberius 261. 428. 433. 590.
Tibet 607.
Tille (Armin) 714.
Tim = *Seil* (sumerisch) 46. 645.
Timaeus von Lokri 154. 174. 179. 215.
Timûr = *Tamerlan* 780.
Tittel (Karl) 363. 406.
Titulus 881.
Titurel 714.
Titus 551.
Tma = *10000* (altslavisch) 24.
τμήματα 416.
Toġrulbeg 774.
Toledo 796.
τόπος 229.
Torelli 296. 346.
Tosorthros 56.
Trajan 457. 461. 542. 551. 552. 553. 561. 564. 596.
Treutlein (Peter) 885. 902.
τριχοτόμια γωνίας = *Dreiteilung des Winkels* 197.
Trigonometrie 99. 362. 399. 416—421. 602. 657—660. 684. 738. 746—748. 779—780. 794—796.
Trinitätsbegriff 430.
Trisektion = *Dreiteilung des Winkels* 197.
τρισπάστος 326.
Trivium 578. 823.
Trugschlüsse Euklids 278.
Tsâng kiĕ 664.
Tschang tsang 682.
Tschu schi kih 687.
Tsin-Dynastie 678.
Tsin kiu tschau 674. 682. 684. 687.
Tsīn schè huâng tý, der Bücherverbrenner 665. 678.
Tsing-Dynastie 667.
Tsu tschung tsche 683.
Türken 12.
Tu fang schi 676.
Tu kueï 676.
Tulyau 622.
Tunnu = *Erhebung* (ägyptisch) 80.
Turamaya 599.
Turanier 19. 20.
Tzetzes 216. 295. 296. 326.
Tziphra 511.

U.

Uchatebt = *Suchen der Fußsohle* (ägyptisch) 99. 205.
Ulpian 561.
Ulûġ Beg 781. 788.
— *Begs Tafelwerk* 781.
Umbra 748.
Umkehrungsrechnung 617. 732.
Unbestimmte Vielheit 33—35.

Undezimalsystem 11.
Unendlich groß 23—24. 199. 204. 252. 321. 322. 532. 617.
— *klein* 199. 204. 252. 321.
Unger 436.
Universität zu Athen 496. 497. 500. 503.
— *von Paris* 843.
Unmöglichkeit rationaler Lösung von $x^3 + y^3 = z^3$ 752. 785.
Unreine quadratische Gleichungen in 3 Fällen behandelt 285. 473. 625. 719. 723. 803.
Unze 530. 830. 884. 896.
Ursprung einzelner Wissenszweige zu ermitteln gesucht 117.
U schi 688.
Usener 202. 442. 508. 568. 573. 574. 577. 582.
Usertesen II. 59. 74.
Useχ 99.
Utkramajiâ 657. 658.
Überragung 389.
Überschießende Zahlen 168. 430. 507. 824.
Übersetzungen aus dem Arabischen 797.
Übersichten: Babylonische Mathematik 45. 50—51, *Ägyptische Mathematik* 112—113, *Entwicklung der griechischen Mathematik* 117—119, *Thales* 147, *Pythagoräische Mathematik* 186—188, *Mathematik der Akademie* 250—251, *Mathematik der Epigonenzeit* 363. 425—426, *Heron* 406, *Pappus und Diophant* 487—488, *Römische Blütezeit* 560—561, *Verhältnis der griechischen zur indischen Mathematik* 601—602, *Ostarabische Mathematik* 786—787, *Westarabische Mathematik* 816—817, *Unterscheidungsmerkmale zwischen Abacisten und Algorithmikern* 909—910, *Zustand der Wissenschaft um 1200* 911.

V.

Vacca (Giovanni) 680.
Vadana 647.
Vaiçyas 595.
Vajrâbhyasa 611.
Valerius Maximus 45. 261. 295.
Valkenarius 212.
Van Pesch s. *Pesch.*
Varâhamihira 600.
Varga = Reihe, Quadrat (indisch) 616. 723.
Variation 742.
Varro 526. 532. 542—543. 549. 566. 570.
Vasengemälde 41. 132. 178.
Venturi 363. 382.
Veränderliche 281. 282. 284. 289. 290.
Verbiest 667. 682.
Verdoppeln 85. 319. 717. 761. 764.
Vergilius 565.
Verglichen abgenommene Maße 28. 111. 396. 397. 404. 489. 586. 591. 646. 728. 837.
Verhältnisschnitt des Apollonius 344. 448. 452.
Vermeidung von Zahlzeichen 708. 743. 763. 765.
Versfüße 257. 619.
Vertex 555.
Vertranius Maurus 543.
Vespasian 551.
Vestaheiligtum kein Templum 533.
Vettius Valens 348. 425.
Via quintana 534.
Victorinus 531. 832.
Victorius von Aquitanien 531. 566. 572. 823. 831. 832. 845. 883. 884.
Vielecke, einbeschriebene 202. 203. 273. 358. 376—378. 387. 389. 391. 446. 449.
—, *umschriebene* 203. 358.
— *mit einspringenden Winkeln* 357.
Vieleckszahlen s. *Polygonalzahlen.*
Vielflächner, halbregelmäßige 308.
—, *regelmäßige* 153. 174—176. 225. 237. 245. 260. 274. 307. 344. 358. 359. 380. 446. 447. 745.
Viereck dem Dreieck vorausgehend 111. 389. 391. 395. 506. 646. 680.
Vierecke von 5 Arten 651. 727.
Vierecksformel des Brahmagupta 646. 649—652.
Vierzig als unbestimmte Vielheit 34. 43.
Vigesimalsystem 8. 9. 123.
Vijaganita 598. 654.
Vincent 89. 131. 312. 363. 382. 438. 440. 506. 894.
Vipsanius s. *Agrippa.*
Virgilius von Toulouse 845.
Vishnu 619.
Vitalian 827.
Vitruvius Pollio 50. 152. 174. 180. 190. 311. 326. 330. 365. 367. 536. 543—547. 599. 601. 637. 740. 893.
— *Rufus* 552. 553. 556—560.
Vogt (Heinrich) 636.
Vokale durch Konsonanten ersetzt 802—803. 838.
Volkmann 258.
Vollkommene Zahlen 87. 167—168. 225. 268. 430. 434. 460. 507. 627. 735. 739. 784. 798. 824. 835.
Volusius Maecianus 526.
Vorbedeutungswissenschaft 38. 45. 46. 457. 634. 735. 741. 786.
Vorderasiatische Entwicklung der Arithmetik 456.
Vossius 184. 360. 463. 543.
Vyâghramuka 699.

W.

Wachsmuth 498. 502.
Waeschke 511.
Wafk 741.
Wagner 505.
Wagschalenmethode 732. 809—810.

Wahlsätze des Archimed 297. 298—300.
Wahrscheinliche Lebensdauer 561.
Walafried Strabo 842.
Walachische Bauernregel 528.
Wallis (John) 780.
Walther von Speier 851—853. 886.
Wan ly 688.
Wang myan chi 666.
— *tchao yu* 666.
Wappler 886.
Wasserwage 382. 676.
Wattenbach 832. 840. 851. 888. 906. 909.
Wazo, Bischof von Lüttich 873. 877.
Weber (Albrecht) 39. 595. 600. 609. 619. 637.
— *(Heinrich)* 465.
Wegmesser 544.
Wegschaffung des mittleren Gliedes 625.
Weigand 862.
Weil (Gustav) 693. 695. 696. 701. 704. 706. 707. 741. 765. 774. 778. 780. 794.
Weißenborn (Herrmann) 293. 576. 579. 582. 587. 590. 650. 857. 906.
Welcker (F. G.) 132.
Welid I. 701. 706. 709.
Welschen 10.
Wenrich 354. 697. 702. 703. 704.
Werner 825. 828. 831. 834. 835. 841. 843. 847. 853. 855. 858. 859. 873. 889.
— *von Straßburg* 889.
Wertheim (G.) 372. 466 und häufiger.
Westaraber 604. 706—707. 711. 792—817. 822.
Westermann 169. 502.
Wezîr = *Träger* (arabisch) 696.
Whitney 39. 599.
Wiedemann (Eilhard) 704.
Wilhelm von Malmesbury 848—849. 851.
— *von Straßburg* 889.
Wilkins 45.
Wilkinson 90. 105. 108.
Wilson 457.
Windisch 595.
Winkel, dessen Name in verschiedenen Sprachen 15. 16.
—, *ähnlicher* 138. 140.
—, *äußerer und innerer* 861. 874—875. 876. 878.
—, *einspringender* 46.
—, *hornförmiger* 192. 264.
Winkelsumme des Dreiecks 141—144. 171—172. 252. 262. 506. 873. 876.
Winterberg 876.
Wisowa 509.
Wissenschaftliche Mode s. *Mode in der Wissenschaft.*
Woche 34. 38.
Woepcke 167. 209. 287. 348. 363. 446. 457. 604. 608. 613. 657. 698. 701. 709—712. 730. 733. 736. 737. 742—746. 749—753. 756. 761. 762. 775. 781. 789. 809. 810. 811. 816. 891. 893. 894. 896.
Woisin 128. 134.
Wolf (Christian von) 509.
— *(Rudolf)* 137. 321. 360. 361. 362. 407. 409. 421. 447. 742. 775.
Wolverad 888.
Würfel, etruskische 524.
Würfelverdoppelung 202. 211—213. 226—234. 293. 309. 340. 449. 453. 510. 638.
— *des Archytas von Tarent* 228—229. 330, *des Diokles* 354, *des Eratosthenes* 330—331. 353. 445, *des Eudoxus* 231. 243. 330, *des Heron* 369—370. 385. 445, *des Hippokrates von Chios* 212—213, *des Menaechmus* 229—231. 330, *des Nikomedes* 351—352. 445, *des Pappus* 445, *des Platon* 227. 353.
Wüstenfeld 697. 699. 703. 704. 713. 715. 722. 730. 739. 761. 789. 793. 907.
Wurm 181. 282. 779.
Wurzelzeichen 814—815.
Wyttenbach 175.

X.

Xenokrates 118. 216. 249—250. 256. 320.
Xenophon 216. 242.
Xerxes 35.
Xylander 510.

Y.

Ỳ hȳ wỳ 665.
Yavana 600.
— *Pura* 600.
Yavaneçvarâcârya 600. 638.
Yâvattâvat 620. 684. 723.
Yaxartes 19.
Yih hing 685.
York 831. 832—833. 840.
ὕπαρξις 471.
ὑπεναντία 239.
ὑπερτέλειοι 168.
ὑποτύπωσις 146.
Yrinius = *Heron* 705.
Yron 366.
Yu 678. 679.
Yuen 684—685.
Yuën-Dynastie 666.
Yukatan 9.
Yùn lo tá tièn 669.
Yung fang 678.

Z.

Zählen definiert 4.
Zahlenbegriff der Griechen 170. 187—188. 474—475. 628.
Zahlenkampf 580. 852. 886.
Zahlensymbolik 44. 157. 167. 433. 459. 567. 569. 674. 675. 680. 835. 840. 845. 895—896.
Zahlensysteme 7—11. 22. 32. 460. 675.

Zahlentheoretische Aufgaben in geometrischer Einkleidung 391. 454. 484. 485. 513. 631. 724.
— s. *Rationale rechtwinklige Dreiecke.*
Zahlwörter 4—13. 21. 82. 120. 123. 525. 584. 604. 607. 608. 612. 672. 673. 674. 708. 739. 766. 824. 892—897. 898. 900.
Zahlzeichen 12. 14. 21—22. 44. 82—85. 120—129. 191. 511. 522—525. 528. 530. 584. 592. 602. 603. 604. 606. 607. 672. 674. 709. 710. 711—712.
Zaid ibn Rifâʿa 738. 739.
Zangemeister 524. 529.
Zeichnungen mit geometrischen Anklängen 46. 47. 108. 109. 401. 682.
Zeising 179.
Zeller (Eduard) 51. 136. 148. 149. 153. 157. 159. 160. 167. 174. 176. 188. 191. 194. 198. 251. 456. 458. 459. 496. 497.
Zenis 893 flgg.
Zenodorus 356—358. 363. 446—447. 550. 706. 740.
Zenodotus 356.
—, *Bibliotheksvorsteher in Alexandria* 329.
Zenon von Elea 198—200. 254. 409. 410.
— *von Sidon* 194.
Zerlegung von Flächen durch Hilfslinien 97. 110. 383. 389. 395. 646.
Zerstäubung = *Kuṭṭaka.*
Zeuthen 185. 285. 291. 340. 345. 423. 636. 675.
Zeuxippus 297. 320.
Zimmern (Heinrich) 37.
Zins 561. 619.
Zirkel (geometrisches Hilfsmittel) 92. 352. — 461.
— *und Lineal, Konstruktionen mittels derselben* 197. 234. 270. 316. 474.
Zirkulatur des Quadrates 641. 642.
Zöppritz 862.
Zonaras 296.
Zuckermann 173.
Zulukaffern 7.
Zusammengesetztes Verhältnis 161. 266. 413.
Zusammengesetzte Zahlen 267. 430. 580. 583. 766.
Zyklen 572.
Zyklische Anordnung 515. 516.
— *Methode* 632—633.
— *Quadratzahl* 202.
Zylinderschnitt 253. 489. 490—491.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Hierat

1
2
3
4
5
6
7
8
9

8	9	0

100 . 1000 . 10000 . 0

10204 .

Etrusk

5 *Etruskisch*

Altroemisch

10 *Etruskisch*

Altroemisch

50 *Etruskisch*

Altroemisch

100 *Etruskisch*

Altroemisch

1000 *Etruskisch*

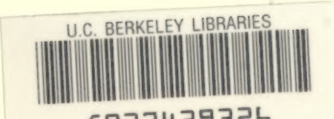
Altroemisch

eiten.








U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037439326

